XV

Диски.

Рассматриваем диски, симметричные относительно плоской срединной поверхности (*рис. XV.1.*).

Толщина диска h и его температура t являются функциями только радиальной координаты r. Удельная центробежная сила

$$q = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \qquad \left[\frac{Н}{м^3}\right]$$

где

ρ - плотность материала, кг/м^3 ;

ω - угловая скорость вращения диска, рад/с.

также является функцией радиальной координаты.

Напряжённое состояние материала диска плоское (двухосное), причём оба напряжения (и радиальное σ_r и окружное σ_t) тоже являются функциями одной только радиальной координаты r (по причине всего, сказанного выше).

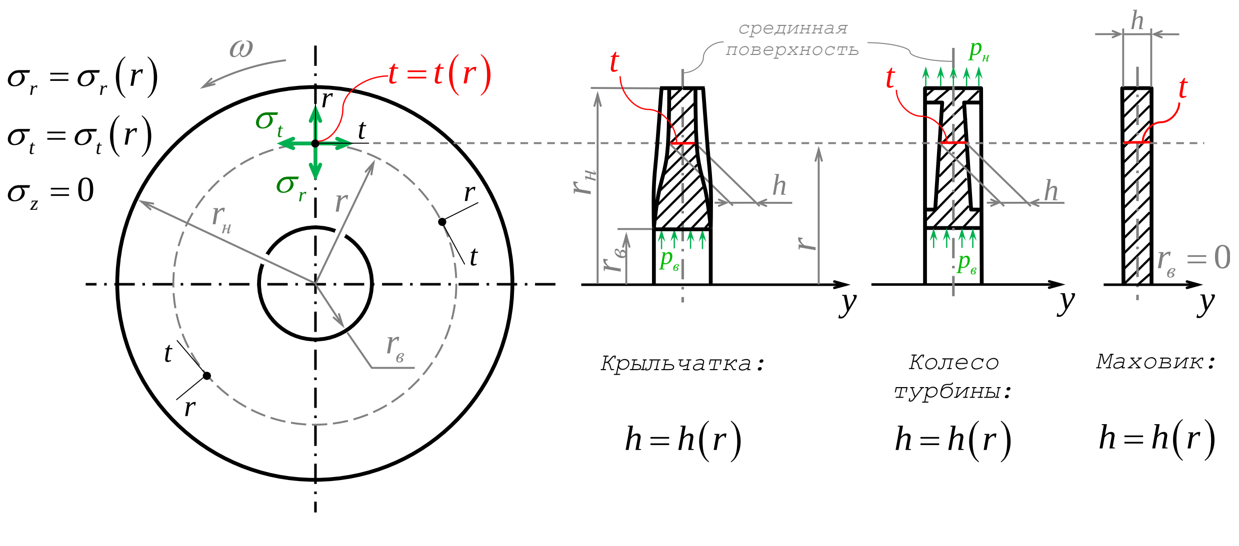

Рис. XV.1.

По наружной поверхности диски бывают нагружены давлением $p_н$, от рабочих лопаток турбины и узлов их крепления.

По внутренней поверхности диска с центральным отверстием (буде таковое) действует контактное давление $p_в$ от посадки диска на вал с натягом.

О с н о в н ы е   с о о т н о ш е н и я

а) Геометрические соотношения:

Под действием нагрева и давлений $p_н$ и $p_в$ и сил инерции диск осесимметрично деформируется. Радиальными плоскостями и цилиндрическими поверхностями выделим бесконечно малый элемент диска:

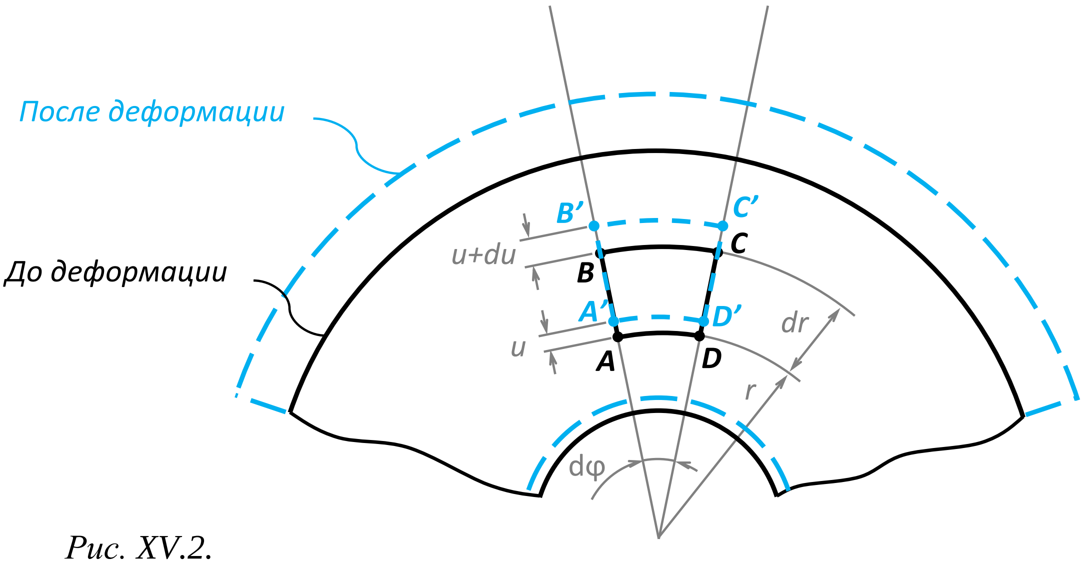

Рис. XV.2.

