

УДК 621.74:624.075:539.3

Агапов В.П., Гаврюшин С.С., Крунин А.Л., Крамский Н.А.

“Строительная механика автомобиля и трактора”.

Учебник. М.: МГТУ “МАМИ”, 2002. – 400 стр., илл.

В книге изложены как традиционные, так и современные методы статического и динамического расчета элементов несущих конструкций автотракторной техники, связанных с оценкой их прочности. Изложены основы теории расчета стержневых систем, пластин и оболочек. Широко освещены вопросы, связанные с использованием ЭВМ.

Учебник предназначен для студентов машиностроительных специальностей вузов, но может быть полезен широкому кругу научно-технический и инженерных работников, связанных с расчетами конструкций различных типов на прочность, устойчивость и колебания.

Рецензенты:

Зав. кафедрой сопротивления материалов РУДН, чл.-кор. РААСН  
Академик МАНВШ, засл. деятель науки и техники РФ, д-р тех.  
наук, проф. М.И. Ерхов.

Д-р тех. наук, проф. А.В. Коровайцев.

ISBN 5-94307-010-9

ISBN 5-943-07010-9



© Московский государственный технический университет МАМИ, 2002

© Агапов В.П., Гаврюшин С.С., Крунин А.Л., Крамский Н.А., 2002

Подписано в печать 25.05.2002 г. Формат 60x84 1/16. Бумага  
офсетная. Печать офсетная. Усл. Печ. листов – 25. Тираж  
1000. Заказ № 56

Отпечатано в Московской типографии №12 Министерства по делам  
печати, телевидению и средств массовой коммуникации.  
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 40, стр. 6

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
Введение .....	9
В.1. Общие положения .....	9
В.2. Обзор металлоконструкций автомобилей и тракторов .....	10
В.3. Классификация внешних нагрузок .....	17
<b>Глава 1. Основные соотношения и вариационные принципы механики твердого деформируемого тела .....</b>	<b>19</b>
1.1. Краткие сведения из нелинейной теории упругости .....	19
1.1.1. Теория деформаций .....	19
1.1.2. Теория напряжений .....	24
1.1.3. Физические соотношения .....	32
1.2. Краткие сведения из теории пластичности .....	34
1.2.1. Постановка задач теории пластичности .....	34
1.2.2. Основные законы теории пластичности .....	35
1.2.3. Постулат Друкера .....	43
1.2.4. Ассоциированный закон текучести .....	44
1.2.5. Теория пластического течения .....	45
1.3. Основные теоремы строительной механики .....	48
1.3.1. Общие положения .....	48
1.3.2. Работа внешних сил .....	50
1.3.3. Работа внутренних сил. Потенциальная энергия .....	51
1.3.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений .....	58
1.4. Вариационные принципы механики .....	61
1.4.1. Вариационный принцип Лагранжа .....	61
1.4.2. Вариационный принцип Кастильяно .....	64
<b>Глава 2. Прикладные и численные методы строительной механики .....</b>	<b>66</b>
2.1. Сведение краевых задач к задаче Коши .....	66
2.1.1. Численное решение задачи Коши .....	66
2.1.2. Метод начальных параметров .....	70
2.2. Вариационные методы .....	72
2.2.1. Метод Релея-Ритца .....	72
2.2.2. Метод Бубнова-Галеркина .....	73
2.3. Метод конечных элементов .....	74
2.3.1. Идея метода конечных элементов .....	74
2.3.2. Алгоритм МКЭ в форме метода перемещений .....	75
2.3.3. Вывод основного матричного уравнения движения конечного элемента из уравнений Лагранжа второго род .....	80

2.3.4. Частные случаи применения основного уравнения.....	85
2.3.5. Матричные характеристики конечных элементов произвольного типа.....	87
2.3.6. Уравнение движения и матричные характеристики конструкции.....	90
<b>Глава 3. Расчет стержневых систем .....</b>	<b>93</b>
3.1. Статически определимые системы.....	93
3.1.1. Опоры. Конструкции опор и их условные обозначения.....	93
3.1.2. Кинематический анализ стержневых систем.....	96
3.1.3. Определение усилий в статически определимых балках.....	101
3.1.4. Определение усилий в трехшарнирных арках и рамах.....	105
3.1.5. Определение усилий в стержнях ферм.....	108
3.1.6. Определение усилий в статически определимых рамах.....	111
3.2. Статически неопределимые системы.....	114
3.2.1. Общая формула для определения перемещений в стержневых системах.....	114
3.2.2. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....	122
3.2.3. Расчет стержневых систем методом перемещений.....	133
3.2.4. Матричная форма метода перемещений.....	138
3.3. Примеры расчета.....	147
3.3.1. Пример расчета рамы методом перемещений.....	147
3.3.2. Расчет рамы грузового автомобиля на ЭВМ.....	151
3.3.3. Расчет каркаса автобуса на ЭВМ.....	157
<b>Глава 4. Расчет деталей и элементов автотракторной техники, обладающих осевой симметрией.....</b>	<b>160</b>
4.1. Напряжения и деформации в кольцевых деталях при осесимметричной нагрузке.....	160
4.2. Осесимметрично нагруженные толстостенные цилиндры.....	168
4.2.1. Расчет толстостенных цилиндров. Задача Ламе.....	168
4.2.2. Расчет и проектирование составных труб.....	175
4.3. Напряжения и деформации в неравномерно нагретых вращающихся дисках.....	179
4.3.1. Напряжения в дисках при неравномерном нагреве.....	179
4.3.2. Вращающиеся неравномерно нагретые диски постоянной толщины.....	182
4.3.3. Диски равного сопротивления и конические диски.....	186
4.3.4. Расчет вращающихся дисков на ЭВМ.....	188
<b>Глава 5. Расчеты упругих элементов автотракторной техники.....</b>	<b>190</b>
5.1. Листовые рессоры.....	190
5.1.1. Расчет листовых рессор по методу общей кривизны.....	190
5.1.2. Расчет листовых рессор по методу концевых сил.....	191
5.1.3. Учет контактного взаимодействия листов в рессоре.....	193
5.1.4. Расчет рессор на ЭВМ.....	198

5.2. Витые пружины.....	200
5.2.1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях витых пружин.....	200
5.2.2. Расчет напряжений и деформаций в пружинах.....	201

**Глава 6. Пространственные тонкостенные конструкции .....** 204

6.1. Изгиб и кручение стержней с тонкостенным поперечным сечением.....	204
6.1.1. Общие сведения. Основные гипотезы.....	204
6.1.2. Свободное кручение тонкостенного стержня открытого профиля.....	205
6.1.3. Стесненное кручение тонкостенных стержней.....	213
6.2. Расчет пластинок.....	221
6.2.1. Основные понятия теории изгиба пластинок.....	221
6.2.2. Перемещения и деформации пластинки.....	222
6.2.3. Напряжения в пластинке.....	223
6.2.4. Усилия в пластинке.....	225
6.2.5. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки.....	226
6.2.6. Круглые пластинки.....	229
6.3. Основы расчета оболочек.....	244
6.3.1. Элементы общей теории оболочек.....	244
6.3.2. Безмоментная теория оболочек.....	263
6.3.3. Безмоментная теория оболочек вращения.....	266
6.3.4. Моментная теория цилиндрических оболочек.....	272
6.4. Расчет пластинок и оболочек методом конечных элементов.....	287
6.4.1. Расчет пластинок.....	287
6.4.2. Расчет оболочек.....	291

**Глава 7. Статическая устойчивость элементов автотракторной техники. Расчеты на устойчивость.....** 306

7.1. Основные понятия. Классические методы определения критических нагрузок.....	306
7.2. Расчет стержней на устойчивость.....	307
7.2.1. Устойчивость однопролетных стержней постоянного сечения.....	307
7.2.2. Пример расчета на устойчивость.....	311
7.2.3. Определение критических нагрузок в сложных случаях нагружения стержней.....	313
7.3. Продольно-поперечный изгиб.....	320
7.3.1. Уравнение метода начальных параметров.....	320
7.3.2. Пример расчета на продольно-поперечный изгиб.....	325
7.4. Расчеты на устойчивость методом конечных элементов.....	327
7.4.1. Метод определения минимального критического параметра при расчете на устойчивость в малом.....	327

7.4.2. Расчет тонкостенных конструкций на устойчивость с учетом начальных перемещений .....	338
7.4.3. Примеры расчета на устойчивость элементов автотракторной техники на ЭВМ .....	341
<b>Глава 8. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов .....</b>	<b>343</b>
8.1. Основные понятия .....	343
8.2. Метод предельного равновесия .....	344
8.3. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций методом конечных элементов .....	347
8.4. Определение предельных нагрузок на конструкции автомобилей и тракторов на ЭВМ .....	351
8.4.1. Расчет бампера легкового автомобиля .....	351
<b>Глава 9. Динамический расчет конструкций автомобиля и трактора .....</b>	<b>355</b>
9.1. Степень свободы конструкции .....	355
9.2. Системы с одной степенью свободы. Свободные и вынужденные колебания .....	356
9.2.1. Собственные колебания без учета сил сопротивления .....	357
9.2.2. Собственные колебания с учетом сил сопротивления .....	359
9.2.3. Действие вибрационной силы на систему с одной степенью свободы .....	361
9.3. Системы со многими степенями свободы .....	363
9.4. Динамический расчет конструкций методом конечных элементов .....	364
9.4.1. Собственные колебания .....	364
9.4.2. Условия ортогональности форм собственных колебаний .....	367
9.4.3. Нормирование форм собственных колебаний .....	369
9.4.4. Вынужденные колебания .....	370
9.4.5. Модальное интегрирование уравнений движения .....	371
9.4.6. Условия ортогональности матрицы демпфирования .....	372
9.4.7. Прямое интегрирование уравнений движения .....	374
9.5. Примеры расчета конструкций автомобиля и трактора .....	377
9.5.1. Определение частот и форм собственных колебаний каркаса кузова автобуса .....	377
<b>Приложения .....</b>	<b>380</b>
<b>Литература .....</b>	<b>396</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пожалуй, ни в одной области техники проблемы прочности не касаются непосредственно такого большого количества людей, как в автомобилестроении. Автомобиль вошел в жизнь и быт миллионов людей как средство передвижения, во многих случаях стал незаменимым средством перевозки грузов. Надежность функционирования, а также безопасность автомобиля, к которым в последнее время предъявляются повышенные требования, в первую очередь определяются его прочностью и надежностью, т.е. способностью выдерживать эксплуатационные нагрузки не разрушаясь и не испытывая таких деформаций, которые сделали бы невозможной его дальнейшую эксплуатацию. В связи с этим существенно возросла роль научных дисциплин, связанных с расчетом конструкций на прочность. В первую очередь это относится к строительной механике. Строительной механикой в широком смысле слова называется наука о методах расчета конструкций различных типов, - строительных, машиностроительных, транспортных и т.п., - на прочность и жесткость. Возникла она в середине 19-го века на базе знаний, накопленных к тому времени в общей механике. Объектами ее изучения были поначалу стержневые конструкции, применяемые, главным образом, в строительстве. Это, по-видимому, предопределило название науки как строительной механики. Однако методами строительной механики могут быть рассчитаны конструкции, применяемые и в других областях техники.

По мере развития науки и техники объектами изучения строительной механики становились все новые и новые типы конструкций, такие как пластинки, оболочки, массивные среды. Необходимость учета различных воздействий привела к разделению строительной механики на статику и динамику, стремление же к экономии материала, а, следовательно, и к созданию более гибких конструкций привело к выделению раздела, связанного с исследованием устойчивости.

С развитием промышленности и образования возросла потребность в специалистах, способных решать проблемы прочности конструкций, с одной стороны, и повысилась роль строительной механики при подготовке таких специалистов в высших учебных заведениях, с другой. Появились такие учебные дисциплины, как "Строительная механика корабля", "Строительная

механика самолета”, “Строительная механика автомобиля и трактора” и т.д. Следует помнить, однако, что есть лишь одна научная дисциплина – **строительная механика** вообще, и ее методами могут быть рассчитаны как строительные конструкции, так и конструкции автомобилей, тракторов, кораблей, самолетов и т.д.

Поэтому в данном учебном пособии, названном “Строительная механика автомобиля и трактора” и предназначенного, в первую очередь, для студентов автомобильных вузов, излагаются общие положения строительной механики и рассматриваются особенности применения общих методов к расчету автотракторных конструкций. Однако данное учебное пособие может быть полезно студентам и аспирантам, обучающимся по другим техническим специальностям, связанным с расчетом конструкций на прочность, а также инженерно-техническим работникам, занимающимся расчетом и проектированием различных объектов техники.

## ВВЕДЕНИЕ

### В.1. Общие положения

Данный курс посвящен описанию методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость наиболее типичных металлоконструкций автомобилей и тракторов. Он основан на курсах теоретической механики, сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности, вычислительной математики. Предполагается, что читатель знаком с основами перечисленных дисциплин. Тем не менее, некоторые наиболее важные разделы из этих дисциплин, необходимые для понимания излагаемого материала, приводятся в данном пособии (главы 1 и 2).

Напомним, что в сопротивлении материалов, теории упругости и теории пластичности также ставится задача расчета на прочность и жесткость. Однако, если в перечисленных дисциплинах рассматриваются, главным образом, отдельные элементы конструкций, – стержни, пластинки, оболочки, массивные тела, – то в строительной механике основное внимание уделяется системам, составленным из множества подобных элементов, связанных между собой, что и имеет место в реальных конструкциях. В данной книге, прежде всего, описываются методы расчета стержневых систем (глава 3), в том числе ставшие уже классическими методы сил и перемещений. Дается современная матричная формулировка метода перемещений, причем необходимые для понимания этого раздела сведения из теории матриц излагаются в приложении П.1. Приводятся основные соотношения теории изгиба пластинок (гл. 5). Выводятся основные соотношения метода конечных элементов (МКЭ), ставшего в последние десятилетия основным методом расчета сложных пространственных комбинированных конструкций (гл. 2). Для мембран, работающих на действие сил в своей плоскости, и пластинок, работающих на изгиб, приводятся развернутые соотношения метода конечных элементов (гл. 5). В связи с широким применением в конструкциях автомобилей и тракторов тонкостенных стержней значительное внимание уделено особенностям расчета подобных элементов (гл.5).

В учебное пособие включен раздел, связанный с расчетом конструкций автомобиля и трактора на собственные и вынужденные колебания (гл.9). Знание частот и форм собственных колебаний отдельных узлов и конструкции в целом позволяет конструкторам избежать возникновения резонансов, пагубно влияющих на работоспособность конструкции, а расчеты на вынужденные колебания позволяют оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) при действии динамических нагрузок.

Отметим, что большая часть конструкций автомобилей и тракторов обладает достаточно большой жесткостью, что практически делает невозможной потерю устойчивости. Однако для более точной оценки НДС сжатых элементов и определения предельных нагрузок для них в учебное пособие включен раздел, посвященный расчету на продольно-поперечный изгиб и устойчивость (гл. 7).

Для большей части узлов и агрегатов конструкций автомобилей и тракторов недопустимо возникновение пластических деформаций в процессе эксплуатации. Поэтому проектирование транспортных средств ведется таким образом, чтобы напряжения в элементах конструкции при эксплуатационных нагрузках не достигали предела текучести, или, иначе говоря, чтобы материал конструкции работал в линейной (упругой) части диаграммы напряжение-деформация. Необходимо учитывать, однако, и возможность возникновения аварийных ситуаций. Для оценки безопасности транспортных средств при дорожно-транспортных происшествиях необходимо знание предельных (разрушающих) нагрузок. До последнего времени для всех вновь проектируемых транспортных средств проводились тесты на разрушение, в результате которых и определялись разрушающие нагрузки. Эти тесты проводились на реальных образцах транспортной техники, что существенно удорожало процесс проектирования. В настоящее время процессы разрушения конструкций моделируются на ЭВМ. Это требует проведения расчетов с учетом пластических свойств материалов. Основы таких расчетов излагаются в данном учебном пособии (гл. 8).

## В.2. Обзор металлоконструкций автомобилей и тракторов

К основным металлоконструкциям, изучаемым в курсе строительной механики автомобиля и трактора, относятся несущие и ходовые системы этих машин: рамы, кузова, кабины, упругие элементы подвесок (пружины, рессоры, торсионы), колеса и другие элементы.

**Рамы.** Рамы автомобиля и трактора служат для размещения двигателя, агрегатов трансмиссии, системы управления и кузова. Они подразделяются на два основных типа: лонжеронные и хребтовые. Лонжеронная рама обычно состоит из двух продольных балок (лонжеронов) и нескольких поперечных (рис. в.1). Ее составляющими элементами являются тонкостенные балки открытого и закрытого профиля, которые соединяются между собой с использованием некоторых дополнительных конструктивных элементов при помощи сварки или клепки. Схематическое изображение рамы хребтового типа приведено на рис. в.2. Главной отличительной особенностью такой рамы является наличие центральной балки (хребта).

**Кузова.** Кузова предназначены для размещения водителя, пассажиров и перевозимого груза. Внутри кузова должно быть сформировано избыточное закрытое пространство, по объему достаточное для размещения водителя и пассажиров с учетом деформирования кузова при дорожно-транспортных происшествиях. По конструктивному исполнению кузова большинства современных легковых автомобилей представляют собой тонкостенные бескаркасные объемные оболочечные конструкции, состоящие из несущей панели основания (пола) 1, усиленной ребрами жесткости и глубокими технологическими выдавками, и отдельных штампованных элементов (передних крыльев 4, левой и правой боковин с задними крыльями 2 и крыши), соединенных точечной сваркой (рис. в.3). Различные конструктивные

схемы кузовов легковых автомобилей показаны на рис. в.4. Типовые сечения стержневых элементов, используемых в конструкциях кузовов, показаны на рис. в.5.

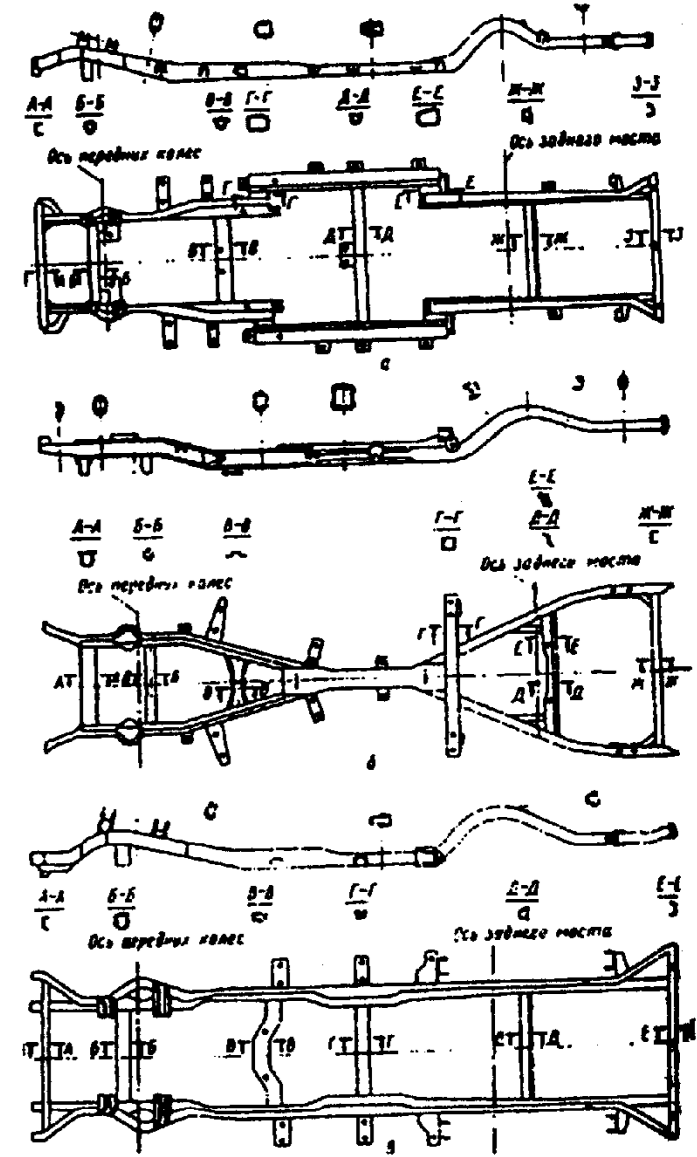


Рис. в.1

Для большей части узлов и агрегатов конструкций автомобилей и тракторов недопустимо возникновение пластических деформаций в процессе эксплуатации. Поэтому проектирование транспортных средств ведется таким образом, чтобы напряжения в элементах конструкции при эксплуатационных нагрузках не достигали предела текучести, или, иначе говоря, чтобы материал конструкции работал в линейной (упругой) части диаграммы напряжение-деформация. Необходимо учитывать, однако, и возможность возникновения аварийных ситуаций. Для оценки безопасности транспортных средств при дорожно-транспортных происшествиях необходимо знание предельных (разрушающих) нагрузок. До последнего времени для всех вновь проектируемых транспортных средств проводились тесты на разрушение, в результате которых и определялись разрушающие нагрузки. Эти тесты проводились на реальных образцах транспортной техники, что существенно удорожало процесс проектирования. В настоящее время процессы разрушения конструкций моделируются на ЭВМ. Это требует проведения расчетов с учетом пластических свойств материалов. Основы таких расчетов излагаются в данном учебном пособии (гл. 8).

## В.2. Обзор металлоконструкций автомобилей и тракторов

К основным металлоконструкциям, изучаемым в курсе строительной механики автомобиля и трактора, относятся несущие и ходовые системы этих машин: рамы, кузова, кабины, упругие элементы подвесок (пружины, рессоры, торсионы), колеса и другие элементы.

**Рамы.** Рамы автомобиля и трактора служат для размещения двигателя, агрегатов трансмиссии, системы управления и кузова. Они подразделяются на два основных типа: лонжеронные и хребтовые. Лонжеронная рама обычно состоит из двух продольных балок (лонжеронов) и нескольких поперечных (рис. в.1). Ее составляющими элементами являются тонкостенные балки открытого и закрытого профиля, которые соединяются между собой с использованием некоторых дополнительных конструктивных элементов при помощи сварки или клепки. Схематическое изображение рамы хребтового типа приведено на рис. в.2. Главной отличительной особенностью такой рамы является наличие центральной балки (хребта).

**Кузова.** Кузова предназначены для размещения водителя, пассажиров и перевозимого груза. Внутри кузова должно быть сформировано избыточное закрытое пространство, по объему достаточное для размещения водителя и пассажиров с учетом деформирования кузова при дорожно-транспортных происшествиях. По конструктивному исполнению кузова большинства современных легковых автомобилей представляют собой тонкостенные бескаркасные объемные оболочечные конструкции, состоящие из несущей панели основания (пола) 1, усиленной ребрами жесткости и глубокими технологическими выдавками, и отдельных штампованных элементов (передних крыльев 4, левой и правой боковин с задними крыльями 2 и крыши), соединенных точечной сваркой (рис. в.3). Различные конструктивные

схемы кузовов легковых автомобилей показаны на рис. в.4. Типовые сечения стержневых элементов, используемых в конструкциях кузовов, показаны на рис. в.5.

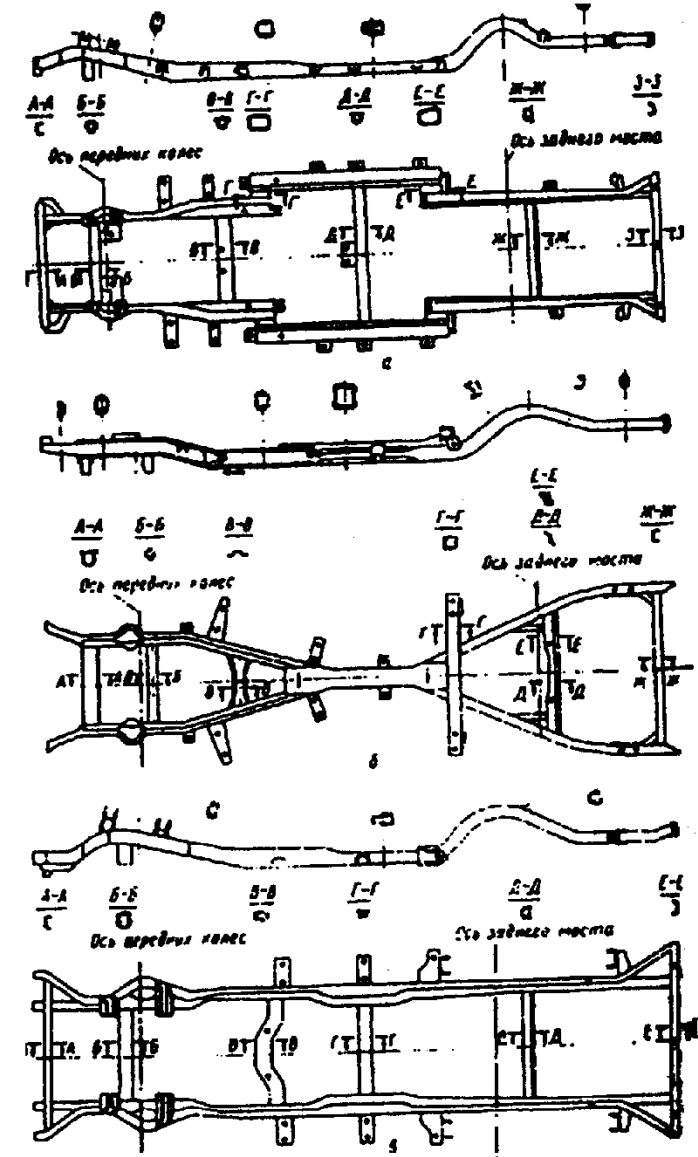


Рис. в.1

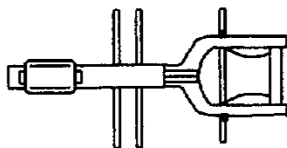


Рис. в.2

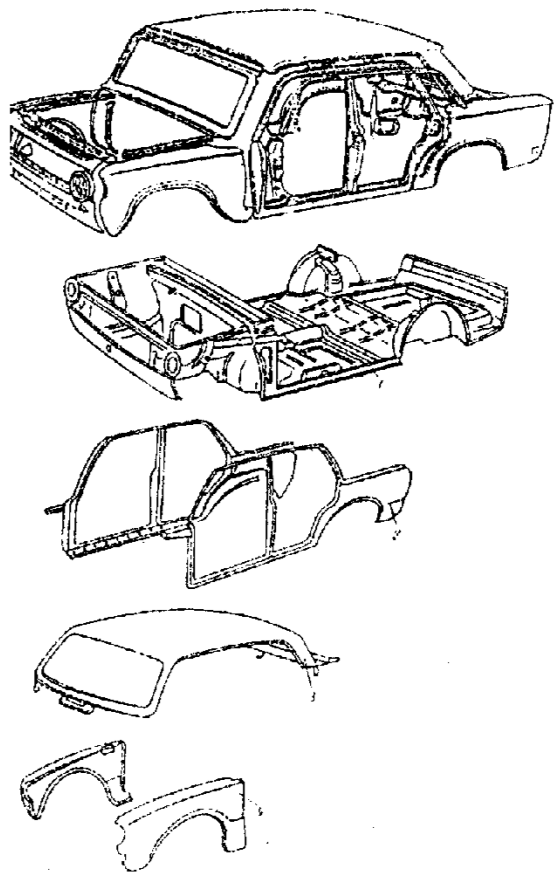
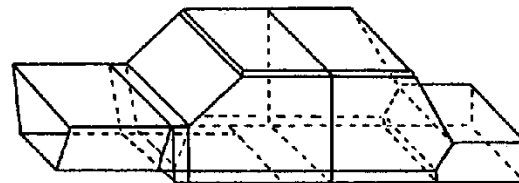


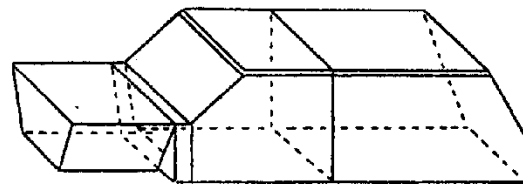
Рис. в.3

Кузова автобусов, как правило, представляют собой каркасные конструкции, состоящие из сварочных трубчатых элементов, к которым крепятся наружная и внутренняя облицовка. Принципиальная схема каркаса кузова автобуса показана на рис. в.6.

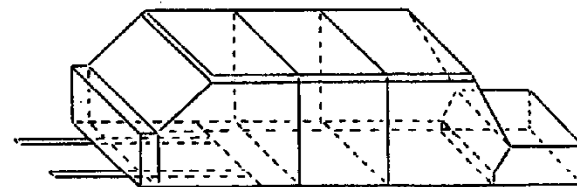
К специальным кузовам относятся фургоны и цистерны. Они представляют собой тонкостенные оболочечные конструкции.



а)

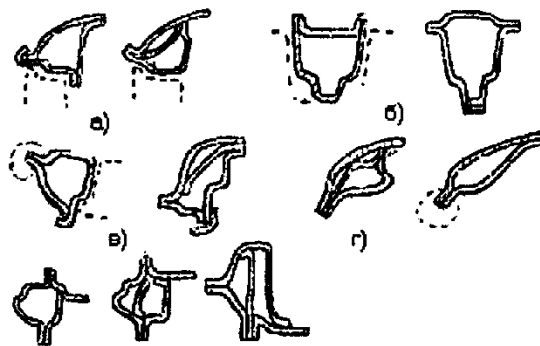


б)



в)

Рис. в.4



д)

Рис. в.5

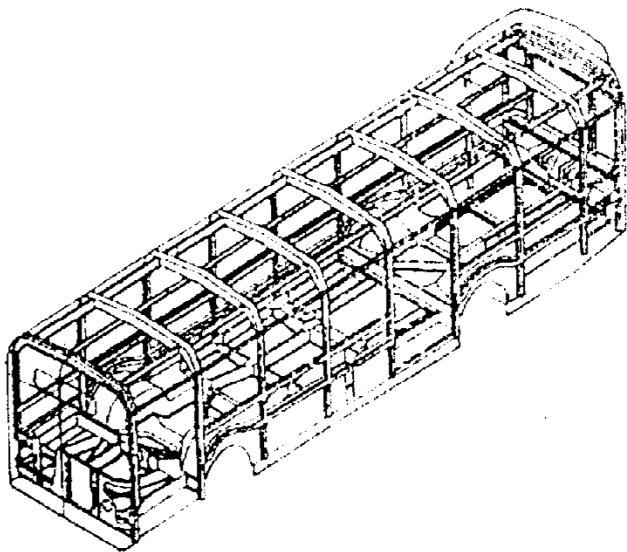


Рис.в.6

Кузова грузовых автомобилей представляют собой пространственные коробчатые конструкции, состоящие из отдельных усиленных плоских панелей.

**Кабины.** Кабины грузовых автомобилей выполняются отдельно от кузова (грузовой платформы) и представляют собой тонкостенные объемные оболочечные конструкции, состоящие из рамного каркаса, крыши и верхней, задней и боковых панелей.

Кабины тракторов могут иметь как оболочечную, так и каркасную конструкцию. Каркасные варианты таких конструкций показаны на рис. в.7.

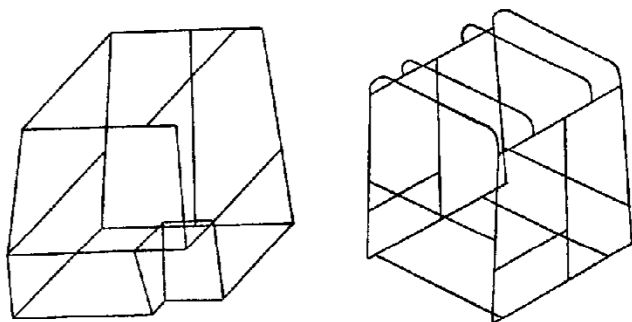


Рис.в.7

**Подвески.** Подвески являются ударно-виброзащитными системами автомобилей и тракторов. Они обеспечивают уменьшение динамических на-

грузок в ходовой и несущей системах и плавность хода машины. Различают пружинные, рессорные, пневматические и гидропневматические подвески.

**Колеса.** Колеса автомобилей и тракторов представляют собой сложные тонкостенные конструкции, включающие обод и диски. Нагруженность обода обусловлена в основном давлением воздуха в шине, а диска – усилиями, передаваемыми на колеса от дороги.

**Узловые соединения.** Конструирование узловых соединений относится к наиболее сложным и ответственным задачам, решаемым при разработке конструкций. Разрушение конструкций, как правило, начинается именно в узлах. При конструировании узлов руководствуются следующими принципами:

- концентраторы напряжений по возможности выводятся из нагруженных зон (примеры правильного и ошибочного решения этого вопроса показаны на рис. в.8);

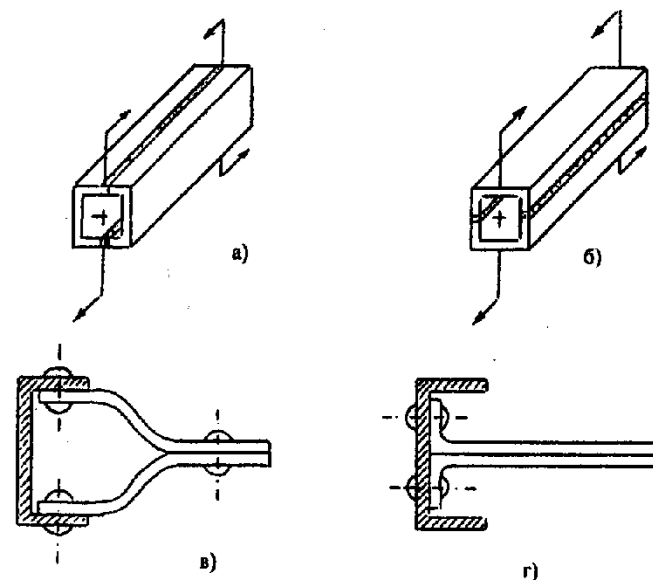


Рис.в.8

- для повышения жесткости узлов используются стержни закрытого профиля (рис. в.9, а, б);
- повышается степень статической неопределимости конструкции за счет использования дополнительных элементов типа вставок и мембран (рис. в.9, в);
- уменьшается эффект стесненного кручения стержней открытого профиля за счет замены их в наиболее нагруженных зонах на стержни закрытого профиля или за счет постановки дополнительной мембраны (рис. в.9, в).



Примеры соединений поперечин с лонжеронами рам грузовых автомобилей показаны на рис. в.9,г.

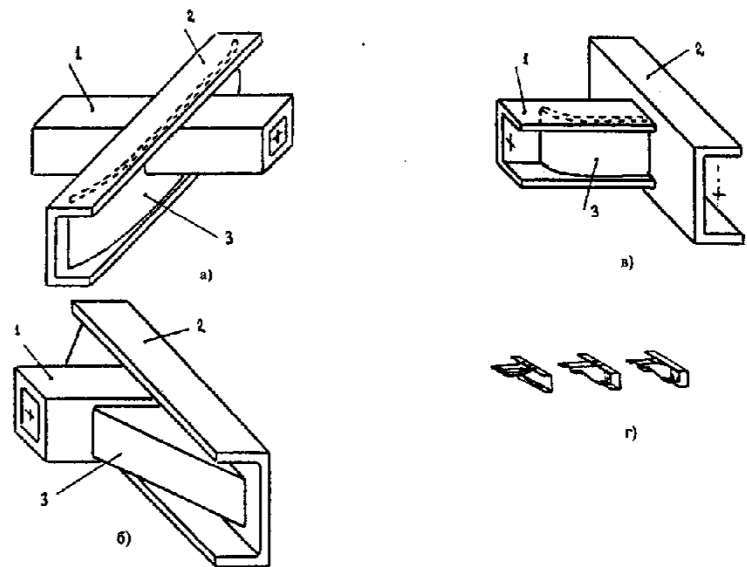


Рис.в.9

Особую сложность представляет разработка рациональных конструкций объемных трехлучевых соединений. Примеры решения этих задач применительно к узловым соединениям защитных каркасных кабин тракторов показаны на рис. в.10.

