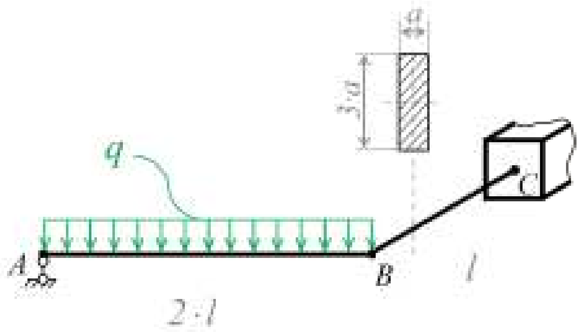
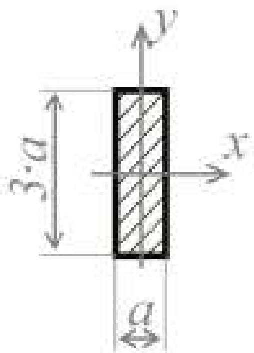
<u>Дано</u>: *E, q, l, ν=0,25.*



Построить эпюру внутренних моментов. Проверить полученное решение.

<u>Решение:</u>

Вычисление коэффициента *k*:



$$G=\frac{E}{2\cdot\left(1+\nu\right)}=\frac{E}{2\cdot\left(1+0{,}25\right)}=\frac{E}{2{,}5}=\frac{2}{5}\cdot E\quad;$$

$$I_x=\frac{b\cdot h^3}{12}=\frac{a\cdot\left(3\cdot a\right)^3}{12}=\frac{9}{4}\cdot a^4\quad;$$

$$I_\kappa=\beta\cdot h\cdot b^3=0{,}263\cdot 3\cdot a\cdot a^3=0{,}789\cdot a^4\ ;$$

β=0,263

$$k=\frac{E\cdot I_x}{G\cdot I_\kappa}=\frac{\cancel{E}\cdot\frac{9}{4}\cdot a^4}{\frac{2}{5}\cdot\cancel{E}\cdot 0{,}789\cdot a^4}=7{,}129\approx\frac{50}{7}.$$

Округления *k* до обыкновенной дроби допустимы с погрешностью, не превышающей 4% (инженерная точность).

Далее следуем пунктам конспекта **L-01**:

<u>I. Вычисление степени статической неопределимости:</u>

а) Количество внешних связей: $n_{внеш.св.}=\overset{A}{1}+\overset{C}{3}=4$;

б) Количество внутренних связей: $n_{внутр.св.}=3\cdot K=3\cdot 0=0$;
K – количество замкнутых контуров.

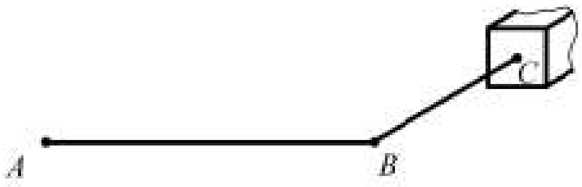
в) Степень статической неопределимости:

$$n=\left(n_{внеш.св.}+n_{внутр.св.}\right)-3=\left(4+0\right)-3=1\,.$$

II. Раскрытие статической неопределимости:

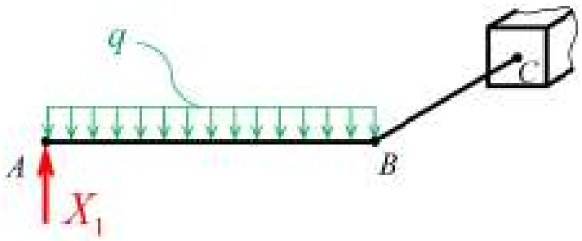
а) Варианты основных и эквивалентных систем (двух достаточно):

