

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ МЕТОДОМ ТЕНЗОМЕТРИИ

1. Цель работы: *Сравнение результатов теоретического расчёта и экспериментального изучения напряжённого состояния стержня изогнутого и скрученного.*
2. Характеристика лабораторной установки.

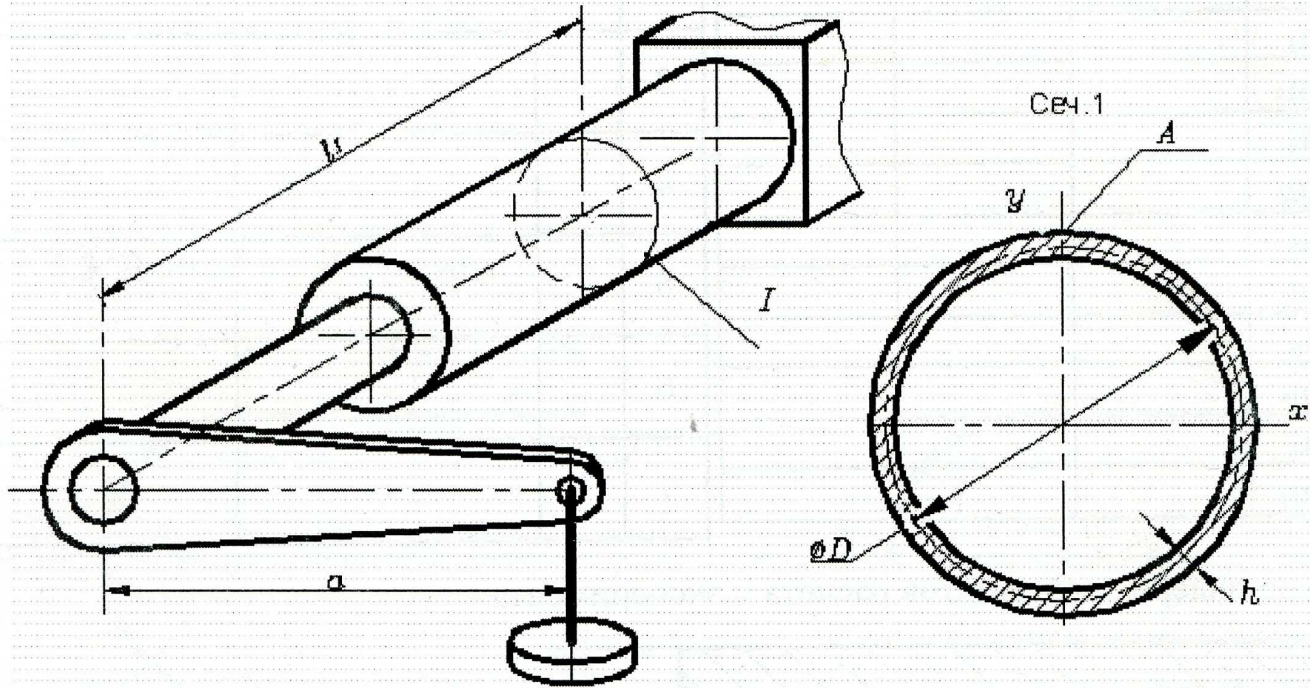


Рис. 10.1. Схема установки.

Размеры стержня и геометрические характеристики его сечения:

$D = 57$ мм, $h = 1$ мм, $I = 300$ мм, $a = 450$ мм.

Момент сопротивления сечения изгибу

$$W_X = \frac{\pi D^2 h}{4} = \frac{\pi \cdot 57^2 \cdot 1}{4} = 2550 \text{ мм}^3$$

Момент сопротивления сечения кручению

$$W_K = \frac{\pi D^2 h}{2} = \frac{\pi \cdot 57^2 \cdot 1}{2} = 5100 \text{ мм}^3$$

Материал стержня: Алюминиевый сплав Д16.

Модуль упругости: $E = 0.7 \cdot 10^5$ МПа.

Коэффициент Пуассона: $\nu = 0,33$.

$$F = 50 \text{ Н}$$

Вообще-то я сторонник расчетов в системе СИ. Но при вычислении главных напряжений удобно считать в мегапаскалях. Поэтому считаем в: Н, мм, МПа.

3. Теоретический расчет.