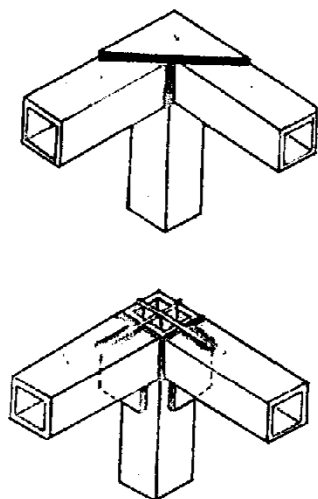


Рис.в.10

Из приведенного краткого обзора следует, что металлоконструкции автомобилей и тракторов представляют собой сложные системы, в основе которых лежат тонкостенные стержни, пластины и оболочки. Расчету таких элементов в данном курсе уделяется основное внимание.

### В. 3. Классификация внешних нагрузок

В эксплуатации автомобили и тракторы подвергаются различного рода силовым воздействиям. Эти воздействия можно подразделить на систематические, возникающие в нормальных условиях эксплуатации, и на редкие единичные, которые могут возникнуть в экстремальных ситуациях и при дорожно-транспортных происшествиях (при столкновениях, опрокидывании и т.п.). Металлоконструкции машин должны выдерживать первые из этих воздействий, не разрушаясь в течение заданного срока службы. Прочность, деформируемость и энергоемкость металлоконструкций машин (кузовов) должны обеспечивать защиту водителя, пассажиров и перевозимого груза при единичных ударных воздействиях.

К систематическим нагрузкам относятся (рис. в.11): статические и инерционные составляющие вертикальных  $q_v(x, y, z, t)$ , горизонтальных  $q_h(x, y, z, t)$  и боковых  $q_b(x, y, z, t)$  нагрузок, возникающих от распределенных масс металлоконструкций, сосредоточенные силы  $F_{zp}, F_{dp}, \dots$ , возникающие от сосредоточенных масс перевозимых грузов, агрегатов машины и т.п., реактивные силы от дороги  $R_1, R_2, R_3, R_4$  и другие. Эти нагрузки достоверно определяются только в результате специально поставленных экспериментов. При этом используется аппарат математической статистики, теории вероятности и теории случайных процессов.

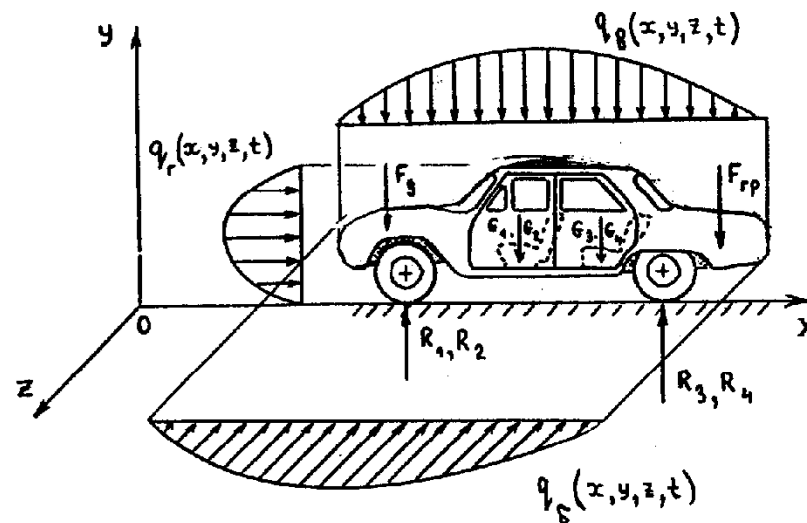


Рис. в.11

Единичные ударные нагрузки, возникающие в экстремальных ситуациях, оцениваются по величине кинетической энергии соударяемых объектов. При этом предельные значения этих нагрузок могут регламентироваться ГОСТами.

Из анализа схемы нагружения легкового автомобиля, показанной на рис. в.11, следует, что его кузов (а для грузовых автомобилей и тракторов — остовы и рама) подвергаются в эксплуатации совместному воздействию растяжения-сжатия, изгиба, кручения и сдвига. Для таких конструкций может использоваться иерархическая последовательность расчетных схем (начиная с простейших балок и рам и кончая сложными статически неопределимыми пространственными оболочечными системами), в которых с различной степенью детализации отражались бы особенности реальных конструкций. При этом в расчетных схемах целесообразно выделять основные (наиболее опасные для конструкции) виды нагружения.

# Глава 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

## 1.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 1.1.1. Теория деформаций

Расчет любой конструкции на прочность связан с определением напряжений, а расчет на жесткость — с определением перемещений. Лишь в редких случаях удастся сразу найти напряжения; как правило, приходится рассматривать еще и деформации конструкции. Таким образом, в расчетах на прочность и жесткость ключевыми являются понятия перемещений, деформаций и напряжений. Уточним эти понятия.

Пусть некоторая конструкция испытывает действие внешних сил, как показано на рис. 1.1. Сплошной линией на этом рисунке показано положение конструкции до, а пунктирной — после деформации. Некоторая точка  $A$ , имеющая координаты  $x, y, z$  до деформации, в результате деформации перемещается в новое положение  $A'$  с координатами  $x+u, y+v, z+w$ . Приращения координат  $u, v$  и  $w$  точки  $A$  называются компонентами перемещения этой точки. Вообще говоря, компоненты перемещений зависят от координат, т.е.  $u \equiv u(x, y, z)$ ,

$v \equiv v(x, y, z)$ ,  $w \equiv w(x, y, z)$ . Однако в дальнейшем, для сокращения записи, будем обозначать компоненты перемещений буквами  $u, v, w$  без указания аргументов.

Обозначим новые координаты точки  $A$  буквами  $\xi, \eta, \zeta$ . Новые координаты тоже можно рассматривать как функции первоначальных координат  $x, y, z$ , т.е.  $\xi \equiv \xi(x, y, z)$ ,  $\eta \equiv \eta(x, y, z)$ ,  $\zeta \equiv \zeta(x, y, z)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z) &= x + u(x, y, z), & \eta(x, y, z) &= y + v(x, y, z), \\ \zeta(x, y, z) &= z + w(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Бесконечно близкая к точке  $A$  точка  $B$  с первоначальными координатами  $x+dx, y+dy, z+dz$  также переместится в новое положение. Новые координаты точки  $B$  можно найти, воспользовавшись разложением функции (1.1) в ряд Тэйлора. Пренебрегая малыми величинами второго и высших порядков малости, получим:

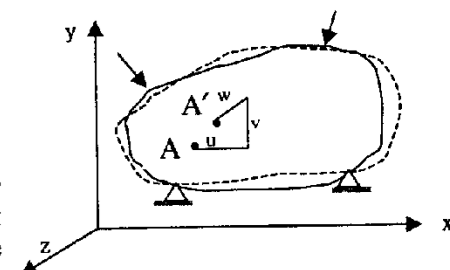


Рис. 1.1

$$\begin{aligned}
\xi(x+dx, y+dy, z+dz) &= \xi(x, y, z) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz = \\
&= \xi(x, y, z) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\
\eta(x+dx, y+dy, z+dz) &= \eta(x, y, z) + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz = \\
&= \eta(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\
\zeta(x+dx, y+dy, z+dz) &= \zeta(x, y, z) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz = \\
&= \zeta(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Сопоставляя (1.1) и (1.2), находим

$$\begin{aligned}
d\xi &= \xi(x+dx, y+dy, z+dz) - \xi(x, y, z) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\
d\eta &= \eta(x+dx, y+dy, z+dz) - \eta(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\
d\zeta &= \zeta(x+dx, y+dy, z+dz) - \zeta(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Графическая интерпретация полученных результатов дана на рис.1.2. Расстояния между точками А и В до и после деформации обозначим  $ds$  и  $ds_1$  соответственно. Очевидно, что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad ds_1^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2. \tag{1.4}$$

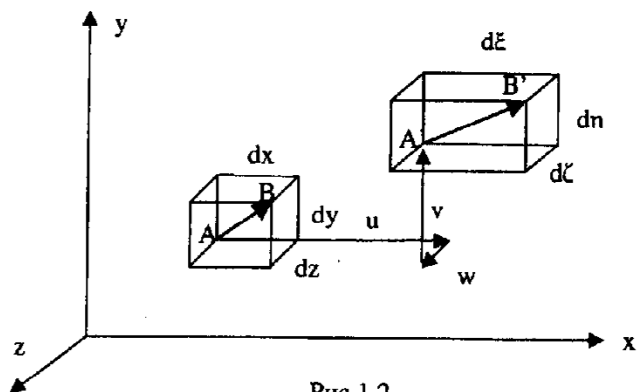


Рис.1.2

Составляя разность квадратов расстояний  $ds$  и  $ds_1$  и подставляя во вторую из формул (1.4) значения  $d\xi, d\eta, d\zeta$  из (1.3), получаем

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\left(\gamma_{xx} dx^2 + \gamma_{yy} dy^2 + \gamma_{zz} dz^2 + \gamma_{xy} dx dy + \gamma_{xz} dx dz + \gamma_{yz} dy dz\right) \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right], \\
\gamma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right], \\
\gamma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right], \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Назовем отношение абсолютного удлинения элемента  $AB$  к его первоначальной длине относительным удлинением в точке А в направлении точки В. Обозначим эту характеристику  $E_{AB}$ . Математически относительное удлинение выражается так:

$$E_{AB} = \frac{ds_1 - ds}{ds}. \tag{1.7}$$

Преобразуем левую часть формулы (1.5), учитывая (1.7). Получим

$$\begin{aligned}
ds_1^2 - ds^2 &= (ds_1 - ds)(ds_1 + ds) = E_{AB} ds (E_{AB} ds + ds + ds) = \\
&= E_{AB} ds^2 (E_{AB} + 2).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в уравнение (1.5), находим

$$\begin{aligned}
E_{AB} \left(1 + \frac{1}{2} E_{AB}\right) ds^2 &= \gamma_{xx} dx^2 + \gamma_{yy} dy^2 + \gamma_{zz} dz^2 + \gamma_{xy} dx dy + \\
&+ \gamma_{xz} dx dz + \gamma_{yz} dy dz.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Разделив левую и правую части соотношения (1.9) на  $ds^2$  и обозначив

$$\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \mu = \frac{dy}{ds}, \quad \nu = \frac{dz}{ds}, \quad (1.10)$$

получим

$$E_{AB} \left( 1 + \frac{1}{2} E_{AB} \right) = \gamma_{xx} \lambda^2 + \gamma_{yy} \mu^2 + \gamma_{zz} \nu^2 + \gamma_{xy} \lambda \mu + \gamma_{xz} \lambda \nu + \gamma_{yz} \mu \nu. \quad (1.11)$$

Отметим, что параметры  $\lambda, \mu$  и  $\nu$  являются направляющими косинусами отрезка АВ до деформации.

Таким образом, если функции перемещений известны, то деформации в произвольной точке в любом заданном направлении, определяемом направляющими косинусами  $\lambda, \mu$  и  $\nu$ , могут быть найдены по формулам (1.10) и (1.11). Величины  $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , называемые компонентами деформаций, полностью определяют деформацию конструкции в каждой ее точке. Выясним физический смысл этих компонентов.

Пусть элемент АВ в недеформированном теле параллелен оси X. Тогда  $\lambda = 1, \mu = \nu = 0$ . Из формулы (1.11) получаем

$$E_x \left( 1 + \frac{1}{2} E_x \right) = \gamma_{xx} \quad (1.12)$$

Отсюда

$$E_x = \sqrt{1 + 2\gamma_{xx}} - 1, \quad (1.13)$$

где  $E_x$  – относительное удлинение в точке А в направлении оси x.

Аналогично

$$\begin{aligned} E_y &= \sqrt{1 + 2\gamma_{yy}} - 1, \\ E_z &= \sqrt{1 + 2\gamma_{zz}} - 1, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $E_y, E_z$  – относительные удлинения в точке А в направлениях осей y и z.

Таким образом, компоненты деформаций  $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}$  характеризуют удлинения тех линейных элементов, которые до деформации параллельны координатным осям x, y, z.

Можно показать, что компоненты деформаций  $\gamma_{xy}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}$  характеризуют изменения первоначально прямых углов между линейными элементами  $dx, dy, dz$ , т.е. пропорциональны сдвигам (см. [27]).

Для удобства анализа компоненты деформаций часто представляют в тензорном виде. Тензор деформаций записывается так:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \gamma_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \gamma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

С учетом (1.6) и (1.15) тензор деформаций может быть выражен через перемещения с помощью одной компактной формулы:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.16)$$

В формуле (1.16) принято, что  $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ , а операция дифференцирования  $i$ -ой компоненты перемещения по  $j$ -ой координате записывается сокращенно в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}. \quad (1.17)$$

Кроме того, используется правило суммирования по повторяющемуся индексу, причем любой повторяющийся индекс изменяется от 1 до 3. Найдем, например, компонент тензора деформации  $\varepsilon_{11}$ . При  $i = 1$  и  $j = 1$  из формулы (1.17) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1} u_{1,1} + u_{2,1} u_{2,1} + u_{3,1} u_{3,1}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varepsilon_{11} = \gamma_{xx}$ . В общем случае необходимо помнить, что между компонентами деформаций и компонентами тензора деформаций существует следующая зависимость:  $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$  при  $i = j$  и  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  при  $i \neq j$ .

Тензор (1.15) называется тензором деформаций Грина.

В заключение данного раздела приведем без вывода формулы для компонентов деформаций в случае, когда компоненты деформаций и углы поворота малы по сравнению с единицей (имеются ввиду углы поворота бесконечно малых объемов, выделяемых из конструкции, вокруг координатных осей). В этом случае:

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2), & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_x \omega_y, \\ \gamma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_z^2), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_y \omega_z, \\ \gamma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_x^2), & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \omega_x \omega_z, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.19)$$

В формулах (1.19)  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - величины, характеризующие углы поворота в конструкции.

Если квадратами углов поворота и их произведениями можно пренебречь, то формулы для деформаций принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Формулами (1.20) можно пользоваться в тех случаях, когда удлинения, сдвиги и углы поворота малы по сравнению с единицей, а квадратичные комбинации углов поворота малы по сравнению с компонентами деформаций.

### 1.1.2. Теория напряжений

Напряжением называется интенсивность внутренних усилий. Возникают напряжения под действием внешних сил, температуры, начальных несовершенств. Для определения напряжений используется метод сечений. Положение плоскости сечения определяется нормалью  $v$  к этой плоскости (рис. 1.3).

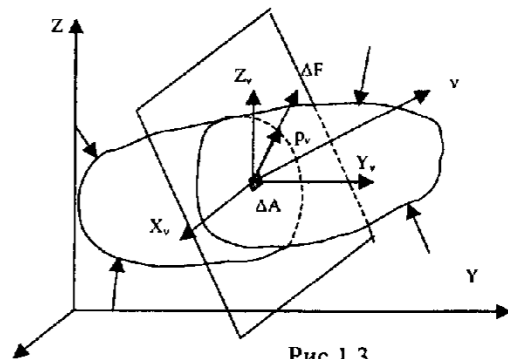


Рис. 1.3

Величина  $\Delta F / \Delta A$  называется средним напряжением на площадке  $\Delta A$ . Полным напряжением в точке на площадке с нормалью  $v$  называется величина

$$p_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F / \Delta A).$$

В общем случае полное напряжение  $p_v$  по направлению не совпадает с нормалью  $v$  и его удобно задавать тремя составляющими по координатным осям X, Y и Z. Эти составляющие обозначаются  $X_v, Y_v, Z_v$  (рис. 1.4).

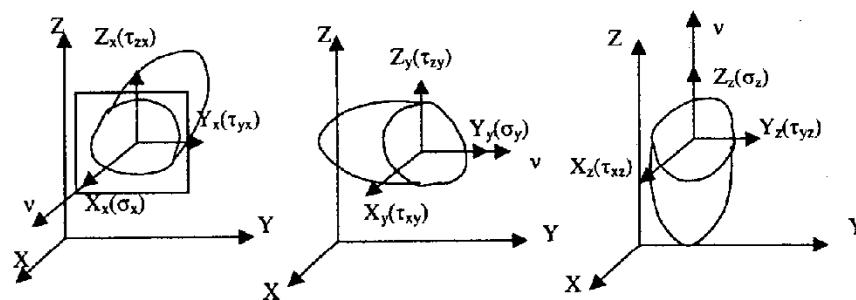


Рис. 1.4

Если плоскости сечения параллельны координатным плоскостям, то составляющие полного напряжения по координатным осям являются по существу нормальными (перпендикулярными плоскости сечения) и касательными (лежащими в плоскости сечения) напряжениями, которые обозначаются буквами  $\sigma$  и  $\tau$  с соответствующими индексами. Первый индекс в обозначении касательных напряжений показывает направление данного напряжения, а второй - нормаль к площадке, на которой оно действует. Например,  $\tau_{xy}$  есть касательное напряжение в направлении оси x на площадке, перпендикулярной оси y, и т.д.

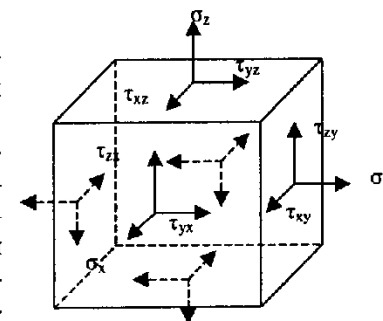


Рис. 1.5

Иногда полезной бывает другая система обозначений, а именно: оси обозначаются цифрами 1, 2 и 3, а компоненты напряжений - буквой  $\sigma$  с двумя цифровыми индексами. При этом компоненты с одинаковыми индексами соответствуют нормальным напряжениям, а компоненты с разными индексами - касательным.

Правило знаков для напряжений поясняется на рис. 1.5.

### Напряжения на наклонных площадках

Покажем, что если известны напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям, то можно найти напряжение на любой наклонной площадке. Вырежем из твердого тела бесконечно малый тетраэдр, три грани которого совпадают с координатными плоскостями, а четвертая наклонена к ним под произвольным углом. Обозначим через  $v$  нормаль к наклонной площадке. Легко показать, что

$$\frac{dA_x}{dA} = \cos(x, v); \quad \frac{dA_y}{dA} = \cos(y, v); \quad \frac{dA_z}{dA} = \cos(z, v),$$

где  $dA_x, dA_y, dA_z, dA$  – площади граней тетраэдра.

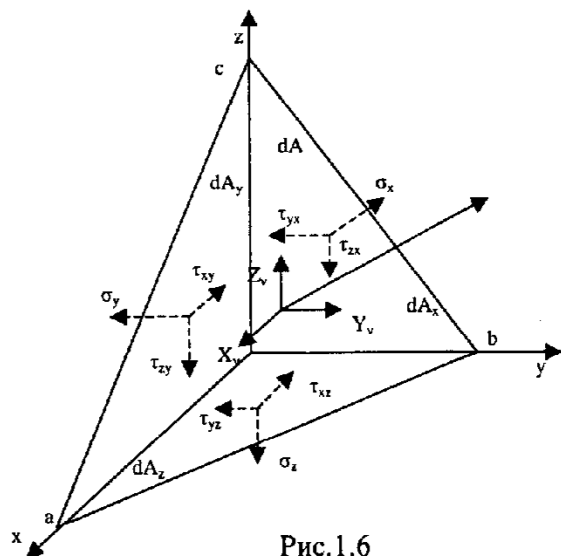


Рис. 1.6

Спроектируем все силы, действующие на тетраэдр, на ось  $X$ :

$$X_v dA - \sigma_x dA_x - \tau_{xy} dA_y - \tau_{xz} dA_z - X dV = 0. \quad (1.21)$$

В формуле (1.21)  $X$  – составляющая объемного усилия в направлении оси  $X$ ,  $dV$  – объем тетраэдра.

Так как площади граней тетраэдра представляют собой величины второго порядка малости, а его объем – бесконечно малую величину третьего порядка, то последним слагаемым в формуле (1.21) можно пренебречь.

Разделив выражение (1.21) на  $dA$ , получим

$$X_v - \sigma_x \frac{dA_x}{dA} - \tau_{xy} \frac{dA_y}{dA} - \tau_{xz} \frac{dA_z}{dA} = 0,$$

или

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0.$$

Аналогичные выражения могут быть получены из уравнений  $\sum Y = 0$  и  $\sum Z = 0$ . В результате получаем три следующие выражения:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1.22)$$

Если площадка  $dA$  совпадает с поверхностью тела, то  $X_v, Y_v, Z_v$  являются составляющими внешних сил, действующих на тело, и уравнения (1.22) называются условиями на поверхности, связывающими внутренние усилия с внешними силами.

### Понятие о тензоре напряжений

Тензором напряжений называется симметричная матрица, составленная из компонентов напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

### Главные напряжения и главные площадки

Нормальная составляющая напряжения на площадке  $abc$  равна

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n.$$

Полное напряжение на площадке  $abc$  равно

$$p_v^2 = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2.$$

С другой стороны,

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2. \quad (1.23)$$

Из уравнения (1.23) можно найти  $\tau_v$ .

Если площадка  $abc$  главная, то  $\tau_v = 0$  и  $\sigma_v = p_v$ , т.е. полное и нормальное напряжения для главной площадки равны по величине и по направлению. Иначе говоря, главными называются такие площадки, касательные напряжения на которых равны нулю.

Обозначим главные напряжения буквой  $\sigma$ . Проекции главного напряжения  $\sigma$  на координатные оси  $x, y, z$  равны

$$X_v = \sigma l; \quad Y_v = \sigma m; \quad Z_v = \sigma n. \quad (1.24)$$

Согласно (1.22) и (1.24),

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1.25)$$

Уравнения (1.25) содержат 4 неизвестных – главное напряжение  $\sigma$  и направляющие косинусы  $l, m, n$  площадки, на которой оно действует.

Из аналитической геометрии известно, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) представим в виде:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Система уравнений (1.27) является однородной. Эта система имеет два решения: нулевое (тривиальное) и ненулевое (нетривиальное). Но так как в силу (1.26) направляющие косинусы  $l, m, n$  не могут быть одновременно равны нулю, то следует искать нетривиальное решение. Система однородных уравнений имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Следовательно,

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

Раскрывая определитель (1.28), получаем

$$\begin{aligned} \sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уравнение (1.29) дает три корня  $-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Пусть  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Тогда  $\sigma_1$  — максимальное,  $\sigma_3$  — минимальное напряжения.

Для того, чтобы при известном главном напряжении найти направляющие косинусы соответствующей главной площадки, необходимо взять два любые уравнения из системы уравнений (1.27), добавить к ним уравнение (1.26) и решить вновь полученную систему уравнений относительно  $l, m, n$ .

В теории упругости доказано, что три главные площадки взаимно перпендикулярны.

### Инварианты тензора напряжений

Представим уравнение (1.29) в виде

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 - \sigma I_2 - I_3 = 0, \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \text{const} \\ I_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) = \text{const} \\ I_3 &= (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = \text{const} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Так как корни уравнения (1.30) не должны зависеть от выбранной системы координат, то величины  $I_1, I_2, I_3$  должны быть постоянными. Эти величины называют инвариантами напряженного состояния.

Если вместо осей  $X, Y, Z$  взять главные оси 1, 2, 3, то

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (1.32)$$

### Наибольшие касательные напряжения

Установлено, что для каждой пары взаимно перпендикулярных площадок наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, равно наклоненных к главным, т.е.

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (1.33)$$

Если  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то  $|\tau_{\max}| = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right|$ .

### Плоское напряженное состояние

Плоским называется такое напряженное состояние, при котором напряжения действуют в одной плоскости. Такое состояние возникает, например, при плоском изгибе балок. Получим формулы для вычисления главных напряжений для этого случая, имеющего важное практическое значение.

Пусть напряжения действуют в плоскости  $HOY$  (рис.1.7). Тогда  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$  и формулы для определения главных напряжений принимают вид

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y; \quad I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2; \quad I_3 = 0.$$

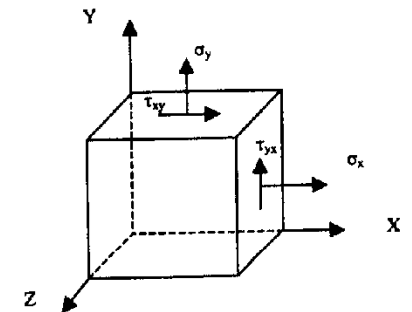


Рис.1.7

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0;$$

Решая последнее уравнение, находим, что одно главное напряжение в этом случае равно нулю, а два ненулевых значения главных напряжений определяются формулой

$$\sigma^{(1,2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Направление нормали к главной площадке определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

где  $\alpha$  — угол между нормалью к главной площадке и осью  $x$ , причем положительное направление угла отсчитывается против часовой стрелки.

Рассуждая о напряжениях, мы не сказали о том, к какому состоянию, — исходному или деформированному, — относились рассмотренные нами площадки. Если перемещения и деформации малы, то это не имеет значения, так как исходное и деформированное состояния практически совпадают. Если же перемещения и соответствующие им деформации велики, то ситуация резко усложняется. Будем считать, что для этого случая рассмотренные нами площадки относились к деформированному состоянию. Напряжения на площадках в деформированном теле, параллельных координатным плоскостям, называются напряжениями Коши. Однако, в разделе 1.1.1 мы определили компоненты деформаций для тех линейных отрезков, которые были параллельны координатным осям до деформации и которые в результате деформаций обращались, в общем случае, в кривые линии. Логично было бы и здесь рассмотреть вопрос о напряжениях на площадках, которые были параллельны координатным плоскостям до деформации.

Очевидно, что бесконечно малый параллелепипед 1 с гранями, параллельными координатным плоскостям, вырезанный в твердом теле в исходном состоянии, в результате деформации тела в целом превращается в криволинейный шестигранник 2 (рис. 1.8). Единичные векторы  $i, j, k$  (орты), направленные по касательным к ребрам параллелепипеда 1, в недеформированном состоянии образуют ортогональный базис, в деформированном же состоянии прямые углы между ними искажаются (рис. 1.8,а).

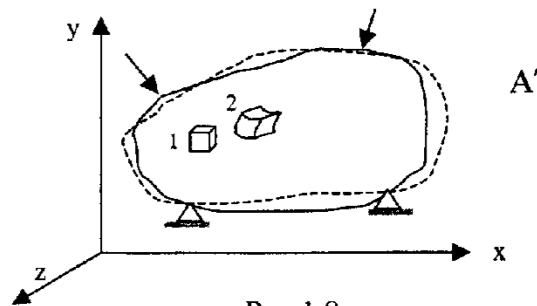


Рис. 1.8

Если разложить напряжения, действующие на криволинейных гранях бесконечно малого объема в деформированном состоянии, на компоненты в направлении ортов  $i, j, k$ , то эти компоненты образуют несимметричный тензор и их направления не будут совпадать с осями  $x, y$  и  $z$ . Поскольку, однако, в задачи данного учебника не входит изучение методов расчета при больших деформациях, то мы ограничимся здесь одним важным частным случаем, когда деформации и сдвиги малы по сравнению с единицей, но повороты велики по сравнению с деформациями и сдвигами. Такая ситуация часто возникает, например, в гибких балках, пластинках и оболочках.

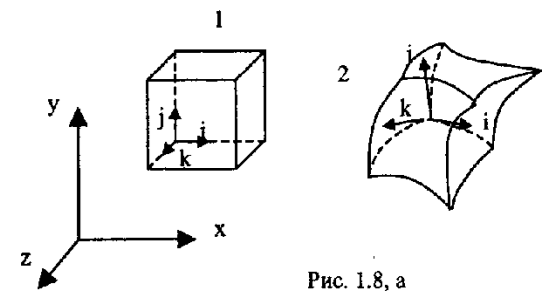


Рис. 1.8, а

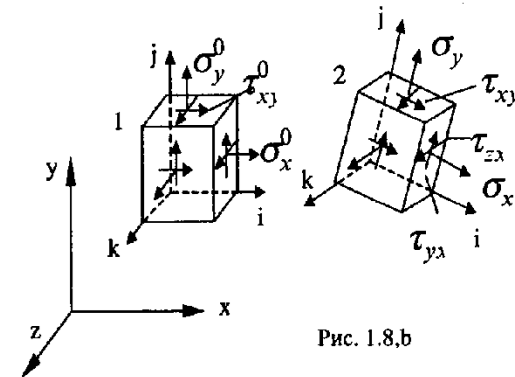


Рис. 1.8, б

В этом случае общая картина деформаций будет такой, как показано на рис. 1.8,б, т.е. можно считать, что бесконечно малый параллелепипед 1 перемещается и поворачивается в пространстве, занимая положение 2, и при этом длины ребер и первоначально прямые углы между ними не изменяются (естественно, что при вычислении напряжений деформации, какими бы малыми они не были, учитываются всегда). Напряжения на гранях элемента 1 в его деформированном состоянии (состоянии 2 на рис. 1.8,б) можно разложить на составляющие в направлении ребер  $i, j, k$  и условно обозначить так же, как обозначаются компоненты напряжений на гранях элемента 1 в недеформированном состоянии, т.е.  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$  и т.д. Эти компоненты образуют симметричный тензор, называемый тензором напряжений Пиолы-Кирхгофа. Если на гранях элемента 1 в недеформированном состоянии действуют начальные напряжения  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0$  и т.д. (напряжения Коши), то при повороте параллелепипеда и переходе его в положение 2 направления этих напряжений совпадут с направлениями напряжений Пиолы-Кирхгофа, поэтому окончательные напряжения на гранях элемента 1 можно найти суммированием тех и других.



### 1.1.3. Физические соотношения

В теории упругости рассматриваются линейно-упругие и, главным образом, изотропные тела. Отношения между напряжениями и деформациями для таких тел устанавливаются опытным путем. Из экспериментов на растяжение установлено, что в начальной стадии нагружения образцов (при малых деформациях) между нормальными напряжениями и соответствующими им относительными удлинениями наблюдается соотношение

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.34)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода, или модуль Юнга.

Это соотношение известно как закон Гука.

Установлено также, что между продольной ( $\varepsilon$ ) и поперечной ( $\varepsilon'$ ) деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (1.35)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

При испытаниях на чистый сдвиг установлено, что угол сдвига пропорционален величине касательных напряжений, действующих на гранях элемента:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (1.36)$$

В соотношении (1.36)  $G$  – модуль упругости второго рода, или модуль сдвига. Между модулями упругости существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (1.37)$$

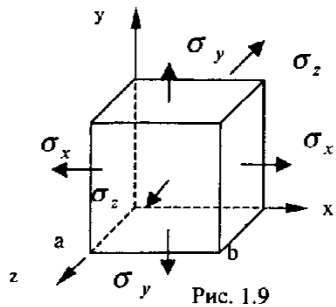


Рис. 1.9

Рассмотрим теперь объемное напряженное состояние и предположим, что на гранях прямоугольного параллелепипеда, вырезанного из твердого тела, действуют только нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  (рис.1.9).

Относительное удлинение  $\varepsilon'_x$  ребра  $ab$ , обусловленное напряжениями  $\sigma_x$ , определяется выражением

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Напряжение  $\sigma_y$  вызывает удлинение  $\varepsilon'_y$  в направлении, перпендикулярном ребру  $ab$ , равное  $\frac{\sigma_y}{E}$  и укорочение в направлении ребра  $ab$   $\varepsilon''_x = -\mu\varepsilon'_y = -\mu\frac{\sigma_y}{E}$ . По аналогии, напряжение  $\sigma_z$  вызывает укорочение  $\varepsilon''_x$  ребра  $ab$ , равное  $-\mu\frac{\sigma_z}{E}$ .

На основании принципа независимости действия сил получаем

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon''_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Аналогично,

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)].$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями для каждой координатной плоскости устанавливается непосредственно на основании экспериментальных данных. В результате получаются шесть следующих формул связи между компонентами деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

Соотношения (1.38) представляют обобщенный закон Гука для изотропного тела. Решив эти уравнения относительно напряжений, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (1.38a)$$

где

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

При плоском напряженном состоянии формулы (1.38) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Решив уравнения (1.39) относительно напряжений, получаем:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

## 1.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

### 1.2.1. Постановка задач теории пластичности

Большая часть конструкций транспортных средств и других объектов техники проектируется таким образом, чтобы в элементах этих конструкций при действии эксплуатационных нагрузок не возникали бы остаточные (пластические) деформации. Однако весьма важно знать, как поведет себя та или иная конструкция при превышении нагрузками их эксплуатационных значений, - например, в аварийных ситуациях. Поэтому во многих областях техники, автомобиле- и тракторостроении, авиастроении, судостроении, некоторых сферах строительства, - проектирование новых объектов техники сопровождается исследованием предельных, или разрушающих нагрузок. При использовании экспериментальных методов это требует создания опытных образцов и последующего их разрушения на испытательных стендах. В последнее время эксперименты на опытных образцах все чаще заменяют экспериментами на математических моделях, т.е. расчетами. Расчет конструкции до разрушения требует учета реального поведения материалов под нагрузкой. Как известно, диаграмма деформирования материалов при растяжении-сжатии имеет вид, показанный на рис.1.10,а. Для металлов характерно наличие четырех стадий деформирования: стадии упругости OA, стадии общей текучести AB, стадии упрочнения BC и стадии разрушения CD.

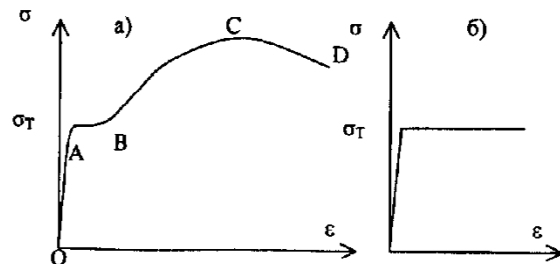


Рис. 10.1

При аналитических вычислениях реальная диаграмма деформирования часто заменяется идеализированной, показанной на рис.1.10,б. При этом

предполагается, что участок текучести имеет неограниченную длину. Эта диаграмма носит название диаграммы Прандтля. Использование идеализированной диаграммы взамен реальной вносит в расчет погрешность, величину которой трудно оценить. Вместе с тем это существенно упрощает расчет, делая определение предельных нагрузок для статически неопределимых конструкций даже проще, чем расчет этих же конструкций в упругой стадии их работы. Учет реальной диаграммы деформирования снижает погрешность расчетов, но такие расчеты возможны лишь с применением электронных вычислительных машин. В настоящее время разработаны методики и программы расчета конструкций с учетом пластических деформаций. Для быстрой оценки предельных нагрузок можно воспользоваться аналитическими методами, основанными на использовании диаграммы Прандтля, для более точных расчетов необходимо проводить расчеты на ЭВМ. Однако для того, чтобы понять и освоить технологию расчетов конструкций как аналитическими, так и численными методами в упруго-пластической стадии, необходимо усвоить основные понятия и методы теории пластичности. Ниже дается краткое изложение основ этой дисциплины.

### 1.2.2. Основные законы теории пластичности

Одними из основных понятий в теории пластичности являются понятия тензоров напряжений и деформаций. Рассмотрим эти понятия.

В каждой точке твердого тела (под эту категорию попадают различные, в том числе и авто-тракторные, конструкции) можно выделить бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. На гранях этого элемента действуют распределенные по поверхности внутренние напряжения, которые можно разложить на составляющие вдоль координатных осей XYZ, называемые в дальнейшем компонентами напряжений (см. рис.1.5).

Тензор напряжений  $T_\sigma$  при использовании цифровых обозначений координатных осей записывается в виде

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.40)$$

Среднее арифметическое трех нормальных напряжений называется средним напряжением в точке:

$$\sigma_0 = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (1.41)$$

Тензор напряжений можно представить в виде суммы

$$T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma, \quad (1.42)$$

где

$$T_{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (1.43)$$

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.44)$$

Слагаемое  $T_{\sigma}$  называется шаровым тензором, а слагаемое  $D_{\sigma}$  - девиатором напряжений.

В сокращенном виде девиатор напряжений можно записать так:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.45)$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, имеющий следующие значения:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Как известно из теории упругости, в каждой точке твердого тела всегда имеются площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными. Главные напряжения и главные площадки находятся из уравнений (1.29) и (1.30). Большую роль в теории пластичности играют инварианты тензора напряжений, определяемые формулами (1.31).