О.С. №1

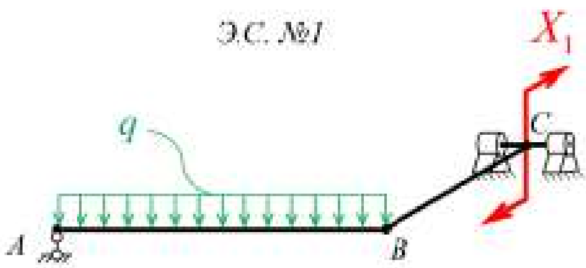


О.С. №2

Э.С. №1

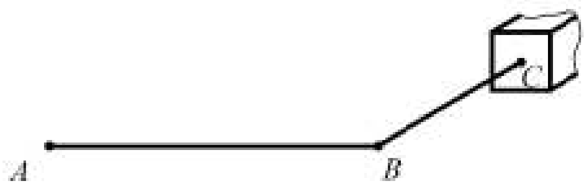


Э.С. №1

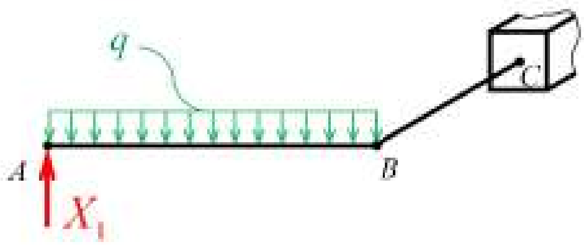


б) Выбираем первый вариант:

О.С. №1

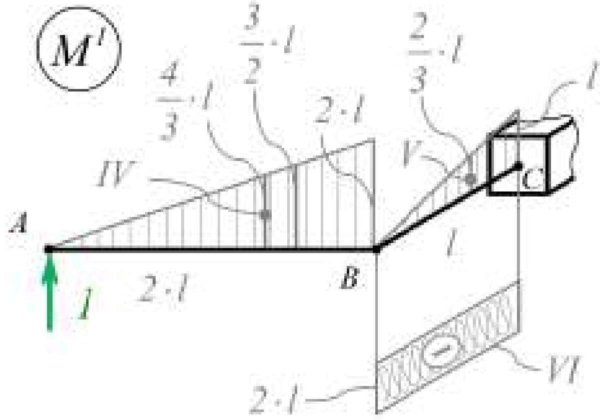


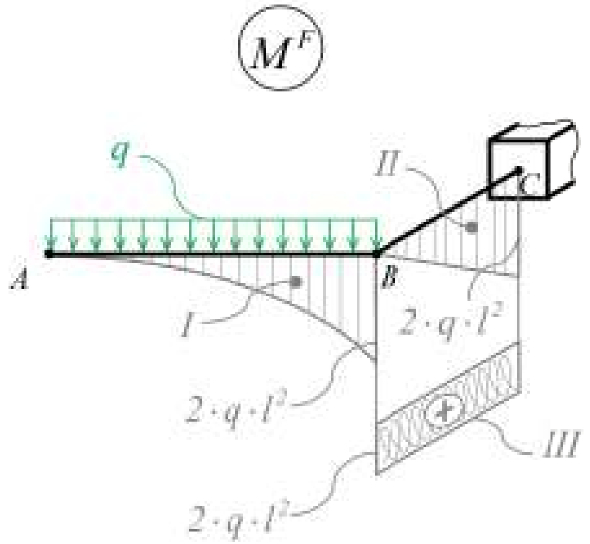
Э.С. №1



в) Система канонических уравнений: $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

г) Коэффициенты канонических уравнений:





$$\delta_{1F}=\frac{M^1\times M^F}{E\cdot I_x}=$$

$$=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[-\overset{I}{\left(\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{2}l\cdot 2ql^2\right)}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot l-\overset{II}{\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot l\cdot 2ql^2\right)}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot l\right]+$$

$$+\frac{1}{G\cdot I_{кр}}\cdot\left[-\overset{III}{\left(l\cdot 2ql^2\right)}\cdot 2\cdot l\right]=-\frac{8}{3}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x}-\frac{4\cdot q\cdot l^4}{G\cdot I_{кр}}=$$

$$=-\frac{8}{3}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x}-k\cdot\frac{4\cdot q\cdot l^4}{E\cdot I_x}=-\frac{8}{3}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x}-\frac{50}{7}\cdot\frac{4\cdot q\cdot l^4}{E\cdot I_x}=-\frac{656}{21}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x};$$

$$\delta_{11}=\frac{M^1\times M^1}{E\cdot I_x}=$$

$$=\frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\overset{IV}{\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}l\cdot 2l\right)}\cdot\frac{4}{3}\cdot l+\overset{V}{\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot l\cdot l\right)}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot l\right]+$$