Деформация элемента в радиальном направлении:

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left[dr + \left(u + du\right) - u\right] - dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Деформация элемента в окружном направлении:

$$\varepsilon_r = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{\left[r + u\right] \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{u}{r}$$

Обе деформации зависят от радиального перемещения u. Исключая u из уравнений, получим:

$$\frac{d\left(\varepsilon_t \cdot r\right)}{dr} - \varepsilon_r = 0 \quad \textbf{уравнение совместности деформаций} \qquad (XV.1)$$

б) Соотношения равновесия:

Таким же образом выделим бесконечно малый элемент из уже деформированного диска (h – толщина диска):

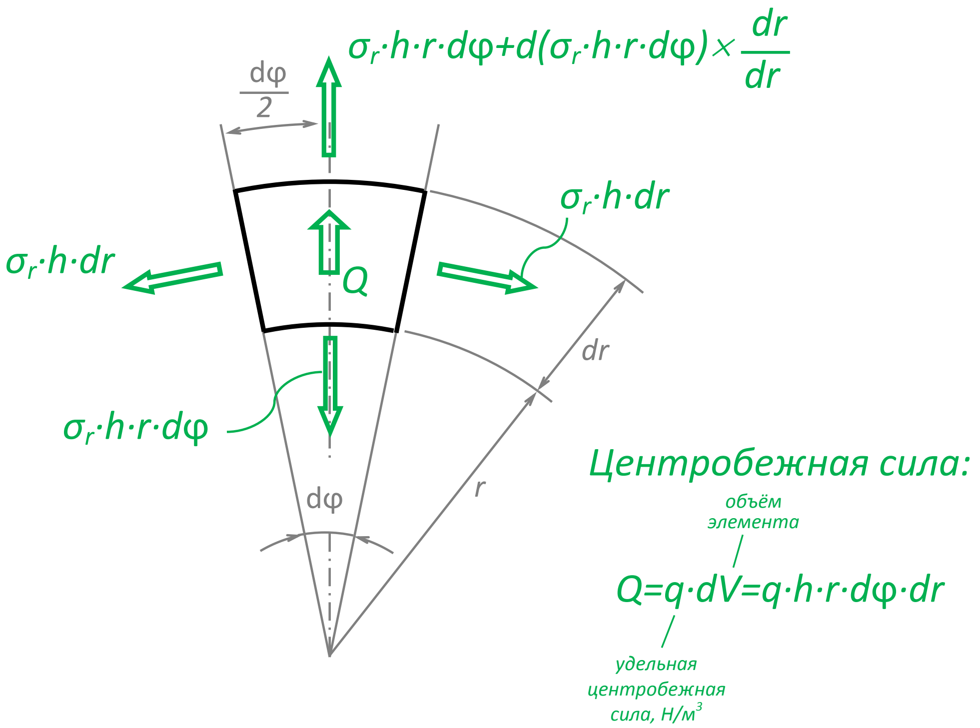

Рис. XV.2.

Проекция всех сил на направление радиуса:

$$\Sigma F_r = 0 = \cancel{-\sigma_r \cdot h \cdot r \cdot d\varphi} + \cancel{\sigma_r \cdot h \cdot r \cdot d\varphi} + \frac{d}{dr}\left(\underbrace{\sigma_r}_{f(r)} \cdot \underbrace{h}_{f(r)} \cdot r \cdot \overbrace{d\varphi}^{const} \right) \cdot dr -$$

$$-2 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot dr \cdot \underbrace{\sin\frac{d\varphi}{2}}_{\approx \frac{d\varphi}{2}} + q \cdot h \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$\cancel{d\varphi \cdot dr} \cdot \frac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot h \cdot r\right) - \sigma_t \cdot h \cdot \cancel{dr \cdot d\varphi} + q \cdot h \cdot r \cdot \cancel{d\varphi \cdot dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot r \cdot h\right) - \sigma_t \cdot h + q \cdot r \cdot h = 0 \qquad \textbf{уравнение равновесия} \qquad (XV.2)$$

б) Обобщение уравнений:

Итак, разрешающие уравнения вращающихся неравномерно нагретых дисков:

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\varepsilon_t \cdot r\right)}{dr} - \varepsilon_r = 0 \\ \dfrac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot r \cdot h\right) - \sigma_t \cdot h + q \cdot r \cdot h = 0 \end{cases} \qquad (XV.3)$$

Одно из этих уравнений записано в деформациях, другое в напряжениях. Неудобно.

Для пересчёта первого уравнения системы *(XV.3)* в напряжения используем обобщённый закон Гука для изотропного материала:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^t = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_r - \nu \cdot \sigma_t\right) + \varepsilon_r^t$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \varepsilon_t^t = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r\right) + \varepsilon_t^t$$

где

ε^e - упругая деформация;

$\varepsilon_r^t = \varepsilon_t^t = \varepsilon^t = \alpha \cdot \Delta t$ - температурная деформация.