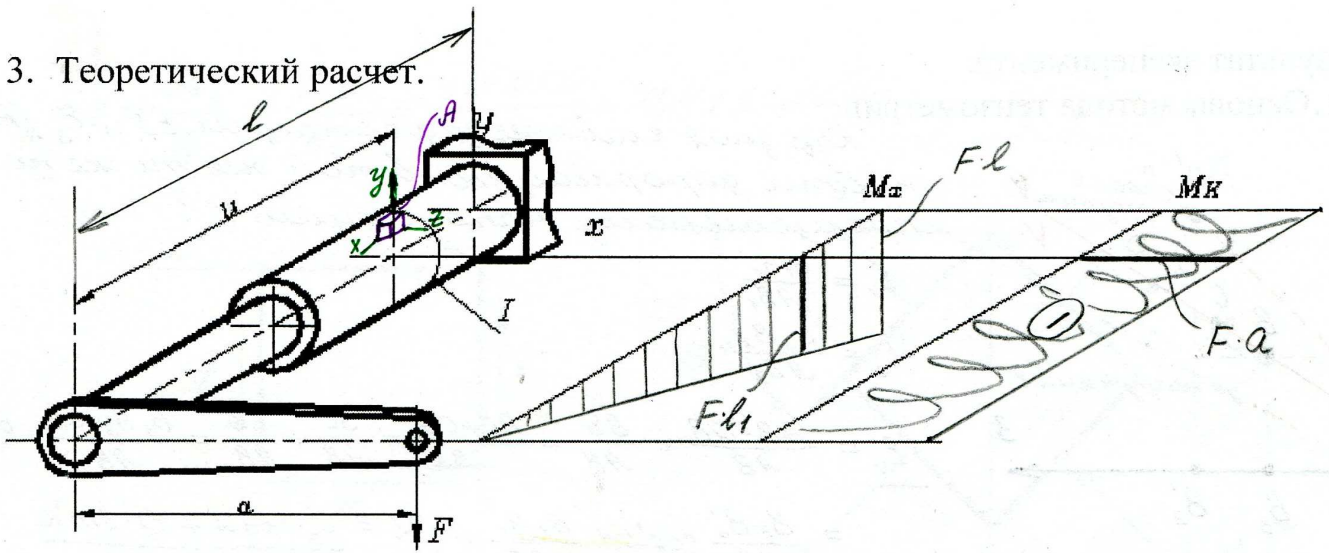
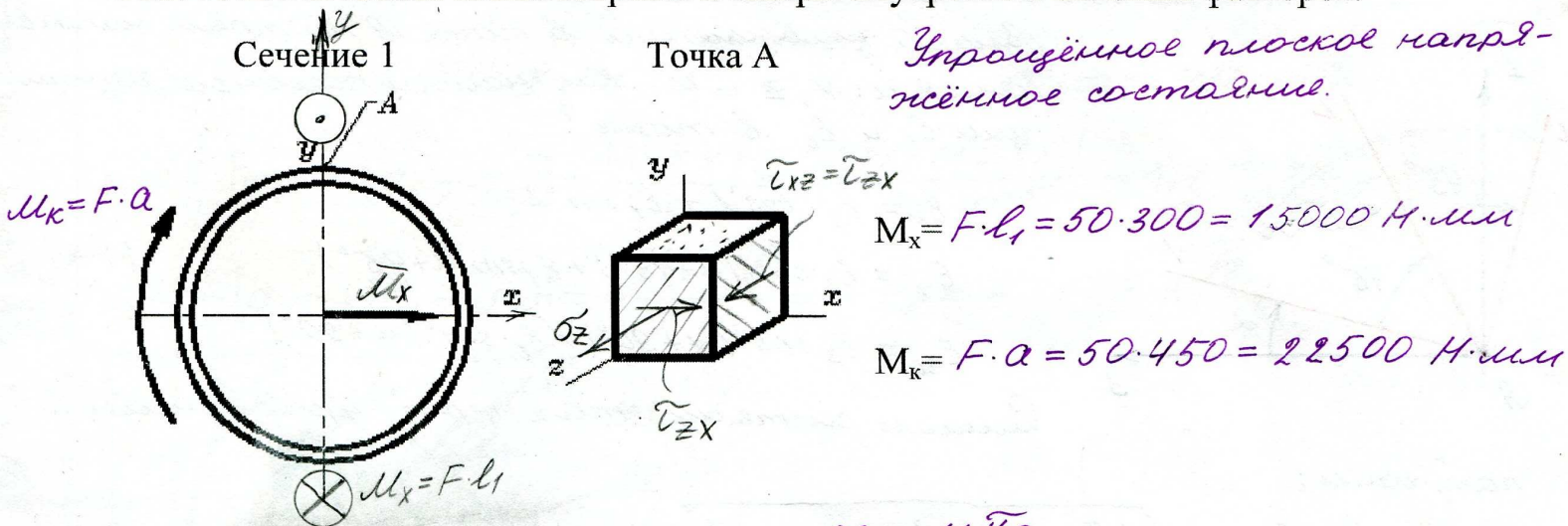


Рис. 10.2. Расчетная схема стержня и эпюры внутренних силовых факторов.



