

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ГИБКОГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

1. Цель работы: Экспериментально проверить справедливость формулы Эйлера для критической силы при сжатии гибкого стержня.

2. Характеристики лабораторной установки.

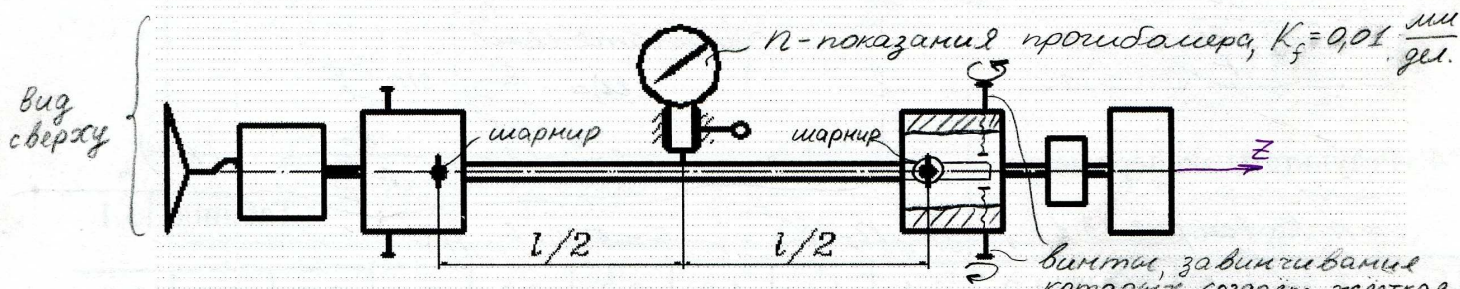
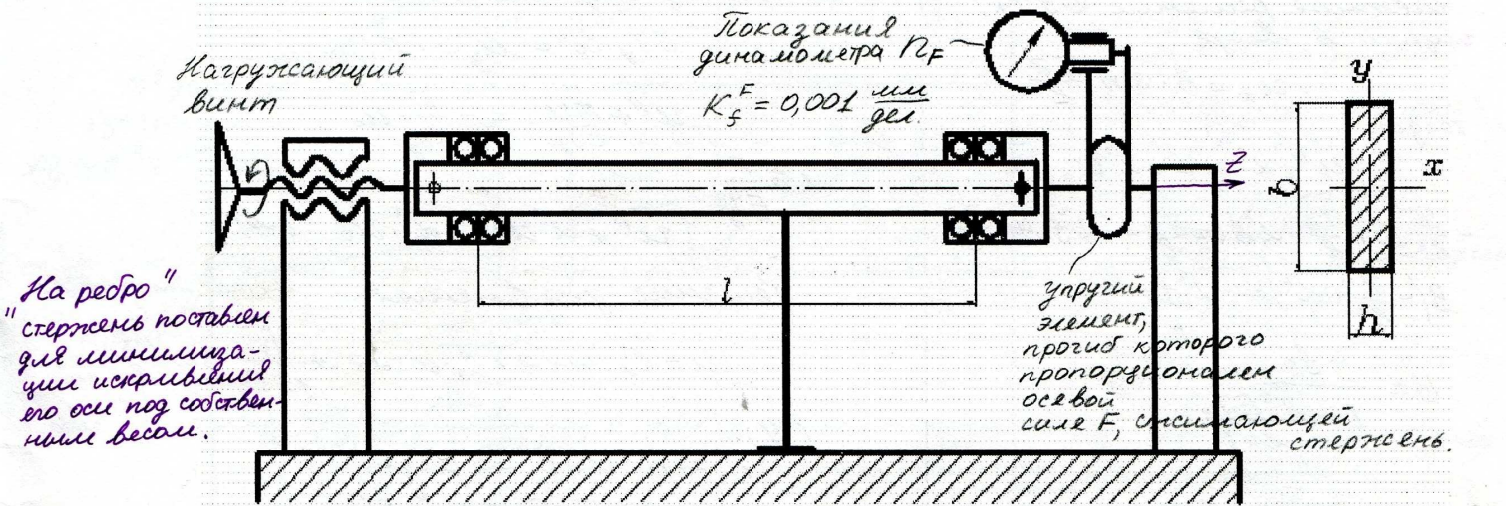


Рис. 13.1. Схема установки

Размеры стержня и геометрические характеристики его сечения:

$l = 500$ мм, $h = 2$ мм, $b = 35$ мм. $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па

Минимальный осевой момент инерции сечения

$$I_y = I_{\min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,035 \cdot 0,002^3}{12} = 2,333 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4$$

3. Теоретический расчет.