Получим разрешающую систему уравнений в напряжениях:

$$\boxed{\begin{cases} r \cdot \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{E} \cdot \left(\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r\right)\right] + \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \left(\sigma_t - \sigma_r\right) + r \cdot \dfrac{d\varepsilon^t}{dr} = 0 \\ \dfrac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot r \cdot h\right) - \sigma_t \cdot h + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h = 0 \end{cases}} \qquad (XV.4)$$

Диски постоянной толщины

При

$h=const$

$E=const$

$\nu=const$

система *(XV.4)* принимает вид:

$$\begin{cases} r\cdot\dfrac{d}{dr}\left(\sigma_t-\nu\cdot\sigma_r\right)+\left(1+\nu\right)\cdot\left(\sigma_t-\sigma_r\right)+E\cdot r\cdot\dfrac{d\varepsilon^t}{dr}=0 \\ \dfrac{d}{dr}\left(\sigma_r\cdot r\right)-\sigma_t+\rho\cdot\omega^2\cdot r^2=0 \end{cases} \qquad (XV.5)$$

Путём подстановок и интегрирования (Агапов, Гаврюшин и др. «Строительная механика автомобиля и трактора», стр. 182-183) из системы *(XV.5)* можно вывести формулы для радиального и окружного напряжений в дисках постоянной толщины:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r\left(r\right)&=A-\frac{B}{r^2}-\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2-\frac{E}{r^2}\cdot\int_{r_в}^{r}\tilde{r}\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde{r} \\ \sigma_t\left(r\right)&=A+\frac{B}{r^2}-\frac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2+\frac{E}{r^2}\cdot\int_{r_в}^{r}\tilde{r}\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde{r}-E\cdot\varepsilon^t \end{aligned}} \qquad (XV.6)$$

где

A, B – константы интегрирования, определяемые из ГУ.

Пример $\boxed{XV.1}$

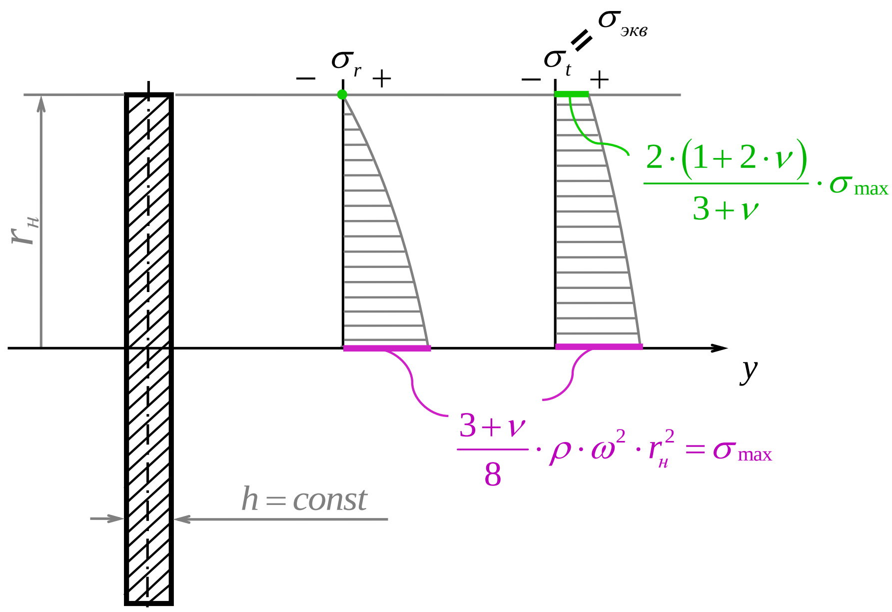

Рис. XV.3.

Сплошной вращающийся диск не нагрет или нагрет равномерно ($\varepsilon^t=0$).

Дано:

$h,\ r_н,\ r_в=0,\ E,\ \nu,\ \rho,\ \omega$

Найти:

$\sigma_t=?$

$\sigma_r=?$

Решение

Используем систему уравнений *(XV.6)*:

$$\begin{cases}\sigma_r(r)=A-\dfrac{B}{r^2}-\dfrac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2-\cancel{\dfrac{E}{r^2}\cdot\int_0^r\tilde r\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde r}\\ \sigma_t(r)=A+\dfrac{B}{r^2}-\dfrac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2+\cancel{\dfrac{E}{r^2}\cdot\int_0^r\tilde r\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde r-E\cdot\varepsilon^t}\end{cases}$$

Г.У.:

1) $r=0:\quad \underbrace{\sigma_r=\sigma_t}_{\text{из условия симметрии}}\quad\Rightarrow\quad A-\dfrac{B}{r^2}-\dfrac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2=A+\dfrac{B}{r^2}-\dfrac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2$

$$A\cdot r^2-B-\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^4=A\cdot r^2+B-\frac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^4\Big|_{r=0}$$

$$-B=B$$

$$\boxed{B=0}$$

2) $r=r_н:\quad \sigma_r=0\quad\Rightarrow\quad 0=A-\dfrac{\cancel{B}}{r_н^2}-\dfrac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r_н^2=A-\dfrac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r_н^2$

$$\boxed{A=\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r_н^2}$$

При таких *A* и *B* формулы для напряжений примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 - \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 = \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 - r^2\right) \\ \sigma_t(r) = \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 - \dfrac{1+3\cdot\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 = \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 - \dfrac{1+3\cdot\nu}{3+\nu} \cdot r^2\right) \end{cases}$$

Зависимости квадратичные (параболы). Значения в центре круга:

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 = \sigma_{max}$$

Значения на краю диска:

$$\sigma_r(r_н) = 0$$

$$\sigma_t(r_н) = \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 \cdot \left(\frac{3+\nu}{8} - \frac{1+3\cdot\nu}{8}\right) = \frac{2-2\cdot\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 = \frac{2\cdot(1-\nu)}{3+\nu} \cdot \sigma_{max}$$

эпюры см. справа от рисунка диска

Интересно, что ни от толщины диска h ни от модуля упругости материала E напряжения в таком диске не зависят.