Аналогичным образом можно определить инварианты девиатора напряжений:

$$\begin{aligned} I_1(D_{\sigma}) &= S_1 = s_x + s_y + s_z = 0, \\ I_2(D_{\sigma}) &= S_2 = -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \\ I_3(D_{\sigma}) &= S_3 = s_x s_y s_z - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{zx}^2 - s_z s_{xy}^2 + 2s_{xy} s_{yz} s_{zx}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

С учетом формул (1.45) второй инвариант девиатора напряжений принимает вид

$$I_2(D_{\sigma}) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_z^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (1.47)$$

В сокращенном виде второй инвариант девиатора напряжений записывается так:

$$I_2(D_{\sigma}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}. \quad (1.48)$$

Площадки, равно наклоненные к координатным осям, принято называть октаэдрическими площадками. Установлено, что напряжения на октаэдрических площадках определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{окт} &= \sigma_0, \\ \tau_{окт} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_z^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Для оценки прочности в каждой точке твердого тела вводятся некоторые интегральные характеристики напряженного состояния, в частности, интенсивность напряжений  $\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{I_2(D_{\sigma})}$  и интенсивность касательных напряжений  $\tau_i = \sqrt{I_2(D_{\sigma})}$ . Подставляя в эти формулы значение  $I_2(D_{\sigma})$ , получаем

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_z^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (1.50)$$

Заметим, что интенсивность напряжений пропорциональна величине касательных напряжений на октаэдрических площадках:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт}. \quad (1.51)$$

В сокращенном виде интенсивность напряжений записывается так:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ji}}. \quad (1.52)$$

Аналогично тензорам напряжений вводятся тензоры деформаций и девиатора деформаций.

Тензор деформаций  $T_{\epsilon}$  имеет вид:

$$T_{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.53)$$

Среднее арифметическое трех линейных компонентов деформаций называется средней деформацией:

$$\epsilon_{cp} = \epsilon_0 = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z). \quad (1.54)$$

Тензор-девиатор деформаций записывается так:

$$D_\phi = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.55)$$

Оси, в направлении которых имеют место только линейные деформации, называются главными осями, а соответствующие им деформации — главными деформациями.

Главные деформации определяются из уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0, \quad (1.56)$$

коэффициенты которого

$$\begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

называются инвариантами тензора деформаций.

Инварианты девиатора деформаций определяются так:

$$\begin{aligned} I_1(D_\varepsilon) &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0, \\ I_2(D_\varepsilon) &= -e_{11}e_{22} - e_{22}e_{33} - e_{33}e_{11} + e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2, \\ I_3(D_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Второй инвариант девиатора деформаций можно выразить через компоненты деформаций:

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \quad (1.59)$$

Интенсивностью деформаций  $\varepsilon_i$  называется величина, пропорциональная углу сдвига на октаэдрической площадке и равная

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{окт} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Практически расчеты конструкций за пределами упругости материалов чаще всего проводятся в приращениях. Тензор и девиатор приращений деформаций по аналогии с тензором и девиатором деформаций записывается так:

$$T_{d\varepsilon} = \begin{vmatrix} d\varepsilon_x & d\frac{1}{2}\gamma_{xy} & d\frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ d\frac{1}{2}\gamma_{yx} & d\varepsilon_y & d\frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ d\frac{1}{2}\gamma_{zx} & d\frac{1}{2}\gamma_{zy} & d\varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.61)$$

$$D_{d\varepsilon} = \begin{vmatrix} d\varepsilon_x - d\varepsilon_0 & d\frac{1}{2}\gamma_{xy} & d\frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ d\frac{1}{2}\gamma_{yx} & d\varepsilon_y - d\varepsilon_0 & d\frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ d\frac{1}{2}\gamma_{zx} & d\frac{1}{2}\gamma_{zy} & d\varepsilon_z - d\varepsilon_0 \end{vmatrix}.$$

Приращения деформаций можно представить как сумму приращений упругих и пластических деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij_e} + d\varepsilon_{ij_p}. \quad (1.62)$$

Интенсивности приращений деформаций и приращений пластических деформаций равны

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 +} \\ &+ \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_2(D_{d\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_{ip} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xp} - d\varepsilon_{yp})^2 + (d\varepsilon_{yp} - d\varepsilon_{zp})^2 + (d\varepsilon_{zp} - d\varepsilon_{xp})^2 +} \\ &+ \frac{3}{2}(d\gamma_{xyp}^2 + d\gamma_{yzp}^2 + d\gamma_{zxp}^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_2(D_{d\varepsilon_p})}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Отметим одну особенность интенсивности приращений пластических деформаций. Раскроем скобки в выражении, стоящем под знаком радикала. Получим

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_{ip} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{d\varepsilon_{xp}^2 - 2d\varepsilon_{xp}d\varepsilon_{yp} + d\varepsilon_{yp}^2 + d\varepsilon_{yp}^2 - 2d\varepsilon_{yp}d\varepsilon_{zp} + d\varepsilon_{zp}^2 +} \\ &+ d\varepsilon_{zp}^2 - 2d\varepsilon_{zp}d\varepsilon_{xp} + d\varepsilon_{xp}^2 + 3(d\varepsilon_{xyp}^2 + d\varepsilon_{yzp}^2 + d\varepsilon_{zxp}^2)}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Заметим, что множитель  $\frac{1}{2}$  перед выражением в круглых скобках под знаком радикала исчез после замены компонент деформаций  $\gamma_{ijp}$  компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ijp}$ .

Объемная деформация всегда, как следует из экспериментов, является упругой, поэтому

$$d\varepsilon_{xp} + d\varepsilon_{yp} + d\varepsilon_{zp} = 0. \quad (1.66)$$

Возведем в квадрат левую часть предыдущего равенства и приравняем полученное выражение нулю:

$$d\varepsilon_{xp}^2 + d\varepsilon_{yp}^2 + d\varepsilon_{zp}^2 + 2d\varepsilon_{xp}d\varepsilon_{yp} + 2d\varepsilon_{yp}d\varepsilon_{zp} + 2d\varepsilon_{zp}d\varepsilon_{xp} = 0.$$

Отсюда находим

$$-2d\varepsilon_{xp}d\varepsilon_{yp} - 2d\varepsilon_{yp}d\varepsilon_{zp} - 2d\varepsilon_{zp}d\varepsilon_{xp} = d\varepsilon_{xp}^2 + d\varepsilon_{yp}^2 + d\varepsilon_{zp}^2. \quad (1.68)$$

С учетом полученного равенства формула для интенсивности приращений пластических деформаций принимает вид:

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_{ip} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3(d\varepsilon_{xp}^2 + d\varepsilon_{yp}^2 + d\varepsilon_{zp}^2 + d\varepsilon_{xyp}^2 + d\varepsilon_{yzp}^2 + d\varepsilon_{zpx}^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} (d\varepsilon_{ij})_p (d\varepsilon_{ij})_p. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Рассмотрим условия начала пластического течения.

При осевом растяжении или сжатии, как известно из опытов, пластические деформации возникают при  $\sigma = \sigma_T$ . При чистом сдвиге пластические деформации возникают при  $\tau = \tau_T$ . При сложном напряженном состоянии условие начала пластического течения в общем случае можно записать так:

$$\Phi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = k, \quad (1.70)$$

или, в сокращенном виде,

$$\Phi(\sigma_{ij}) = k, \quad (1.71)$$

где  $k$  – некоторая константа.

Иногда условия начала пластического течения записывают в виде выражения

$$\Phi_T(\sigma_{ij}) = 0, \quad (1.72)$$

в котором также подразумевается наличие некоторой константы.

Условие (1.72) в шестимерном пространстве является уравнением некоторой поверхности, которую называют поверхностью начала пластического течения. Это условие можно записать как функцию инвариантов напряженного состояния:

$$\Phi_T(I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = 0, \quad (1.73)$$

или

$$\Phi_T(I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = 0, \quad (1.74)$$

так как среднее напряжение мало влияет на пластические деформации.

Наибольшее применение нашли следующие условия начала пластического течения.

1) Условие Треска-Сен-Венана.

$$\tau_{max} = \tau_T. \quad (1.75)$$

Максимальное касательное напряжение находится как наибольшая полуразность трех главных напряжений, т.е.

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\}. \quad (1.76)$$

Если

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (1.77)$$

то

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \quad (1.78)$$

и условие (1.75) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (1.79)$$

2) Условие Губера-Мизеса-Генки

$$\tau_i = c. \quad (1.80)$$

В этой формуле  $\tau_i$  – интенсивность касательных напряжений,  $c$  – некоторый коэффициент, выбираемый таким образом, чтобы условие (1.80) в частном случае совпало с условием начала текучести для простого растяжения.

Интенсивность касательных напряжений определяется так:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_z^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.81)$$

Если взять коэффициент "с" равным  $\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ , то при простом растяжении ( $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) условие (1.80) принимает вид

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}, \text{ или } \sigma = \sigma_T, \quad (1.82)$$

что соответствует началу текучести при простом растяжении.

Подставив значение интенсивности касательных напряжений, определяемое формулой (1.81), в выражение (1.80), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_z^2 + \tau_{zx}^2)} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \quad (1.83)$$

или

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (1.84)$$

Рассмотрим поведение упрочняющегося материала при нагружении и разгрузке при условии, что диаграмма деформирования имеет вид, показанный на рис.1.11.

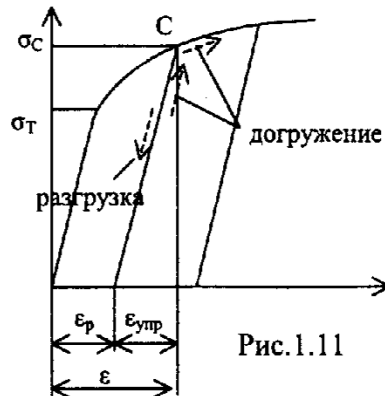


Рис.1.11

При первоначальном нагружении конструкции текучесть наступает, когда интенсивность напряжений достигает предела текучести  $\sigma_T$ . Если при первоначальном нагружении напряжения в конструкции достигнут значения  $\sigma_C$ , а затем произойдет разгрузка, то зависимость между напряжениями и деформациями будет определяться прямой, параллельной начальной ветви диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  в упругой стадии работы материала. Если нагрузку снять полностью, то в конструкции останутся пластиче-

ские (необратимые) деформации. При повторном нагружении пластические деформации возникнут при напряжении  $\sigma_C$ , большем, чем напряжение начальной текучести. В случае простого растяжения это произойдет при достижении точки С на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ , а в случае сложного напряженного состояния – при достижении некоторой точки на поверхности, определяемой формулой

$$\Phi(\sigma_{ij}) = F(q) \quad (1.85)$$

и называемой поверхностью текучести.

В формуле (1.85)  $F(q)$  - возрастающая функция некоторого параметра  $q$ , называемого параметром упрочнения. Поверхность текучести расширяется и смещается. Если в качестве параметра  $q$  принимается накопленная пластическая деформация, определяемая формулой

$$q = \int d\varepsilon_p, \quad (1.86)$$

то упрочнение называется деформационным; если в качестве этого параметра принимается работа пластических деформаций

$$\int \sigma_{ij} d(\varepsilon_{ij})_p, \quad (1.87)$$

то упрочнение называется энергетическим.

При использовании условия Губера-Мизеса формула (1.85) принимает вид:

$$\sigma_i = F(q). \quad (1.88)$$

Возводя в квадрат левую и правую части последнего выражения и учитывая формулу (1.52), получаем условие текучести в следующем виде:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - F^2(q) = 0. \quad (1.89)$$

### 1.2.3. Постулат Друкера

Основой для вывода разрешающих уравнений относительно приращений напряжений и деформаций и зависимости между ними является постулат Друкера, который формулируется следующим образом:

- 1) в процессе нагружения добавочные напряжения совершают положительную работу;
- 2) за весь цикл дополнительного нагружения и разгрузки добавочные напряжения совершают положительную работу, если имеет место пластическая деформация.

Математически постулат Друкера записывается следующим образом:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d(\varepsilon_{ij})_p > 0. \quad (1.90)$$

Геометрическая интерпретация формулы (1.90) дается на рис.1.12.

Если за исходное состояние принять не точку А, а точку В на поверхности текучести, то, согласно постулату Друкера, для цикла нагружения В->С

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0, \quad (1.91)$$

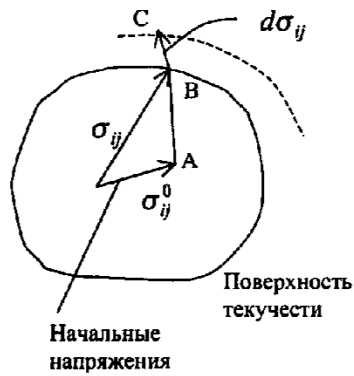


Рис.1.12

а для цикла нагружения и разгрузки

$$d\sigma_{ij}d(\epsilon_{ij})_p > 0. \quad (1.92)$$

Неравенство (1.90) показывает, что скалярное произведение вектора добавочных напряжений  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$  и вектора приращений пластической деформации  $d(\epsilon_{ij})_p$  положительно. Следовательно, эти векторы в любом случае образуют острый угол.

Условие (1.90) можно записать в виде:

$$\sigma_{ij}d(\epsilon_{ij})_p > \sigma_{ij}^0d(\epsilon_{ij})_p, \quad (1.93)$$

т.е. приращение работы пластической деформации имеет максимальное значение для действительных напряжений по сравнению со всеми возможными напряженными состояниями.

#### 1.2.4. Ассоциированный закон течения

Запишем условие относительного экстремума функции  $\sigma_{ij}d(\epsilon_{ij})_p$  с помощью множителей Лагранжа. Аргументы функции связаны между собой условием текучести  $\Phi(\sigma_{ij})$ . С учетом этого обстоятельства запишем:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} [\sigma_{ij}d(\epsilon_{ij})_p - \lambda\Phi(\sigma_{ij})] = 0. \quad (1.94)$$

Отсюда

$$d(\epsilon_{ij})_p = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.95)$$

Соотношение (1.95) выражает так называемый ассоциированный закон течения.

Подставим (1.95) в выражение интенсивности приращений пластической деформации (1.69):

$$d\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda^2 \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.96)$$

Из полученного соотношения находим:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\sqrt{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}}}. \quad (1.97)$$

#### 1.2.5. Теория пластического течения

В последнее время широкое применение в расчетах упруго-пластических систем нашла теория пластического течения. Основные предпосылки этой теории заключаются в следующем:

- 1) деформируемое тело является изотропным;
- 2) относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему напряжению

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K}; \quad d\theta = 3(d\epsilon_{0e} + d\epsilon_{0p}) = \frac{d\sigma_0}{K}. \quad (1.98)$$

Коэффициент пропорциональности такой же, как и в пределах упругости:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (1.99)$$

- 3) предполагается, что для данного материала интенсивность напряжений является функцией от накопленной пластической деформации.

$$\sigma_i = F\left(\int d\bar{\epsilon}_p\right). \quad (1.100)$$

Функция  $F$  определяется по диаграмме  $\sigma - \epsilon$ , получаемой экспериментальным путем при простом растяжении.

Принимая, что при растяжении  $\sigma = \sigma_x, \sigma_y = \sigma_z = 0; d\epsilon_{xp} = d\epsilon_p$ , из формулы (1.50) имеем  $\sigma_i = \sigma$ , а из соотношения (1.66) находим

$$d\epsilon_{yp} = d\epsilon_{zp} = -\frac{d\epsilon_{xp}}{2}. \quad (1.101)$$

Тогда для интенсивности приращения пластической деформации при простом растяжении получаем:

$$d\bar{\epsilon}_p = d\epsilon_{xp} = d\epsilon_p \quad (1.102)$$

$$\int d\bar{\epsilon}_{ip} = \int d\epsilon_p = \epsilon_p. \quad (1.103)$$

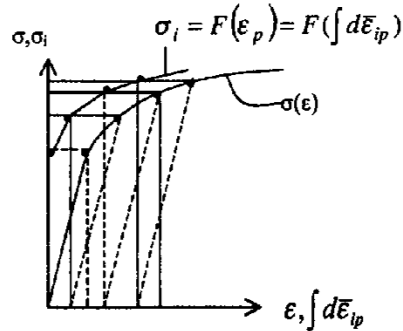


Рис. 1.13

Построение графика функции  $\sigma_i = F(\epsilon_p) = F(\int d\bar{\epsilon}_{ip})$  по экспериментальной кривой  $\sigma - \epsilon$ , полученной для простого растяжения, показано на рис.1.13.

Для получения уравнений, описывающих состояние материала на основе критерия Губера-Мизеса, необходимо найти коэффициент  $\lambda$ , входящий в уравнение (1.94).

Рассмотрим ряд вспомогательных соотношений. Запишем среднее напряжение, определяемое формулой (1.41), в виде

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma_{kl}, \quad (1.104)$$

где  $\delta_{kl}$ - символ Кронекера.

Тогда выражение для компонентов девиатора напряжений (1.45) можно записать так:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left( \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma_{kl} \right). \quad (1.105)$$

Производную от функции текучести с учетом (1.105) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} \left( 1 - \delta_{ij} \left( \frac{1}{3} \delta_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \right) = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} - \delta_{ij} \left( \frac{1}{3} \delta_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Так как  $\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} = 0$ , если  $kl \neq ij$  и  $\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}$ , если  $kl = ij$ , то выражение (1.106) можно записать так:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} - \delta_{ij} \left( \frac{1}{3} \delta_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{kl}} \right). \quad (1.107)$$

но

$$\delta_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{kl}} = \delta_{kl} \frac{3}{2} (2s_{kl}) = \delta_{kl} 3s_{kl} = 0, \text{ так как } \delta_{kl} s_{kl} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \quad (1.108)$$

(первый инвариант девиатора напряжений равен нулю). Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}, \quad (1.109)$$

и, согласно (1.89),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} = 3s_{ij}. \quad (1.110)$$

Формула (1.95) принимает вид:

$$d(\epsilon_{ij})_p = 3\lambda s_{ij}. \quad (1.111)$$

Формула (1.97) с учетом (1.109), (1.110) и (1.52) записывается так:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{\sqrt{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{\sqrt{\frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{\sqrt{3s_{ij} 3s_{ij}}} = \\ &= \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{2\sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij}} = \frac{d\bar{\epsilon}_{ip}}{2\sigma_i}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Формула (1.95) с учетом (1.112) принимает вид

$$d(\epsilon_{ij})_p = \frac{3d\bar{\epsilon}_{ip}}{2\sigma_i} s_{ij} = \frac{3d\bar{\epsilon}_{ip}}{2\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) \quad (1.113)$$

Формула (1.113) выражает приращения компонентов пластических деформаций через приращение интенсивности пластических деформаций и полные значения компонентов напряжений.

Чтобы найти полные значения приращений деформаций по формуле (1.62), выразим упругие деформации через компоненты напряжений.

Уравнения обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния, записанные на основе экспериментов на осевое растяжение-сжатие, приведены в разделе 1.1.1 (см (1.38)). Учитывая, что модуль сдвига  $G$  и модуль упругости  $E$  связаны соотношением



$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

физические уравнения можно записать с помощью одной компактной формулы:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1 + \mu} \sigma_0 \right]. \quad (1.114)$$

На основании (1.62), (1.113) и (1.114) получаем:

$$d\varepsilon_{ij} = d(\varepsilon_{ij})_e + d(\varepsilon_{ij})_p = \frac{1}{2G} \left[ d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1 + \mu} d\sigma_0 \right] + \frac{3d\bar{\varepsilon}_{ip}}{2\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) \quad (1.115)$$

Полученные уравнения известны как уравнения Прандтля-Рейсса. Для плоского напряженного состояния эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu(d\sigma_y)) + \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} d\bar{\varepsilon}_{ip} \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu(d\sigma_x)) + \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} d\bar{\varepsilon}_{ip} \\ d\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 3 \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

В формулах (1.115)  $d\bar{\varepsilon}_{ip}$  есть интенсивность приращений пластических деформаций.

### 1.3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

#### 1.3.1. Общие положения

Как уже отмечалось во введении, строительная механика возникла и развивалась на основе существовавших научных дисциплин и, прежде всего, теоретической механики. До сих пор, при изучении статически определимых систем мы пользовались главным образом уравнениями статики, также известными из теоретической механики. Однако для расчета статически неопределимых систем приходится использовать более сложные соотношения и разработанные на их основе методики. Сами эти исходные соотношения большей частью заимствованы из теоретической механики. Рассмотрим их.

Наиболее часто в строительной механике встречается понятие силы, перемещения и деформации. В связи с этим вспомним понятие обобщенной силы. Обобщенной силой в механике называется такая сила, которая совершает работу на соответствующем ей перемещении. На рис. 1.14 показаны три вида нагрузок: сосредоточенная сила  $F$ , сосредоточенный момент или пара сил  $f$  с плечом  $h$  и распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Найдем работу этих нагрузок на некоторых (возможных) перемещениях конструкции. Очевидно, что работа силы  $F$  равна:

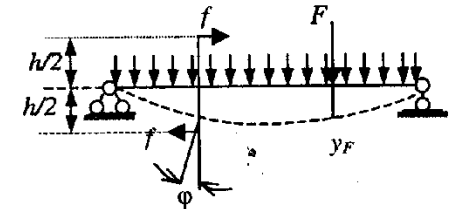


Рис.1.14

$$W_F = Fy_F.$$

Пара сил  $f$  совершает работу

$$W_f = 2 \left( f \frac{h}{2} \varphi \right) = fh\varphi = M\varphi, \text{ где } M = fh.$$

Наконец, нагрузка  $q$  совершает работу

$$W_q = \int_0^l q dx y(x) = q \int_0^l y(x) dx = q\omega,$$

где  $\omega$  - площадь эпюры "y" прогибов.

Таким образом,  $F$ ,  $M=fh$ ,  $q$  можно назвать обобщенными силами, а  $y_F$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  - соответствующими им обобщенными перемещениями.

Если обобщенные силы обладают потенциалом (см. [12]), то  $i$ -ая обобщенная сила может быть найдена как взятая со знаком минус производная от потенциальной энергии системы по  $i$ -ому обобщенному перемещению, т.е.

$$Q_i = - \frac{\partial V_i}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $Q_i$ ,  $q_i$  - обобщенные силы и перемещения соответственно.

Весьма полезным и плодотворным для строительной механики оказался принцип возможных перемещений. Принцип формулируется так: если система сил находится в равновесии, то сумма работ всех обобщенных сил на возможных бесконечно малых перемещениях, не противоречащих кинематическим связям системы, равна нулю. Силы, действующие на конструк-

цию, делятся на внешние и внутренние, поэтому применительно к конструкциям принцип возможных перемещений можно сформулировать следующим образом: если конструкция находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил на любых возможных бесконечно малых перемещениях, не противоречащих кинематическим связям конструкции, равна нулю.

Важным принципом, нашедшим широкое применение в строительной механике, является принцип Даламбера. Согласно этому принципу, если система движется со значительными скоростями и ускорениями, то при составлении уравнений равновесия системы к действующим на нее силам следует добавить инерционные силы.

Обобщением принципа возможных перемещений и принципа Даламбера является уравнение Лагранжа второго рода, имеющее вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

где  $T$  - кинетическая энергия системы,  $q_j$  -  $j$ -ая обобщенная координата,  $Q_j$  -  $j$ -ая обобщенная сила.

К приведенным выше соотношениям мы будем часто обращаться при изложении различных разделов курса.

### 1.3.2. Работа внешних сил

Чаще всего конструкции приходится рассчитывать на действие внешних сил. В статических расчетах предполагают, что внешние силы прикладываются постепенно, без заметных скоростей и ускорений, что дает основание пренебречь как силами сопротивления среды, так и инерционными силами. В процессе деформирования конструкции внешние силы совершают работу. Если конструкция деформируется линейно, то зависимость между внешней силой  $F$  и вызванным ею перемещением  $\Delta$  может быть представлена в виде графика рис.1.15, где  $f$  - текущее значение силы,  $\delta$  - текущее значение перемещения. Аналитическая зависимость между силой и перемещением имеет вид:

$$f = k\delta, \quad (1.117)$$

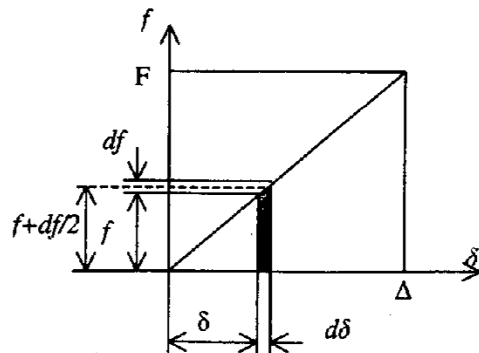


Рис.1.15

где  $f$  - текущее значение силы,  $\delta$  - текущее значение перемещения. Аналитическая зависимость между силой и перемещением имеет вид:

где  $k$  - некоторый числовой коэффициент, который можно назвать жесткостью системы.

Задача вычисления работы внешней силы несколько осложняется тем, что сила не остается постоянной на всем пути деформирования от 0 до  $\Delta$ . Решим эту задачу следующим образом.

Найдем, прежде всего, работу внешней силы на бесконечно малом пути деформирования  $d\delta$ . На этом пути внешнюю силу можно считать постоянной и равной среднему между  $f$  и  $f+df$  значению, т.е.  $f+df/2$  (см. рис.1.15). Обозначим работу внешней силы на бесконечно малом пути  $d\delta$  через  $dA$ , тогда

$$dA = (f + df/2)d\delta = f d\delta + df d\delta / 2. \quad (1.118)$$

Пренебрежем в формуле (1.118) бесконечно малой величиной второго порядка малости  $df * d\delta / 2$  и найдем полную работу внешней силы как сумму элементарных работ. Получим:

$$A = \int_0^{\Delta} f d\delta = \int_0^{\Delta} k\delta d\delta = k \frac{\delta^2}{2} \Big|_0^{\Delta} = k \frac{\Delta^2}{2}. \quad (1.119)$$

Замечая, что, согласно (1.117),  $k\Delta = F$ , окончательно получаем:

$$A = \frac{F\Delta}{2}. \quad (1.120)$$

Таким образом, при статическом приложении нагрузки работа внешней силы для линейно деформируемой системы равна половине произведения этой силы на вызванное ею перемещение.

### 1.3.3. Работа внутренних сил. Потенциальная энергия

В общем случае работу внутренних сил и обусловленную ими потенциальную энергию можно найти следующим образом.

Свяжем с рассматриваемой конструкцией декартову систему координат и тремя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям, вырежем из конструкции бесконечно малый параллелепипед (рис.1.16).

На гранях этого элемента действуют нормальные и касательные напряжения, показанные на рис.1.17.

Найдем работу, совершаемую каждым видом напряжений в отдельности. При действии на выделенный элемент напряжений  $\sigma_x$  грань элемента, перпендикулярная оси  $x$ , перемещается в направлении этой оси на расстояние, равное  $\epsilon_x dx$ . Равнодействующая напряжений  $\sigma_x$  равна  $\sigma_x dydz$ . Со стороны отброшенной части на переднюю грань действует равная ей по ве-

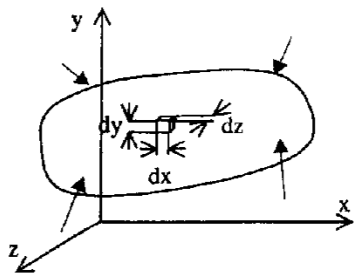


Рис.1.16

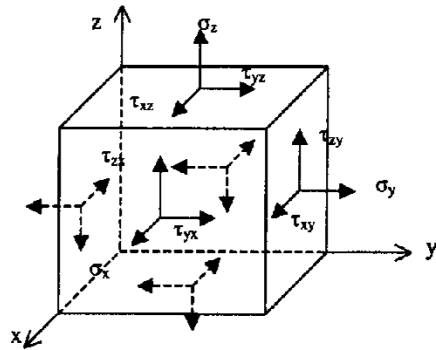


Рис.1.17

личине внутренняя сила (на рис.1.17 не показана). Эта сила совершает работу  $-\frac{1}{2}\varepsilon_x dx \sigma_x dy dz$ . Аналогичным образом можно найти, что напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  совершают работу  $-\frac{1}{2}\varepsilon_y dy \sigma_y dx dz$  и  $-\frac{1}{2}\varepsilon_z dz \sigma_z dy dx$  соответственно.

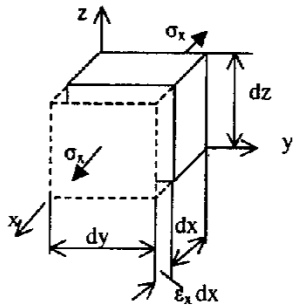


Рис.1.18

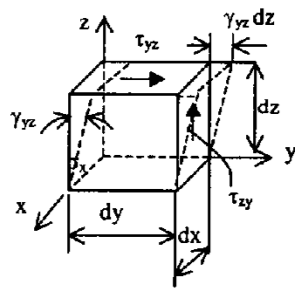


Рис.1.19

При действии на элемент  $dx dy dz$  касательных напряжений  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  происходит сдвиг верхней грани элемента относительно нижней. Первоначально прямой угол между ребрами  $dy$  и  $dz$  искажается на величину  $\gamma_{yz}$ , называемую углом сдвига или просто сдвигом. Поступательное перемещение верхней грани при этом равно  $\gamma_{yz} dz$ . Равнодействующая касательных напряжений на верхней грани равна  $\tau_{yz} dx dy$ . Равная ей по величине и противоположно направленная внутренняя сила, приложенная к отброшенной части конструкции (на рис.1.19 не показана), на перемещении  $\gamma_{yz} dz$  совершает работу, равную  $-\frac{1}{2}\gamma_{yz} dz \tau_{yz} dx dy$ . Нетрудно показать, что напряже-

ния  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{xy}$  совершают работу  $-\frac{1}{2}\gamma_{zx} dx \tau_{zx} dy dz$  и  $-\frac{1}{2}\gamma_{xy} dy \tau_{xy} dx dz$  соответственно.

Замечая, что произведение  $dx dy dz = dv$ , где  $dv$  – объем выделенного элемента, суммарную работу внутренних сил в пределах этого элемента представим в виде:

$$dV = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dv.$$

Полную работу внутренних сил найдем, просуммировав элементарные работы по всему объему:

$$V = -\frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dv \quad (1.121)$$

Взятая со знаком минус работа внутренних сил представляет потенциальную энергию  $W$  конструкции:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dv \quad (1.122)$$

Формулы (1.121) и (1.122) справедливы для конструкций любого типа, однако для некоторых из них, например, для стержневых систем, можно получить и более удобные для практического применения соотношения.

Рассмотрим методику вычисления работы внутренних сил для стержневых конструкций.

Пусть на некоторую пространственную стержневую систему действует произвольная нагрузка (рис.1.20). На элемент конструкции длиной  $ds$  в этом состоянии действуют внутренние силы  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ .

Работу внутренних сил найдем сначала в пределах элемента  $ds$ , причем сделаем это отдельно для каждой составляющей внутренних сил.

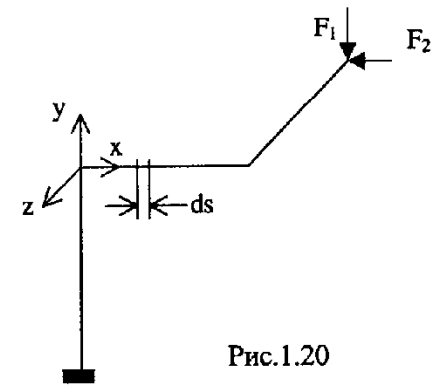


Рис.1.20

### Растяжение-сжатие

Заметим, что на элемент  $ds$  со стороны соседних (отсеченных) частей конструкции действуют продольные силы  $N$  (рис.1.21). Эти силы являются внешними по отношению к элементу  $ds$ . В свою очередь, со стороны элемента  $ds$  на соседние части действуют силы  $N' = N$ . Эти силы являются внутренними по отношению к элементу  $ds$ . Найдем работу внутренних сил.

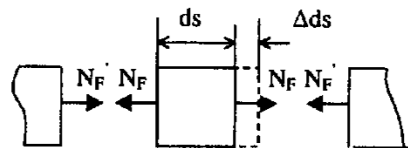


Рис.1.21

Удлинение элемента  $ds$  равно [39]

$$\Delta dS = \frac{N ds}{EA},$$

где  $E$  и  $A$  – модуль упругости материала и площадь поперечного сечения стержня соответственно.

Работа внутренней продольной силы на этом перемещении равна

$$dV_{i,p}^{(N)} = -\frac{1}{2} \frac{N dS}{EA} N' = -\frac{N^2 ds}{2EA}.$$

Знак минус в выражении для работы объясняется тем, что внутренняя сила направлена навстречу перемещению элемента  $ds$ .

### Кручение

Внешние крутящие моменты для элемента  $ds$  на рис.1.22 обозначены  $M_x$ , а внутренние —  $M_x'$ .

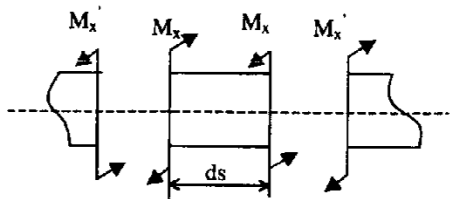


Рис.1.22

Угол закручивания элемента  $ds$  под действием моментов  $M_x$  равен [39]

$$\Delta \varphi_x = \frac{M_x ds}{GI_{kp}}.$$

Работа внутреннего крутящего момента на этом перемещении равна

$$dV_{i,p}^{M_x} = -\frac{1}{2} \frac{M_x ds}{GI_{kp}} M_x' = -\frac{M_x^2 ds}{2GI_{kp}}.$$

### Изгиб в плоскости xOy

Взаимный угол поворота сечений элемента  $ds$  (см. рис.1.23) определяется известной формулой сопротивления материалов, а именно [39]

$$\Delta \varphi_z = \frac{M_z ds}{EI_z}.$$

Работа внутренних изгибающих моментов  $M_z$  (на рис.1.23 непоказаны) на данном перемещении равна

$$dV_{i,p}^{M_z} = -\frac{1}{2} \frac{M_z ds}{EI_z} M_z' = -\frac{M_z^2 ds}{2EI_z}.$$

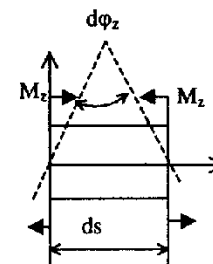


Рис.1.23

Аналогичный результат можно получить для плоскости xOz:

$$\Delta \varphi_y = \frac{M_y ds}{EI_y}; \quad dV_{i,p}^{M_y} = -\frac{1}{2} \frac{M_y ds}{EI_y} M_y' = -\frac{M_y^2 ds}{2EI_y}.$$

### Сдвиг в плоскости xOy

Угол сдвига в плоскости  $xOy$  элемента  $ds$ , обусловленный действием поперечной силы  $Q_y$ , определяется по закону Гука:  $\gamma_{xy,F} = \frac{\tau_y}{G}$ . Сдвиг правой грани элемента относительно левой (рис.1.24) приводит к ее линейному смещению на величину  $\Delta = \frac{\tau_y ds}{G}$ .

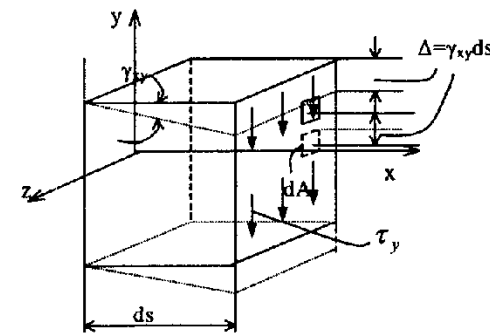


Рис.1.24

На элемент площади  $dA$  действует сила  $\tau_y dA$ . Работа силы  $\tau_y dA$  в пределах площадки  $dA$  равна

$$d(dV_{i,p}^{Q_y}) = -\frac{1}{2} \frac{\tau_y ds}{G} \tau_y dA = -\frac{\tau_y^2 ds dA}{2G}.$$

Работа сил  $\tau_y dA$  в пределах всего сечения  $dV_{i,p}^{Q_y} = -\int_A \frac{\tau_y ds}{2G} \tau_y dA$ .