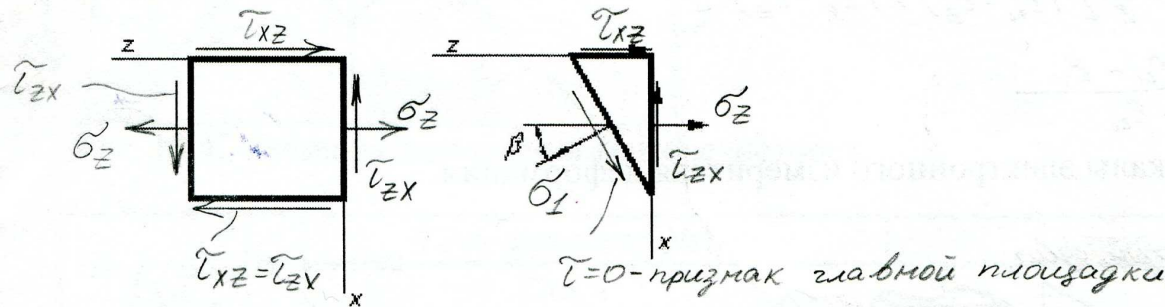
Упрощенное плоское напряженное состояние.

$$M_x = F \cdot l_1 = 50 \cdot 300 = 15000 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

$$M_k = F \cdot a = 50 \cdot 450 = 22500 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

$$\sigma_z = M_x / W_x = 15000 / 2550 = 5,882 \text{ МПа}$$

$$\tau_{zx} = M_k / W_k = 22500 / 5100 = 4,412 \text{ МПа}$$



$$\text{tg } 2\beta = \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_z} = \frac{2 \cdot 4,412}{5,882} = 1,5$$

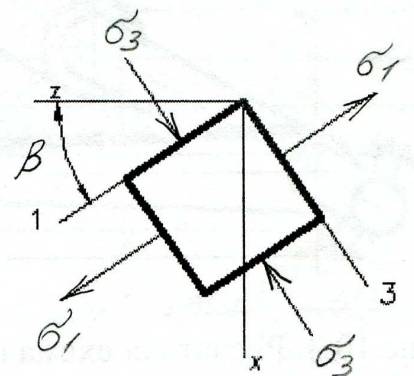
$$2\beta = 56,31^\circ \quad \beta = 28,16^\circ$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = 2,941 \pm 5,302$$

$$\sigma_1 = 8,243 \approx 8,2 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ МПа.}$$

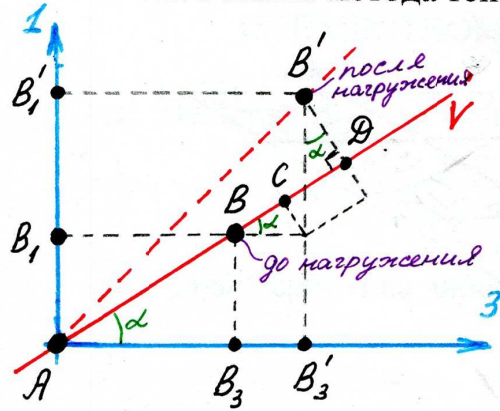
$$\sigma_3 = -2,361 \approx -2,4 \text{ МПа.}$$



4. Результат эксперимента.

4.1. Основы метода тензометрии.

Как, зная главные деформации ϵ_1 и ϵ_3 в точке А, найти деформацию в той же точке по произвольному направлению V ?