Касательных напряжений в радиальных сечениях диска нет в силу симметрии. Значит напряжения σ_r, σ_t, σ_z – главные напряжения в любой точке диска. Причём $\sigma_z = 0$ - плоское напряжённое состояние.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &> 0 \\ \sigma_t &> 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

Эквивалентное напряжение по теории Мора:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k \cdot \cancel{\sigma_3} = \sigma_1$$

где

$$k = \left| \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} \right|$$

Напряжение σ_1 – наибольшее (с учётом знака) напряжение из σ_r, σ_t, и σ_z . Значит:

$$\sigma_{экв} = max(\ \sigma_r ,\ \sigma_t\ )$$

Эпюра $\sigma_{экв}$ строится так: накладываются друг на друга эпюры и и обводятся по огибающей. В данном примере $\forall\, r:\ \sigma_t \geq \sigma_r$, значит

$$\sigma_{экв} = \sigma_t$$

Пример $\boxed{XV.2}$

Сплошной вращающийся диск не нагрет или нагрет равномерно ($\varepsilon^t = 0$):

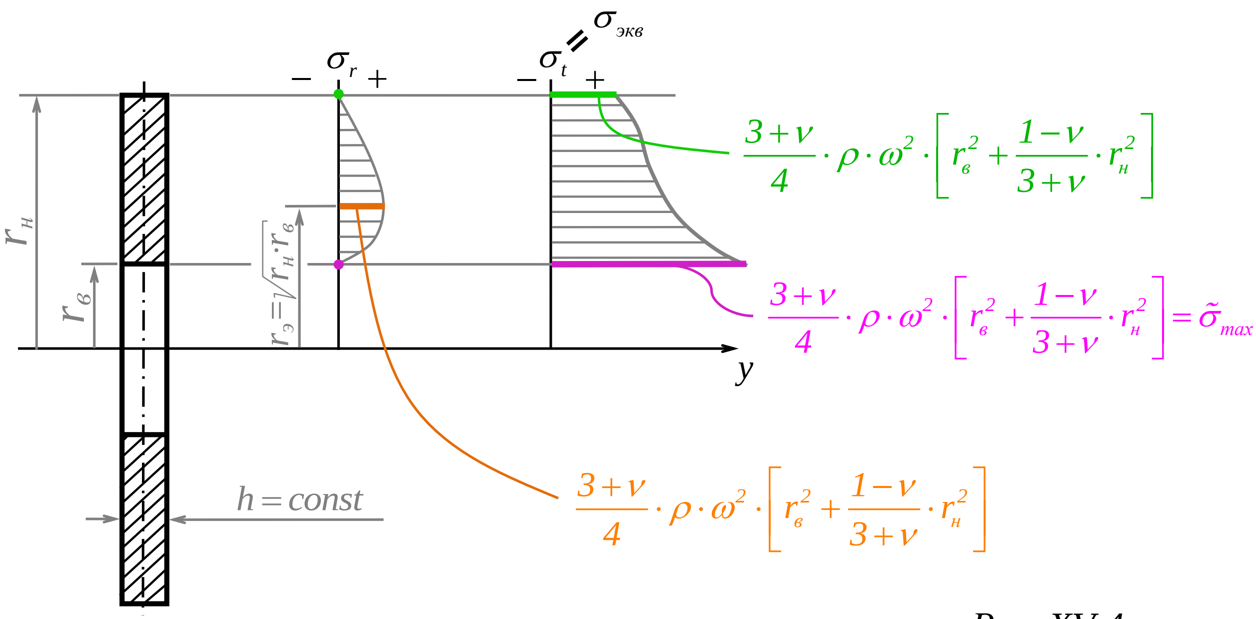

Рис. XV.4.

Дано: $h,\ r_н,\ r_в = 0,\ E,\ \nu,\ \rho,\ \omega$

Найти: $\sigma_t = ?\ \ \sigma_r = ?$

Решение

Используем систему уравнений *(XV.6)*:

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = A - \dfrac{B}{r^2} - \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 - \cancel{\dfrac{E}{r^2} \cdot \int\limits_0^r \tilde{r} \cdot \varepsilon^t \cdot d\tilde{r}} \\ \sigma_t(r) = A + \dfrac{B}{r^2} - \dfrac{1+3\cdot\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 + \cancel{\dfrac{E}{r^2} \cdot \int\limits_0^r \tilde{r} \cdot \varepsilon^t \cdot d\tilde{r} - E \cdot \varepsilon^t} \end{cases}$$

Г.У.:

1) $r = r_в :\quad \sigma_r = 0 = A - \dfrac{B}{r_в^2} - \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{B}{r_в^2} + \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2$

2) $r = r_н :\quad \sigma_r = 0 = A - \dfrac{B}{r_н^2} - \dfrac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2$

$$0 = \frac{B}{r_в^2} + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2 - \frac{B}{r_н^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2$$

$$B \cdot \left(\frac{1}{r_в^2} - \frac{1}{r_н^2} \right) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 - r_в^2 \right)$$

$$B \cdot \frac{\cancel{r_н^2 - r_в^2}}{r_в^2 \cdot r_н^2} = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \cancel{\left(r_н^2 - r_в^2 \right)}$$

$$\boxed{B = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2 \cdot r_н^2}$$

$$A = \frac{B}{r_в^2} + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2 = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2 + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_в^2$$

$$\boxed{A = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 + r_в^2 \right)}$$

При таких A и B формулы для напряжений примут вид:

$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 =$$

$$= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 + r_в^2 \right) - \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 =$$

$$\boxed{= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 - \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^2} - r^2 \right]}$$

$$\sigma_t(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\cdot\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 =$$

$$= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left(r_н^2 + r_в^2 \right) + \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^2} - \frac{1+3\cdot\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 =$$

$$\boxed{= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 + \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^2} - \frac{1+3\cdot\nu}{3+\nu} \cdot r^2 \right]}$$

Зависимости квадратичные (параболы) – переменная r во второй степени.