Согласно известной из курса сопротивления материалов формуле Журавского (см., например, [39]),  $\tau = \frac{Q_y S^*}{bI_z}$ , следовательно,  $\tau_y = \frac{Q_y S^*}{bI_z}$ . Тогда

$$dV_{i,p}^{Q_y} = \int_A \frac{Q_y S^*}{2bI_z G} ds \frac{Q_y S^*}{bI_z} dA = -\frac{Q_y^2 ds}{2GA} \frac{A}{I_z^2} \frac{1}{b^2} \int (S^*)^2 dA;$$

$$dV_{i,p}^{Q_y} = -\mu_y \frac{Q_y^2 ds}{2GA}, \text{ где } \mu_y = \frac{A}{I_z^2} \int \frac{(S^*)^2}{b^2} dA.$$

Аналогичный результат получим для плоскости xOz:

$$dV_{i,p}^{Q_z} = -\mu_z \frac{Q_z^2 ds}{2GA}.$$

Работа  $V$  для всей конструкции:

$$V = -\left( \sum \int \frac{N^2}{2EA} ds + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2GI_{kp}} + \sum \int \frac{M_y^2 ds}{2EI_z} + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2EI_y} + \sum \int \frac{\mu_y Q_y^2 ds}{2GA} + \sum \int \frac{\mu_z Q_z^2 ds}{2GA} \right). \quad (1.123)$$

Потенциальная энергия стержневой конструкции, следовательно, может быть найдена из выражения:

$$W = \left( \sum \int \frac{N^2}{2EA} ds + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2GI_{kp}} + \sum \int \frac{M_y^2 ds}{2EI_z} + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2EI_y} + \sum \int \frac{\mu_y Q_y^2 ds}{2GA} + \sum \int \frac{\mu_z Q_z^2 ds}{2GA} \right). \quad (1.124)$$

Если напряженно-деформированное состояние конструкции адекватно определяется совокупностью обобщенных перемещений и соответствующих им внутренних обобщенных сил, то работа внутренних сил и потенциальная энергия могут быть выражены через обобщенные силы и перемещения. В этом случае

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i q_i, \quad (1.125)$$

где  $Q_i, q_i$  – обобщенная сила и обобщенное перемещение соответственно,  $n$  – число обобщенных параметров.

Потенциальная энергия записывается так:

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i q_i. \quad (1.126)$$

Так как в линейно деформируемой системе обобщенная сила прямо пропорциональна обобщенным перемещениям, т.е. может быть представлена в виде

$$Q_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j, \quad (1.127)$$

то выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j q_i. \quad (1.128)$$

Дифференцируя выражение (1.128) по  $i$ -му обобщенному перемещению, получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = -Q_i, \quad (1.129)$$

или

$$Q = -\frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (1.130)$$

При наличии начальных внутренних обобщенных сил  $Q_i^0$  и обобщенных перемещений  $q_i^0$  дополнительная работа внутренних сил за счет дополнительных перемещений  $\Delta q_i$ , возникающих под действием каких-либо причин, равна

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n Q_i^0 \Delta q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \Delta q_i, \quad (1.131)$$

где  $\Delta Q_i$  – дополнительная внутренняя обобщенная сила.

Дополнительная потенциальная энергия в этом случае будет определяться выражением

$$\Delta W = -\Delta V = -\sum_{i=1}^n Q_i^0 \Delta q_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \Delta q_i. \quad (1.132)$$

Дифференцируя (1.132) по дополнительному перемещению  $\Delta q_i$ , находим:

$$Q_i^0 + \Delta Q_i = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial(\Delta q_i)}, \quad (1.133)$$

Таким образом, при наличии в конструкции начальных усилий взятая с отрицательным знаком производная от приращения потенциальной энергии по приращению обобщенного перемещения равна полному значению соответствующей обобщенной силы.

### 1.3.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений

Докажем несколько теорем, которые будут полезны при изучении методов расчета статически неопределимых конструкций.

**Теорема о взаимности работ.** Если имеются два состояния одной и той же конструкции, нагруженной двумя группами сил, то работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго равна работе внешних сил второго состояния на перемещениях первого.

**Доказательство.** Рассмотрим в качестве примера простую двухопорную балку, причем для простоты выводов будем считать, что каждая группа сил состоит из одной силы (рис.1.25).

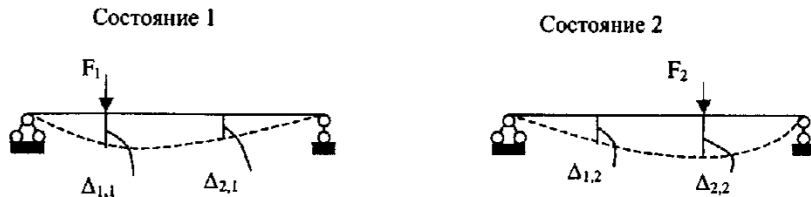


Рис.1.25

Возникающие в каждом из двух состояний перемещения обозначены следующим образом:

- $\Delta_{1,1}$  - перемещение в направлении силы  $F_1$  от действия этой же силы;
- $\Delta_{1,2}$  - перемещение в направлении силы  $F_1$  от действия силы  $F_2$ ;
- $\Delta_{2,1}$  - перемещение в направлении силы  $F_2$  от действия силы  $F_1$ ;
- $\Delta_{2,2}$  - перемещение в направлении силы  $F_2$  от действия этой же силы;

При совместном действии сил  $F_1$  и  $F_2$  эти силы совершают определенную работу. Рассмотрим два варианта нагружения. В первом варианте к конструкции сначала приложена сила  $F_1$ , затем к деформированной конструкции приложена сила  $F_2$ , вызывающая дополнительные деформации. Во втором варианте к конструкции сначала приложена сила  $F_2$ , затем к деформированной конструкции приложена сила  $F_1$ , также вызывающая дополнительные деформации (рис.1.26). Отметим, что конечное состояние в обоих вариантах нагружения одно и то же; суммарные перемещения равны, а, следовательно, равны и внутренние усилия. Потенциальная энергия в обоих вариантах будет определяться формулой (1.124), т.е.

$$W = \left( \sum \int \frac{(N^I + N^II)^2}{2EA} ds + \sum \int \frac{(M_z^I + M_z^II)^2}{2GI_{kp}} ds + \sum \int \frac{(M_y^I + M_y^II)^2}{2EI_z} ds + \sum \int \frac{(M_z^I + M_z^II)^2}{2EI_y} ds + \sum \int \frac{\mu_y (Q_y^I + Q_y^II)^2}{2GA} ds + \sum \int \frac{\mu_z (Q_z^I + Q_z^II)^2}{2GA} ds \right),$$

где индексами I и II обозначены внутренние усилия первого и второго состояний соответственно.

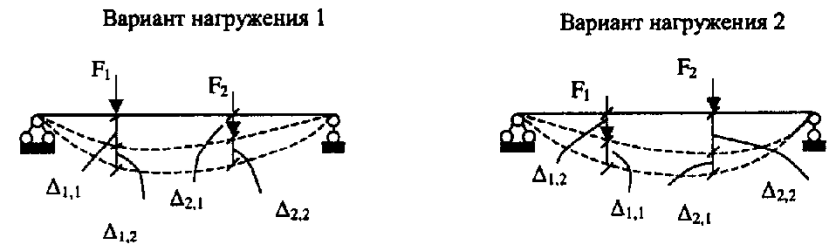


Рис.1.26

При равенстве потенциальных энергий будут равны и работы внешних сил. Таким образом, работа внешних сил не зависит от способа нагружения (этот вывод справедлив только для линейно деформируемых конструкций).

Вычислим работу внешних сил  $V$  для рассматриваемых вариантов нагружения.

*Вариант 1.*

$$V = V_{1,1} + V_{2,2} + V_{1,2},$$

где  $V_{1,1}$  - работа силы  $F_1$  на вызванных ею перемещениях,  $V_{2,2}$  - работа силы  $F_2$  на перемещениях от этой же силы и  $V_{1,2}$  - работа силы  $F_1$  на перемещениях, вызванных силой  $F_2$ . При этом

$$V_{1,1} = (1/2)F_1\Delta_{1,1}; \quad V_{2,2} = (1/2)F_2\Delta_{2,2}; \quad V_{1,2} = F_1\Delta_{1,2}.$$

Множитель  $1/2$  в выражениях для  $V_{1,1}$  и  $V_{2,2}$  обусловлен тем, что эти силы постепенно возрастают от нуля до своего конечного значения. Отсут-

ствие же этого множителя в выражении для  $V_{1,2}$  объясняется тем, что к началу действия силы  $F_2$  сила  $F_1$  уже достигла окончательного значения и в процессе возрастания силы  $F_2$  остается постоянной.

*Вариант 2.*

$$V = V_{2,2} + V_{1,1} + V_{2,1},$$

где  $V_{1,1}$  и  $V_{2,2}$  имеют прежний смысл, а  $V_{2,1}$  есть работа силы  $F_2$  на перемещениях, вызванных силой  $F_1$ . При этом

$$V_{2,1} = F_2 \Delta_{2,1}.$$

Приравняв суммарные работы внешних сил для двух вариантов нагружения, получаем:

$$V_{1,1} + V_{2,2} + V_{1,2} = V_{2,2} + V_{1,1} + V_{2,1},$$

откуда следует, что

$$V_{1,2} = V_{2,1}, \quad (1.134)$$

что и требовалось доказать.

### Теорема о взаимности перемещений.

Если имеются два состояния одной и той же конструкции, нагруженной двумя силами, равными по величине, то перемещение в направлении первой силы от действия второй равно перемещению в направлении второй силы от действия первой.

Доказательство. Для конструкции, изображенной на рис.1.25, примем  $F_1 = F_2 = F$  и применим к ней теорему о взаимности работ. Получим  $F_2 \Delta_{2,1} = F_1 \Delta_{1,2}$  или  $F \Delta_{2,1} = F \Delta_{1,2}$ . Отсюда

$$\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2}, \quad (1.135)$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем обозначать перемещения, вызываемые единичными силами, буквой  $\delta$  (если не оговорено другое). Тогда  $\delta_{1,1}$  есть перемещение в направлении силы  $F_1$  от силы  $F_1 = 1$ ,  $\delta_{2,2}$  - перемещение в направлении силы  $F_2$  от силы  $F_2 = 1$ ,  $\delta_{1,2}$  - перемещение в направлении силы  $F_1$  от силы  $F_2 = 1$  и т.д. На основании теоремы о взаимности перемещений при  $F_1 = F_2 = 1$  получаем:

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1}. \quad (1.136)$$

В общем случае:

$$\delta_{i,j} = \delta_{j,i} \quad (1.137)$$

Последнее соотношение формулируется так: перемещение в направлении  $i$ -й силы от действия  $j$ -й силы, равной единице, равно перемещению в направлении  $j$ -й силы от действия  $i$ -й силы, равной единице. Это соотношение широко используется в расчетах конструкций.

## 1.4. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Целью расчета и проектирования несущих конструкций, применяемых в различных областях техники, является обеспечение прочности и жесткости этих конструкций при минимальных расходах материала. Поэтому при расчете конструкций любой сложности на прочность и жесткость желательно получить как можно более точное решение задачи. Это возможно при использовании адекватных расчетных схем, точных дифференциальных или интегральных уравнений для описания напряженно-деформированного состояния конструкций и точного решения этих уравнений. К сожалению, удовлетворить перечисленным условиям для сложных комбинированных систем, как правило, не удастся, хотя бы по той причине, что для точной формулировки разрешающих уравнений необходимо иметь аналитическое описание геометрического облика конструкции, а это задача во многих случаях практически невыполнимая. В связи с этим большое значение приобретают приближенные методы расчета конструкций. Большинство этих методов основано на использовании вариационных принципов.

### 1.4.1. Вариационный принцип Лагранжа

Рассмотрим два состояния конструкции. В первом (действительном) состоянии на конструкцию действуют объемные силы  $X, Y, Z$  и поверхностные нагрузки  $X_v, Y_v, Z_v$ . Природа этих нагрузок может быть различной, для наших рассуждений она не существенна. Под действием приложенных нагрузок конструкция получает перемещения  $u, v, w$ , в результате чего в конструкции возникают деформации  $\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , и напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Во втором состоянии конструкция получает некоторые бесконечно малые перемещения  $\delta u, \delta v, \delta w$ , что приводит к появлению деформаций  $\delta \gamma_{xx}, \delta \gamma_{yy}, \delta \gamma_{zz}, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$  и напряжений  $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \sigma_z, \delta \tau_{xy}, \delta \tau_{yz}, \delta \tau_{zx}$ . Это, в свою очередь, вызывает вариацию поверхностных нагрузок  $\delta X_v, \delta Y_v, \delta Z_v$ .

Применим принцип возможных перемещений, согласно которому работа сил первого состояния на перемещениях второго равна нулю. Получим:

$$\begin{aligned} & - \iiint_V (\sigma_x \delta \gamma_x + \sigma_y \delta \gamma_y + \sigma_z \delta \gamma_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV + \\ & + \iint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV + \iint_{S_1} (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Преобразуем формулу (1.138). Согласно (1.122), выражение для потенциальной энергии деформации тела можно записать в виде:

$$W = \iiint_V \bar{W} dV, \quad (1.139)$$

где

$$\bar{W} = \frac{1}{2} (\sigma_x \gamma_x + \sigma_y \gamma_y + \sigma_z \gamma_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \{\gamma\}^T \{\sigma\} \quad (1.140)$$

есть удельная потенциальная энергия.

Для линейно-деформируемых материалов зависимость между напряжениями и деформациями в общем случае выражается следующим образом:

$$\{\sigma\} = [A] \{\gamma\}, \quad (1.141)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Подставив (1.141) в (1.140), получаем:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \{\gamma\}^T [A] \{\gamma\}. \quad (1.142)$$

Рассматривая удельную потенциальную энергию  $\bar{W}$  как функцию шести компонентов деформаций, найдем дифференциал этой функции. По правилам дифференцирования сложных функций (промежуточные действия опущены) получаем:

$$d\bar{W} = \{\gamma\}^T [A] \{d\gamma\} = \{\sigma\}^T \{d\gamma\} = \sigma_x d\gamma_x + \sigma_y d\gamma_y + \sigma_z d\gamma_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} \quad (1.143)$$

В дальнейшем будем считать, что внешние объемные и поверхностные силы обладают потенциалом и что эти силы не изменяются при варьировании перемещений. Тогда функции потенциальной энергии объемных ( $U_{vol}$ ) и поверхностных ( $U_{sur}$ ) нагрузок могут быть записаны в виде:

$$-U_{vol} = Xu + Yv + Zw; \quad -U_{sur} = X_v u + Y_v v + Z_v w. \quad (1.144)$$

Следовательно,

$$-dU_{vol} = Xdu + Ydv + Zdw; \quad -dU_{sur} = X_v du + Y_v dv + Z_v dw. \quad (1.145)$$

Переходя в формулах (1.143) и (1.145) от дифференциалов  $du, dv, dw$  к бесконечно малым вариациям перемещений  $\delta u, \delta v, \delta w$ , получаем:

$$\delta \bar{W} = \sigma_x \delta \gamma_x + \sigma_y \delta \gamma_y + \sigma_z \delta \gamma_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}; \quad (1.146)$$

$$-\delta U_{vol} = X \delta u + Y \delta v + Z \delta w; \quad -\delta U_{sur} = X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w.$$

С учетом соотношений (1.146) уравнение (1.138) принимает вид:

$$\iiint_V \delta \bar{W}(u, v, w) dV + \iiint_V \delta U_{vol}(u, v, w) dV + \iint_S \delta U_{sur}(u, v, w) dV = 0. \quad (1.147)$$

Вынесем оператор  $\delta$  в формуле (1.147) за знаки интегралов. Получим:

$$\delta \left( \iiint_V \bar{W}(u, v, w) dV + \iiint_V U_{vol}(u, v, w) dV + \iint_S U_{sur}(u, v, w) dV = 0 \right) \quad (1.148)$$

Выражение, стоящее в формуле (1.148) в круглых скобках, представляет собой полную потенциальную энергию  $\Pi$  системы, т.е.

$$\Pi = \left( \iiint_V \bar{W}(u, v, w) dV + \iiint_V U_{vol}(u, v, w) dV + \iint_S U_{sur}(u, v, w) dV = 0 \right) \quad (1.149)$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\delta \Pi(u, v, w) = 0. \quad (1.150)$$

Уравнение (1.150) означает, что среди всех возможных перемещений  $u, v$  и  $w$ , удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, действительные перемещения приводят к стационарности полной потенциальной энергии. Этот принцип известен как вариационный принцип Лагранжа.

Покажем, что потенциальная энергия в состоянии равновесия системы должна быть минимальной.

Предположим, что возможные перемещения заданы в виде:

$$u^* = u + \delta u; \quad v^* = v + \delta v; \quad w^* = w + \delta w; \quad (1.151)$$

где  $u, v$  и  $w$  - действительные перемещения. Потенциальную энергию, соответствующую этим перемещениям, можно выразить через потенциальную энергию действительного состояния, воспользовавшись разложением функции потенциальной энергии в ряд Тейлора и сохранив три члена ряда:

$$\Pi(u^*, v^*, w^*) = \Pi(u, v, w) + \delta \Pi + \delta^2 \Pi \quad (1.152)$$



Первая вариация потенциальной энергии определена выше (см. (1.146), (1.148)). Вторую вариацию найдем, используя формулы (1.142) и (1.144). Получим (промежуточные преобразования опущены):

$$\delta^2 \Pi = \iiint_V \bar{W} (\delta u, \delta v, \delta w) dV \quad (1.153)$$

Поскольку потенциальная энергия системы всегда положительна, то

$$\delta^2 \Pi \geq 0. \quad (1.154)$$

Первая вариация потенциальной энергии для действительных перемещений равна нулю, следовательно

$$\Pi(u^*, v^*, w^*) \geq \Pi(u, v, w) \quad (1.155)$$

Формула (1.155) показывает, что потенциальная энергия достигает абсолютного минимума на действительных перемещениях. Вследствие этого вариационный принцип Лагранжа может быть сформулирован так: *среди всех возможных перемещений  $u, v$  и  $w$ , удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, действительные перемещения сообщают полной потенциальной энергии абсолютный минимум.*

#### 1.4.2. Вариационный принцип Кастильяно

Для двух рассмотренных в предыдущем разделе состояний конструкции применим принцип возможных перемещений, приняв силы из второго состояния, а перемещения – из первого. Получим:

$$\begin{aligned} & - \iiint_V (\delta \sigma_x \gamma_x + \delta \sigma_y \gamma_y + \delta \sigma_z \gamma_z + \delta \tau_{xy} \gamma_{xy} + \delta \tau_{yz} \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV + \\ & + \iint_{S_1} (\delta X_v u + \delta Y_v v + \delta Z_v w) dS = 0. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Из формулы (1.141) находим:

$$\{\gamma\} = [A]^{-1} \{\sigma\} \quad (1.157)$$

В теории упругости доказано, что матрица  $[A]$  симметрична, что существует обратная к ней матрица  $[A]^{-1}$  и эта матрица также симметрична. С учетом этого обстоятельства после подстановки (1.157) в (1.140) получаем:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [A]^{-1} \{\sigma\} \quad (1.158)$$

Рассматривая удельную потенциальную энергию  $\bar{W}$  как функцию шести компонент напряжений, найдем дифференциал этой функции. По правилам дифференцирования сложных функций получаем:

$$\begin{aligned} d\bar{W} &= \{\sigma\}^T [A]^{-1} \{d\sigma\} = \{\gamma\}^T \{d\sigma\} = d\sigma_x \gamma_x + d\sigma_y \gamma_y + d\sigma_z \gamma_z + \\ &+ d\tau_{xy} \gamma_{xy} + d\tau_{yz} \gamma_{yz} + d\tau_{zx} \gamma_{zx} = d\bar{W}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \end{aligned} \quad (1.159)$$

Заменяя в формуле (1.159) дифференциалы бесконечно малыми приращениями, получаем

$$\delta \bar{W} = \delta \sigma_x \gamma_x + \delta \sigma_y \gamma_y + \delta \sigma_z \gamma_z + \delta \tau_{xy} \gamma_{xy} + \delta \tau_{yz} \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (1.160)$$

Функция потенциальной энергии поверхностных нагрузок определяется второй формулой из выражения (1.144). Так как в рассматриваемом случае варьируются напряжения во втором состоянии, а перемещения первого состояния считаются постоянными величинами, то дифференциал этой функции в данном случае записывается так:

$$-dU_{sur} = dX_v u + dY_v v + dZ_v w. \quad (1.161)$$

Так как приращение поверхностных нагрузок во втором состоянии зависит от напряжений в конструкции, то

$$dU_{sur} \equiv dU_{sur}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}).$$

С учетом (1.160) и (1.161) формула (1.156) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \delta \bar{W}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) dV + \\ & + \iint_S \delta U_{sur}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) dV = 0 \end{aligned} \quad (1.162)$$

Вынесем оператор варьирования в формуле (1.162) за знаки интегралов:

$$\delta \left( \iiint_V \delta \bar{W}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) dV + \iint_S \delta U_{sur}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) dV \right) = 0 \quad (1.163)$$

Замечая, что в последней формуле выражение в круглых скобках представляет собой потенциальную энергию системы, приходим к вариационному принципу Кастильяно, который формулируется следующим образом: *среди всех возможных напряженных состояний, удовлетворяющих силовым граничным условиям, истинное состояние сообщает потенциальной энергии стационарное значение.* Аналогично вариационному принципу Лагранжа, можно показать, что потенциальная энергия при этом оказывается минимальной.

## Глава 2. ПРИКЛАДНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

### 2.1. СВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧЕ КОШИ

#### 2.1.1. Численное решение задачи Коши

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

При данной форме записи каждое из  $n$  уравнений первого порядка разрешено относительно производной. Подобную запись будем называть записью или представлением системы  $n$ -ного порядка обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Выражения, стоящие справа или правые части системы уравнений, могут содержать как линейные, так и нелинейные комбинации и функции независимой переменной  $x$  и вектора неизвестных  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

В векторной форме записи система (2.1) имеет вид

$$\frac{d\{Y\}}{dx} = \{F(x, \{Y\})\} \quad (2.2)$$

где  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  — вектор неизвестных и  $\{F\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  — вектор правых частей.

Требуется, зная  $n$  дополнительных условий в начальной точке  $a$  отрезка  $[a, b]$

$$\{Y(a)\} = \{Y_0\}, \quad (2.3)$$

посредством интегрирования системы (2.1) найти значение вектора неизвестных в конечной точке отрезка интегрирования  $b$ .

Дополнительные условия (2.1), заданные в начальной точке отрезка интегрирования, называются *начальными условиями*, а поставленная задача — *начальной задачей* или *задачей Коши*.

Все обсуждаемые далее численные методы известны как дискретные методы, т.е. методы, посредством которых вычисляется последовательность приближений  $y_m \approx y(x_m)$  на множестве точек или сетке точек  $x_{m+1} = x + h_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_M = b$ , где  $h_m > 0$  — шаг сетки. В большинстве методов шаг сетки выбирается постоянным ( $h_m = h = const$ ).

Наиболее простым способом построения решения в точке  $x_{m+1}$ , если оно известно в точке  $x_m$ , является способ, основанный на разложении функции в ряд Тейлора. Для одного дифференциального уравнения имеем

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + y'(x_m)h + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \dots \quad (2.4)$$

Если ряд оборвать и заменить  $y(x_m)$  приближенным значением  $y_m$ , то с помощью разложения (2.4) можно получить приближенные формулы. В простейшем случае с учетом (2.1) получаем

$$y_{m+1} = y(x_m) + hf(x_m, y_m) \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) известно как формула метода Эйлера.

#### Методы Рунге-Кутты численного решения задачи Коши

Примерно в начале прошлого века Рунге, а затем Хойн и Кутта предложили подход, основанный на построении формул, которые давали бы максимально точное приближение, но не требовали при этом вычисления производных от функции  $f$ . Формулы полученных методов оказываются более удобными для практических расчетов, поскольку не требуют вычисления дополнительных начальных значений и позволяют легко менять шаг интегрирования. Наиболее известной является формула четырехэтапного или *классического* метода Рунге-Кутты.

При решении одного ОДУ ( $n=1$ ) метод заключается в последовательном нахождении вспомогательных коэффициентов по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m, y) \\ k_2 &= f\left(x_m + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y + hk_1)\right), \\ k_3 &= f\left(x_m + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y + hk_2)\right), \\ k_4 &= f\left(x_m + h, \frac{1}{2}(y + hk_3)\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и последующего построения приближения к решению в точке  $x_m+h$  по формуле

$$y(x_m + h) \approx y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4). \quad (2.7)$$

В случае решения системы  $n$ -ного порядка ОДУ формулы (2.6) и (2.7) сохраняются, с тем различием, что вместо коэффициентов  $k_i$  вычисляются вектор-коэффициенты

$$\{k_i\} = \{F(x_m, h, Y_m)\}.$$

Метод имеет четвертый порядок точности ( $p=4$ ). Для автоматического управления длиной шага, обеспечивающего погрешность вычислений не более  $\varepsilon$ , поступают следующим образом:

1. Для выбранной начальной длины шага  $h$  дважды проводят вычисления: для двух шагов длины  $h$  и одного шага длины  $2h$ . При этом получают два приближения к точному решению в точке  $x_m+2h$ :  $Y_h$  и  $Y_{2h}$ .

2. Вычисляют погрешность  $err$  по правилу Рунге практической оценки погрешности

$$err = \frac{1}{2^p - 1} \|Y_h - Y_{2h}\| \quad (2.8)$$

где  $p$  – порядок точности используемого метода.

3. Величину погрешности  $err$  сравнивают с  $\varepsilon$ , что позволяет вычислить оптимальную длину шага  $h_{opt}$

$$h_{opt} = h \left( \frac{\varepsilon}{err} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (2.9)$$

4. Если  $err \leq \varepsilon$ , то два вычисленных шага считают принятыми и решение продолжают, исходя из найденных значений решения  $Y_h$  или  $Y_{2h}$  с новой длиной  $h_{new} = 0.9h_{opt}$ . В противном случае оба найденных решения отбрасывают и вычисления повторяют с длиной шага  $h_{new}$ .

**Метод Рунге-Кутты с улучшением Мерсона** относится к так называемым вложенным методам Рунге-Кутты. Идея таких методов заключается в использовании вместо правила Рунге (2.8) более простого способа практической оценки погрешности. Для этого строятся такие формулы, которые кроме численного приближенного значения  $Y_h$  содержат и некоторое более точное выражение  $\hat{Y}_h$ . В таком случае погрешность на шаге  $err$  вычисляется как

$$err = \|Y_h - \hat{Y}_h\|. \quad (2.10)$$

Это делает оценку точности на шаге (выбраковку шагов) менее трудоемкой.

Метод Рунге-Кутты-Мерсона имеет четвертый порядок точности. Для нахождения приближенного решения  $Y_h$  в точке  $x_m+h$  по уже известному значению  $Y$  решения в точке  $x_m$  находят коэффициенты (коэффициенты приведены для случая  $n=1$ ):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m, y), \\ k_2 &= f\left(x_m + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_m + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{6}(k_1 + k_2)\right), \\ k_4 &= f\left(x_m + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_3)\right), \\ k_5 &= f\left(x_m + h, y + h\left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

тогда

$$\begin{aligned} y(x_m + h) &\approx y_h = y + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{2}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right), \\ \hat{y}_h &= y + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ниже приведен алгоритм метода Рунге-Кутты-Мерсона.

**Дано:**  $x_0=a$  – начальное значение независимой переменной (начальная точка отрезка интегрирования);

$x_1=b$  – конечное значение независимой переменной (конечная точка отрезка интегрирования);

$\{Y(a)\} = \{Y_0\}$  – вектор начальных условий;

$h$  – начальное значение шага интегрирования;

$\varepsilon$  – допустимая погрешность вычислений на шаге;

**Требуется получить:**

$\{Y_i\} = \{Y(b)\}$  – вектор решений СОДУ в конечной точке отрезка интегрирования.

**Алгоритм решения:**

Цикл пока  $x < b$ , делать

1. Проверка выхода за границу отрезка:

если  $x+h > b$ , то  $h=b-x$ .

2. Подсчет массивов вектор-коэффициентов  $\{K_1\}, \{K_2\}, \{K_3\}, \{K_4\}, \{K_5\}$

3. Подсчет  $Y_h$  и  $\hat{Y}_h$ .

4. Нахождение погрешности  $err = \|Y_h - \hat{Y}_h\|$ .

5. Подсчет нового шага  $h_{new} = 0.9h \left( \frac{\varepsilon}{err} \right)^{\frac{1}{5}}$ .

6. Если  $err < \varepsilon$ , то

6.1. В точке  $x+h$  решение подсчитано:  $Y = Y_h$ .

6.2. Сдвиг на шаг:  $x=x+h$ .

конец “если”.

7. Изменение шага:  $h=h_{new}$

конец цикла

## 2.1.2. Метод начальных параметров

При интегрировании системы дифференциальных уравнений необходимо располагать дополнительными условиями, которые позволяют определить постоянные интегрирования. При этом число дополнительных условий должно быть равно порядку интегрируемой системы. Задача нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, если дополнительные условия заданы в начальной точке, называется *начальной задачей* или *задачей Коши*. Дополнительные условия в этом случае называют *начальными условиями*. При численном счете решение начальной задачи получают, последовательно интегрируя систему уравнений вдоль независимой переменной одним из численных методов (см. 2.1.1).

Для задач строительной механики более характерны случаи, когда дополнительные условия заданы по краям, то есть, в начальной и конечной точках интервала интегрирования. Такие задачи принято называть *краевыми задачами*. Решить краевую задачу оказывается сложнее, чем начальную.

Одним из способов решения является сведение краевой задачи к начальной.

Для этой цели часто применяется метод начальных параметров. Название метода отражает то обстоятельство, что в его основе лежит прием использования в качестве недостающих условий в начальной точке некоторых заранее неизвестных величин — *начальных параметров*, которые дополняют краевые условия до полноценных начальных условий.

Пусть дана краевая задача для системы  $2n$  обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\{Y\}}{dx} = [A(x)]\{Y(x)\} + \{B(x)\} \quad (2.13)$$

с дополнительными условиями, распределенными поровну<sup>1</sup> по концам интервала  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} [A_0]\{Y(0)\} + \{B_0\} &= \{0\}, \\ [A_1]\{Y(1)\} + \{B_1\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\{Y(x)\}$  — вектор столбец основных неизвестных размером  $2n \times 1$ , называемый также вектором состояния в текущем сечении;  $[A(x)]$  — квадратная матрица коэффициентов при неизвестных размером  $2n \times 2n$ ;  $\{B(x)\}$  — вектор столбец свободных членов размером  $2n \times 1$ ;  $[A_0]$  и  $[A_1]$  — матрицы краевых условий размером  $n \times 2n$ ;  $\{B_0\}$  и  $\{B_1\}$  — векторы-столбцы свободных членов в начальной и конечной точках интервала  $[0, 1]$  размером  $n \times 1$ .

Общий интеграл системы уравнений (2.13) имеет вид

$$\{Y(x)\} = [K(x)]\{C\} + \{Y^*(x)\} \quad (2.15)$$

<sup>1</sup> Рассмотренный алгоритм нетрудно распространить на случай, когда количество дополнительных условий на правом и левом краях не одинаково, но составляет в сумме  $2n$ .

где  $\{C\}$  — вектор констант, имеющий смысл вектора начальных условий;  $\{Y^*(x)\}$  — частное решение матричного уравнения (2.13), удовлетворяющее нулевым начальным условиям  $\{Y(0)\} = \{0\}$ ;  $[K(x)]$  — матрица фундаментальных решений однородной системы уравнений, то есть системы (2.13) при  $\{B(x)\} = \{0\}$ .

Запись (2.15) отражает фундаментальный принцип суперпозиции, согласно которому решение системы  $2n$  линейных дифференциальных уравнений может быть представлено как сумма  $2n$  линейно независимых решений системы однородных уравнений, полученных из (2.13) при нулевом векторе свободных членов, и частного решения системы неоднородных уравнений (2.13).

Следуя вышесказанному, частное решение определяют, интегрируя систему (2.13) с начальными условиями  $\{Y(0)\} = \{0\}$ . Для построения матрицы фундаментальных решений  $[K(x)]$  систему (2.13) необходимо проинтегрировать  $2n$  раз при следующих начальных условиях:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}, \dots, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2n}$

Векторы (2.16) можно назвать *пробными* или *базисными* начальными векторами. Каждое частное решение, соответствующее одному пробному вектору, позволяет определить один столбец функциональной матрицы фундаментальных решений  $[K(x)]$ . Отметим, что при таком методе построения справедливо соотношение  $[K(0)] = [E]$ , где  $[E]$  — единичная матрица.

Для определения  $2n$  компонент вектора  $\{C\}$  необходимо решить систему алгебраических уравнений порядка  $2n$ , составленную из условий на левом и правом краях:

$$\begin{cases} [A_0]\{C\} + \{B_0\} = \{0\} \\ [A_1][K(1)]\{C\} + \{Y^*(1)\} + \{B_1\} = \{0\} \end{cases} \quad (2.17)$$

После нахождения вектора  $\{C\}$ , имеющего смысл вектора начальных условий, проводится *чистовое* решение начальной задачи, в результате которого определяется требуемое решение.

Отметим, что для решения краевой задачи приходится  $2n+2$  раза (включая чистовое интегрирование) решать задачу Коши. Количество необходимых интегрирований можно уменьшить до  $n+2$  раз, используя следующую модификацию метода.

В большинстве практических случаев система (2.17) распадается на две независимые подсистемы алгебраических уравнений. Другими словами, из граничного условия на левом краю удастся сразу найти  $p$  компонентов вектора начальных условий. В этом случае нет необходимости вести  $2n$ -кратное интегрирование с пробными векторами (2.16). Известные компоненты начального вектора следует сразу записать в соответствующие позиции пробных векторов. Оставшиеся неизвестными компоненты пробных векторов, как и ранее, задаются в виде  $p$  линейно независимых комбинаций, состоящих из единицы и нулей. Проведя интегрирование, но теперь уже только  $p$  раз, получаем матрицу  $[\tilde{K}(1)]$  размерностью  $2n \times n$ . Вектор недостающих компонентов  $\{\tilde{C}\}$  размерностью  $n \times 1$  определяется из граничных условий на правом краю, которые в этом случае записываются следующим образом:

$$[A_1] \begin{bmatrix} [\tilde{K}(1)]\{\tilde{C}\} + \{Y^*(1)\} \\ \{B_1\} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (2.18)$$

После нахождения всех компонентов вектора  $\{C\}$ , проводится чистовое интегрирование для получения решения исходной краевой задачи.

## 2.2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Расчет различных типов конструкций часто сводится к решению дифференциальных уравнений. Во многих случаях не удается получить точное решение этих уравнений ввиду сложности граничных условий. Рассмотренные в предыдущей главе вариационные принципы дают возможность получить приближенные решения, при этом интегрирование дифференциальных уравнений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Методы решения, основанные на использовании вариационных принципов, называются вариационными методами. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

### 2.2.1. Метод Релея-Ритца

В методе Релея-Ритца неизвестные перемещения точек конструкции ищутся в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n a_i u_i(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n b_i v_i(x, y, z), \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n c_i w_i(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $u_i, v_i, w_i$  - некоторые заданные функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям,  $a_i, b_i, c_i$  - неизвестные числовые коэффициенты.

При задании перемещений в виде (2.19) потенциальная энергия системы оказывается функцией параметров  $a_i, b_i, c_i$ , и условие стационарности потенциальной энергии (1.150) приводит к равенству нулю частных производных от потенциальной энергии по этим параметрам, т.е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Так как для линейно деформируемых систем потенциальная энергия является квадратичной функцией перемещений, то соотношения (2.20) дают систему из  $3n$  линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_i, b_i, c_i$ , число которых также равно  $3n$ . После решения системы уравнений по формулам (2.19) находятся функции перемещений, а затем по формулам теории упругости вычисляются деформации и напряжения в конструкции. Условия равновесия при этом удовлетворяются автоматически.