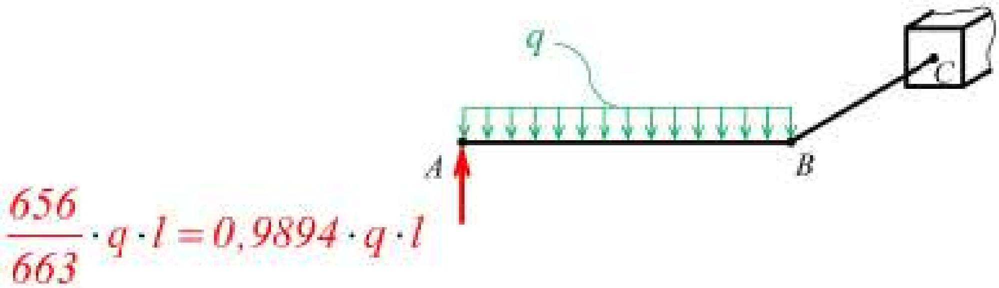
$$+\frac{1}{G\cdot I_{кр}}\cdot\left[\overset{VI}{\left(l\cdot 2l\right)}\cdot 2\cdot l\right]=\frac{3\cdot l^3}{E\cdot I_x}+\frac{4\cdot l^3}{G\cdot I_{кр}}=$$

$$=\frac{3\cdot l^3}{E\cdot I_x}+k\cdot\frac{4\cdot l^3}{E\cdot I_x}=\frac{3\cdot l^3}{E\cdot I_x}+\frac{50}{7}\cdot\frac{4\cdot l^3}{E\cdot I_x}=\frac{221}{7}\cdot\frac{l^3}{E\cdot I_x}\ .$$

д) Реакция избыточной связи:

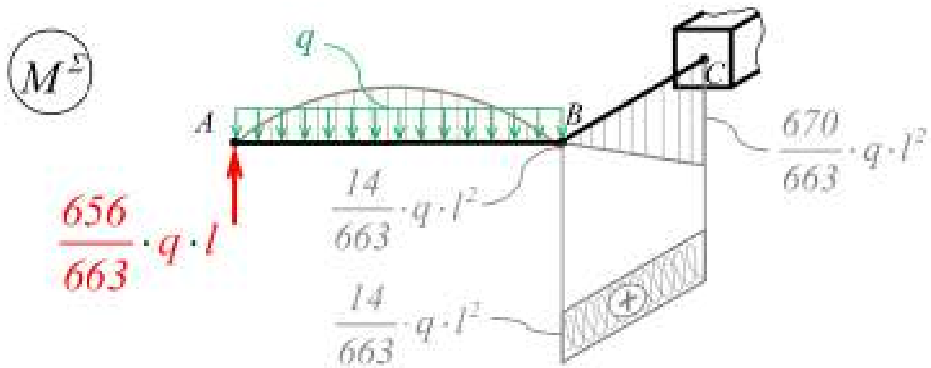
$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{656}{21} \cdot \frac{q \cdot l^{\cancel{4}}}{\cancel{E \cdot I_x}} \times \frac{7}{221} \cdot \frac{\cancel{E \cdot I_x}}{\cancel{l^3}} = \frac{656}{663} \cdot q \cdot l = 0{,}9894 \cdot q \cdot l\,.$$

е) Эквивалентная система:

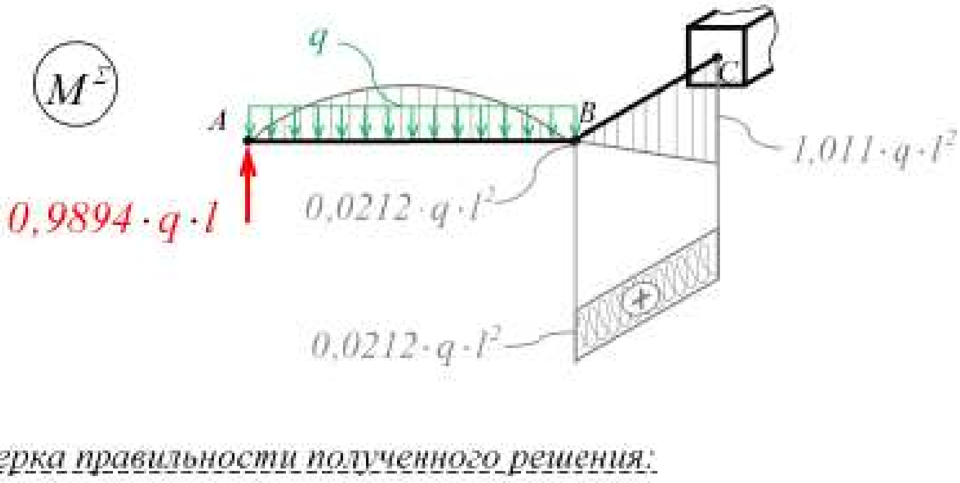


III. Завершаем решение задачи:

Суммарную эпюру моментов можно записать в правильных дробях:



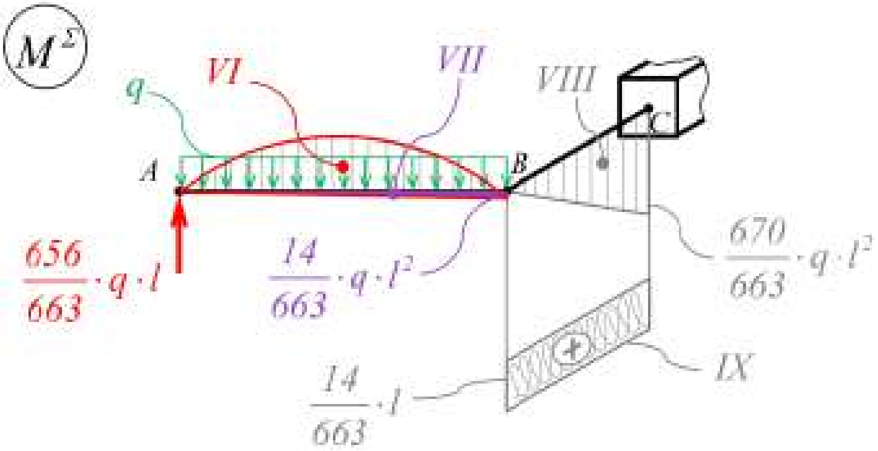
либо в десятичных дробях:

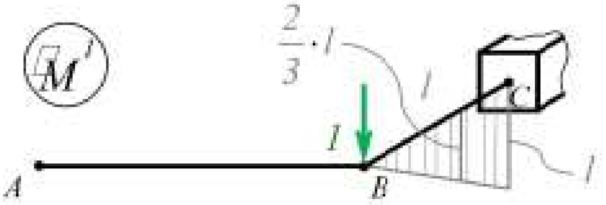


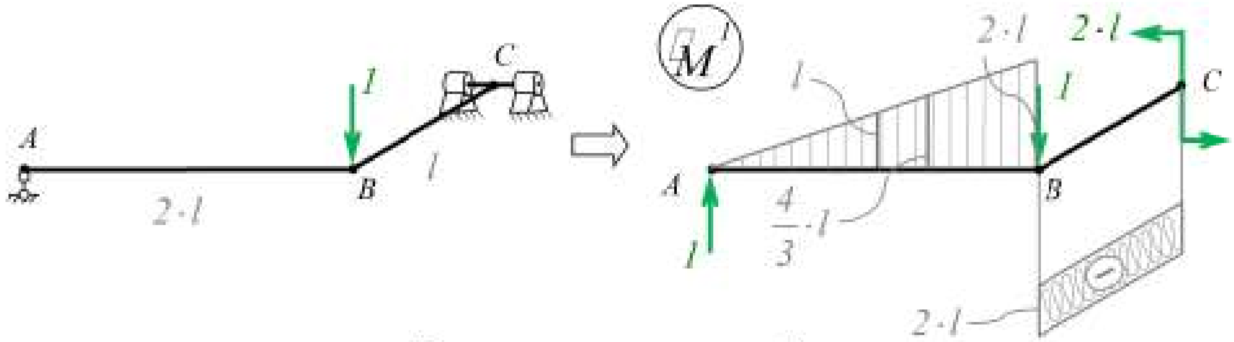
IV. Проверка правильности полученного решения:

Определим угловое смещение поперечного сечения, связанного с точкой *B*, используя основные системы №1 и №2.

Проверка правильности эпюры, записанной в правильных дробях:







$$\tilde{\delta}_B = \frac{M^{\Sigma} \times \bar{M}^{I}}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\overset{VIII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot \frac{670}{663} q l^2 \right)} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] = \frac{670}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

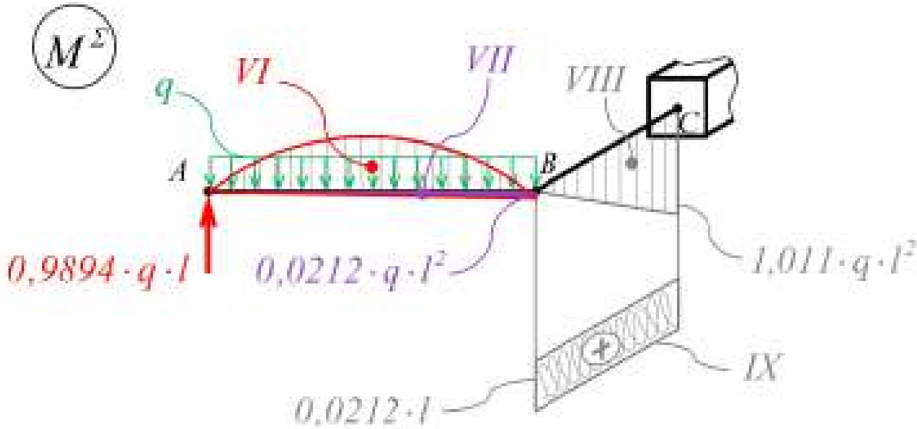
$$\hat{\delta}_B = \frac{M^{\Sigma} \times \bar{M}^{I}}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\overset{VI}{\left(\frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right)} \cdot l - \overset{VII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} l \cdot \frac{14}{663} q l^2 \right)} \cdot \frac{4}{3} \cdot l \right] +$$

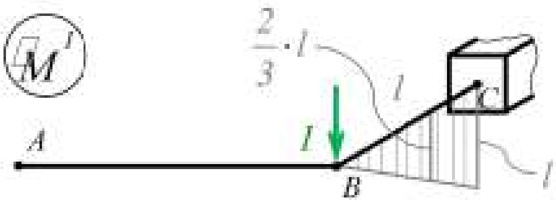
$$+ \frac{1}{G \cdot I_к} \cdot \left[\overset{IX}{\left(\frac{14}{663} q l^2 \cdot l \right)} \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{1270}{1989} \cdot \frac{1}{E \cdot I_x} - \frac{28}{663} \cdot \frac{1}{G \cdot I_к} \right\} =$$

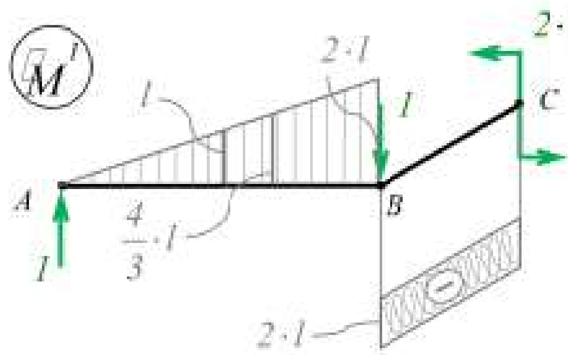
$$= \frac{1}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 1270 - \frac{50}{7} \cdot 84 \right\} = \frac{670}{1989} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

$\tilde{\delta}_B$ и $\hat{\delta}_B$ совпали абсолютно. Так и должно быть при работе с эпюрой, записанной в правильных дробях – полное совпадение. И, при проверке заведомо нулевого перемещения, тоже должен получиться строго нуль.