Значения напряжений на внутреннем крае диска:

$$\sigma_r(r_в) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 - \frac{\cancel{r_в^2} \cdot r_н^2}{\cancel{r_в^2}} - r_в^2 \right] = 0$$

$$\sigma_t(r_в) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 + \frac{\cancel{r_в^2} \cdot r_н^2}{\cancel{r_в^2}} - \frac{1+3\cdot\nu}{3+\nu} \cdot r_в^2 \right] =$$

$$= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[2 \cdot r_н^2 + \left(1 - \frac{1+3\cdot\nu}{3+\nu} \right) \cdot r_в^2 \right] =$$

$$= \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot r_в^2 \right] \triangleq \tilde{\sigma}_{max}$$

Значения напряжений на внешнем крае диска:

$$\sigma_r(r_н) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 - \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r_н^2} - r_н^2 \right] = 0$$

$$\sigma_t(r_н) = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_н^2 + r_в^2 + \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r_н^2} - \frac{1+3\cdot\nu}{3+\nu} \cdot r_н^2 \right] =$$

$$= \frac{3+\nu}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[r_в^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot r_н^2 \right]$$

Эпюра напряжений σ_r начинается и заканчивается нулём – парабола, вершину которой можно найти, приравняв нулю производную:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 = \frac{3+\nu}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[2 \cdot \frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^3} - 2 \cdot r \right]$$

$$\frac{r_в^2 \cdot r_н^2}{r^3} - r = 0$$

$$r^4 = r_в^2 \cdot r_н^2$$

$$r = \sqrt{r_в^2 \cdot r_н^2} \triangleq r_э \text{ — } \textit{координата экстремума};$$

Значение эпюры в точке экстремума:

$$\sigma_r\left(r_э\right)=\sigma_r\left(\sqrt{r_в\cdot r_н}\right)=$$

$$=\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot\left[r_н^2+r_в^2-\frac{r_в^2\cdot r_н^2}{\left(\sqrt{r_в\cdot r_н}\right)^2}-\left(\sqrt{r_в\cdot r_н}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot\left[r_н^2+r_в^2-\frac{r_в^{\cancel{2}}\cdot r_н^{\cancel{2}}}{\cancel{r_в\cdot r_н}}-r_в\cdot r_н\right]=$$

$$=\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot\left[r_н^2-2\cdot r_в\cdot r_н+r_в^2\right]=$$

$$=\frac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot\left(r_н-r_в\right)^2$$

П р и м е ч а н и я:

1) При стремлении внутреннего радиуса диска к нулю $r_в \to 0$ (*рис. XV.5.*),

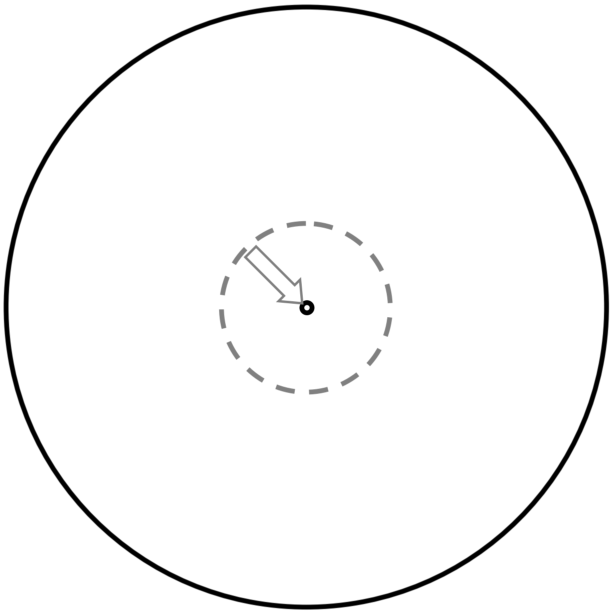

Рис. XVI.5.

максимальное напряжение $\tilde{\sigma}_{max}$ в центре диска стремится к величине

$$\lim_{r_в \to 0} \tilde{\sigma}_{max} = \frac{3+\nu}{4} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_н^2$$

что в два раза больше, чем σ_{max} - максимальное напряжение в центре *сплошного* диска (см. *Пример XV.1*). Значит, даже небольшое отверстие в центре диска является концентратором напряжений с коэффициентом концентрации равным 2.