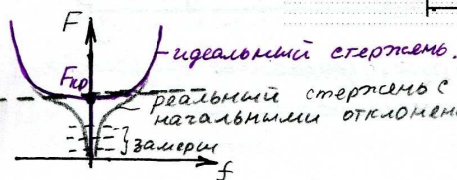
3.1. Расчетная схема идеального стержня.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E J_x}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,333 \cdot 10^{-11}}{(\mu \cdot 0,5)^2} = \frac{184,2}{\mu^2}$$

Схема 1: $\mu = 1$ $F_{кр} = \frac{184,2}{1^2} = 184,2 \text{ Н}$

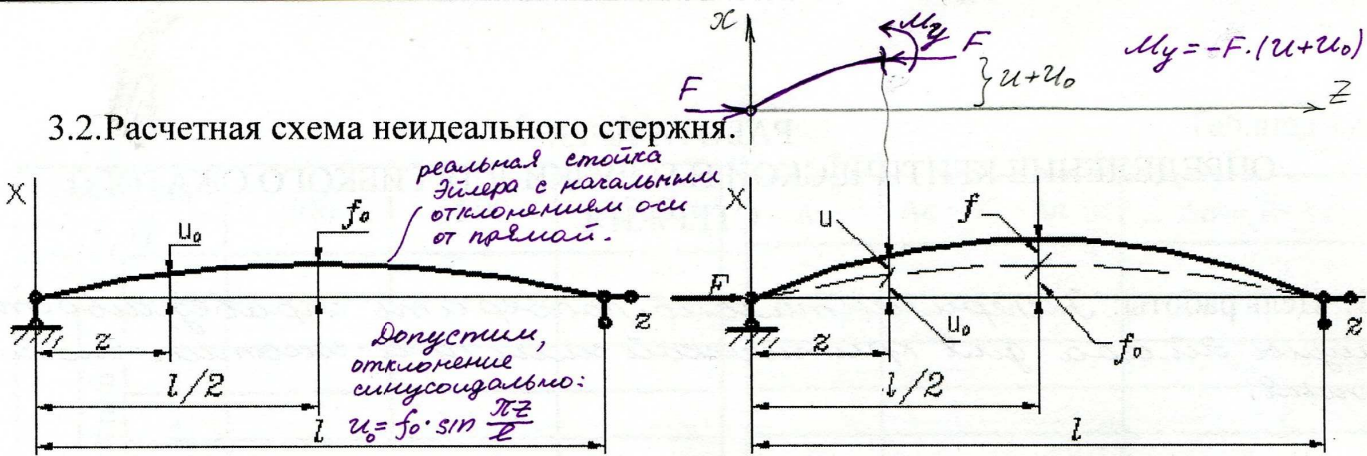
Схема 2: $\mu = 0,7$ $F_{кр} = \frac{184,2}{0,7^2} = 375,9 \text{ Н}$

Схема 3: $\mu = 0,5$ $F_{кр} = \frac{184,2}{0,5^2} = 736,8 \text{ Н}$



Метод Саусвелла позволяет по серии замеров отклонений центральной точки стержня Эйлера под действием возрастающей силы F определить значение $F_{кр}$ (замеры делаются для $F < F_{кр}$).

3.2. Расчетная схема неидеального стержня.



Частное решение ДУ (*) имеет в виде

$$u_x = B \cdot \sin \frac{\pi z}{l}$$

тогда:

$$u'' + d^2 u = -d^2 u_0$$

$$-\frac{\pi^2}{l^2} B \sin \frac{\pi z}{l} + d^2 B \sin \frac{\pi z}{l} = -d^2 f_0 \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$B \left(-\frac{\pi^2}{l^2} + d^2 \right) = -d^2 f_0$$

$$B = \frac{-f_0}{1 - \frac{\pi^2 E J_y}{l^2 F}}$$

F_3 - сила Эйлера = критической силе.

$$B = - \frac{f_0}{1 - \frac{F_3}{F}}$$

Д.У. изогнутой оси:

$$E J_y \cdot u'' = M_y = -F(u + u_0)$$

$$u'' + \frac{F}{E J_y} u = -\frac{F}{E J_y} u_0$$

$$d^2 \triangleq \frac{F}{E J_y}$$

$$u'' + d^2 u = -d^2 u_0 \quad (**)$$

Решение уравнения:

$$u = C_1 \sin d z + C_2 \cos d z - \frac{f_0}{1 - \frac{F_3}{F}} \cdot \sin \frac{\pi z}{l}$$

частное решение u_x как оно получено, см. слева.