Проверка правильности эпюры, записанной в десятичных дробях:







$$\tilde{\delta}_B = \frac{M^{\Sigma} \times \tilde{M}^1}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\overset{VIII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot 1,011ql^2 \right)} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] = 0,337 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

$$\hat{\delta}_B = \frac{M^{\Sigma} \times \hat{M}^1}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\overset{VI}{\left(\frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right)} \cdot l - \overset{VII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}l \cdot 0,0212ql^2 \right)} \cdot \frac{4}{3} \cdot l \right] +$$

$$+ \frac{1}{G \cdot I_к} \cdot \left[\overset{IX}{\left(0,0212ql^2 \cdot l \right)} \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{0,6384}{E \cdot I_x} - \frac{0,0424}{G \cdot I_к} \right\} =$$

$$= \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 0,6384 - \frac{50}{7} \cdot 0,0424 \right\} = 0,3355 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

$\tilde{\delta}_B$ и $\hat{\delta}_B$ совпадают частично. Хорошо это или плохо?

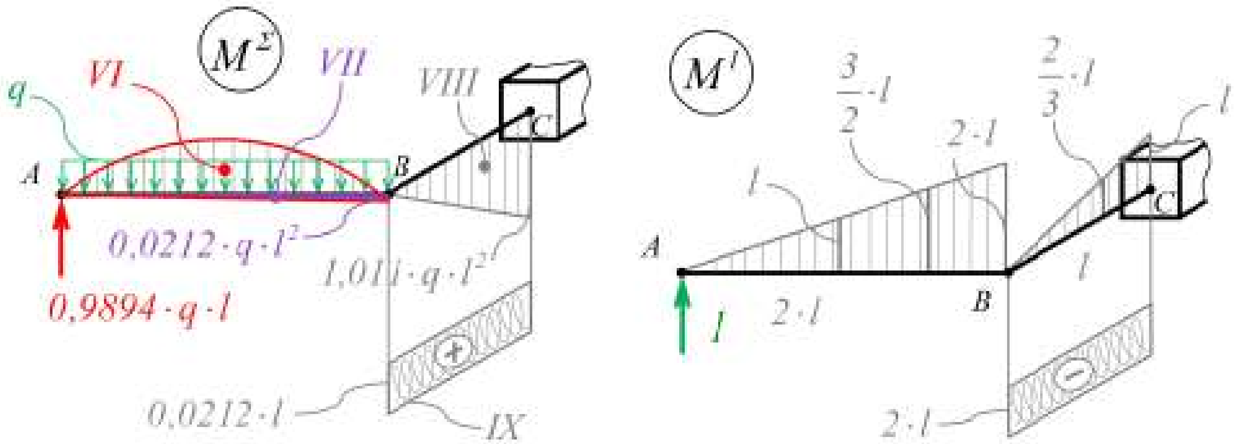
При переходе к десятичным дробям значение реакция X_1 округлялось до *четырёх* значащих цифр (округляется последняя цифра); дальнейшие расчёты также производились с этой же точностью. Значит, погрешность может проявиться, начиная с *третьей* значащей цифры. Первые две должны совпасть. Так ли это?

$$\tilde{\delta}_B = 0,3370 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x};$$

$$\hat{\delta}_B = 0,3355 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

Да, первые две значащие цифры совпадают. Значит, результат можно признать верным.