2) При стремлении наружного и внутреннего радиусов диска к одному значению (*рис. XV.6.*)

$$r_в \to r$$

$$r_н \to r$$

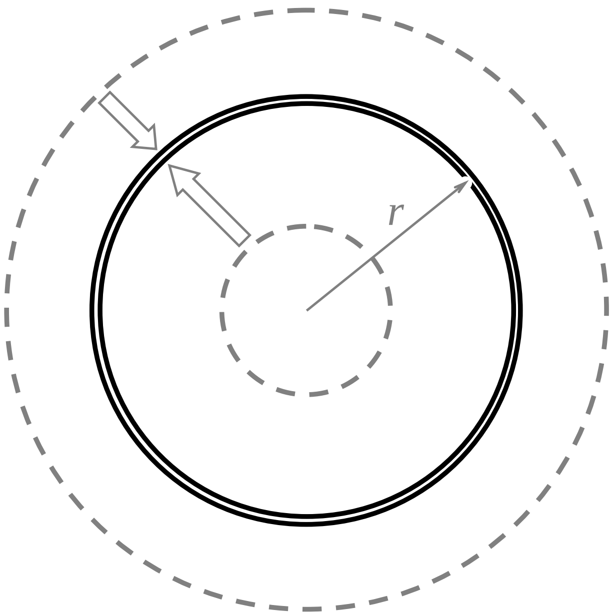

Рис. XVI.6.

то есть, вырождается в **тонкое кольцо**, напряжения стремятся

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_r \to 0 \\ &\sigma_t \to \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \end{aligned}}$$

Пример $\boxed{XV.3}$

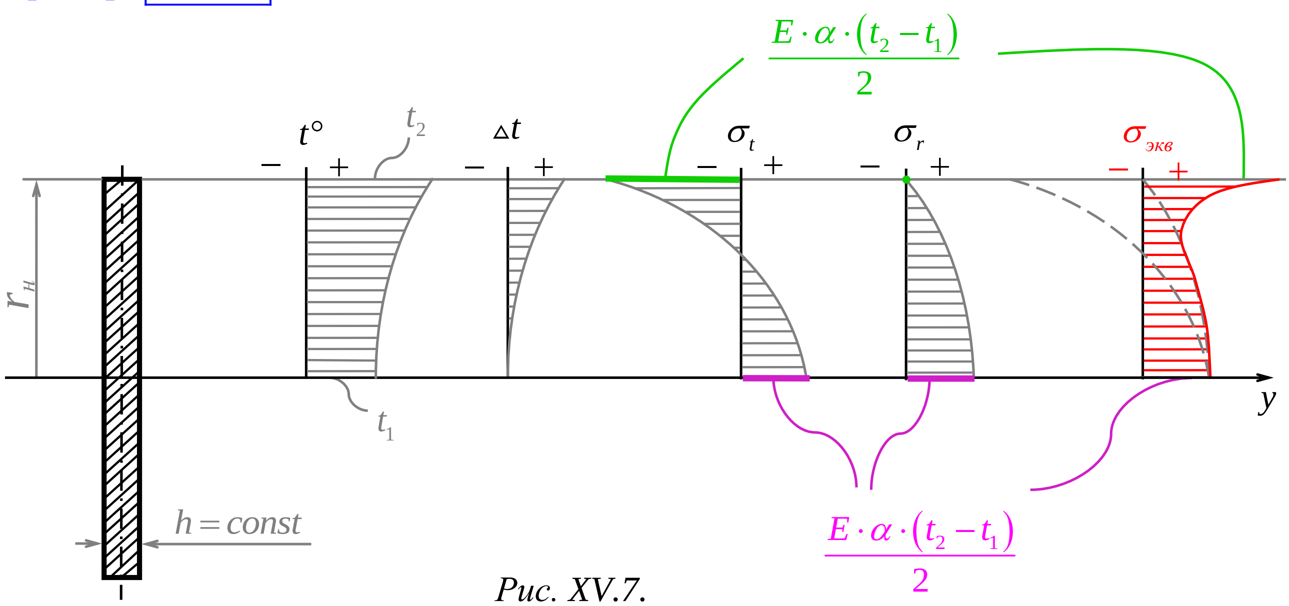

Рис. XV.7.

Диск постоянной толщины *не* вращается, нагрет равномерно.

Дано: $h,\ r_н,\ r_в=0,\ E,\ \nu,\ t=t_1+\dfrac{t_2-t_1}{r_н^2}\cdot r^2$ (*рис. XV.7*), $\alpha=const(t)$, $\omega=0$;

Найти: $\sigma_t=?\ \ \sigma_r=?$

Решение

Используем систему уравнений *(XV.6)*:

$$\begin{cases} \sigma_r(r)=A-\dfrac{B}{r^2}-\cancel{\dfrac{3+\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2}-\dfrac{E}{r^2}\cdot\displaystyle\int_0^r\tilde{r}\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde{r} \\ \sigma_t(r)=A+\dfrac{B}{r^2}-\cancel{\dfrac{1+3\cdot\nu}{8}\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot r^2}+\dfrac{E}{r^2}\cdot\displaystyle\int_0^r\tilde{r}\cdot\varepsilon^t\cdot d\tilde{r}-E\cdot\varepsilon^t \end{cases}$$

Касательно температурной деформации ε^t: равномерный нагрев напряжений не вызывает, из эпюры температуры его надо выделить, оставив только её переменную часть Δt:

$\Delta t=t-t_1=\dfrac{t_2-t_1}{r_н^2}\cdot r^2$ - эпюра Δt приведена на *рис. XV.7.*

$$\varepsilon^t(r)=\alpha\cdot\Delta t=\alpha\cdot\frac{t_2-t_1}{r_н^2}\cdot r^2$$