Г.У.:

$$1) z=0: u=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$2) z=l: u=0 \Rightarrow C_1=0$$

Окончательно:

$$u(z) = - \frac{f_0}{1 - \frac{F_3}{F}} \cdot \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$f = u(l/2) = - \frac{f_0}{1 - \frac{F_3}{F}} \quad (***)$$

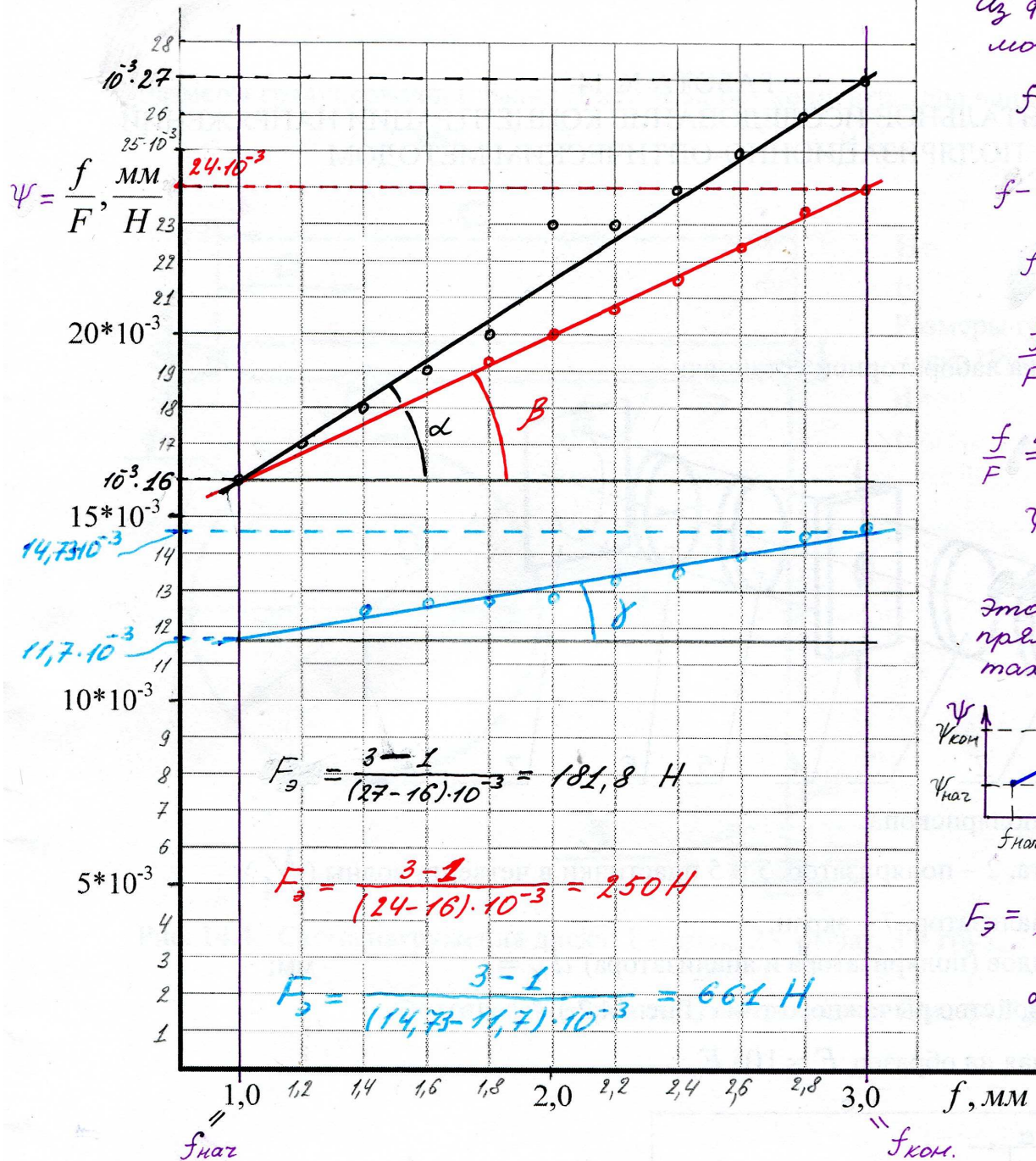
4. Результаты эксперимента.