### 2.2.1. Метод Бубнова-Галеркина

При использовании метода Бубнова-Галеркина искомые перемещения задаются также в виде (2.19), однако в качестве базисных функций  $u_i, v_i, w_i$  применяются функции, обладающие свойством взаимной ортогональности. Напомним, что семейство функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  образует ортогональную систему в интервале  $a \leq x \leq b$ , если

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j. \quad (2.21)$$

Отметим, что если какая-либо функция тождественно равна нулю (равна нулю при любом значении  $x$ ), то она ортогональна ко всем без исключения функциям.

Идею метода Бубнова-Галеркина рассмотрим на простом примере. Пусть требуется решить дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, имеющее вид

$$EI(x)y^{IV}(x) - q = 0 \quad (2.22)$$

Функция (2.22) тождественно равна нулю при любом значении  $x$  в пределах длины балки.

Зададим решение этого уравнения в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (2.23)$$

где  $\varphi_i(x)$  - семейство ортогональных функций,  $a_i$  - неопределенные коэффициенты.

После подстановки приближенного решения (2.23) в уравнение (2.22) функция, записанная в левой части этого уравнения, уже не будет тождественно равна нулю. Можно, однако, так подобрать коэффициенты  $a_i$ , чтобы функция (2.22) стала ортогональной к любой функции из заданного семейства  $\varphi_i(x)$ . Для этого составим  $n$  интегралов типа (2.21). Получим

$$\int_0^l \left[ EI(x) \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i^{IV}(x) - q \right] \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

Раскрыв выражение под знаком интеграла, получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_i$ .

Функции  $\varphi_i$  в методе Бубнова-Галеркина должны удовлетворять как кинематическим, так и статическим граничным условиям.

В ряде работ (см., например, [12]) показано, что метод Бубнова-Галеркина имеет вариационную природу и что решение задач этим методом можно свести к удовлетворению условия стационарности потенциальной энергии при использовании в качестве базовых функций в разложении (2.19) ортогональных функций.

## 2.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 2.3.1. Идея метода конечных элементов

Одним из наиболее широко применяемых на практике методов прочностного расчета конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). При использовании МКЭ конструкция разбивается на множество элементов простой геометрической формы (отрезки линий, треугольники, четырехугольники, тетраэдры и т.п.), соединенные между собой в узловых точках. Примеры построения расчетных схем МКЭ, часто называемых в литературе сетками конечных элементов, приведены на рис. 2.1 - 2.3.

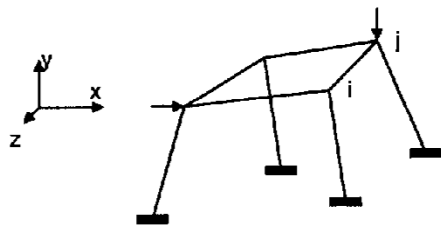


Рис.2.1

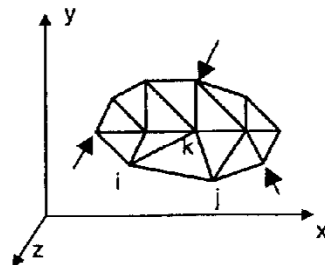


Рис.2.2

Конечными элементами на этих схемах являются стержни (в случае пространственной рамы рис.2.1), плоские треугольники (в случае пластинки рис.2.2), криволинейные четырехугольники (в случае оболочки рис.2.3).

Для этих элементов, названных конечными, аналитическими методами получают точные или приближенные решения уравнений, описывающих их напряженно-деформированное состояние (НДС). На основе этих решений составляются уравнения, описывающие НДС всей конструкции. Как правило, это есть системы алгебраических или дифференциальных уравнений. Порядок уравнений может быть очень высок. Для решения уравнений МКЭ, как и для их составления, используются вычислительные машины. Как в нашей стране, так и за рубежом разработан ряд программ для ЭВМ, реализующих МКЭ. К ним относятся широко известные программы NASTRAN, ANSYS, MARC, DINA и др. Все эти программы хорошо документированы и допускают самостоятельное использование их широким кругом специалистов. Перечисленные выше качества, а именно, доступность программ МКЭ и физическая наглядность получаемых результатов, обеспечили популярность МКЭ. Современный инженер должен быть знаком с основами МКЭ и уметь им пользоваться.

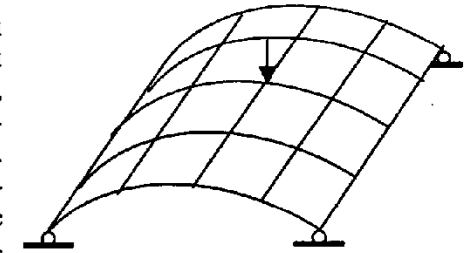


Рис. 2.3

### 2.3.2. Алгоритм МКЭ в форме метода перемещений

В зависимости от того, какие неизвестные являются основными, МКЭ реализуется в форме метода перемещений, метода сил или смешанного метода. Наиболее популярным среди разработчиков программ МКЭ является метод перемещений, позволяющий получить более простые и универсальные алгоритмы. Основными этапами расчета любой конструкции методом перемещений являются:

1. Идеализация конструкции или выбор расчетной схемы (построение сетки конечных элементов).
2. Вычисление матриц жесткости отдельных элементов в любой удобной для этих целей местной системе координат.
3. Преобразование матричных характеристик элементов в общую для всей конструкции систему координат.
4. Формирование системы уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние всей конструкции в перемещениях. Для задачи статики эта система уравнений имеет вид:

$$[K]\{u\} = \{F\}, \quad (2.25)$$

где  $[K]$ - матрица жесткости конструкции,  $\{F\}$  и  $\{u\}$ - векторы узловых нагрузок и перемещений соответственно.

5. Решение системы уравнений и вычисление перемещений узлов конструкции.

6. Вычисление деформаций элементов по известным узловым перемещениям и вычисление напряжений в элементах по известным деформациям.

Одним из основных понятий, связанных с расчетом конструкций МКЭ в форме метода перемещений, является понятие матрицы жесткости отдельного конечного элемента (КЭ) и конструкции в целом. Матрицей жесткости КЭ называется матрица, выражающая узловые силы конечного элемента через его узловые перемещения. Например, для конечного элемента  $i-j$  стержневой системы, изображенной на рис.2.1, зависимость между концевыми силами и перемещениями выражается соотношением

$$\{f\} = [K_c] \{\delta\}, \quad (2.26)$$

где векторы узловых перемещений  $\{\delta\}$  и узловых сил  $\{f\}$  состоят из двенадцати компонентов каждый. Этими компонентами являются проекции линейных и угловых перемещений узлов, а также узловых сил и моментов на координатные оси  $x, y, z$ . Следовательно, матрица жесткости  $[K_c]$  стержневого конечного элемента имеет порядок  $12 \times 12$ .

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \dots \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{x,i} \\ \delta_{y,i} \\ \delta_{z,i} \\ \varphi_{x,i} \\ \varphi_{y,i} \\ \varphi_{z,i} \\ \dots \\ \delta_{x,j} \\ \delta_{y,j} \\ \delta_{z,j} \\ \varphi_{x,j} \\ \varphi_{y,j} \\ \varphi_{z,j} \end{Bmatrix}; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x,i} \\ f_{y,i} \\ f_{z,i} \\ m_{x,i} \\ m_{y,i} \\ m_{z,i} \\ \dots \\ f_{x,j} \\ f_{y,j} \\ f_{z,j} \\ m_{x,j} \\ m_{y,j} \\ m_{z,j} \end{Bmatrix}.$$

Для треугольного конечного элемента  $i-j-k$  пластинки, работающей на действие сил в ее плоскости, зависимость между узловыми силами и перемещениями также выражается формулой (2.26), но векторы узловых сил и перемещений в этом случае состоят из шести компонентов каждый:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix}.$$

Следовательно, матрица жесткости плоского треугольного конечного элемента имеет порядок  $6 \times 6$ .

При расчете методом перемещений стержневой конструкции вычисление матрицы жесткости (МЖ) отдельного стержня представляется вполне очевидной операцией. Для того, чтобы найти какой-либо элемент МЖ, необходимо сообщить концу балки единичное перемещение в соответствующем направлении и вычислить соответствующую реакцию. Аналогичную операцию нельзя применить для вычисления матриц жесткости элементов континуума. Во-первых, практически невозможно найти узловые силы, обусловленные узловыми перемещениями, для двух- и трехмерного элемента даже сравнительно простой формы. Во-вторых, и это более важно, деформации и напряжения, найденные из расчета континуальной системы таким путем, существенно отличаются от деформаций и напряжений, возникающих в реальной конструкции.

Рассмотрим, например, оболочку, показанную на рис.2.4. Представим оболочку состоящей из четырехугольных элементов, соединенных между собой только в узловых точках (рис.2.5). Очевидно, что поведение идеализированной таким образом оболочки под нагрузкой будет весьма грубо аппроксимировать поведение реальной конструкции. Действительно, каждый элемент расчетной схемы (рис. 2.5) будет деформироваться независимо от других (за исключением точек соединения) и, следовательно, идеализированная схема будет более податливой, чем реальная континуальная система. Кроме того, в узловых точках будет возникать концентрация напряжений, обусловленная сосредоточенными узловыми силами, и распределение напря-

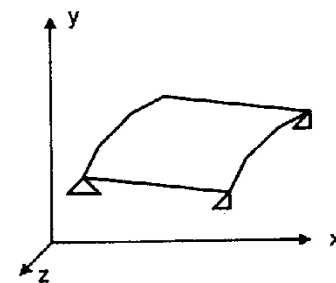


Рис. 2.4

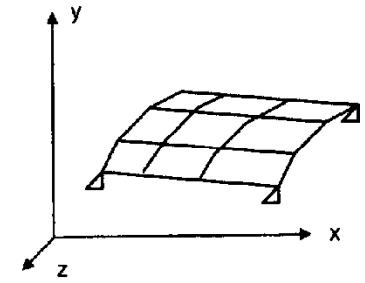


Рис. 2.5

жений в идеализированной схеме будет также существенно отличаться от такового в заданной системе. Следовательно, необходимо, чтобы деформации каждого КЭ соответствовала деформациям идеализируемой этим элементом области рассчитываемой конструкции.

В МКЭ эта задача решается заданием функций, связывающих перемещения внутренних точек конечных элементов с перемещениями узлов. Функции перемещений должны удовлетворять двум критериям, установленным в теории МКЭ. Во-первых, они должны обеспечивать постоянство деформаций (в том числе нулевую деформацию, т.е. перемещение элемента как твердого тела), если такое состояние достигается при заданных нагрузках в конструкции или какой-либо ее части. Во-вторых, перемещения и их производные на порядок ниже тех, которые входят в выражение для потенциальной энергии элемента, должны быть непрерывными функциями на границах между элементами. Удовлетворение функций перемещений перечисленным выше критериям обеспечивает, как правило, сходимость решения к точному при сгущении сетки конечных элементов. Обычно функции перемещений задаются в виде полиномов той или иной степени.

Стандартная операция вычисления МЖ конечного элемента любой формы и с любыми свойствами материалов заключается в следующем.

1. Задаются функции перемещений элемента

$$\{f(x, y, z)\} = [M(x, y, z)]\{q\}, \quad (2.27)$$

где  $\{f(x, y, z)\}$  - вектор перемещений, число компонент которого определяется физической стороной задачи;  $[M(x, y, z)]$  - матрица координатных функций;  $\{q\}$  - вектор обобщенных координат.

2. Вычисляется вектор узловых перемещений  $\{\delta\}$ :

$$\{\delta\} = [A]\{q\} \quad (2.28)$$

Матрица  $[A]$  получается подстановкой в  $[M(x, y, z)]$  координат узловых точек.

3. Из выражения (2.28) находят обобщенные координаты в зависимости от узловых:

$$\{q\} = [A]^{-1}\{\delta\}. \quad (2.29)$$

4. Перемещения элемента выражаются с помощью соотношений (2.27) и (2.29) в зависимости от узловых перемещений:

$$f(x, y, z) = [M(x, y, z)][A]^{-1}\{\delta\} = [N(x, y, z)]\{\delta\}. \quad (2.30)$$

5. Дифференцированием выражения (2.30) находят деформации элемента

$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = [L]f(x, y, z) = [L][N(x, y, z)]\{\delta\} = [B(x, y, z)]\{\delta\}, \quad (2.31)$$

где  $\{\varepsilon(x, y, z)\}$  - вектор, элементами которого являются компоненты деформаций;  $[L]$  - матрица операторов дифференцирования, элементы которой определяются в зависимости от типа рассчитываемой конструкции и гипотез, положенных в основу расчета. Матрица  $[B(x, y, z) = [L][N(x, y, z)]]$ , связывающая деформации с узловыми перемещениями, играет фундаментальную роль при получении МЖ конечного элемента.

6. Вычисляются компоненты напряжений

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [D]\{\varepsilon(x, y, z)\} = [D][B(x, y, z)]\{\delta\}, \quad (2.32)$$

где  $[D]$  - матрица упругих постоянных, связывающих напряжения и деформации.

7. С использованием принципа возможных перемещений вычисляются узловые силы. Если  $\{F\}$  - вектор внутренних узловых сил (сил взаимодействия данного КЭ с соседним) и  $\{p\}$  - вектор, элементами которого являются компоненты действующей на элемент распределенной нагрузки, то согласно принципу возможных перемещений можно записать следующее равенство:

$$\{\bar{\delta}\}^T \{F\} - \int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV + \int_V \{\bar{f}\}^T \{p\} dV = 0, \quad (2.33)$$

где  $\{\bar{\delta}\}^T \{F\}$  - работа узловых сил  $\{F\}$  на возможных перемещениях  $\{\bar{\delta}\}$ ;  $-\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV$  - возможная работа внутренних сил;  $\int_V \{\bar{f}\}^T \{p\} dV$  - возможная работа приложенной к элементу распределенной нагрузки (чертой сверху обозначены возможные деформации и перемещения);  $V$  - объем элемента.

Используя соотношения (2.30), (2.31) и (2.32), уравнение (2.33) можно представить в виде

$$\{\bar{\delta}\}^T \{F\} = \{\bar{\delta}\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{\delta\} - \{\bar{\delta}\}^T \int_V [N]^T \{p\} dV = 0 \quad (2.34)$$

или, в силу произвольности  $\{\bar{\delta}\}^T$ , в виде

$$\{F\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{\delta\} - \int_V [N]^T \{p\} dV = [K_{эл}] \{\delta\} + \{F_p\} \quad (2.35)$$

где  $[K_{эл}]$  - матрица жесткости элемента, определяемая выражением



$$[K_{эл}] = \int_V [B]^T [D][B] dV, \quad (2.36)$$

а  $\{F_p\}$  - вектор узловых сил, обусловленных распределенной нагрузкой:

$$\{F_p\} = - \int_V [N]^T \{p\} dV. \quad (2.37)$$

Матрица жесткости и вектор узловых нагрузок всей конструкции находятся суммированием матриц жесткости и векторов узловых сил отдельных конечных элементов. Техника суммирования рассмотрена в ниже разделе 2.3.6.

Приведенная выше физическая интерпретация метода конечных элементов является достаточно наглядной, но оставляет без ответа многие вопросы относительно решения задач статики, динамики и устойчивости конструкций, и, прежде всего, вопросы, связанные с формированием разрешающих уравнений МКЭ. Поэтому ниже приводится обоснование метода конечных элементов с использованием уравнений Лагранжа второго рода, дающее возможность подойти к решению различных задач прочностного расчета конструкций с единых методологических позиций.

### 2.3.3. Вывод основного матричного уравнения движения конечного элемента из уравнений Лагранжа второго рода

В задачах движения твердого деформируемого тела широкое применение нашли уравнения Лагранжа второго рода, имеющие вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.38)$$

где  $T$  - кинетическая энергия системы,  $q_j$  -  $j$ -ая обобщенная координата,  $Q_j$  -  $j$ -ая обобщенная сила.

Обобщенная сила может быть представлена в виде

$$Q_j = Q_j^a + Q_j^d, \quad (2.39)$$

где  $Q_j^a$  - активная обобщенная сила,  $Q_j^d$  - диссипативная обобщенная сила.

Активная сила  $Q_j^a$  в свою очередь может быть записана так:

$$Q_j^a = (Q_j^a)_e + (Q_j^a)_i, \quad (2.40)$$

где  $(Q_j^a)_e$  - внешняя сила,  $(Q_j^a)_i$  - внутренняя сила.

При наличии как консервативных  $(Q_j^a)_e^p$ , так и неконсервативных

$(Q_j^a)_e^n$  внешних сил имеем

$$(Q_j^a)_e = (Q_j^a)_e^p + (Q_j^a)_e^n. \quad (2.41)$$

С учетом (2.39) - (2.41) уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = (Q_j^a)_i + (Q_j^a)_e^p + (Q_j^a)_e^n + (Q_j^d). \quad (2.42)$$

На основании (2.42) получим уравнение движения конечного элемента (КЭ) в матричной форме. При этом в качестве обобщенных координат будем рассматривать перемещения узлов КЭ.

Кинетическая энергия КЭ может быть записана так [18]:

$$T = 0.5 \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}, \quad (2.43)$$

где  $[M]$  - матрица массы,  $\{q\}$  - вектор узловых перемещений.

Вектор узловых диссипативных сил  $\{Q_j^d\}$  может быть выражен с помощью матрицы демпфирования  $[D]$  [18]:

$$\{Q^d\} = -[D]\{\dot{q}\}. \quad (2.44)$$

Подставляя (2.43) и (2.44) в (2.42), получаем

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} = \{Q^a\}_i + \{Q^a\}_e^p + \{Q^a\}_e^n. \quad (2.45)$$

Все входящие в уравнение (2.45) величины соответствуют полным значениям обобщенных координат в рассматриваемый момент времени. Однако при решении динамических задач часто приходится проводить расчеты в приращениях (например, при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения). Задача в таких случаях ставится следующим образом. Предполагается, что некоторое тело в момент времени  $t$  находится в состоянии динамического равновесия I. Этому состоянию соответствуют обобщенные перемещения  $q^0$ . Затем под воздействием каких-либо причин тело переходит в состояние равновесия II. Обобщенные координаты получают при этом приращения  $\Delta q$ . Требуется получить уравнения, описывающие движение из состояния I в состояние II.

Применим уравнение (2.45) к состояниям I и II. Для состояния I имеем:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [D]\{\dot{q}(t)\} = \{Q^a(t)\}_i + \{Q^a(t)\}_e^p + \{Q^a(t)\}_e^n. \quad (2.46)$$

В состоянии II

$$[M]\{\ddot{q}(t + \Delta t)\} + [D]\{\dot{q}(t + \Delta t)\} = \{Q^a(t + \Delta t)\}_i^p + \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^p + \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^n. \quad (2.47)$$

Вычитая из уравнения (2.47) уравнение (2.46), получаем

$$[M]\{\ddot{q}(t + \Delta t)\} + [D]\{\dot{q}(t + \Delta t)\} = \{Q^a(t + \Delta t)\}_i^p - \{Q^a(t)\}_i^p + \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^p - \{Q^a(t)\}_e^p + \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^n - \{Q^a(t)\}_e^n + [M]\{\ddot{q}(t)\} + [D]\{\dot{q}(t)\}. \quad (2.48)$$

Учитывая, что выражения

$$\begin{aligned} \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^p - \{Q^a(t)\}_e^p &= \{\Delta Q^a\}_e^p, \\ \{Q^a(t + \Delta t)\}_e^n - \{Q^a(t)\}_e^n &= \{\Delta Q^a\}_e^n \end{aligned} \quad (2.49)$$

представляют собой разности внешних консервативных и неконсервативных нагрузок для состояний I и II, запишем уравнение (2.48) так:

$$[M]\{\ddot{q}(t + \Delta t)\} + [D]\{\dot{q}(t + \Delta t)\} = \{Q^a(t + \Delta t)\}_i^p - \{Q^a(t)\}_i^p + \{\Delta Q^a\}_e^p + \{\Delta Q^a\}_e^n + [M]\{\ddot{q}(t)\} + [D]\{\dot{q}(t)\}. \quad (2.50)$$

или в более простом виде

$$[M]\{\Delta \ddot{q}\} + [D]\{\Delta \dot{q}\} = \{Q^a(t + \Delta t)\}_i^p - \{Q^a(t)\}_i^p + \{\Delta Q^a\}_e^p + \{\Delta Q^a\}_e^n. \quad (2.51)$$

Для линейно деформируемых систем внутренние силы обладают потенциалом на дополнительных перемещениях, т.е. (см. (1.133))

$$\{Q^a(t + \Delta t)\}_i^p = - \left\{ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial(\Delta q_j)} \right\}, \quad (2.52)$$

где  $\Delta W$  – приращение потенциальной энергии деформации,  $\Delta q_j$  – приращение  $j$ -го обобщенного перемещения.

С учетом (2.52) уравнение (2.51) принимает вид:

$$[M]\{\Delta \ddot{q}\} + [D]\{\Delta \dot{q}\} + \left\{ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial(\Delta q_j)} \right\} = -\{Q^a(t)\}_i^p + \{\Delta Q^a\}_e^p + \{\Delta Q^a\}_e^n. \quad (2.53)$$

Зависимость между приращениями напряжений и деформаций на шаге нагружения выражается законом Гука

$$\{\Delta \sigma\} = [C]\{\Delta \gamma\}, \quad (2.54)$$

где  $\{\Delta \sigma\}$  и  $\{\Delta \gamma\}$  – векторы, составленные из компонентов напряжений и деформаций соответственно,  $[C]$  – матрица характеристик материала. Перейдем к вычислению приращения потенциальной энергии  $\Delta W$ . Пусть перемещения точек КЭ в состоянии I равны  $u_i^0$  ( $i=1,2,3$ ), а в состоянии II определяются суммой

$$u_i = u_i^0 + \Delta u_i, \quad i=1,2,3. \quad (2.55)$$

Перемещения будем считать функциями материальных лагранжевых координат  $x_1, x_2, x_3$  и времени  $t$ . Потенциальную энергию найдем, используя тензор деформаций Грина, определяемый следующими соотношениями (см. (1.16)):

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j}) \quad (2.56)$$

Подставив (2.55) в (2.56), получаем

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon'_{ij} + \Delta \varepsilon''_{ij}, \quad (2.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \Delta \varepsilon'_{ij} + \Delta \varepsilon''_{ij}; \quad \varepsilon_{ij}^0 = 0.5(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0 + u_{m,i}^0 u_{m,j}^0); \\ \Delta \varepsilon'_{ij} &= \Delta \bar{\varepsilon}'_{ij} + \Delta \bar{\varepsilon}''_{ij}; \quad \Delta \bar{\varepsilon}'_{ij} = 0.5(u'_{i,j} + u'_{j,i}); \\ \Delta \bar{\varepsilon}''_{ij} &= 0.5(u_{m,i}^0 u'_{m,j} + u_{m,j}^0 u'_{m,i}); \quad \Delta \varepsilon''_{ij} = 0.5 u'_{m,i} u'_{m,i}. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Напряжения

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma'_{ij}, \quad (2.59)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  – начальные напряжения (напряжения Коши),  $\Delta \sigma'_{ij}$  – приращения напряжений (напряжения Пиолы-Кирхгофа). Так как при малых деформациях повернутый тензор напряжений Коши совпадает с тензором приращений напряжений Пиолы-Кирхгофа (см. раздел 1.1.1 выше), то суммирование напряжений по формуле (2.59) возможно.

Приращения напряжений на основании (2.54) и (2.57) могут быть представлены в виде

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma'_{ij} + \Delta\sigma''_{ij}, \quad (2.60)$$

где  $\Delta\sigma'_{ij}$  и  $\Delta\sigma''_{ij}$  выражаются через  $\Delta\gamma'_{ij}$  и  $\Delta\gamma''_{ij}$  с помощью соотношений (2.54).

На основании приведенных выше соотношений приращение потенциальной энергии деформации может быть записано в виде:

$$\Delta W = W^{(1)} + W^{(2)} + W_u^{(2)} + W_\sigma^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}, \quad (2.61)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W^{(1)} &= \int_V \{\Delta\gamma\}^T \{\sigma_0\} dv; & W^{(2)} &= 0.5 \int_V \{\Delta\bar{\gamma}\}^T \{\Delta\bar{\sigma}\} dv; \\ W_u^{(2)} &= 0.5 \int_V \{\Delta\bar{\gamma}\}^T \{\Delta\bar{\sigma}\} dv + 0.5 \int_V \{\Delta\bar{\gamma}\}^T \{\Delta\bar{\sigma}\} dv + 0.5 \int_V \{\Delta\bar{\gamma}\}^T \{\Delta\bar{\sigma}\} dv; \\ W_\sigma^{(2)} &= \int_V \{\Delta\gamma''\}^T \{\sigma_0\} dv; \\ W^{(3)} &= 0.5 \int_V \{\Delta\gamma''\}^T \{\Delta\sigma\} dv + 0.5 \int_V \{\Delta\gamma''\}^T \{\Delta\sigma''\} dv; & W^{(4)} &= 0.5 \int_V \{\Delta\gamma''\}^T \{\Delta\sigma''\} dv. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

В формулах (2.62)  $V$  - объем тела в состоянии II. Рассматривая малые деформации, будем считать, что объем тела при его деформации не изменяется. Кроме того, учитывая, что в линейно деформируемых системах дополнительные перемещения малы, пренебрежем в этих формулах слагаемыми, обусловленными нелинейными компонентами деформаций и вызванными ими напряжениями, а именно, потенциальной энергией третьего и четвертого порядка  $W^{(3)}$  и  $W^{(4)}$ .

На основании (2.53) и (2.61) получаем

$$\left[ M \{\Delta\bar{q}\} + [D] \{\Delta q\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial (\Delta q_j)} (W^{(1)} + W^{(2)} + W_u^{(2)} + W_\sigma^{(2)}) \right\} \right] = -\{Q^a(t)\}_i + \{\Delta Q^a\}_e + \{\Delta Q^a\}_e. \quad (2.63)$$

Рассмотрим выражение  $\left\{ \frac{\partial W^{(1)}}{\partial (\Delta q_j)} \right\}$ .

Так как внутренние силы обладают потенциалом на дополнительных перемещениях, то производная от энергии, обусловленной начальными усилиями, по обобщенному перемещению равна соответствующей начальной обобщенной силе, т.е.

$$\left\{ \frac{\partial W^{(1)}}{\partial (\Delta q_j)} \right\} = -\{Q^a(t)\}_i. \quad (2.64)$$

С учетом (2.64) уравнение (2.63) приводится к виду

$$\left[ M \{\Delta\bar{q}\} + [D] \{\Delta q\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial (\Delta q_j)} (W^{(2)} + W_u^{(2)} + W_\sigma^{(2)}) \right\} \right] = \{\Delta Q^a\}_e + \{\Delta Q^a\}_e. \quad (2.65)$$

Запишем выражения для компонентов потенциальной энергии деформации в виде

$$\left. \begin{aligned} W^{(2)} &= 0.5 \{\Delta q\}^T [K] \{\Delta q\}; \\ W_u^{(2)} &= 0.5 \{\Delta q\}^T [K_u] \{\Delta q\}; \\ W_\sigma^{(2)} &= 0.5 \{\Delta q\}^T [K_\sigma] \{\Delta q\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

После подстановки (2.66) в уравнение (2.65) получаем

$$\left[ M \{\Delta\bar{q}\} + [D] \{\Delta q\} + [K + K_u + K_\sigma] \{\Delta q\} \right] = \{\Delta Q^a\}_e + \{\Delta Q^a\}_e. \quad (2.67)$$

Уравнение (2.67) и дает возможность исследовать движение конструкций с учетом начальных факторов. Из (2.67) как частные случаи могут быть получены уравнения для различных задач статики и динамики конструкций, что позволяет подойти к решению задач строительной механики МКЭ с единых методологических позиций и на этой основе обеспечить комплексное решение задач прочности, устойчивости и колебаний конструкций.

### 2.3.4. Частные случаи применения основного уравнения

Рассмотрим некоторые частные случаи применения уравнения (2.67).

#### 1. Собственные колебания с малой амплитудой.

При исследовании малых колебаний предположим, что конструкция совершает гармонические колебания, причем узловые перемещения изменяются по закону  $\{q\} = \{q_0\} \cos \omega t$ , а начальные скорости и ускорения равны нулю. При таких предположениях уравнение (2.67) приводится к виду

$$[K + K_u + K_\sigma] \{q_0\} - \omega^2 [M] \{q_0\} = 0. \quad (2.68)$$

Расчет конструкции на собственные колебания с учетом начальных усилий и перемещений с использованием уравнения (2.68) следует проводить в два этапа. На первом этапе формируется матрица жесткости, к конструкции прикладываются начальные нагрузки, природа которых может быть различной (внешние силы, силы инерции и т.п.), и проводится статический

расчет, в результате которого находятся начальные усилия и перемещения. На втором этапе формируются матрицы начальных напряжений и перемещений, и решается уравнение (2.68).

Можно, однако, избежать вычисления матрицы начальных перемещений, если в конце первого этапа перевычислить координаты точек конструкции, прибавив к ним полученные на первом этапе перемещения. В этом случае начальные перемещения для второго этапа будут равны нулю, матрица  $[K_U]$  также станет нулевой и уравнение (2.68) примет вид

$$[K + K_\sigma]q_0 - \omega^2 [M]q_0 = 0. \quad (2.69)$$

Из уравнения (2.68) при отсутствии начальных перемещений и напряжений получаем обычные уравнения малых колебаний ненагруженных конструкций:

$$[K]q_0 = \omega^2 [M]q_0. \quad (2.70)$$

Задача сводится к проблеме собственных значений, решение которой рассматривается в приложении П.3.

## 2. Статический расчет.

Для получения алгоритма решения статической задачи обратимся к уравнению (2.67), в котором примем обычные для статического расчета предпосылки, а именно: пренебрежем инерционными и демпфирующими силами и будем считать перемещения и усилия не зависящими от времени. При этих предпосылках уравнение (2.67) приводится к виду

$$[K + K_u + K_\sigma]q - \{P\} - \{Q^c\} = 0. \quad (2.71)$$

Уравнение (2.71) и есть основное уравнение для статического расчета с учетом начальных усилий и перемещений. С помощью этого уравнения можно проводить, например, расчеты на продольно-поперечный изгиб. И в этом случае расчет проводится в два этапа. На первом этапе следует приложить продольные силы и вычислить начальные усилия и перемещения. На втором этапе следует предварительно вычислить матрицы начальных усилий и перемещений, а затем, приложив поперечные нагрузки, решить уравнение (2.71). Если на втором этапе использовать модифицированные (перевычисляемые) лагранжевы координаты, то уравнение (2.71) примет вид

$$[K + K_\sigma]q - \{P\} - \{Q^c\} = 0. \quad (2.72)$$

При отсутствии начальных усилий и перемещений ( $[K_U] = [K_\sigma] = 0$ ) получаем хорошо известное уравнение МКЭ в перемещениях для линейного статического расчета

$$[K]q - \{P\} - \{Q^c\} = 0 \quad (2.73)$$

## 3. Расчет на устойчивость.

Уравнение для определения критических нагрузок на основании (2.67) записывается в виде

$$[K + K_u + K_\sigma]q = 0. \quad (2.74)$$

Чтобы решить уравнение (2.74), нагрузки следует задать в виде  $\{P\} = \lambda \{\bar{P}_0\}$ , где  $\{\bar{P}_0\}$  - некоторым образом нормированная нагрузка,  $\lambda$  - параметр нагрузки. Матрицы  $[K_u]$  и  $[K_\sigma]$ , как показано в работе [1], могут быть представлены в виде:  $[K_\sigma] = \lambda [K_\sigma(\bar{P}_0)] = \lambda [\bar{K}_\sigma]$  и  $[K_u] = \lambda [K_u(\bar{P}_0)] + \lambda^2 [K_{u_2}(\bar{P}_0)] = \lambda [\bar{K}_{u_1}] + \lambda^2 [\bar{K}_{u_2}]$

Подставляя в формулу (2.74) значения  $[K_u]$  и  $[K_\sigma]$ , получаем

$$[K + \lambda [\bar{K}_{u_1} + \bar{K}_\sigma] + \lambda^2 [\bar{K}_{u_2}]]q = 0. \quad (2.75)$$

Таким образом, если потере устойчивости в малом предшествуют как начальные усилия, так и начальные перемещения, то расчет на устойчивость сводится к решению квадратической проблемы собственных значений (2.75).

При отсутствии начальных перемещений ( $[K_U] = 0$ ) приходим к линейной проблеме собственных значений:

$$[K + \lambda \bar{K}_\sigma]q = 0. \quad (2.76)$$

### 2.3.5. Матричные характеристики конечных элементов произвольного типа

Таким образом, все линейные расчеты с учетом начальных усилий и перемещений при использовании модифицированных лагранжевых координат требуют вычисления лишь двух матриц: матрицы жесткости и матрицы начальных напряжений. Рассмотрим методику формирования этих матриц.

Будем считать, что перемещения внутренних точек конечных элементов задаются в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^N U_i^{(j)} q_j, \quad (2.77)$$

где  $U_i^{(j)}$  - функции формы [18].

Рассмотрим слагаемое  $W^{(2)}$  потенциальной энергии деформации конструкции (см. (2.62)):

$$W^{(2)} = 0.5 \int \{\bar{\gamma}'\}^T \{\bar{\sigma}'\} dV. \quad (2.78)$$

Входящий в эту формулу вектор  $\{\bar{\gamma}'\}$ , содержащий линейные части компонентов деформаций, представим в следующем виде:

$$\{\bar{\gamma}'\} = [B] \{q\}, \quad (2.79)$$

где  $[B]$  - матрица, получаемая в результате дифференцирования функций перемещений (2.77) в соответствии с формулами (2.58) при условии, что

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad \text{при } i = j \quad (2.80)$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \text{при } i \neq j.$$

Тогда, на основании (2.54), вектор  $\{\bar{\sigma}'\}$ , составленный из компонентов напряжений, обусловленных линейными слагаемыми деформаций, может быть записан так:

$$\{\bar{\sigma}'\} = [C] \{\bar{\gamma}'\} \quad (2.81)$$

Подставляя (2.79) и (2.81) в формулу (2.78), получаем

$$W^{(2)} = 0.5 \int_V \{q\}^T [B]^T [C] [B] dV \{q\} \quad (2.82)$$

Сопоставляя (2.82) и первую строку (2.66), находим:

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV. \quad (2.83)$$

Рассмотрим теперь выражение для слагаемого потенциальной энергии  $W_\sigma^{(2)}$ . Согласно (2.62)

$$W_\sigma^{(2)} = 0.5 \int \{\bar{\gamma}^*\}^T \{\sigma_0\} dV. \quad (2.84)$$

Так как мы рассматриваем расчет конструкций с учетом начальных усилий и перемещений, но при малых дополнительных перемещениях, в формуле (2.84) перейдем от точных значений нелинейных слагаемых деформаций к их приближенным значениям, определяемым соотношениями

(1.18) и (1.19). Запишем выражение для  $\{\bar{\gamma}^*\}$  подробно. Получим (см. (1.18) (1.19) и (2.62)):

$$\{\bar{\gamma}^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2) \\ \frac{1}{2}(\omega_z^2 + \omega_x^2) \\ \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \\ -\omega_x \omega_y \\ -\omega_y \omega_z \\ -\omega_z \omega_x \end{Bmatrix}. \quad (2.85)$$

Вектор компонентов начальных напряжений имеет следующий вид

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(0)} \\ \sigma_{yy}^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{xy}^{(0)} \\ \sigma_{yz}^{(0)} \\ \sigma_{zx}^{(0)} \end{Bmatrix}. \quad (2.86)$$

Подставляя (2.85) и (2.86) в формулу (2.84) и перемножая векторы по знаку интеграла, получаем

$$W_\sigma^{(2)} = 0.5 \int_V (\omega_x (\sigma_{yy}^0 + \sigma_{zz}^0) \omega_x + \omega_y (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{zz}^0) \omega_y + \omega_z (\sigma_{yy}^0 + \sigma_{xx}^0) \omega_z - 2\omega_x \sigma_{xy}^0 \omega_y - 2\omega_y \sigma_{yz}^0 \omega_z - 2\omega_z \sigma_{zx}^0 \omega_x) dV. \quad (2.87)$$

Формулу (2.87) можно представить в виде

$$W_\sigma^{(2)} = 0.5 \int_V \{\omega\}^T [S] \{\omega\} dV, \quad (2.88)$$

где матрица  $[S]$  определяется формулой

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_{yy}^0 + \sigma_{zz}^0 & -\sigma_{xy}^0 & -\sigma_{xz}^0 \\ -\sigma_{xy}^0 & \sigma_{xx}^0 + \sigma_{zz}^0 & -\sigma_{yz}^0 \\ -\sigma_{xz}^0 & -\sigma_{yz}^0 & \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

а вектор  $\{\omega\}$  состоит из трех компонентов углов поворота и имеет вид

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}. \quad (2.90)$$

Если перемещения внутренних точек КЭ задаются выражением (2.77), то, используя формулы (1.18) и (1.19), вектор углов поворота можно представить в виде

$$\{\omega\} = [G]\{q\}. \quad (2.91)$$

Подставляя (2.91) в (2.78), получаем:

$$W_{\sigma}^{(2)} = 0.5\{q\}^T \int_V [G]^T [S][G] dV \{q\}, \quad (2.92)$$

Сопоставляя (2.92) и третью из формул (2.66), находим:

$$[K_{\sigma}] = \int_V [G]^T [S][G] dV, \quad (2.93)$$

Таким образом, получены общие формулы для вычисления матриц жесткости (2.83) и начальных напряжений (2.93) для конечных элементов различных типов, необходимые для статических и динамических расчетов конструкций методом конечных элементов с учетом начальных усилий.