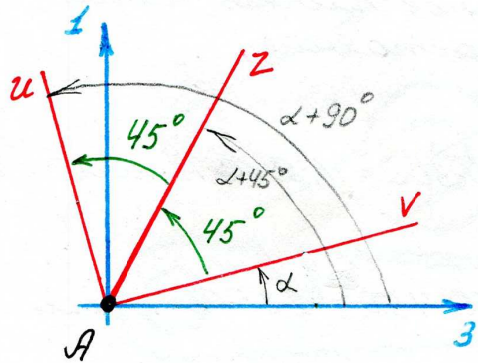


$$\epsilon_1 = \frac{B_1 B_1'}{AB_1}$$

$$\epsilon_3 = \frac{B_3 B_3'}{AB_3}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \frac{AB' - AB}{AB} \approx \frac{BD}{AB} = \frac{BC + CD}{AB} = \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AB} = \frac{B_3 B_3' \cos \alpha}{AB} + \frac{B_1 B_1' \sin \alpha}{AB} = \\ &= \frac{B_3 B_3'}{AB_3} \cos^2 \alpha + \frac{B_1 B_1'}{AB_1} \sin^2 \alpha = \epsilon_3 \cdot \cos^2 \alpha + \epsilon_1 \cdot \sin^2 \alpha \quad (*) \end{aligned}$$

Зная деформации в точке А по трём направлениям: V, Z и u . Как найти главные деформации ϵ_1 и ϵ_3 в точке?



$$\epsilon_V = \epsilon_3 \cdot \cos^2 \alpha + \epsilon_1 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\epsilon_Z = \epsilon_3 \cdot \cos^2 (\alpha + 90^\circ) + \epsilon_1 \cdot \sin^2 (\alpha + 90^\circ) \quad (**)$$

$$\epsilon_u = \epsilon_3 \cos^2 (\alpha + 45^\circ) + \epsilon_1 \sin^2 (\alpha + 45^\circ)$$

Решаем систему этих трёх уравнений,

получаем:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_u + \epsilon_V}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} [(\epsilon_u - \epsilon_Z)^2 + (\epsilon_V - \epsilon_Z)^2]}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\epsilon_u + \epsilon_V}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} [(\epsilon_u - \epsilon_Z)^2 + (\epsilon_V - \epsilon_Z)^2]}$$

(***)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \epsilon_Z - \epsilon_u - \epsilon_V}{\epsilon_V - \epsilon_u}$$

4.2. Градуировка шкалы электронного измерителя деформации.

н.с. в точке А - чистый сдвиг.

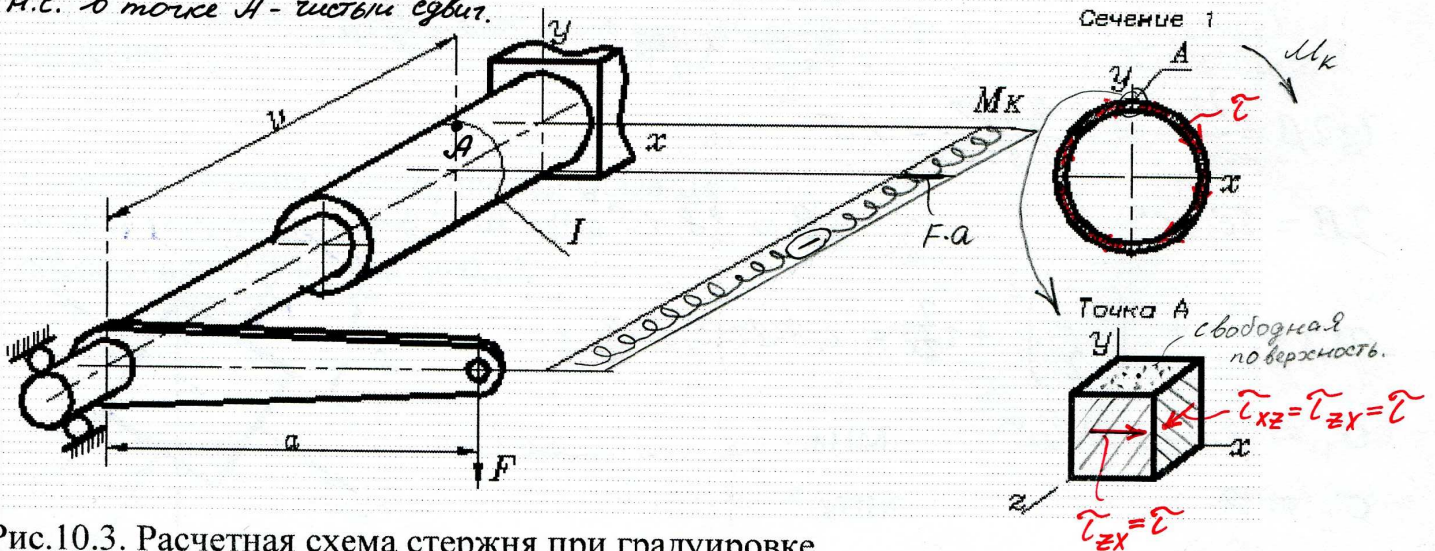
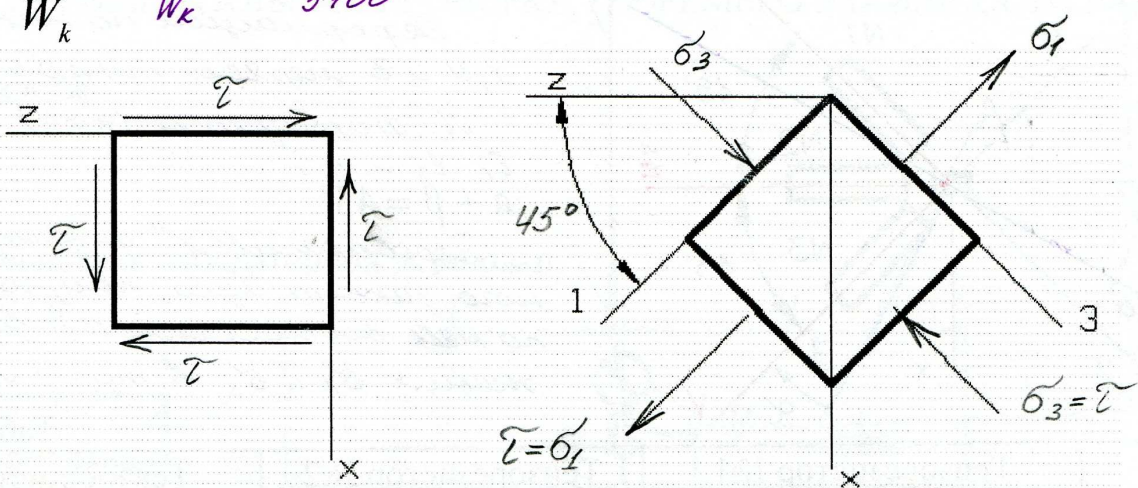