тогда слагаемое с интегралом в формулах:

$$\frac{E}{r^2}\cdot\int_0^r \tilde{r}\cdot\varepsilon^t\left(\tilde{r}\right)\cdot d\tilde{r} = \frac{E}{r^2}\cdot\int_0^r \tilde{r}\cdot\alpha\cdot\frac{t_2-t_1}{r_н^2}\cdot\tilde{r}^2\cdot d\tilde{r} = \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)}{r^2\cdot r_н^2}\cdot\int_0^r \tilde{r}^3\cdot d\tilde{r} =$$

$$= \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)}{r^2\cdot r_н^2}\cdot\frac{r^4}{4} = \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^2}{4\cdot r_н^2}$$

и система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \sigma_r\left(r\right) = A - \dfrac{B}{r^2} - \dfrac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^2}{4\cdot r_н^2} \\ \sigma_t\left(r\right) = A + \dfrac{B}{r^2} + \dfrac{3\cdot E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^2}{4\cdot r_н^2} \end{cases}$$

Г.У.:

1) $r = 0:\quad \underbrace{\sigma_r = \sigma_t}_{\text{из условия симметрии}} \quad\Rightarrow$

$$A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^2}{4\cdot r_н^2} = A + \frac{B}{r^2} + \frac{3\cdot E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^2}{4\cdot r_н^2}\Bigg|\times r^2$$

$$A\cdot r^2 - B - \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^4}{4\cdot r_н^2} = A\cdot r^2 + B + \frac{3\cdot E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r^4}{4\cdot r_н^2}\Bigg|\, r = 0$$

$$-B = B$$

$$B = 0$$

2) $r = r_н:\quad \sigma_r = 0 = A - \cancel{\dfrac{B}{r_н^2}} - \dfrac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)\cdot r_н^2}{4\cdot r_н^2}$

$$A = \frac{E\cdot\alpha\cdot\left(t_2-t_1\right)}{4}$$

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = \dfrac{E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)}{4} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{r}{r_н} \right)^2 \right] \\ \sigma_t(r) = \dfrac{E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)}{4} \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\dfrac{r}{r_н} \right)^2 \right] \end{cases}$$

Внутри диска:

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = +\frac{E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)}{4}$$

На наружном крае диска:

$$\sigma_r(r_н) = 0$$

$\sigma_t(r) = -\dfrac{E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)}{2}$ - *наружный слой диска нагрет сильнее остальных; расширился бы, но остальной диск его удерживает от расширения – сжимает.*

Эквивалентное напряжение вычисляем по теории Мора:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3$$

Эпюра эквивалентного напряжения показана на *рис. XV.7*.

Диск равного сопротивления

Сплошные диски постоянной толщины начинают разрушаться с середины, в то время, как по краю у них имеется ещё достаточный запас прочности. Налицо неэффективное расходование материала.

Попробуем сконструировать колесо турбины, такого профиля, чтобы:

1) $\sigma_{экв}=const$ по всему диску;

2) $\sigma_r=\sigma_t$ по всему диску; можно доказать, что при этом масса диска будет минимальна и, кроме того, это условие упрощает математические выкладки.

то есть, по всему диску должно выполняться условие:

$$\sigma_r=\sigma_t=\sigma_0=const \text{ - } \textbf{диск равного сопротивления} \qquad (a)$$

Диск нагрет равномерно:

$$\varepsilon^t=0=const,\ E=const,\ \nu=const \qquad (б)$$

Используем разрешающие уравнения теории расчёта дисков *(XV.4)*:

$$\begin{cases} r\cdot\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_t-\nu\cdot\sigma_r)\right]+\dfrac{1+\nu}{E}\cdot(\sigma_t-\sigma_r)+r\cdot\dfrac{d\varepsilon^t}{dr}=0 & \text{– уравнение совместности деформаций} \\ \dfrac{d}{dr}(\sigma_r\cdot r\cdot h)-\sigma_t\cdot h+\rho\cdot\omega^2\cdot r^2\cdot h=0 & \text{– уравнение равновесия} \end{cases}$$

с учётом условий *(а)* и *(б)*:

$$\begin{cases} \cancel{r\cdot\dfrac{d}{dr}\underbrace{\left[\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_0-\nu\cdot\sigma_0)\right]}_{const}}+\cancel{\dfrac{1+\nu}{E}\cdot(\sigma_0-\sigma_0)}+r\cdot\cancel{\dfrac{d\varepsilon^t}{dr}}=0 \\ \dfrac{d}{dr}(\sigma_0\cdot r\cdot h)-\sigma_0\cdot h+\rho\cdot\omega^2\cdot r^2\cdot h=0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_0 \cdot r \cdot h\right) - \sigma_0 \cdot h + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h = 0$$

$$\sigma_0 \cdot \underbrace{\frac{d}{dr}\left(r \cdot h\right)}_{r \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{dr}{dr} \cdot h} - \sigma_0 \cdot h + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h = 0$$

$$\sigma_0 \cdot r \cdot \frac{dh}{dr} + \cancel{\sigma_0 \cdot h} - \cancel{\sigma_0 \cdot h} + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h = 0$$

$$\sigma_0 \cdot r \cdot \frac{dh}{dr} + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h = 0$$

$$dh = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^{\cancel{2}} \cdot h}{\sigma_0 \cdot \cancel{r}} \cdot dr$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r}{\sigma_0} \cdot dr$$ — **Д.У. толщины h диска равного сопротивления**. (XV.7)

Общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\boxed{\ln h = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot \sigma_0} + C} \qquad (XV.8)$$