### 2.3.6. Уравнение движения и матричные характеристики конструкции

Если при выводе уравнения движения на основе уравнений Лагранжа просуммировать кинетическую и потенциальную энергию всех конечных элементов, образующих конструкцию, то приходим к тому же уравнению (2.67), в котором все матрицы будут определяться суммированием матриц, полученных для отдельных конечных элементов. Наиболее просто суммирование осуществляется в тех случаях, когда в формуле (2.77) используется полный вектор обобщенных перемещений  $\{q\}$ , а функции формы задаются таким образом, что они имеют ненулевые значения лишь на области, определяемой отдельным конечным элементом и нулевые - на всей остальной области конструкции. В этих случаях матрицы жесткости и начальных напряжений отдельных элементов будут иметь такой же порядок, что и матрицы жесткости и начальных напряжений для всей конструкции, но будут содержать большое количество нулей. Поэтому на практике в формуле (2.77) используются усеченные векторы обобщенных перемещений, содержащие

лишь те обобщенные перемещения, которые связаны с данным КЭ. Техника суммирования при этом несколько усложняется, но возникающие трудности преодолеваются достаточно просто.

Широко распространенный способ формирования матрицы жесткости конструкции заключается в следующем.

Пусть нужно сформировать матрицу жесткости для конструкции, изображенной на рис.2.6. Пронумеруем узлы, как показано на этом рисунке и составим матрицу порядка  $8 \times 6$ , в каждой строке которой запишем номера неизвестных узловых перемещений. Эта матрица имеет следующий вид:

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Записанные в ней числа означают, что линейные перемещения в узле 1 имеют номера 1, 2, 3, а угловые перемещения в этом же узле - номера 4, 5, 6. Линейные перемещения во втором узле имеют номера 7, 8, 9, а угловые - 10, 11, 12 и т.д.

Для каждого стержня, в свою очередь, составим массив, указывающий, с какими узловыми перемещениями он связан. Например, для стержня 1-2 этот массив имеет вид

$$L_{1-2} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

Для стержня 4-8 массив соединений имеет вид

$$L_{4-8} = [19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Для стержня 3-4 имеем

$$L_{3-4} = [13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24].$$

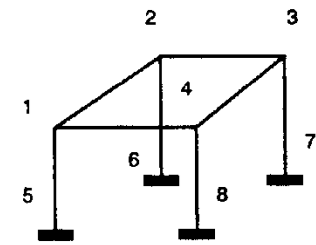


Рис.2.6

Матрица жесткости всей конструкции в данном случае имеет порядок  $24 \times 24$ . Числа, записанные в массиве  $L_{i,j}$ , показывают, с какими коэффициентами МЖ конструкции необходимо суммировать коэффициенты МЖ стержня  $i-j$ . Например, коэффициент  $\kappa_{1,1}$  МЖ стержня 3-4 необходимо суммировать с коэффициентом  $\kappa_{13,13}$  МЖ конструкции, коэффициент  $\kappa_{1,2}$  МЖ стержня 3-4 необходимо суммировать с коэффициентом  $\kappa_{13,14}$  МЖ конструкции и т.д. При наличии нулей в массиве  $L_{i,j}$  соответствующие коэффициенты МЖ стержня  $i-j$  не суммируются с коэффициентами МЖ конструкции. Например, коэффициенты МЖ стержня 4-8, имеющие индексы от 1 до 6, должны суммироваться с коэффициентами МЖ конструкции, имеющими индексы от 19 до 24, остальные коэффициенты МЖ стержня 4-8 суммироваться не будут (не будут вносить вклада в матрицу жесткости конструкции).

Описанный выше прием легко реализуется на ЭВМ.

## Глава 3. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 3.1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

#### 3.1.1. Опоры. Конструкции опор и их условные обозначения

Любая конструкция представляет собой систему элементов различного типа (стержней, пластин, оболочек, массивных тел), так или иначе соединенных между собой. Конструкция может быть связана с некоторым неподвижным основанием (строительные конструкции, наземные транспортные средства и т.п.), но может быть и не связана с ним (летательные аппараты). Таким образом, связи могут быть внешними и внутренними. Внешние связи будем в дальнейшем называть опорами. Определим несколько базовых понятий, связанных с кинематическим анализом конструкций.

Конструкция называется неизменяемой, если взаимные перемещения ее точек возможны только вследствие деформации элементов, образующих данную конструкцию. В противном случае конструкция называется изменяемой. Примеры неизменяемых конструкций приведены на рис.3.1.

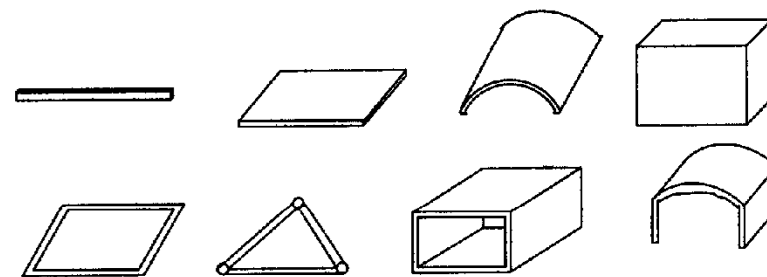


Рис.3.1

Примеры изменяемых конструкций приведены на рис.3.2.

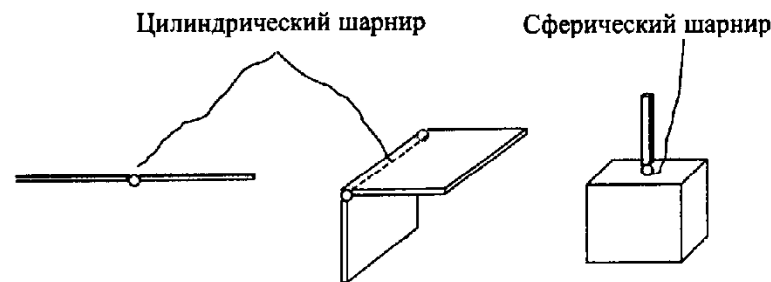


Рис.3.2

Изменяемые конструкции чаще называют механизмами.

В широком смысле слова конструкцией можно назвать как изменяемую, так и неизменяемую систему. Однако в данной книге это слово используется в более узком смысле для обозначения неизменяемых систем, каковыми являются несущие конструкции различных объектов техники, в том числе автомобилей и тракторов. В связи с этим, введем более общее понятие кинематической цепи. Кинематической цепью называется система дисков, соединенных между собой с помощью кинематических связей. Под диском подразумевается любое неизменяемое тело, а кинематической связью называется устройство, уничтожающее одну степень свободы, или, иначе говоря, препятствующее перемещению в одном каком-либо направлении. Степенью свободы кинематической цепи называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение ее элементов. Любой диск имеет в пространстве шесть, а на плоскости – три степени свободы. Например, положение твердого тела, показанного на рис.3.3,а, однозначно определяется тремя координатами точки  $A$  и тремя углами наклона прямой  $AB$  к координатным осям. Положение плоской фигуры, показанной на рис.3.3,б, можно задать тремя параметрами: двумя координатами точки  $A$  и углом наклона прямой  $AB$  к одной из координатных осей.

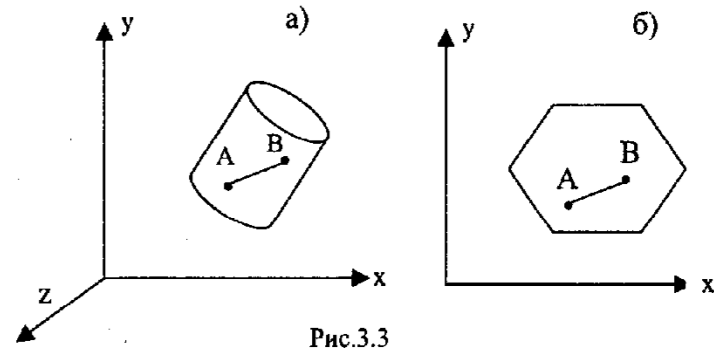


Рис.3.3

Кинематические связи, соединяющие конструкцию с неподвижным основанием, будем называть опорами. Опоры могут быть трех типов:

- 1) шарнирные подвижные,
- 2) шарнирные неподвижные,
- 3) заземляющие (заделки). Не вдаваясь в подробности технической реализации опорных устройств, которые в различных областях техники могут быть разными, рассмотрим принципы их работы.

Подвижная шарнирная опора пространственной конструкции схематично изображена на рис.3.4. Такая опора допускает поворот опираемой конструкции вокруг трех осей  $x, y, z$  и поступательные перемещения в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Иначе говоря, подвижная шарнирная опора ограничивает перемещение только в одном направлении – перпендикулярно опорной плоскости. Такую опору условно изображают, как показано на рис.3.4,б.

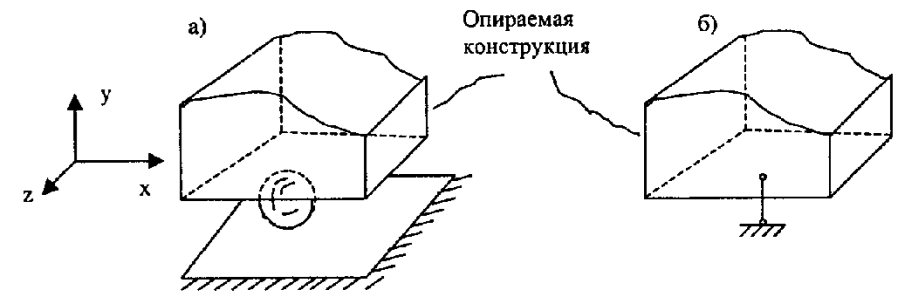


Рис.3.4

Неподвижную шарнирную опору можно представить как шар, входящий в сферические углубления, сделанные в основании и опираемом теле (рис.3.5,а). Такая опора допускает только повороты вокруг осей  $x, y, z$ . Она эквивалентна трем кинематическим связям. Условное обозначение шарнирной неподвижной опоры показано на рис.3.5,б.

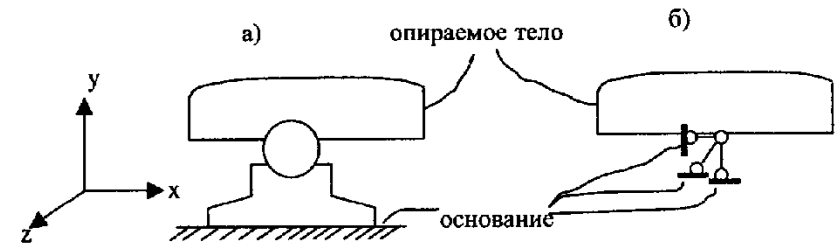


Рис.3.5

Если нижнее основание шарнирной опоры поставить на катки, то получится шарнирная подвижная опора, допускающая поворот вокруг трех осей и перемещение в одном направлении. Такая опора и ее условное обозначение показаны на рис.3.6,а и 3.6,б соответственно.

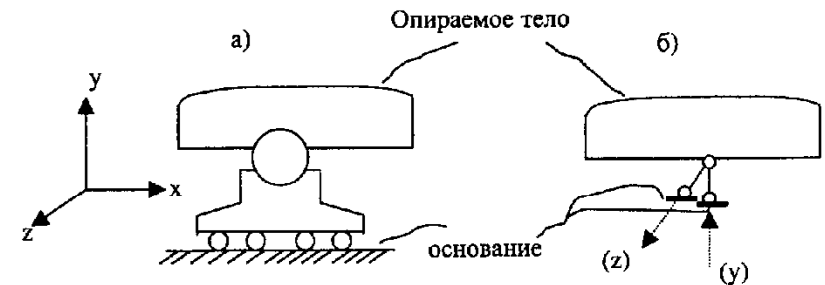


Рис.3.6



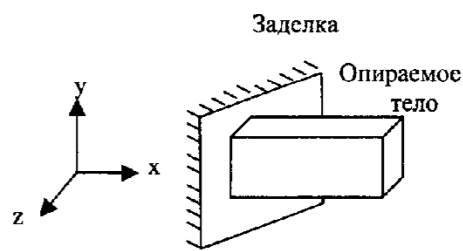


Рис.3.7

Защемляющая опора имеет шесть кинематических связей – три линейных и три угловых, т.е. защемляющая опора препятствует перемещениям опираемого тела в направлении осей  $x, y, z$  и поворотам вокруг этих осей (рис.3.7).

Опоры для плоских конструкций могут быть получены как частные случаи пространственных.

Защемляющая опора плоской конструкции имеет три кинематических связи (рис.3.8,а), шарнирно-неподвижная – две (рис.3.8,б), а шарнирно-подвижная – одну кинематическую связь (рис.3.8,в).

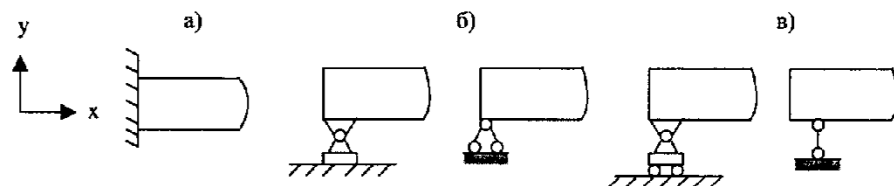


Рис.3.8

### 3.1.2. Кинематический анализ стержневых систем

Как уже отмечалось выше, в качестве несущих конструкций могут использоваться только неизменяемые системы. Поэтому при проектировании конструкции необходимо в первую очередь выяснить, является она изменяемой или нет. Полезно также установить, является конструкция статически определимой или статически неопределимой. Напомним, что статически определимой является такая конструкция, которая может быть рассчитана с помощью одних лишь уравнений статики. Расчет статически неопределимых систем более сложен и требует применения, наряду с уравнениями равновесия, и других соотношений.

Установить неизменяемость системы можно с помощью характеристики, названной в предыдущем параграфе степенью свободы. Степень свободы показывает, по какому количеству направлений могут происходить перемещения при отсутствии деформаций. Следовательно, для кинематического анализа конструкции необходимо мысленно представить, что входящие в ее состав элементы и связи между ними являются абсолютно жесткими, и подсчитать степень свободы полученной системы. Если степень свободы конструкции с жесткими элементами равна нулю или меньше нуля, то

перемещения без деформаций невозможны, и, следовательно, данная конструкция неизменяема.

Обозначим через  $D$  число дисков системы, а через  $C$  – число кинематических связей. Тогда степень свободы плоской кинематической цепи может быть найдена по формуле

$$n = 3D - C. \quad (3.1)$$

Степень свободы пространственной кинематической цепи может быть найдена так:

$$n = 6D - C. \quad (3.2)$$

Условие неизменяемости для плоской системы имеет вид

$$n = 3D - C \leq 0 \text{ или } C \geq 3D, \quad (3.3)$$

а для пространственной

$$n = 6D - C \leq 0 \text{ или } C \geq 6D. \quad (3.4)$$

Если для плоской системы соблюдается соотношение

$$C = 3D, \quad (3.5)$$

а для пространственной

$$C = 6D, \quad (3.6)$$

то это означает, что конструкция является статически определимой, так как для плоской системы можно составить  $3D$ , а для пространственной –  $6D$  уравнений равновесия, из которых и можно найти усилия в  $C$  кинематических связях. Таким образом, соотношения (3.5) и (3.6) являются условиями статической определимости и геометрической неизменяемости одновременно.

Если конструкция не связана с основанием (землей), то следует говорить о внутренней ее неизменяемости. В этом случае от общего числа степеней свободы следует отнять число степеней свободы, связанных с движением конструкции как твердого тела (с движением, при котором не происходит изменения взаимного положения точек системы). Формулы для определения числа внутренних степеней свободы плоских и пространственных конструкций на основании (3.1), (3.2) и сказанного выше принимают вид

$$n = 3D - C - 3 \quad (3.7)$$

и

$$n = 6D - C - 6 \quad (3.8)$$

соответственно.

Плоская система, не связанная с землей, является статически определимой и геометрически неизменяемой, если соблюдается условие

$$n = 3D - C - 3 = 0 \text{ или } C = 3D - 3. \quad (3.9)$$

Для пространственной системы это условие принимает вид

$$n = 3D - C - 6 = 0 \text{ или } C = 6D - 6. \quad (3.10)$$

Покажем, что соотношения (3.5), (3.6), (3.9) и (3.10) являются необходимыми, но недостаточными условиями статической определимости и геометрической неизменяемости. Рассмотрим, например, конструкцию, состоящую из двух стержней, соединенных между собой при помощи шарнира в точке В и имеющую одну шарнирно-неподвижную и две шарнирно-подвижные опоры (рис. 3.9). Отметим, что присоединение одного диска к

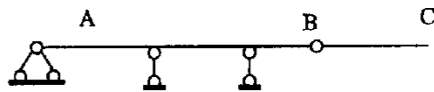


Рис.3.9

другому при помощи шарнира устраняет две степени свободы присоединяемого диска, так как препятствует его поступательному перемещению. Очевидно, что эта конструкция является изменяемой, так как консоль ВС может свободно поворачиваться вокруг точки В. Вычислим степень свободы конструкции по формуле (3.1). Конструкция содержит два диска и имеет шесть связей – четыре внешних и две внутренних. Получаем:

$$n = 3 \times 2 - 4 - 2 = 0.$$

Таким образом, согласно формуле (3.1) конструкция, изображенная на рис.3.9, геометрически неизменяема, что противоречит очевидному факту ее изменяемости. Это противоречие объясняется тем, что конструкция имеет одну избыточную связь в части АВ при отсутствии одной необходимой для обеспечения неизменяемости связи в части ВС. Если переставить одну из шарнирно-подвижных опор, как показано на рис.3.10, то конструкция станет неизменяемой. Следовательно, наряду с исследованием неизменяемости по формулам (3.1) – (3.10) необходим кинематический

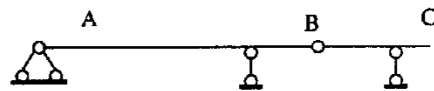


Рис.3.10

анализ конструкций. В связи с этим приведем некоторые правила образования неизменяемых систем.

Предварительно рассмотрим способ соединения элементов, приводящий к так называемой мгновенной изменяемости. Пусть три диска соединены между собой с помощью шарниров, как показано на рис.3.11. Разъединим мысленно диски 1 и 2 в точке В. Диск 1 сможет поворачиваться вокруг точки А, и при этом точка В будет перемещаться по дуге окружности 1. Диск 2 сможет поворачиваться вокруг точки С, и при этом точка В будет перемещаться по дуге окружности 2. Но окружности 1 и 2 имеют общую касательную в точке В. Следовательно, в заданной системе диск 2 не препятствует

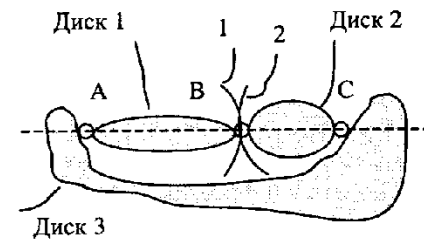


Рис.3.11

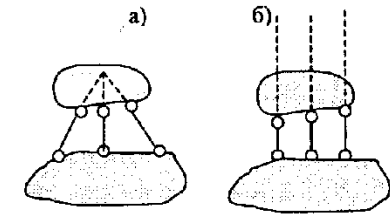


Рис.3.12

бесконечно малому перемещению точки В в направлении касательной за счет вращения диска 1, а диск 1, в свою очередь, не препятствует бесконечно малому перемещению точки В в направлении касательной за счет вращения диска 2.

Таким образом, в системе, изображенной на рис.3.11, возможны бесконечно малые перемещения без деформации дисков. Такие системы называются **мгновенно изменяемыми**. Аналогичная ситуация возникает при соединении двух дисков с помощью трех стержней, пересекающихся в одной точке (рис.3.12,а). Частным случаем такого соединения является соединение с помощью трех параллельных стержней (рис.3.12,б).

Использование мгновенно изменяемых систем в качестве несущих конструкций недопустимо, так как в них могут возникать очень большие усилия (теоретически бесконечно большие) при весьма незначительных нагрузках.

Рассмотрим теперь правила образования неизменяемых систем.

### 1. Присоединение шарнирного узла к неизменяемой системе (диску).

Для образования неизменяемой системы шарнирный узел должен быть присоединен к диску с помощью двух стержней, оси которых не совпадают. Такой способ присоединения к диску показан на рис.3.13,а.

Если оси АВ и АС совпадут, образуется мгновенно изменяемая система (три шарнира на одной прямой). Если в качестве диска использовать стержень, получится шарнирный треугольник (рис.4.13,б). Следовательно, шарнирный треугольник неизменяем.

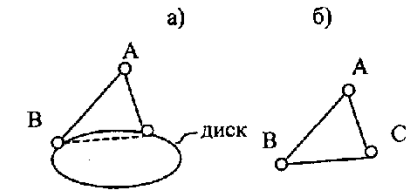


Рис.3.13

### 2. Соединение двух дисков.

Два диска образуют неизменяемую систему, если:

- они соединены между собой тремя стержнями, осевые линии которых параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке;
- они соединены между собой при помощи шарнира и стержня, осевая линия которого не проходит через этот шарнир.

Соединение двух дисков по способу а) показано на рис.3.14. Если бы стержни 1, 2 и 3 пересекались в одной точке (как показано на рис.3.14,б), то возможно было бы вращение дисков вокруг мгновенного центра вращения "m". В схеме рис.3.14,а при отсутствии стержня 3 было бы возможно вращение дисков относительно точки пересечения "m" стержней 1 и 2. Стержень 3 препятствует такому вращению, если его ось не проходит через точку "m". Таким образом, схема рис.3.14,а является неизменяемой, а схема рис.3.14,б – мгновенно изменяемой.

Соединение по способу б) показано на рис.3.15. Такое соединение можно рассматривать как частный случай соединения по способу а). Доказательство неизменяемости аналогично предыдущему случаю.

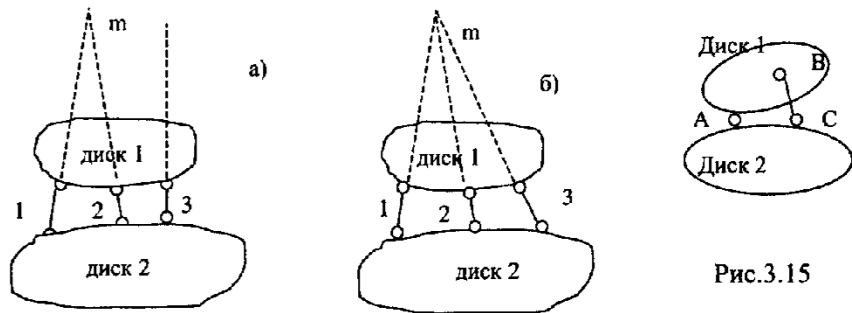


Рис.3.14

Рис.3.15

### 3. Соединение трех дисков

Три диска образуют неизменяемую систему, если:

- а) они соединены при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой;
- б) они соединены при помощи шести стержней таким образом, что между каждой парой дисков имеется по два стержня, точки пересечений осей которых не лежат на одной прямой.

Соединение по схеме а) показано на рис.3.16,а, а по схеме б) – на рис.3.16,б.

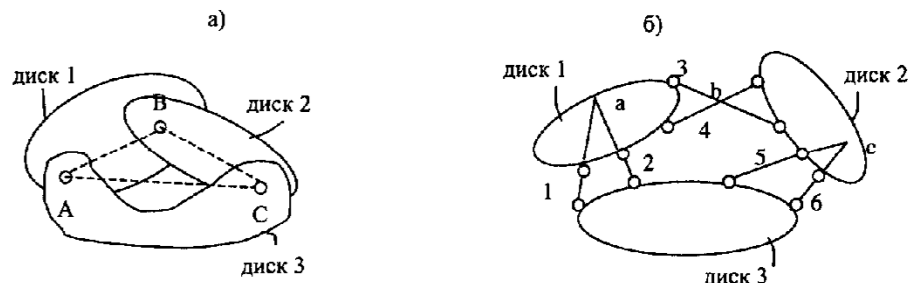


Рис.3.16

Если каждый из дисков, показанных на рис.3.16,а, заменить эквивалентным стержнем (пунктирные линии на этом рисунке), то получится шарнирный треугольник, неизменяемость которого была доказана выше. В схеме рис.3.16,б каждую пару стержней можно заменить фиктивным шарниром, лежащим на пересечении этих стержней. Следовательно, схема рис.3.16,б будет неизменяемой, если точки а, б, с не будут лежать на одной прямой. В противном случае система будет мгновенно изменяемой.

### 3.1.3. Определение усилий в многопролетных статически определимых балках

Простые двухопорные или консольные балки (рис.3.17) находят широкое применение в различных объектах техники. Однако, при увеличении длины пролета применение таких балок становится экономически невыгодным, так как при этом существенно увеличиваются изгибающие моменты, и приходится использовать балки большого поперечного сечения. Снизить значения изгибающих моментов можно за счет использования для перекрытия того же пролета нескольких простых балок, как показано, например, на рис.3.17. Взяв две балки длиной  $l/2$

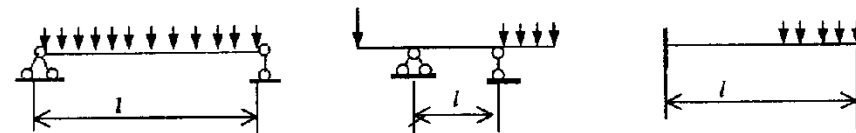


Рис.3.17

каждая (рис.3.18), можно уменьшить максимальные значения моментов в четыре раза. Однако еще большего эффекта можно добиться, используя многопролетные статически определимые балки специальной конструкции. Такие балки образуются одним из двух способов.

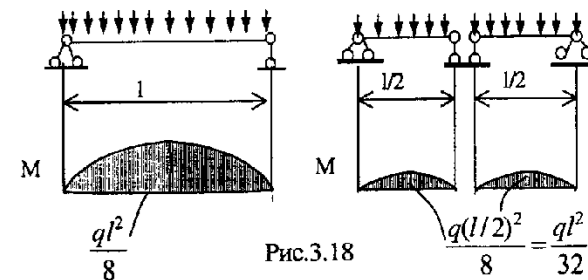


Рис.3.18

**Первый способ.** К простой двухопорной или консольной балке присоединяется новая балка с помощью шарнира и одного опорного стержня. К полученной неизменяемой и статически определимой системе аналогичным способом крепится другая балка и т.д. (рис.3.19).

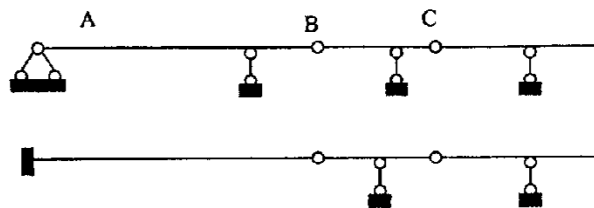


Рис.3.19

Таким способом можно получить статически определимую балку с любым количеством пролетов.

**Второй способ.** Между двумя простыми балками, одна из которых может быть двухопорной или защемленной одним концом, а вторая должна быть двухопорной (с двумя вертикальными опорными стержнями), вставляется третья балка, которая крепится к первым двум с помощью шарниров (рис. 3.20). В результате образуется геометрически неизменяемая и статически определимая система. Процесс образования можно представить как присоединение к неизменяемой системе *AB* диска *CD* с помощью трех стержней 1, 2 и 3, не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу. Описанные выше способы можно комбинировать.

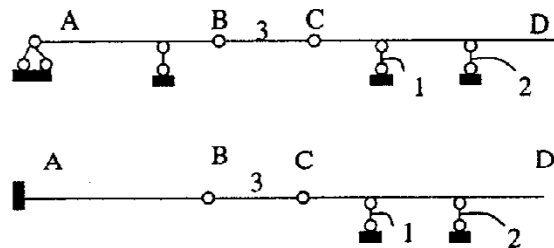


Рис.3.20

Пример многопролетной статически определимой балки, образованной комбинированным способом, показан на рис. 3.21.

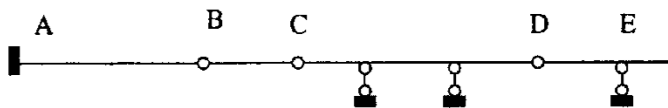


Рис.3.21

Для того, чтобы рассчитать любую из изображенных на рис. 3.19-3.21 многопролетных балок на действие заданных нагрузок, необходимо прежде всего найти усилия во всех внешних и внутренних связях, использованных для образования системы. Для этого нужно мысленно расчленить систему на отдельные балки в местах их соединения шарнирами, приложить к балкам силы взаимодействия и составить для каждой из них уравнения равно-

весия. Проиллюстрируем сказанное на примере расчета балки рис. 3.19,а. Пусть балка нагружена, как показано на рис. 3.22.

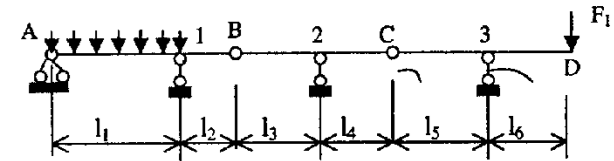


Рис.3.22

Расчленим заданную конструкцию на три части в местах их соединения шарнирами, т.е. в точках *B* и *C*, и покажем силы взаимодействия в этих точках. Расчлененная конструкция показана на рис. 3.23.

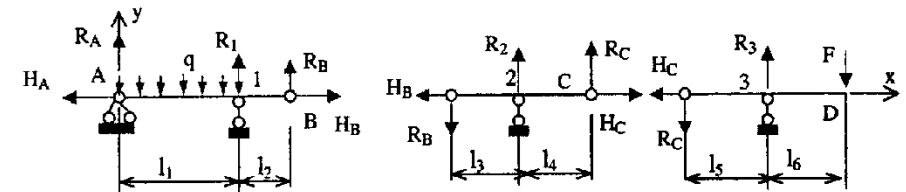


Рис.3.23

Составим теперь уравнения равновесия для балок *AB*, *BC* и *CD*.

**Балка *AB*:**

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow \frac{ql_1^2}{2} - R_1 l_1 - R_B (l_1 + l_2) = 0. \\ \sum X = 0 &\Rightarrow R_A + R_1 + R_B - ql_1 = 0. \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow -H_A + H_B = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

**Балка *BC*:**

$$\left. \begin{aligned} \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -R_B l_3 - R_C l_4 = 0. \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow -R_B + R_2 + R_C = 0. \\ \sum X = 0 &\Rightarrow -H_B + H_C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

**Балка *CD*:**

$$\left. \begin{aligned} \sum M_3 = 0 &\Rightarrow -R_C l_5 + F l_6 = 0. \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow -R_C + R_3 - F = 0. \\ \sum X = 0 &\Rightarrow -H_C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Получили систему из 9 уравнений с 9 неизвестными:  $H_A, R_A, R_1, H_B, R_B, R_2, R_C, H_C, R_3$ . Решив эту систему, найдем перечисленные выше реакции. Дальнейший расчет каждой балки в отдельности может быть выполнен методами сопротивления материалов. Анализ уравнений (3.11)-(3.13) показывает, что система трех уравнений равновесия балки  $AB$  (3.11) содержит 5 неизвестных:  $H_A, R_A, R_B, H_B, R_1$ . Система трех уравнений равновесия балки  $BC$  также содержит 5 неизвестных:  $R_1, R_2, H_B, R_B, H_C$ . И, наконец, система трех уравнений равновесия балки  $CD$  (3.13) содержит 3 неизвестных:  $R_C, R_3, H_C$ . Таким образом, нет необходимости решать уравнения (3.11) - (3.13) как систему связанных уравнений. Можно решить отдельно уравнения (3.13) и из них найти  $R_C, R_3, H_C$ . Затем из уравнений (3.12) при известных  $R_C, H_C$  можно найти  $R_B, H_B, R_2$ , после чего из уравнений (3.11) можно определить  $R_A, H_A, R_1$ . Следовательно, правильный выбор последовательности расчета существенно упрощает вычисления. Сделать такой выбор позволяет анализ взаимодействия отдельных балок. В схеме 3.23 основной является балка  $AB$ , она имеет шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную опоры и вследствие этого является геометрически неизменяемой и статически определимой. На нее в точке  $B$  опирается балка  $BC$ , имеющая дополнительную шарнирно-подвижную опору в точке 2. В свою очередь, точку  $C$  можно рассматривать как шарнирно-подвижную опору для балки  $CD$ . Наряду с шарнирно-подвижной опорой в точке 3, эта опора обеспечивает неизменяемость балки  $CD$ . Описанная схема взаимодействия изображена на рис. 3.24.

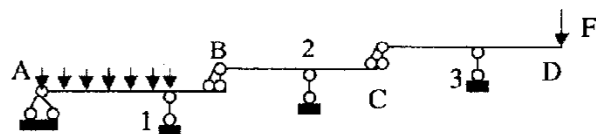


Рис.3.24

Подобные схемы иногда называют поэтажными. Нетрудно убедиться, что если начать расчет с самой верхней на поэтажной схеме балки, то это приведет к трем системам уравнений, которые были описаны выше на основе анализа уравнений (3.11) - (3.13).

Схема взаимодействия или поэтажная схема для многопролетной балки рис. 3.21. приведена на рис. 3.25.

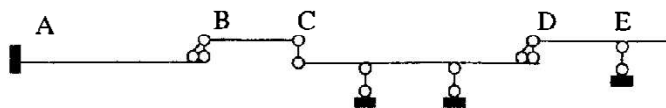


Рис.3.25

### 3.1.4. Определение усилий в трехшарнирных арках и рамах

Расчет трехшарнирных арок и рам (рис. 3.26) имеет ряд особенностей, которые и рассматриваются в данном разделе.

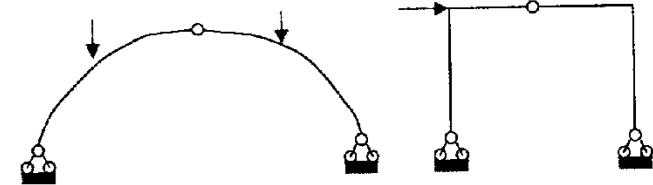


Рис.3.26

Эти конструкции являются статически определимыми, так как состоят из двух дисков, соединенных между собой при помощи шарнира, эквивалентного двум кинематическим связям, и прикрепленным к основанию с помощью четырех опорных стержней. Следовательно, степень свободы конструкции равна  $n = 3D - C = 3 \times 2 - 6 = 0$ .

Таким образом, конструкция не имеет лишних связей и является статически определимой. Конструкция является неизменяемой, т.к. ее можно рассматривать состоящей из трех дисков, соединенных между собой при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рис. 3.27).