Рис.10.3. Расчетная схема стержня при градуировке

$$\tau_{zx} = \tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{F \cdot a}{W_k} = \frac{50 \cdot 450}{5100} = 4,411 \text{ МПа}$$



$$\sigma_1 = \tau = 4,412 \text{ МПа} \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -4,412 \text{ МПа}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\tau(1+\nu)}{E} = \frac{4,41 \cdot (1+0,33)}{0,7 \cdot 10^5} = 8,379 \cdot 10^{-5} \triangleq \varepsilon$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -\frac{\tau(1+\nu)}{E} = -\varepsilon_1 = -8,379 \cdot 10^{-5} = -\varepsilon$$

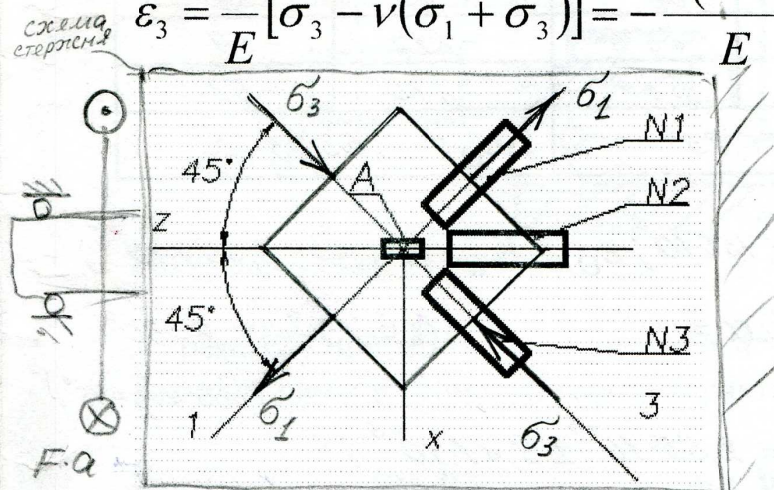


Рис. 10.4. Схема расположения тензорезисторов.

Таблица 10.1.