Одна константа – одно Г.У. : $\quad r = 0: \quad \underset{\substack{\text{зададимся}\\ \text{толщиной диска}\\ \text{на оси вращения}}}{h = h_в} \quad \Rightarrow \quad C = \ln h_в$

При таком значении константы С:

$$\ln h = \ln h_в - \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot \sigma_0}$$

$$\ln \frac{h}{h_в} = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot \sigma_0}$$

$$l\frac{h}{h_в}=e^{-\frac{\rho\cdot\omega^2\cdot r^2}{2\cdot\sigma_0}}$$

$$\boxed{h=h_в\cdot e^{-\frac{\rho\cdot\omega^2\cdot r^2}{2\cdot\sigma_0}}}$$ — **уравнение толщины диска равного сопротивления** (*XV*.9)

здесь $h_в$ и σ_0 – наперёд заданные величины (*рис. XV.8.*):

$h_в$ – толщина диска на оси вращения;

σ_0 – эквивалентное (по энергетической теории) напряжение в материале диска.

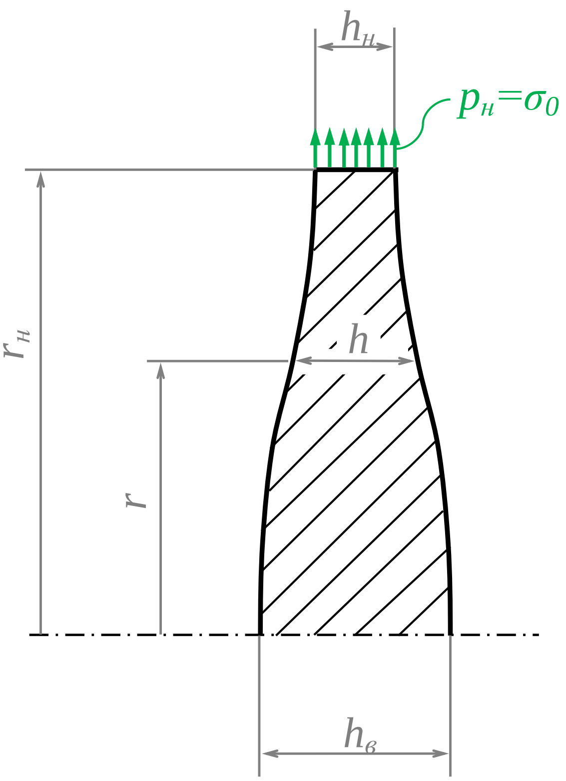

Рис. XV.8.

Толщина наружного края диска:

$$h_н=h(r_н)=h_в\cdot e^{-\frac{\rho\cdot\omega^2\cdot r_н^2}{2\cdot\sigma_0}}$$

Дабы соблюсти условие *(а)* по части σ_r , на наружном крае обязательно долно быть приложено давление:

$$p_н=\sigma_0$$

П р и м е ч а н и е:

Теоретически можно рассчитать толщину $h(r)$ диска равного сопротивления с отверстием в центре (*рис. XV.9.*).

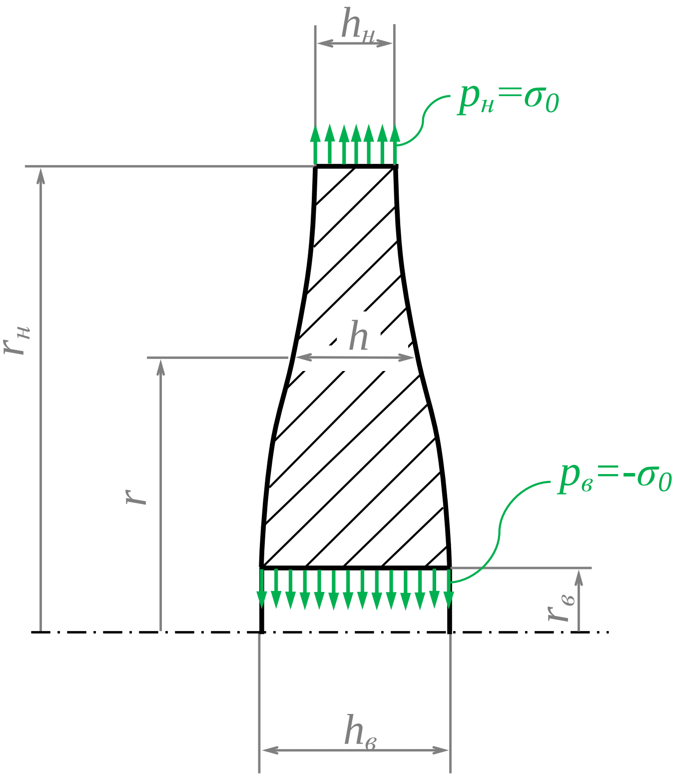

Рис. XV.9.

Используем ДУ (*XV.8*)

$$\ln h = -\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot \sigma_0} + C$$

и ГУ

$$r = r_в: \quad h = h_в$$

Получим:

$$h(r) = h_в \cdot e^{-\frac{\rho \cdot \omega^2}{2 \cdot \sigma_0} \cdot \left(r^2 - r_в^2\right)}$$

Однако, для соблюдения условия (а) на внутреннем крае должно быть приложено давление *вовнутрь* (см. *рис. XV.9* , *рис. XV.1*)

$$p_в = -\sigma_0$$

Обеспечить такое условие на практике невозможно.