$$f = n \cdot K_f \text{ (см. рис. 13.1)}; \quad f_F = n_F \cdot K_f^F; \quad F = 520 \cdot f_F, \text{ Н}$$

Таблица 13.1.

$f, \text{ мм}$		1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Схема №1	$f_F, \text{ мм}$	0,12	0,138	0,149	0,158	0,169	0,178	0,188	0,196	0,201	0,209	0,214
	F, Н	62,4	71,8	77,5	82,2	87,9	88,4	97,8	102	104,5	108,7	111,3
	$\psi = f / F, \text{ мм/Н}$	16	17	18	19	20	23	23	24	25	26	27
Схема №2	$f_F, \text{ мм}$	0,091	0,119	0,146	0,16	0,18	0,192	0,204	0,215	0,223	0,231	0,241
	F, Н	47,3	61,9	75,9	83,2	93,6	99,8	106	111,8	115,9	121	125,3
	$\psi = f / F, \text{ мм/Н}$	21	19,4	18,4	19,2	19,2	20	20,7	21,5	22,4	23,3	24
Схема №3	$f_F, \text{ мм}$	0,125	0,169	0,215	0,245	0,271	0,299	0,320	0,342	0,356	0,372	0,386
	F, Н	65	87,8	111,8	127,4	140,9	155,5	166,4	177,8	185,1	193,4	200,7
	$\psi = f / F, \text{ мм/Н}$	15	13,7	12,5	12,6	12,8	12,9	13,2	13,5	14	14,5	14,9

Для схем 2 и 3 такие теоретические выкладки уже не подходят. Посмотрим, велика ли будет практическая ошибка?



Из формулы (**)
можно найти F_3 :

$$f = - \frac{f_0}{1 - \frac{F_3}{F}}$$

$$f - f \frac{F_3}{F} = -f_0$$

$$f \frac{F_3}{F} = f + f_0$$

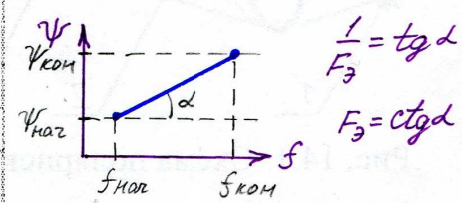
$$\frac{f}{F} = \frac{f}{F_3} + \frac{f_0}{F_3}$$

$\frac{f_0}{F_3} = \text{const}$

$$\frac{f}{F} \triangleq \psi$$

$$\psi = \frac{1}{\frac{F_3}{k}} \cdot f + \text{const}$$

Это уравнение прямой в координатах $\psi - f$:



$$F_3 = \frac{f_{\text{кон}} - f_{\text{нач}}}{\psi_{\text{кон}} - \psi_{\text{нач}}} \quad (3)$$

- Строим экспериментальные точки.
- Аппроксимируем их прямой.
- По формуле (3) подсчитываем F_3 .

5. Сопоставление результатов расчета и эксперимента.

Таблица 13.2.

Параметр	Критическая сила $F_{кр}$, Н		
	Схема 1	Схема 2	Схема 3
Теория	184,2	375,9	736,8
Эксперимент	181,8	250	661
Погрешность, %	1,3%	25,4%	11,6%

Изготовить идеально ровный стержень и сохранить эту форму в продолжение серии испытаний практически нереально. Метод Саусвелла позволяет экспериментально определить критическую силу для неидеального стержня не доводя его до потери устойчивости.

Подпись преподавателя _____

- Ограничения для метода Саусвелла:
- Начальная кривизна стержня должна лежать в плоскости наименьшей жесткости (в нашем случае это плоскость XZ , см. рис. 13.1),
 - Гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости должна быть выше критической, определяемой значением предела пропорциональности материала: $\lambda_{кр} = \sqrt{\pi^2 E / B_{из}}$.