Нагрузка, F, Н	Тензорезистор №1		Тензорезистор №3	
	Ось 1		Ось 3	
	n_1	Δn_1	n_3	Δn_3
0	47	—	-686	—
50	125	78	-759	-73
100	201	76	-830	-71
150	280	79	-902	-72
200	360	80	-973	-71
$\Delta F =$	$\overline{\Delta n_1} = 78,25$		$\overline{\Delta n_3} = -71,75$	

Цена деления шкалы электронного измерителя деформации

$$K_\varepsilon = \frac{8,379 \cdot 10^{-5}}{75} = 1,117 \cdot 10^{-6}$$

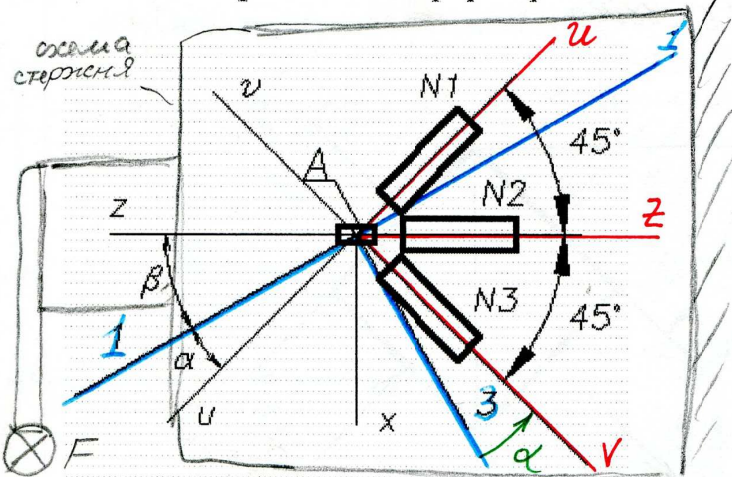
$$\Delta n = \frac{|\Delta n_1| + |\Delta n_3|}{2} = \frac{78,25 + 71,75}{2} = 75$$

$$\varepsilon = K_\varepsilon \cdot \Delta n$$

$$\Downarrow$$

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\Delta n}$$

4.3. Напряженно-деформированное состояние в точке стержня при изгибе и кручении.



Деформации по направлениям u, v и z меряем тензорезисторами. По формулам (***) вычисляем ϵ_1, ϵ_3 и α ;
 $\alpha + \beta = 45^\circ$
 "Переворачивая" формулы обобщенного закона Гука, получаем систему (6) по ней вычисляем главные напряжения σ_1 и σ_3 в точке А.

Таблица 10.2.

Нагрузка, F, Н	Тензорезистор №1		Тензорезистор №2		Тензорезистор №3	
	Ось u		Ось z		Ось v	
	n_u	Δn_u	n_z	Δn_z	n_v	Δn_v
0	65	—	-157	—	-667	—
50	163	98	-90	67	-720	53
100	261	98	-24	66	-773	-53
150	360	99	42	66	-827	-54
200	459	99	110	68	-880	-53
$\Delta F = 50$	$\Delta n_u = 98,5$		$\Delta n_z = 66,75$		$\Delta n_v = -53,75$	

Линейная деформация

$$\epsilon_u = K_\epsilon \cdot \Delta n_u = 11 \cdot 10^{-5}; \quad \epsilon_z = K_\epsilon \cdot \Delta n_z = 7,456 \cdot 10^{-5}; \quad \epsilon_v = K_\epsilon \cdot \Delta n_v = -5,948 \cdot 10^{-5};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\epsilon_z - \epsilon_u - \epsilon_v}{\epsilon_v - \epsilon_u} = -0,582; \quad 2\alpha = 30^\circ; \quad \alpha = 15^\circ; \quad \beta = 30^\circ$$

(что $\alpha + \beta = 45^\circ$)

$$\epsilon_{1,3} = \frac{\epsilon_u + \epsilon_v}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} [(\epsilon_u - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_v - \epsilon_z)^2]} = 2,55 \cdot 10^{-5} \pm 9,81 \cdot 10^{-5};$$

$$\epsilon_1 = 12,36 \cdot 10^{-5}; \quad \epsilon_3 = -7,26 \cdot 10^{-5};$$

Главные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_3) = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1-0,33^2} (12,36 \cdot 10^{-5} + 0,33 \cdot (-7,26 \cdot 10^{-5})) = 7,83 \text{ МПа} \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_3 + \nu\epsilon_1) = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1-0,33^2} (-7,26 \cdot 10^{-5} + 0,33 \cdot 12,36 \cdot 10^{-5}) = -2,5 \text{ МПа} \end{aligned} \right\}$$

5. Сопоставление результатов расчета и эксперимента.

Параметр	σ_1 , МПа	σ_3 , МПа	β°
Теория	8,2	-2,4	28,16
Эксперимент	7,83	-2,5	30
Погрешность	4,7%	4%	6,1%

Подпись преподавателя _____