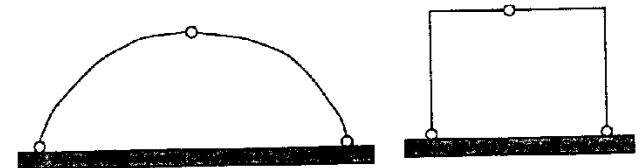


Рис.3.27

#### Определение опорных реакций

В трехшарнирных системах при действии вертикальной нагрузки на опорах возникают, как правило, вертикальные и горизонтальные реакции. Поэтому эти системы принято называть распорными. Рассмотрим методику определения опорных реакций.

Пусть трехшарнирная арка нагружена, как показано на рис. 3.28.

Вертикальные составляющие опорных реакций могут быть найдены так же, как и в простой балке на двух опорах, из уравнений равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно опорных точек. В данном случае эти уравнения имеют вид

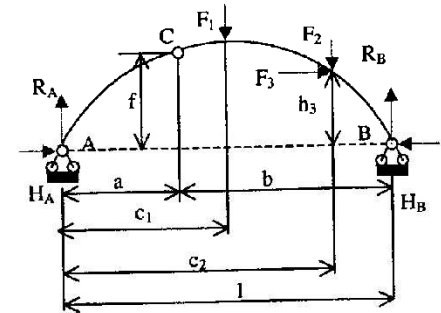


Рис.3.28

$$\sum M_A = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 h_3 - R_B l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 h_3}{l};$$

$$\sum M_B = R_A l - F_1(l - c_1) - F_2(l - c_2) + F_3 h_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{F_1(l - c_1) + F_2(l - c_2) - F_3 h_3}{l}$$

Горизонтальные составляющие опорных реакций могут быть найдены из условия равенства нулю изгибающего момента в шарнире "с".

Вычисляя момент в шарнире "с" через левые силы, получаем

$$M_c^{лев} = R_A a - H_A f = 0, \text{ отсюда } H_A = \frac{R_A a}{f}. \quad (3.14)$$

Выражая момент в шарнире "с" через правые силы, находим

$$M_c^{прав} = R_B b - F_2(c_2 - a) - F_1(c_1 - a) + F_3(f - h_3) - H_B f = 0,$$

отсюда

$$H_B = \frac{R_B b - F_2(c_2 - a) - F_1(c_1 - a) + F_3(f - h_3)}{f}. \quad (3.15)$$

При действии только вертикальных нагрузок (в рассматриваемом примере при  $F_3=0$ ) формулы (3.14) и (3.15) принимают вид

$$H_A = \frac{R_A a}{f} = \frac{M_c^\delta}{f}; \quad H_B = \frac{R_B b - F_2(c_2 - a) - F_1(c_1 - a)}{f} = \frac{M_c^\delta}{f}. \quad (3.16)$$

В формулах (3.16) через  $M_c^\delta$  обозначен изгибающий момент в простой балке, перекрывающей такой же пролет и нагруженный такими же силами, как и арка.

Очевидно, что в этом случае  $H_A = H_B$ . Горизонтальная реакция в трехшарнирной арке называется распором и обозначается буквой  $H$ . Из формул (3.16) получаем

$$H = H_A = H_B = \frac{M_c^\delta}{f}. \quad (3.17)$$

В дальнейшем будем рассматривать расчет трехшарнирных арок на действие только вертикальной нагрузки. Получим формулы для определения внутренних усилий.

Предположим, что арка нагружена, как показано на рис. 3.29,а, и для нее найдены опорные реакции. Получим формулы для определения внутренних усилий.

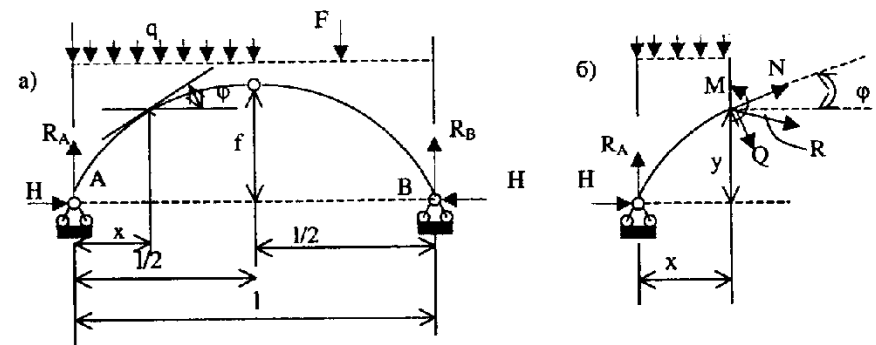


Рис.3.29

Рассечем арку на две части в сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 3.19б). Внутренние напряжения, действующие в сечении, заменим эквивалентным моментом  $M$  и эквивалентной силой  $R$ , а последнюю, в свою очередь, разложим на составляющие в направлении касательной ( $N$ ) и перпендикуляра к оси арки ( $Q$ ). Касательную составляющую назовем продольной, а перпендикулярную составляющую – поперечной силой. Из уравнений равновесия отсеченной части легко получить следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} M &= R_A x - \frac{qx^2}{2} - Hy = M^\delta - Hy \\ Q &= (R_B - qx) \cos \varphi - H \sin \varphi = Q^\delta \cos \varphi - H \sin \varphi \\ N &= -(R - qx) \sin \varphi - H \cos \varphi = -(Q^\delta \sin \varphi + H \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

В формулах (3.18)  $M^\delta = R_A x - \frac{qx^2}{2}$ ;  $Q^\delta = R_B - qx$  есть изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $x$  простой балки, перекрывающей тот же пролет и несущей те же нагрузки.

Для построения эпюр внутренних усилий пролет арки разбивается на несколько равных частей; по уравнению оси арки, которое обычно бывает известно, определяется угол наклона касательной  $\varphi$  на границах участков, и по формулам (3.18) вычисляются внутренние усилия. При наличии в каком-либо сечении внешних сосредоточенных сил и моментов внутренние силы вычисляются дважды – слева от этой силы (момента) и справа от нее.

Очертания оси арки можно выбрать таким, чтобы изгибающие моменты во всех сечениях были равны нулю. Из первой формулы (3.18) имеем

$$M = M^\delta - Hy = 0. \quad (3.19)$$

Отсюда

$$y = \frac{M^{\delta}}{H} \quad (3.20)$$

Таким образом, если принять ординаты оси арки равными балочному изгибающему моменту, деленному на величину распора, изгибающие моменты в такой арке будут равны нулю. Такие ординаты оси арки являются наиболее рациональными при данной нагрузке.

### 3.1.5. Определение усилий в стержнях ферм

Фермами называются конструкции, составленные из стержней, соединенных между собой при помощи шарниров. Стержни, образующие внешний контур ферм, называют обычно поясами, остальные стержни – решеткой. Решетки состоят из раскосов (наклонных элементов) и стоек (вертикальных элементов). Расстояние между двумя соседними узлами пояса называют панелью (рис. 3.30).

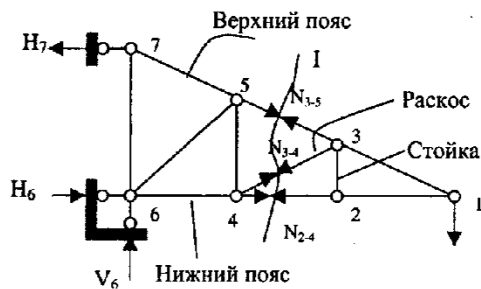


Рис.3.30

В стержнях ферм возникают только продольные усилия. В статически определенных фермах эти усилия могут быть найдены с помощью уравнений равновесия. Для кинематического анализа ферм можно пользоваться общими формулами, приведенными в разделе 3.1.2 данной книги, но можно получить и более простые. При этом будем считать основными элементами ферм их узлы, а стержни будем рассматривать как кинематические связи. Тогда число степеней свободы фермы будет выражаться формулой

$$n = 2y - C - C_0, \quad (3.21)$$

где  $y$  – число узлов,  $C_0$  – число опорных стержней,  $C$  – число внутренних стержней.

Для фермы, изображенной на рис. 3.30 имеем:  $y=7$ ;  $C_0=3$ ;  $C=11$ , следовательно,  $n=2 \times 7 - 11 - 3 = 0$  и ферма статически определима. Она геометрически неизменяема, поскольку состоит из простейших шарнирных треугольников.

Для определения усилий в стержнях ферм используется способ сечений. Рассмотрим различные модификации этого способа.

### 1. Способ вырезания узлов

При реализации этого способа последовательно вырезаются узлы фермы и для каждого из них составляются уравнения равновесия в виде суммы проекций всех внешних и внутренних сил, действующих на данный узел, на две не параллельные друг другу оси. В общем случае получается система из  $2y$  уравнений равновесия, из которых и могут быть найдены  $C+C_0$  усилий как в стержнях фермы, так и в опорных стержнях. Всегда, однако, можно выбрать такую последовательность вырезания узлов, при которой каждый раз нужно будет решать не более двух уравнений с двумя неизвестными. Начинать нужно с того узла, в котором сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями. Например, при расчете фермы рис.

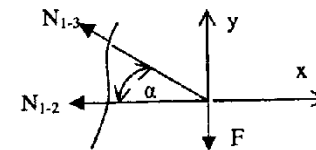


Рис.3.31

3.30 необходимо начать с узла 1, в котором сходится два стержня. Вырежем этот узел (рис. 3.31) и составим для него уравнения равновесия.

Усилия в стержнях можно обозначать по-разному. Рекомендуем обозначать их буквой  $N$  с индексами, показывающими, к каким узлам прикреплен данный стержень. При этом неизвестное усилие рекомендуется считать растягивающим. Знак минус у результата будет означать, что стержень на самом деле сжат.

В рассматриваемом примере  $N_{1-3}$  можно сразу найти из уравнения проекции на ось  $Y$ :

$$\sum Y_i = N_{1-3} \sin \alpha - F = 0 \Rightarrow N_{1-3} = \frac{F}{\sin \alpha}.$$

Усилие  $N_{1-2}$  можно найти теперь из уравнения проекций на ось  $X$ :

$$\sum X = N_{1-2} + N_{1-3} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-3} \cos \alpha.$$

Вырежем узел 2 (рис. 3.32). Из уравнения проекций на ось  $Y$  находим:

$$\sum Y = N_{2-3} = 0.$$

Из уравнения проекций на ось  $X$  получаем:

$$\sum X = N_{2-4} - N_{1-2} = 0 \Rightarrow N_{2-4} = N_{1-2}.$$

Действуя аналогичным образом, можно найти усилия во всех стержнях, в том числе и опорных. Заметим, что, если бы мы попытались после первого узла сразу перейти к третьему, то получили бы для этого узла два уравнения с тремя неизвестными  $N_{3-4}$ ,  $N_{3-5}$ ,  $N_{3-2}$ . Заметим также, что усилие в стержне 2-3 равно нулю, и возникает вопрос о целесообразности ис-

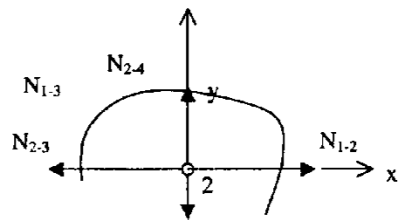


Рис.3.32

пользования этого стержня в данной конструкции. В общем случае включение подобных стержней в состав конструкции объясняется конструктивными соображениями, например, стремлением собрать конструкцию из более коротких стержней, которые, к тому же, оказываются и более устойчивыми.

При расчете способом вырезания узлов ферм на двух опорах (см. рис. 3.33), необходимо в первую очередь найти опорные реакции.

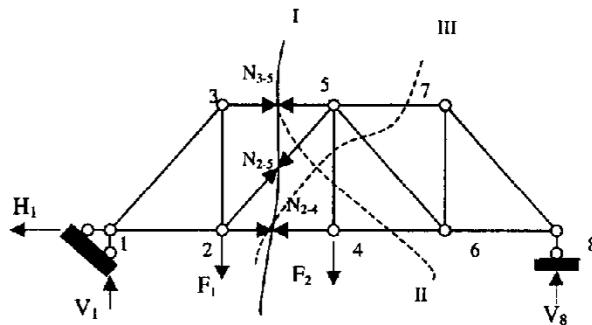


Рис.3.33

## 2. Способ разрезов

При использовании этого способа ферма мысленно рассекается на две части, одна часть отбрасывается, действие ее заменяется силами, и для оставшейся части составляются три уравнения равновесия. Разрез нужно проводить так, чтобы в него попало не более трех стержней с неизвестными усилиями. Уравнения равновесия целесообразно составлять таким образом, чтобы они решались независимо друг от друга. Это всегда можно сделать, если придерживаться приведенного выше правила разрезания фермы. Так, если три стержня, попавшие в разрез, не параллельны друг другу, то для определения усилий в одном из них можно составить уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил, действующих на отсеченную часть, относительно точки пересечения двух других стержней. Эта точка называется моментной точкой, а сам способ составления уравнений равновесия – способом моментной точки.

Если два стержня из трех, попавших в разрез, параллельны между собой, а третий расположен под углом к ним, то для определения усилия в наклонном стержне уравнение равновесия следует составлять в виде равенства нулю сумм проекций всех сил, действующих на отсеченную часть фермы, на направление, перпендикулярное двум параллельным стержням. Такой способ составления уравнений равновесия называется способом проекций.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

### Пример.

Найдем усилия в стержнях второй панели слева фермы (рис. 3.33). Проведем сечение I (попытки проведения сечения II или сечения III, как показано на рис. 4.33 пунктиром, следует признать неудачными, т.к. они проходят через четыре стержня с неизвестными усилиями). Для определения усилия  $N_{3-5}$  выберем моментную точку в узле 2 и составим для левой отсеченной части уравнение моментов относительно этой точки. Получим:

$$\sum M_2^{лев} = V_B d + N_{3-5} h = 0 \Rightarrow N_{3-5} = -\frac{V_B d}{h}.$$

Для определения усилия в стержне 2-5 составим уравнение равновесия любой отсеченной части в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = V_B + N_{2-5} \sin \beta = 0; \quad N_{2-5} = -\frac{V_B}{\sin \beta}.$$

Таким образом, определение усилий в стержнях статически определенных ферм не представляет больших трудностей. Внимательный читатель заметил; конечно же, некоторую игру слов при описании методов расчета ферм. Так, введены два метода: метод вырезания узлов и метод разрезов, хотя, по сути дела, речь идет о модификациях одного и того же универсального метода – метода сечений. Разделяя способы, авторы следуют здесь традиции, установившейся в строительной механике стержневых систем.

## 3.1.6. Определение усилий

### в статически определенных рамах

Рамой называется конструкция, состоящая из стержней, соединенных между собой жестко или при помощи шарниров. Реальные конструкции рам состоят, как правило, из большого количества стержней и являются статически неопределимыми. Однако, чтобы понять цель расчета рам и форму представления результатов, целесообразно начать с простейших статически определимых конструкций. Один тип таких конструкций, – а именно, трехшарнирная рама, – уже рассмотрен выше. В данном разделе покажем общий подход к расчету статически определимых рам с произвольным очертанием контура.

Расчет сводится к определению внутренних усилий: изгибающих моментов ( $M$ ), продольных ( $N$ ) и поперечных ( $Q$ ) сил.

### Пример.

В качестве примера возьмем две конструкции: одну – шарнирно-опертую (рис. 3.34,а) и другую – консольного типа (рис. 3.34,б).



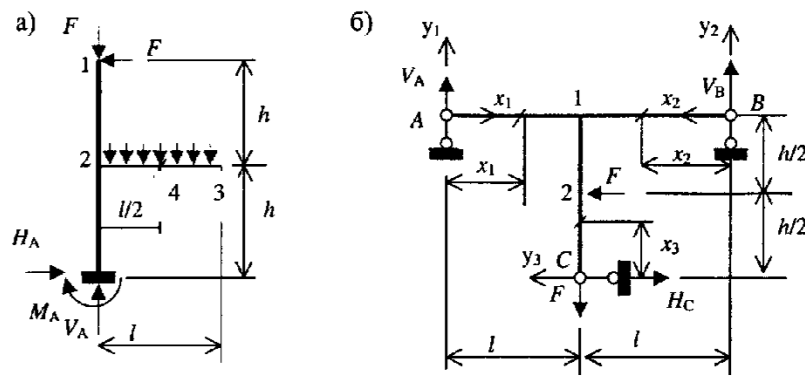


Рис.3.34

В случае рамы рис. 3.34,а расчет следует начать с определения опорных реакций. Для этого составим следующие уравнения равновесия рамы в целом:

$$\begin{aligned} \sum X &= -F + H_C = 0; \\ \sum M_A &= Fl - V_B 2l + F \frac{h}{2} - H_C h = 0; \\ \sum M_B &= V_A 2l - Fl + F \frac{h}{2} - H_C h = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений можно найти все три опорные реакции:

$$\begin{aligned} H_C &= F; \\ V_B &= \frac{Fl + \frac{Fh}{2} - Fh}{2l} = \frac{F}{2} - \frac{Fh}{4l}; \\ V_A &= \frac{Fl - F \frac{h}{2} + Fh}{2l} = \frac{F}{2} + \frac{Fh}{4l}. \end{aligned}$$

Расчет рамы рис.3.34,б можно выполнить без предварительного определения опорных реакций  $V_A, H_A, M_A$ .

Внутренние усилия в статически определимой раме могут быть найдены способом сечений. При этом возможно два подхода.

В первом случае раму разбивают на отдельные стержни, и для каждого стержня получают общие формулы для внутренних усилий. Затем по этим формулам проводят вычисления и строят эпюры внутренних усилий.

Во втором случае вычисляют внутренние усилия в характерных сечениях и по найденным значениям строят эпюры. Расчет рамы рис. 3.34,а выполнен по первому способу, а рамы рис. 3.34,б – по второму.

Разобьем раму рис. 3.34,а на четыре участка: А-1, В-1 С-2 и 1-2. Для каждого участка примем свою систему координат, как показано на рис. 3.34,а.

Для произвольных сечений, расположенных на расстояниях  $x_1, x_2, x_3$  от принятых начал отсчета, из условия равновесия отсеченных частей рамы получаем следующие зависимости:

Участок А-1:  $0 \leq x_1 \leq l$   
 $M = V_A x_1; Q = V_A; N = 0.$

Участок В-1:  $0 \leq x_2 \leq l$   
 $M = V_B x_2; Q = -V_A; N = 0.$

Участок С-2:  $0 \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$   
 $M = -H_C x_3; Q = -H_C; N = F.$

Участок 1-2:  $\frac{h}{2} \leq x_3 \leq h$   
 $M = -H_C x_3 + F(x_3 - \frac{h}{2}); Q = -H_C + F = 0; N = F.$

Эпюры  $M, Q, N$  для рамы рис. 3.34,а приведены на рис. 3.35. При этом значения изгибающих моментов отложены на стороны растянутых волокон.

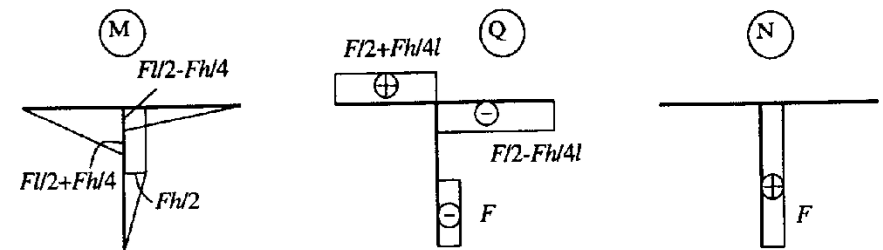


Рис.3.35

Для рамы рис. 3.34,б вычислим значения внутренних усилий в характерных сечениях, обозначенных на этом рисунке штрихами.

$$\begin{aligned} M_{1-2} &= 0; M_{2-1} = Fh; M_{3-4} = 0; M_{4-3} = M_{4-2} = -\frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}; M_{2-4} = -\frac{ql^2}{2} \\ M_{2-A} &= Fh - \frac{ql^2}{2}; M_{A-2} = F2h - \frac{ql^2}{2}; \\ Q_{1-2} &= -F = Q_{2-1}; Q_{3-4} = 0; Q_{2-4} = ql; Q_{2-A} = Q_{A-2} = -F; \\ N_{1-2} &= -F = N_{2A}. \end{aligned}$$

По вычисленным значениям строим эпюры  $M, Q, N$  (см. рис.3.36).

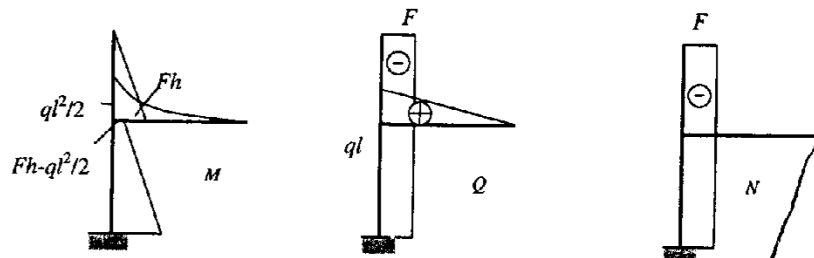


Рис.3.36

## 3.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### 3.2.1. Общая формула для определения перемещений в стержневых системах

Пусть на некоторую стержневую систему (рис.3.37) действует произвольная нагрузка. Внутренние силы, соответствующие этому состоянию, обозначим индексом "F". Таким образом, на элемент конструкции длиной  $ds$  в этом состоянии действуют внутренние силы  $N_F, Q_{yF}, Q_{zF}, M_{xF}, M_{yF}, M_{zF}$ .

Пусть требуется определить перемещение точки  $i$  в заданном направлении. Приложим в этом направлении единичную силу  $F_i=1$  (рис.3.38). Внутренние усилия, соответствующие этому состоянию, обозначим индексом 'i' и чертой сверху. Таким образом, внутренние силы i-ого единичного состояния есть  $\bar{N}_i, \bar{Q}_{yi}, \bar{Q}_{zi}, \bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{zi}$ .

Применим принцип возможных перемещений: суммарная работа внутренних и внешних сил единичного состояния на перемещениях грузового состояния равна нулю:

$$A_F + V_{iF} = 0. \quad (3.22)$$

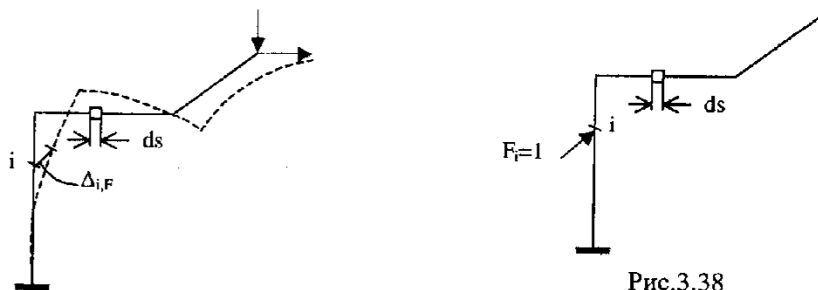


Рис.3.37

Рис.3.38

В уравнении (2.22)  $A_{iF}$  - работа внешних сил единичного состояния на перемещениях грузового,  $V_{iF}$  - работа внутренних сил единичного состояния на перемещениях грузового.

Работа внешних сил находится так:

$$A_{iF} = F_i \Delta_{iF} = \Delta_{iF}, \text{ так как } F_i = 1.$$

Работу внутренних сил единичного состояния на перемещениях грузового найдем, следуя методике, изложенной в разделе 1.3.3 данной книги. Получим:

$$V_{iF} = - \left( \sum \int \frac{N_F \bar{N}_i}{EA} dS + \sum \int \frac{M_{xF} \bar{M}_{xi}}{GI_{kp}} + \sum \int \frac{M_{yF} \bar{M}_{yi}}{EI_z} + \sum \int \frac{M_{zF} \bar{M}_{zi}}{EI_y} + \sum \int \frac{\mu_y Q_{yF} \bar{Q}_{yi}}{GA} + \sum \int \frac{\mu_z Q_{zF} \bar{Q}_{zi}}{GA} \right).$$

Подставляя  $A_{iF}$  и  $V_{iF}$  в формулу (2.22), находим:

$$\Delta_{i,F} = \sum \int \frac{N_F \bar{N}_i}{EA} dS + \sum \int \frac{M_{xF} \bar{M}_{xi}}{GI_{kp}} + \sum \int \frac{M_{yF} \bar{M}_{yi}}{EI_z} + \sum \int \frac{M_{zF} \bar{M}_{zi}}{EI_y} + \sum \int \frac{\mu_y Q_{yF} \bar{Q}_{yi}}{GA} + \sum \int \frac{\mu_z Q_{zF} \bar{Q}_{zi}}{GA}. \quad (3.23)$$

Таким образом, получена универсальная формула для вычисления перемещений в стержневых системах. Эта формула называется формулой или интегралом Мора (по имени автора).

### Техника определения перемещений

Технику определения перемещений по формуле Мора поясним для частного случая, когда учитываются только изгибающие моменты.

Чтобы воспользоваться формулой Мора, необходимо:

- 1) Получить аналитическое выражение для изгибающих моментов  $M_F$  от нагрузки.
- 2) Приложить единичную силу в том направлении, в котором необходимо найти перемещение.
- 3) Получить аналитическое выражение для изгибающих моментов  $\bar{M}_i$  от единичной силы.
- 4) Вычислить перемещение по формуле Мора.

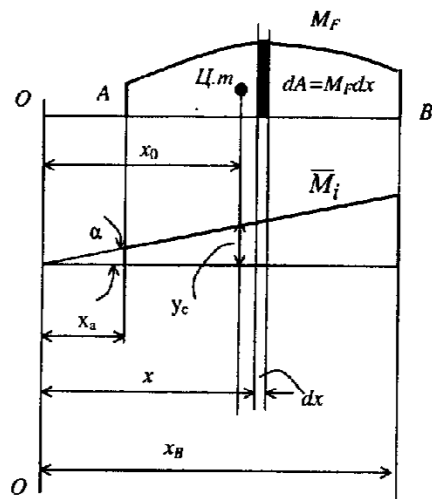


Рис.3.39

$$\int_{x_A}^{x_B} M_F \bar{M}_i dx = \int_{x_A}^{x_B} M_F x \operatorname{tg} \alpha dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{x_A}^{x_B} M_F x dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{x_A}^{x_B} (M_F dx) x = \operatorname{tg} \alpha \int_{x_A}^{x_B} (dA) x = \operatorname{tg} \alpha S_{M_F}.$$

В полученной формуле  $S_{M_F}$  – статический момент площади эпюры  $M_F$  относительно оси  $OO$ . Обозначим  $\omega$  – площадь эпюры  $M_F$ . Тогда  $S_{M_F} = \omega x_c$ . Следовательно  $\int M_F \bar{M}_i dx = (\operatorname{tg} \alpha) \omega x_c$ .

Но  $x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$ , где  $y_c$  – ордината единичной эпюры под центром тяжести грузовой. С учетом полученного соотношения

$$\int M_F \bar{M}_i dx = \omega y_c. \quad (3.24)$$

Если балка имеет несколько участков, таких, что в пределах каждого из них эпюра  $\bar{M}_i$  прямолинейна, то искомый интеграл представляется в виде суммы  $\int_0^l M_F \bar{M}_i dx = \sum_{i=1}^n \omega_i y_{i,c}$ , а искомое перемещение находится по формуле:

$$\Delta_{i,p} = \int \frac{M_F \bar{M}_i dx}{EJ} = \frac{\sum \omega_i y_{i,c}}{EJ}. \quad (3.25)$$

Описанный способ вычисления интеграла называется способом Верещагина.

Вычисление перемещений по формуле Мора можно упростить, если жесткость в пределах балки не меняется. В этом случае величину  $EI$  можно вынести за знак интеграла, и решение задачи сводится к вычислению интеграла типа  $\int_0^l M_F \bar{M}_i dx$ .

Но эпюра  $\bar{M}_i$  всегда состоит из отрезков прямых линий. Рассмотрим участок балки, где эпюра  $\bar{M}_i$  прямолинейна, а эпюра  $M_F$  имеет произвольное очертание.

Ордината эпюры  $\bar{M}_i$  может быть выражена так:  $\bar{M}_i = x \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда

## Примеры определения перемещений от силовой нагрузки

**Пример 1.** Найти перемещение свободного конца консоли по вертикали.

**Решение.**

1) Составление аналитического выражения для  $M_F$ :

$$M_F = -F(l-x) - q \frac{(l-x)^2}{2}.$$

2) Приложение единичной силы (см. рис.3.40).

3) Составление аналитического выражения для  $\bar{M}_1$ :

$$\bar{M}_1 = -F_1(l-x) = -(l-x).$$

4) Вычисление перемещения по формуле Мора:

$$\Delta_{1,F} = \int_0^l \frac{\left[ -F(l-x) - q \frac{(l-x)^2}{2} \right] [-(l-x)]}{EI} dx = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI}.$$

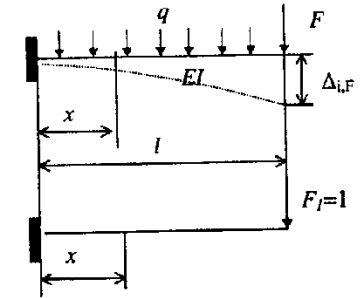


Рис. 3.40

**Пример 2.** Найти способом Верещагина прогиб балки под действием силы  $F$  и нагрузки  $q$ .

**Решение.**

1) Построение эпюры  $M_F$ .

Эпюра  $M_F$  строится с использованием ранее выведенной формулы:

$$M_F = -F(l-x) - q \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Эпюра разбита на две части: верхняя соответствует первому слагаемому, нижняя – второму.

2) Построение единичной эпюры.

Единичная эпюра строится по формуле:

$$\bar{M}_1 = -F_1(l-x) = -(l-x).$$

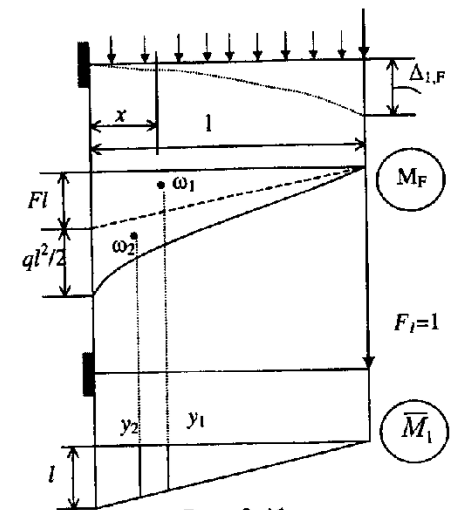


Рис. 3.41

3) Вычисление  $\Delta_{1,F}$  по способу Верещагина

$$\omega_1 = \frac{1}{2} Fl = \frac{1}{2} Fl^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l = \frac{1}{6} ql^3; \quad y_1 = \frac{2}{3} l; \quad y_2 = \frac{3}{4} l.$$

$$\Delta_{1,F} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} Fl^2 * \frac{2}{3} l + \frac{1}{6} ql^3 * \frac{3}{4} l \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{Fl^3}{3} + \frac{ql^4}{8} \right)$$

### Определение температурных перемещений в стержневых системах

Предположим, что на статически определимую стержневую систему, в качестве примера которой рассматривается простая балка на двух опорах, действует температура, как показано на рис. 3.42.

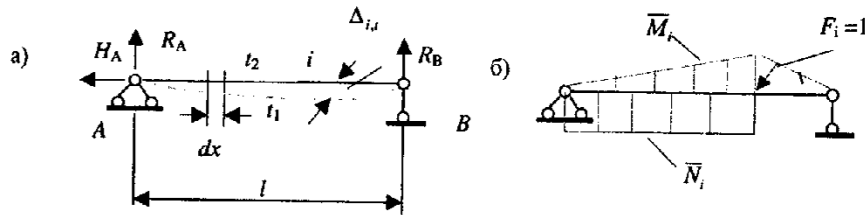


Рис 3.42

Предположим, что на опорах этой конструкции возникают опорные реакции. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = -H_A = 0; \quad \sum M_A = R_B l = 0; \quad \sum M_B = R_A l = 0.$$

Из этих уравнений видно, что опорные реакции равны нулю. Следовательно, равны нулю и внутренние силы. Таким образом, при действии температуры на статически определимую конструкцию в последней не возникает никаких усилий. Очевидно, однако, что вследствие температурного расширения материала в статически определимой конструкции будут возникать температурные перемещения. Рассмотрим методику определения этих перемещений.

Пусть в конструкции, изображенной на рис. 3.42 требуется найти перемещение точки  $i$  в заданном направлении. Обозначим это перемещение  $\Delta_{i,t}$ . Рассмотрим некоторое возможное состояние конструкции, в котором в точке  $i$  на конструкцию действует единичная сила в направлении искомого перемещения. Применим принцип возможных перемещений, причем в качестве возможного будем рассматривать заданное состояние конструкции, а в качестве действительного - единичное состояние. Тогда на основании принципа возможных перемещений получаем

$$A_{2,1} + V_{2,1} = 0. \quad (3.26)$$

В этой формуле  $A_{2,1}$ ,  $V_{2,1}$  - работа внешних и внутренних сил действительного состояния на возможных перемещениях соответственно. Найдём каждую из них в отдельности.

Работа внешних сил равна

$$A_{2,1} = \Delta_{i,t} F_i = \Delta_{i,t} * 1 = \Delta_{i,t}. \quad (3.27)$$

Для определения работы внутренних сил вырежем из конструкции элемент бесконечно малой длины  $dx$  и рассмотрим его состояние при действии температуры и при действии единичной силы. Температурное воздействие на элемент представим в виде равномерного нагрева или охлаждения с постоянной температурой по высоте поперечного сечения и неравномерного нагрева с нулевой температурой на оси. Элемент  $dx$ , эпюра температур для него и деформации в заданном состоянии показаны на рис.3.43.



Рис.3.43

Равномерный нагрев приводит к равномерному расширению элемента  $dx$  и при этом его удлинение вдоль оси  $\Delta dx$  будет равно

$$\Delta dx = \alpha t_{cp} dx. \quad (3.28)$$

Неравномерный нагрев приводит к укорочению верхних волокон и удлинению нижних. Длина среднего волокна при этом не изменяется. Следовательно, при неравномерном нагреве торцевые сечения элемента будут поворачиваться относительно друг друга и взаимный угол поворота, как видно из рис. 3.43, равен

$$d\varphi = \alpha t' dx / (h/2) = \alpha \left( \frac{t_1 - t_2}{2} \right) dx / (h/2) = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx. \quad (3.29)$$

В приведенных выше формулах  $\alpha$  - коэффициент линейного температурного расширения,  $t_{cp}$  - температура на оси или средняя температура, рав-

ная  $(t_1 + t_2)/2$ ,  $t' = (t_1 - t_2)/2$  – приращение температуры на поверхности по сравнению с температурой на оси.

В единичном состоянии на элемент  $dx$  действует продольная сила  $\bar{N}_i$  и изгибающий момент  $\bar{M}_i$  (эпюры  $\bar{N}_i$  и  $\bar{M}_i$  показаны на рис.3.42). Эти силы будут совершать работу на перемещениях, рассмотренных выше. Работа продольной силы равна

$$(dV_{2,1})_N = -\bar{N}_i \Delta dx = -\bar{N}_i \alpha t_{cp} dx. \quad (3.30)$$

Работа изгибающего момента определяется выражением

$$(dV_{2,1})_M = -\alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx \bar{M}_i. \quad (3.31)$$

Полная работа внутренних сил в пределах конструкции будет равна сумме элементарных работ, следовательно:

$$\begin{aligned} V_{2,1} &= -\int_0^l \bar{N}_i \alpha t_{cp} dx - \int_0^l \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx \bar{M}_i = -\alpha t_{cp} \int_0^l \bar{N}_i dx - \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_i dx = \\ &= -\alpha t_{cp} \omega_N - \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_M. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В формуле (3.31)  $\omega_N$  и  $\omega_M$  – площади эпюр продольных сил и изгибающих моментов от единичной силы соответственно.