А, если проверим нулевое линейное перемещение точки A, использовав суммарную эпюру, записанную в десятичных дробях?



$$\delta_A = \frac{M^{\Sigma} \times M^1}{E \cdot I_x} = \frac{1}{E \cdot I_x} \times$$

$$\times \left[\overset{VI}{\left(\frac{q \cdot (2 \cdot l)^3}{12} \right)} \cdot l - \overset{VII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} l \cdot 0,0212 q l^2 \right)} \cdot \frac{3}{2} \cdot l - \overset{VIII}{\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot l \cdot 1,011 q l^2 \right)} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot l \right] -$$

$$- \frac{1}{G \cdot I_\kappa} \cdot \left[\overset{IX}{\left(0,0212 q l^2 \cdot l \right)} \cdot 2 \cdot l \right] = q \cdot l^4 \cdot \left\{ \frac{0,2979}{E \cdot I_x} - \frac{0,0424}{G \cdot I_\kappa} \right\} =$$

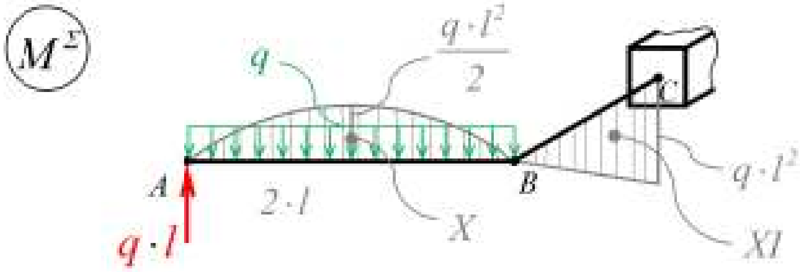
$$= \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x} \cdot \left\{ 0,2979 - \frac{50}{7} \cdot 0,0424 \right\} = 0,004957 \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_x}.$$

Тоже не нуль. И не понятно, от какой позиции отсчитывать погрешность. Так, что лучше эпюры в десятичных дробях таким образом не проверять.

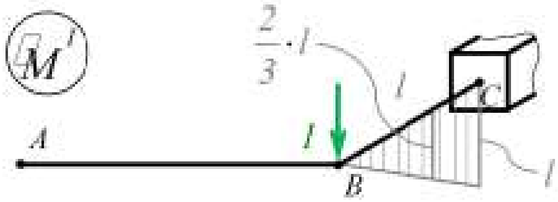
П р и м е ч а н и е:

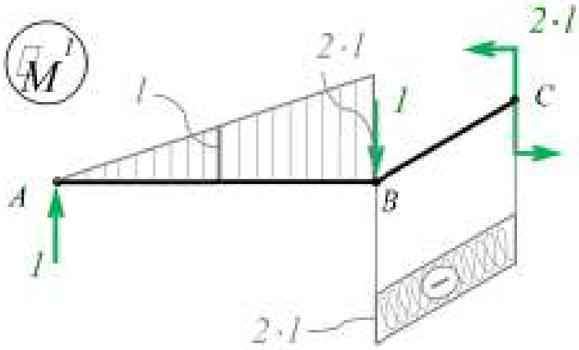
Искомая реакция X_1 всего на *1%* меньше $q\cdot l$. Давайте попробуем её округлить до $q\cdot l$? $X_1 = 0{,}9894\cdot q\cdot l \approx q\cdot l$.

При этом суммарная эпюра моментов изменится незначительно:



Проверим правильность эпюры, вычислив линейное перемещение точки *B* в двух основных системах:





$$\tilde{\delta}_B = \frac{M^\Sigma \times \bar{M}^1}{E\cdot I_x} = \frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\overset{XI}{\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot l\cdot ql^2\right)}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot l\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x};$$

$$\hat{\delta}_B = \frac{M^\Sigma \times \bar{M}^1}{E\cdot I_x} = \frac{1}{E\cdot I_x}\cdot\left[\overset{X}{\left(\frac{q\cdot(2\cdot l)^3}{12}\right)}\cdot l\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{q\cdot l^4}{E\cdot I_x}.$$

Результаты различаются *вдвое*. Вот к чему приводит небольшое округление значения реакции даже в пределах инженерной точности.

Вывод: последнее число, которое можно округлить до удобного значения в пределах 4% – коэффициент k . Дальнейшие вычисления следует вести либо в правильных дробях, либо с округлением до четырёх значащих цифр.