Подставляя найденное значение работ внешних и внутренних сил в уравнение принципа возможных перемещений (3.26), получаем

$$\Delta_{i,l} = \alpha t_{cp} \omega_N + \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_M. \quad (3.33)$$

В полученной формуле знаки слагаемых определяются по следующим правилам: если температура и единичная сила вызывают деформацию одного знака, то соответствующее слагаемое имеет знак плюс, в противном случае – минус.

### Определение перемещений от смещения опор

Предположим, что в статически определимой балке одна из опор, например, правая, сместилась вниз на расстояние  $\Delta$  (рис.3.44). Предположим, что при этом на опорах балки возникли опорные реакции. Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum X = -H_A = 0; \quad \sum M_A = R_B l = 0; \quad \sum M_B = R_A l = 0.$$

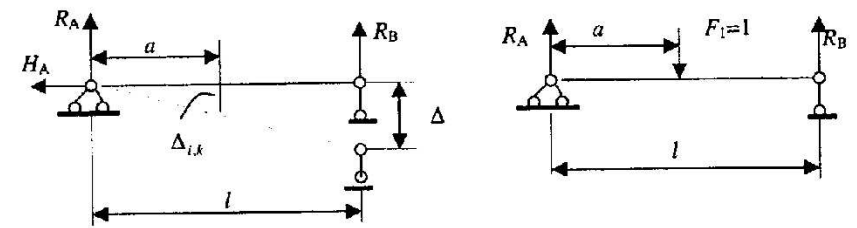


Рис.3.44

Из уравнений равновесия вытекает, что опорные реакции в статически определимой балке при смещении опоры равны нулю. Для определения перемещений точек воспользуемся принципом возможных перемещений.

Рассмотрим единичное состояние, в котором к конструкции приложена единичная сила в направлении искомого перемещения. Рассматривая это состояние как действительное, а состояние конструкции при смещении опоры как возможное, запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$A_{2,1} + V_{2,1} = 0. \quad (3.34)$$

Работа  $A_{2,1}$  внешних сил единичного состояния на перемещениях заданного состояния равна

$$A_{2,1} = F_i \Delta_{i,k} - R_B \Delta. \quad (3.35)$$

Работа  $V_{2,1}$  внутренних сил единичного состояния на перемещениях заданного равна нулю, т.к. деформации в статически определимой системе при смещении опор равны нулю. Заметим, что перемещение и деформации есть разные понятия: перемещение связано с точкой, а деформация – с отрезком. Из уравнений (3.34) и (3.35) получаем

$$A_{2,1} = F_i \Delta_{i,k} - R_B \Delta = \Delta_{i,k} - R_B \Delta = 0. \quad (3.36)$$

В уравнении (3.36) учтено, что сила  $F_i=1$ .

Исходя из изложенного выше, можно сформулировать следующие правила вычисления перемещений, вызванных смещением опор:

- 1) приложить единичную силу, считая смещающуюся опору неподвижной;
- 2) определить реакции в тех опорных связях, которые в действительном состоянии смещаются;
- 3) составить выражение для работы внешних сил единичного состояния на перемещениях действительного и приравнять его нулю;
- 4) из полученного уравнения найти искомого перемещение.

### 3.2.2. Расчет статически неопределимых систем методом сил

#### Статическая неопределимость

Как уже отмечалось выше, статически неопределимой называется такая конструкция, которая содержит лишние с точки зрения обеспечения геометрической неизменяемости связи. Усилия в лишних связях не могут быть найдены из уравнений статики, поэтому приходится составлять дополнительные уравнения, исследуя свойства деформаций системы. Число лишних связей является важной характеристикой рассчитываемой конструкции, поскольку от нее зависит трудоемкость расчета. Эту характеристику называют иначе **степенью статической неопределимости**. В простейших случаях, когда все лишние связи являются внешними, степень статической неопределимости можно найти как разность между общим числом внешних связей и числом уравнений статики, которые можно составить для конструкции в целом. Например, балка, изображенная на рис.3.45, имеет три лишних связи, поскольку для обеспечения ее неизменяемости достаточно

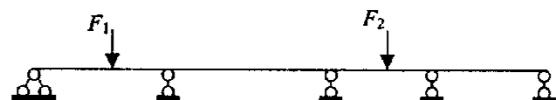


Рис.3.45

оставить одну неподвижную и одну подвижную опоры. Следовательно, степень статической неопределимости балки равна трем.

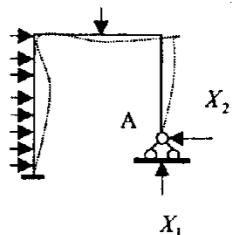


Рис.3.46

Рама, изображенная на рис.3.46, дважды статически неопределима, так как количество неизвестных опорных реакций, равное 5, превышает число уравнений статики, равное 3, на 2.

В более сложных случаях, когда стержневая конструкция содержит как внешние, так и внутренние лишние связи, такой простой подсчет степени статической неопределимости невозможен. Для плоских конструкций можно получить, однако, сравнительно простую формулу для определения числа лишних связей.

Рассмотрим П-образную раму с зашпеленными опорами (рис.3.47).

Очевидно, что рама рис.3.47 трижды статически неопределима; чтобы образовать статически определимую и геометрически неизменяемую конструкцию, необходимо отбросит три связи, как показано, например, на рис.3.48.

Постановка одного простого шарнира, как показано на рис.3.49, снижает степень статической неопределимости на единицу. Действительно, для того, чтобы образовать статически определимую и геометрически неизме-

няемую конструкцию, из рамы рис.3.49 необходимо отбросить две связи, как показано, например, на рис.3.50.

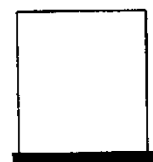


Рис.3.47

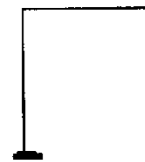


Рис.3.48

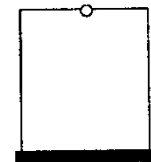


Рис.3.49

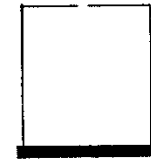


Рис.3.50

Таким образом, если рама имеет  $K$  замкнутых контуров и содержит  $\Pi$  простых шарниров, то ее степень статической неопределимости может быть найдена по формуле:

$$n = 3K - \Pi \quad (3.37)$$

Простым шарниром называется такой узел, в котором шарнирно соединены два элемента. В противном случае шарнир называется кратным. Кратность шарнира равна числу соединяемых элементов, уменьшенному на единицу (см. рис.3.51).

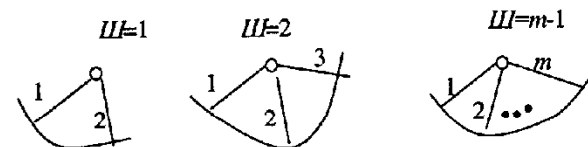


Рис.3.51

Подсчитаем, например, степень статической неопределимости рамы рис.3.46. Рама имеет два замкнутых контура, включая опорный, и четыре простых шарнира, следовательно,  $n = 3 \times 2 - 4 = 2$ . Аналогичный результат был получен выше путем анализа геометрической структуры рамы рис.3.46.

Отметим, что опорные контуры следует включать в число замкнутых контуров в том случае, если они изображаются с помощью шарниров и опорных стержней (рис.3.46). Если же шарнирная опора изображена в виде, показанном на рис.3.52, то опорный контур в этом случае учитывать не надо, а шарнир следует считать простым, так как он соединяет стержень рамы с двумя условными стержнями, образующими жесткое целое с основанием. Шарнир в данном случае соединяет фактически два элемента (стержень рамы и основание), и поэтому является простым.

## Канонические уравнения метода сил

Методику расчета стержневых конструкций методом сил рассмотрим на примере.

### Пример.

Пусть требуется рассчитать раму, изображенную на рис. 3.52. На рисунке показана схема рамы, опорные крепления и внешние нагрузки. Реакции на правой опоре обозначены как  $X_1$  и  $X_2$ . Рама является статически неопределимой, т.к. количество неизвестных опорных реакций, равное 5, превышает число уравнений статики, равное 3, на 2. Следовательно, рама дважды статически неопределима.

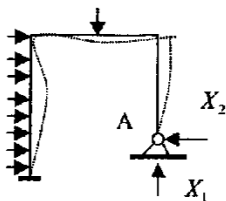


Рис.3.52

Чтобы решить задачу, примем в качестве основных неизвестных усилия в лишних связях и перейдем от расчета заданной конструкции к расчету основной системы. Основная система образуется из заданной конструкции путем удаления лишних связей. Различные варианты основной системы показаны на рис. 3.53. Каждая из них получена удалением двух связей. Для дальнейшего расчета примем основную систему, показанную на рис. 3.53,а.

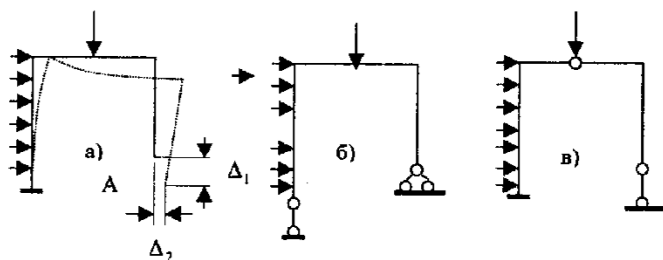


Рис. 3.53

Отметим, что основная система, показанная на рис. 3.53,а, отличается от заданной конструкции, как в силовом, так и в кинематическом отношении. Силовое отличие заключается в том, что в заданной конструкции на правой опоре возникают опорные реакции  $X_1$  и  $X_2$ , в основной же системе в точке А нет опор и, следовательно, нет и никаких сил. Кинематическое отличие состоит в том, что в заданной конструкции на опоре А нет перемещений, в основной же системе точка А может перемещаться как по горизонтали, так и по вертикали. Чтобы сделать основную систему эквивалентной заданной конструкции, приложим в точке А силы  $X_1$  и  $X_2$ , устранив таким образом силовое несоответствие, и потребуем, чтобы перемещения по направлению отброшенных связей были равны нулю, что приведет к устранению кинематического несоответствия. Эквивалентная система показана на рис. 3.54.

Условия равенства нулю перемещений по направлению отброшенных связей можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0; \\ \Delta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

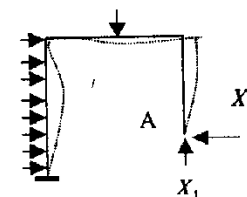


Рис.3.54

Перемещения в основной системе вызываются внешними силами, а также силами  $X_1$  и  $X_2$ . Воспользовавшись принципом суперпозиции, соотношения (3.38) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1,X_1} + \Delta_{1,X_2} + \Delta_{1,F} &= 0 \\ \Delta_{2,X_1} + \Delta_{2,X_2} + \Delta_{2,F} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где  $\Delta_{1,X_1}$  - перемещение по направлению первой отброшенной связи от действия силы  $X_1$ ;  $\Delta_{1,X_2}$  - перемещение по направлению первой отброшенной связи от действия силы  $X_2$ ;  $\Delta_{1,F}$  - перемещение по направлению первой отброшенной связи от внешних сил и т.д.

Перемещения от сил  $X_1$  и  $X_2$  можно представить следующим образом:

$$\Delta_{1,X_1} = \delta_{1,1} X_1; \quad \Delta_{1,X_2} = \delta_{1,2} X_2; \quad \Delta_{2,X_1} = \delta_{2,1} X_1; \quad \Delta_{2,X_2} = \delta_{2,2} X_2. \quad (3.39)$$

В формулах (3.39)  $\delta_{1,1}$  - перемещение в направлении первой отброшенной связи от силы  $X_1=1$ ;  $\delta_{1,2}$  - перемещение в направлении первой отброшенной связи от силы  $X_2=1$  и т.д.

Подставляя формулы (3.39) в уравнения (3.38), получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \Delta_{1,F} &= 0 \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \Delta_{2,F} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Полученные уравнения называются каноническими уравнениями метода сил. В случае конструкции с  $n$  неизвестными канонические уравнения метода сил имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1,1} X_1 + \delta_{n,2} X_2 + \dots + \Delta_{1,X_n} + \Delta_{1,F} &= 0 \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \dots + \Delta_{2,X_n} + \Delta_{2,F} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n,1} X_1 + \delta_{n,2} X_2 + \dots + \delta_{n,n} X_n + \Delta_{n,F} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.41)$$

Коэффициенты канонических уравнений представляют собой перемещения в основной системе. Их можно найти по формуле Мора, а именно:

$$\Delta_{i,F} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dx; \quad \delta_{i,j} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx,$$

где  $M_F, \bar{M}_i, \bar{M}_j$  - моменты в основной системе от нагрузки и сил  $x_i = 1$  и  $x_j = 1$  соответственно.

Интегралы, входящие в формулу Мора, можно найти по способу Верещагина. Таким образом, для определения коэффициентов канонических уравнений необходимо построить эпюры изгибающих моментов для основной системы от заданной нагрузки и от единичных значений неизвестных. После вычисления коэффициентов и решения системы канонических уравнений окончательная эпюра изгибающих моментов для заданной конструкции может быть построена по формуле

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n.$$

Эпюра поперечных сил может быть построена по эпюре изгибающих моментов с использованием известных из курса сопротивления материалов дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом и поперечной силой. Эта зависимость имеет следующий вид:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Эпюра продольных сил может быть построена с использованием эпюры поперечных сил и способа сечений. Для проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов можно использовать то обстоятельство, что перемещения по направлению отброшенных связей должны быть равны нулю. Математически это условие выражается так:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} = 0.$$

С учетом изложенного выше, алгоритм расчета конструкций методом сил можно сформулировать следующим образом.

1. Подсчитать число лишних связей.
2. Выбрать основную систему.
3. Составить канонические уравнения метода сил.
4. Определить коэффициенты канонических уравнений.
5. Решить систему канонических уравнений.
6. Построить окончательные эпюры моментов.
7. Построить эпюры поперечных сил.
8. Построить эпюру продольных сил.
9. Проверить правильность построения окончательной эпюры моментов.

### Расчет на действие силовой нагрузки

Рассмотрим в качестве примера расчет балки, изображенной на рис.3.55,а. Расчет проводим по методике, описанной выше.

- 1) Определение степени статической неопределимости.

Конструкция имеет один замкнутый контур и два простых шарнира. Следовательно, степень статической неопределимости равна:  $n = 3K - \Pi = 3 \times 1 - 2 = 1$ .

- 2) Выбор основной системы.

Основную систему получим, отбросив правую опору и заменив ее действие силой (рис.3.55,б).

- 3) Составление канонического уравнения метода сил:  $\delta_{1,1} X_1 + \Delta_{1,F} = 0$ .

- 4) Определение коэффициентов канонического уравнения.

- 4.1) Построение грузовой эпюры для основной системы.

Изгибающий момент в основной системе от нагрузки находится по формуле:  $M_F = -\frac{qx^2}{2}$ . Эпюра  $M_F$  приведена на рис.3.55,г.

- 4.2) Построение эпюры изгибающих моментов от силы  $X_1=1$  (рис.3.55,д). Моменты от силы  $X_1=1$  находятся по формуле  $\bar{M}_1 = 1 \cdot x = x$ . Эпюра  $\bar{M}_1$  приведена на рис.3.55,е.

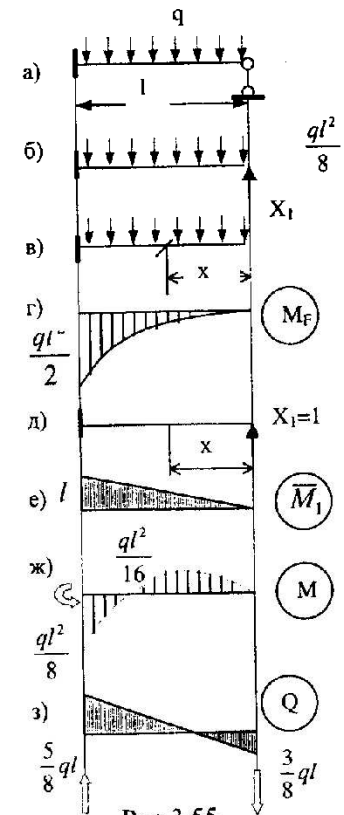


Рис.3.55



4.3) Вычисление коэффициентов по формуле Мора с использованием способа Верещагина.

$$\delta_{1,1} = \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{\frac{1}{2} l * l * \frac{2}{3} l}{EI} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1,F} = \int \frac{M_F \bar{M}_1 dx}{EI} = -\frac{\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \frac{3}{4} l}{EI} = -\frac{ql^4}{EI}.$$

5). Решение системы канонических уравнений.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1,F}}{\delta_{1,1}} = -\frac{-\frac{ql^4}{8EI}}{\frac{l^3}{3EI}} = \frac{3ql}{8}.$$

6). Построение окончательной эпюры моментов.

Окончательную эпюру строим с использованием формулы  $M = M_F + \bar{M}_1 X_1$ . Окончательная эпюра моментов приведена на рис.3.55,ж.

7). Построение эпюры поперечных сил

Поперечные силы находим по формуле  $Q = -X_1 + qx$ . Эпюра Q приведена на рис.3.55,з.

8). Проверка окончательной эпюры моментов

Находим интеграл  $\int \frac{M \bar{M}_1 dx}{EI}$  способом Верещагина. Получаем

$$\int \frac{M \bar{M}_1 dx}{EI} = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = \frac{-\frac{1}{2} \frac{ql^2}{8} l \frac{2}{3} l + \frac{ql^3}{12} \frac{1}{2} l}{EI} = \frac{-\frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{24}}{EI} = 0.$$

Таким образом, задача решена правильно.

### Расчет на действие температуры

Выведенная выше формула (3.33) для температурных перемещений справедлива как для статически определимых, так и для статически неопределимых систем. Однако, в отличие от статически определимых систем в статически неопределимых возникают температурные усилия. Эти усилия могут быть найдены методом сил. Методику расчета рассмотрим на следующем примере.

Пусть требуется найти усилия в балке, изображенной на рис. 3.56. Так как балка статически неопределима, применим для ее расчета на действие температуры метод сил. Балка имеет одну лишнюю связь. Основная

система для рассчитываемой балки изображена на рис. 3.56,б. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{1,1} X_1 + \Delta_{1,t} = 0.$$

В этом уравнении  $\Delta_{1,t}$  - перемещение в основной системе по направлению силы  $X_1$  от действия температуры. Это перемещение найдем по формуле (3.33). Для этого предварительно построим эпюру изгибающих моментов от силы  $X_1=1$  (рис.3.56,в). Так как единичная сила  $X_1=1$  не создает продольной силы, то в данном случае  $\omega_N=0$ ,  $\omega_M=0.5l^2$ . Тогда  $\Delta_{1,t} = -\alpha \frac{\Delta t}{h} 0.5l^2$ . Знак минус в последней формуле объясняется тем, что температура и единичная сила вызывают деформации разных знаков (температура изгибает балку выпуклостью вверх, а единичная сила – выпуклостью вниз).

Подставляя значение  $\Delta_{1,t}$  в каноническое уравнение метода сил и решая его, находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1,t}}{\delta_{1,1}} = \frac{\alpha \frac{\Delta t}{h} 0.5l^2}{\frac{l^3}{3EI}} = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2lh}$$

Для построения окончательной эпюры моментов умножаем единичную эпюру на найденное значение силы  $X_1$ . Окончательная эпюра моментов показана на рис.3.56,г.

### Расчет на заданное смещение опор

В статически неопределимых системах при смещении опор возникают внутренние усилия. Построим, например, эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для статически неопределимой балки, изображенной на рис. 3.57,а при повороте заделки на угол, равный 1.

Данная балка является однажды статически неопределимой. Основную систему для нее получим, отбросив правую опору. Действие отброшенной связи заменим силой  $X_1$ . Каноническое уравнение метода сил в данном случае записывается так:

$$\delta_{1,1} X_1 + \Delta_{1,k} = 0,$$

где  $\Delta_{1,k}$  - перемещение в направлении отброшенной связи, вызванное поворотом левой заделки на угол, равный 1 (см. рис.3.57,в). Для определения это-

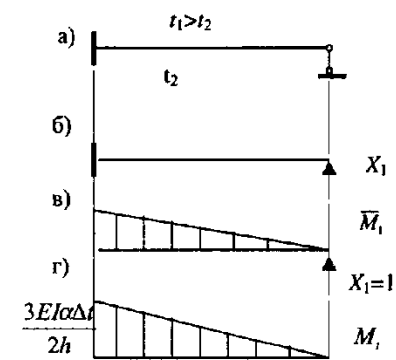


Рис.3.56

го перемещения приложим силу  $F_1=1$ , вычислим реакцию в заделке  $M_A=l$ , найдем работу внешних сил единичного состояния на перемещениях действительного и, приравняв эту работу нулю, найдем искомое перемещение. Получим:

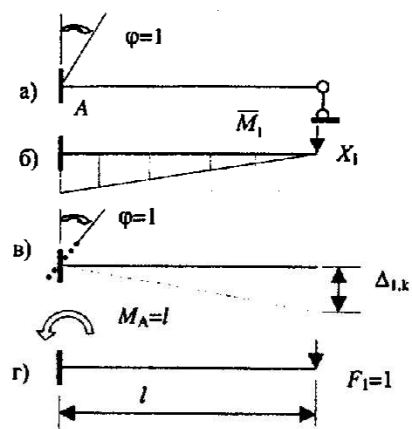


Рис.3.57

$$-M_A * 1 + F_1 \Delta_{1,k} = -l + \Delta_{1,k} = 0;$$

$\Delta_{1,k} = 1$ . Коэффициент  $\delta_{11}$  имеет обычный смысл. Найдем его по формуле Мора с использованием правила Верещагина. Необходимая для этих вычислений эпюра  $M_1$  изгибающих моментов от единичной неизвестной построена на рис.3.57,б.

$$\delta_{1,1} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2} l * l * \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EI}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в каноническое уравнение и решая его, находим  $X_1 = -3EI/l^2$ . По известной силе  $X_1$  строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Эти эпюры приведены на рис. 3.58.

Аналогичным образом можно рассчитать однопролетные статически неопределимые балки с различными условиями опирания на различные воздействия. Полученные при этом результаты можно использовать при расчете сложных стержневых систем так называемым методом перемещений. Ввиду исключительной важности этих результатов приведем их в готовом виде. Эти результаты содержатся в приведенной ниже таблице.

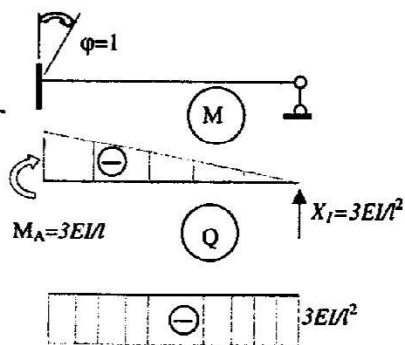


Рис.3.58

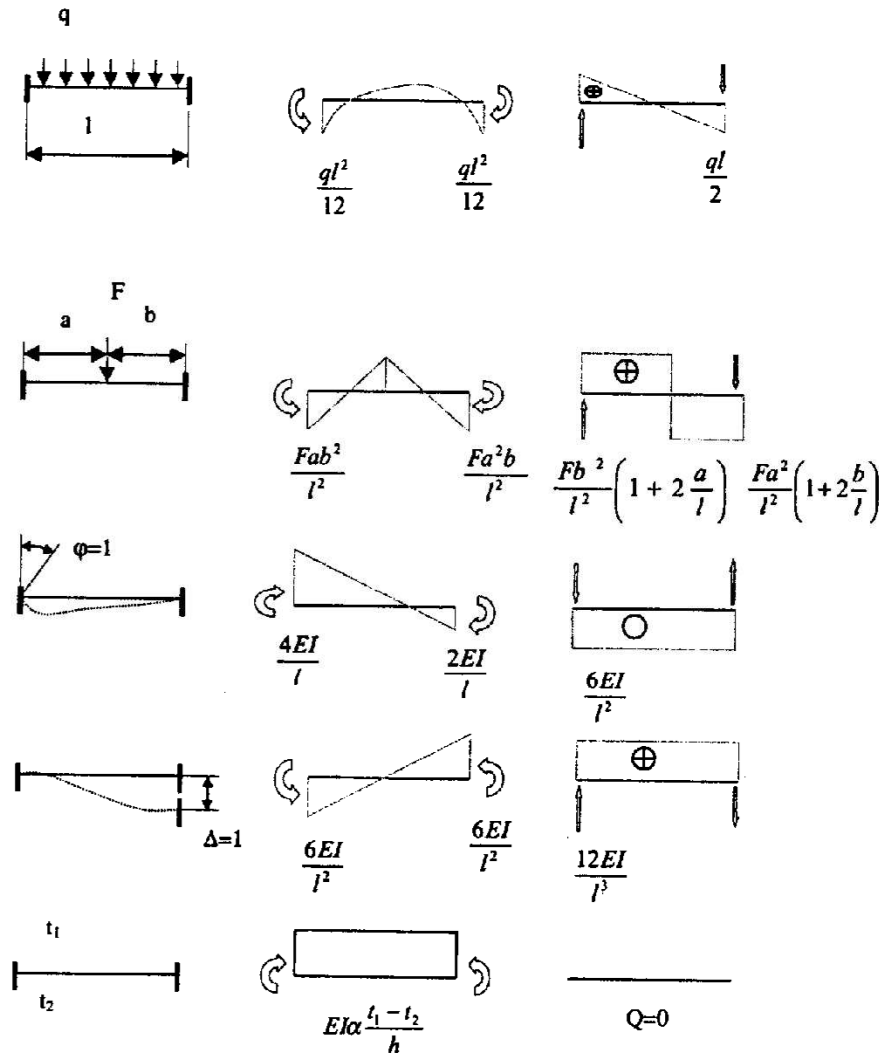
### Таблица эпюр моментов и поперечных сил в однопролетных статически неопределимых балках

Схема балки и воздействия	Эпюра изгибающих моментов	Эпюра поперечных сил
	$\frac{ql^2}{16}$	$\frac{5}{8}ql$
	$\frac{F}{2l^3} a^2 b (3l - a)$	$\frac{Fb}{2l^3} (3l^2 - b^2)$
	$\frac{F a b (b + l)}{2l^2}$	$\frac{F a^2}{2l^3} (3b - a)$
	$\frac{3EI}{l}$	$\frac{3EI}{l^2}$
	$\frac{3EI}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3}$
	$\frac{3EI \alpha \Delta t}{2h}$	$\frac{3EI \alpha \Delta t}{2hl}$

Схема балки  
и воздействия

Эпюра изгибающих  
моментов

Эпюра  
поперечных сил



### 3.2.3. Расчет стержневых систем методом перемещений

#### Выбор и определение числа неизвестных

Идею метода перемещений рассмотрим на примере. Пусть требуется рассчитать раму, изображенную на рис.3.59,а.

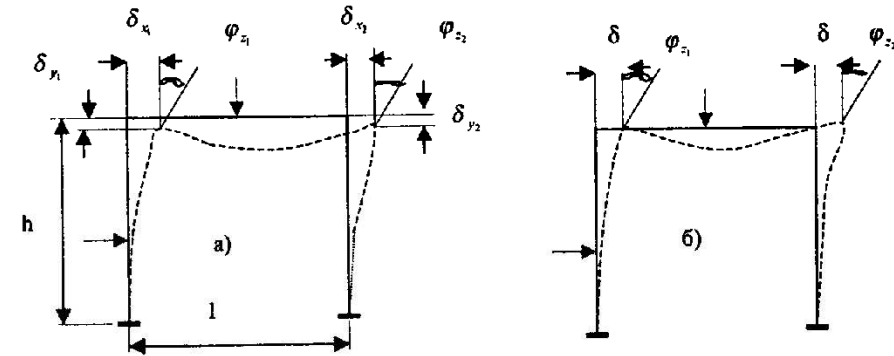


Рис.3.59

В результате деформации рамы под нагрузкой ее узлы смещаются в новое положение, приобретая при этом перемещения  $\delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \varphi_{z_1}, \delta_{x_2}, \delta_{y_2}, \varphi_{z_2}$ .

Если бы удалось каким-либо образом найти эти перемещения, то дальнейший расчет свелся бы к расчету каждого стержня в отдельности как статически неопределимой балки на действие заданных нагрузок и узловых перемещений. При этом можно было бы пользоваться приведенной в раздел 3.2.2 таблицей. Метод расчета, в котором узловы перемещения рассматриваются как основные неизвестные, называется методом перемещений.

Сущность метода рассмотрим, упростив задачу, а именно: пренебрежем деформациями растяжения-сжатия. Тогда деформированное состояние будет таким, как показано на рис.3.59,б. При этом узлы смещаются по горизонтали за счет изгиба стоек на одно и то же расстояние  $\delta$ , узел 1 рамы поворачивается на угол  $\varphi_{z_1}$ , а узел 2 – на угол  $\varphi_{z_2}$ . Число неизвестных при этом уменьшается до трех.

В общем случае число неизвестных метода перемещений  $n$  следует определять по формуле:

$$n = n_y + n_z, \quad (3.42)$$

где  $n_y$  – число неизвестных углов поворота,  $n_z$  – число неизвестных линейных перемещений узлов.

Число неизвестных углов поворота для плоских конструкций в точности равно числу жестких узлов рамы. При этом жесткими называются такие узлы, в которых жестко соединяются между собой по крайней мере два стержня конструкции. Примеры жестких узлов показаны на рис.3.60.



Рис.3.60

Число неизвестных линейных узловых перемещений в упрощенном варианте расчета (без учета продольных деформаций стержней) подсчитывается следующим образом.

Предполагается, что расстояния между концами стержней вследствие изгиба изменяются незначительно и этими изменениями можно пренебречь. Это дает основание при подсчете числа независимых линейных перемещений узлов перейти к анализу шарнирно-стержневой системы, полученной из заданной постановкой полных шарниров во все узлы, включая опорные. Если в такой системе возможны перемещения узлов без деформаций удлинения или укорочения стержней, то они возможны и в заданной конструкции. Следовательно, число независимых линейных перемещений равно степени геометрической изменяемости шарнирно-стержневой системы, полученной описанным выше способом. Эта характеристика подсчитывается по формуле (3.21).

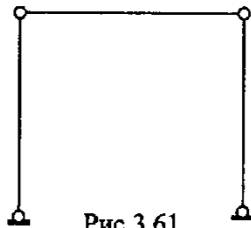


Рис.3.61

Вычислим по формуле (3.42), в качестве примера, число неизвестных метода перемещений для рамы рис.3.60. Рама имеет два жестких узла, следовательно  $n_y=2$ . Введем шарниры во все узлы рамы, как показано на рис.3.61.

По формуле 3.21, учитывая, что число стержней конструкции равно трем, а число опорных стержней – четырем (каждая шарнирно-неподвижная опора эквивалентна двум опорным стержням) находим:

$$n_n = W = 2Y - C - C_0 = 2 \times 4 - 3 - 4 = 1.$$

Таким образом,  $n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$ .

### Основная система.

#### Канонические уравнения метода перемещений

Основную систему получим, наложив на узлы дополнительные кинематические связи, препятствующие перемещениям узлов, как показано на рис.3.62. Связи, препятствующие поворотам узлов, будем обозначать затухающими квадратиками, а связи, препятствующие линейным перемещениям, будем изображать в виде опорных стержней. Отметим, что дополнительные связи, препятствующие поворотам, отличаются от обычных заделок тем, что они не препятствуют линейным перемещениям узлов.

Между заданной рамой и основной системой имеются два несоответствия: силовое и кинематическое. Силовое заключается в том, что в узлах основной системы появились реакции в дополнительных связях  $R_1, R_2, R_3$ , которых нет в заданной системе. Кинематическое несоответствие заключается в

том, что в заданной системе узлы смещаются, а в основной системе - нет. Устраним эти два несоответствия. Кинематическое несоответствие устраним, задав узлам основной системы такие перемещения, какие они имеют в заданной конструкции (см. рис.3.62,б), при этом примем новые обозначения для перемещений, а именно – все перемещения, как линейные, так и угловые, обозначим буквой  $Z$  с индексом, равным номеру перемещения.

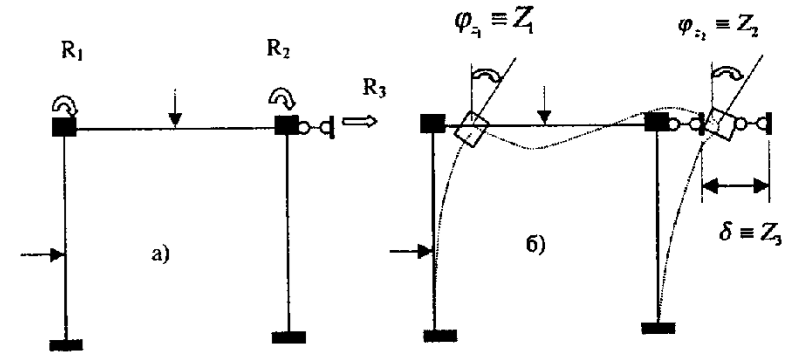


Рис.3.62

Силовое несоответствие устраним, приравняв нулю реакции наложенных связей. Получим

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= 0 \\ R_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Реакции наложенных связей можно представить как сумму реакций, вызванных смещениями этих связей и внешней нагрузкой, т.е.

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{1,Z_1} + R_{1,Z_2} + R_{1,Z_3} + R_{1,F} = 0 \\ R_2 &= R_{2,Z_1} + R_{2,Z_2} + R_{2,Z_3} + R_{2,F} = 0 \\ R_3 &= R_{3,Z_1} + R_{3,Z_2} + R_{3,Z_3} + R_{3,F} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

В формулах (3.44)  $R_{1,Z_1}$  - реакция в первой дополнительной связи от смещения этой связи на  $Z_1$ ,  $R_{1,Z_2}$  - реакция в первой дополнительной связи от смещения второй дополнительной связи на  $Z_2$  и т.д.,  $R_{1,F}$  - реакция первой связи от нагрузки и т.д.

Представим реакции дополнительных связей, вызванных смещениями этих связей, в виде произведения реакций от единичных значений смещений на их полные значения, т.е.

$$R_{1,Z_1} = r_{1,1}Z_1, \quad R_{1,Z_2} = r_{1,2}Z_2, \dots, R_{3,Z_3} = r_{3,3}Z_3, \quad (3.45)$$

где  $r_{1,1}$  - реакция первой связи на единичное смещение этой связи;  
 $r_{1,2}$  - реакция первой связи на единичное смещение второй связи и т.д.

С учетом этих формул уравнения (3.44) принимают вид:

$$\begin{aligned} r_{1,1}Z_1 + r_{1,2}Z_2 + r_{1,3}Z_3 + R_{1,F} &= 0 \\ r_{2,1}Z_1 + r_{2,2}Z_2 + r_{2,3}Z_3 + R_{2,F} &= 0 \\ r_{3,1}Z_1 + r_{3,2}Z_2 + r_{3,3}Z_3 + R_{3,F} &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Полученные уравнения называются каноническими уравнениями метода перемещений. В общем случае для конструкции, имеющей  $n$  неизвестных узловых перемещений, канонические уравнения метода перемещений записываются так:

$$\begin{aligned} r_{1,1}Z_1 + r_{1,2}Z_2 + \dots + r_{1,n}Z_n + R_{1,F} &= 0 \\ r_{2,1}Z_1 + r_{2,2}Z_2 + \dots + r_{2,n}Z_n + R_{2,F} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ r_{n,1}Z_1 + r_{n,2}Z_2 + \dots + r_{n,n}Z_n + R_{n,F} &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

### Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений

Для определения коэффициентов канонических уравнений метода перемещений необходимо построить эпюры моментов и поперечных сил в основной системе от приложенной нагрузки и от единичных смещений наложенных связей, пользуясь таблицей, приведенной в разделе 3.2.2, т.к. основная система представляет совокупность однопролетных статически неопределимых балок, для которых имеются заранее заготовленные решения. Для рассматриваемой рамы эти эпюры приведены на рис.3.63.

Реакции в наложенных связях от единичных смещений этих связей и от приложенной нагрузки  $r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}, \dots, R_{1,F}$  находятся методом сечений.

Для определения реакций  $r_{1,1}$  вырежем узел 1 в первом единичном состоянии и составим уравнения равновесия узла в виде суммы моментов всех сил относительно точки пересечения стержней, сходящихся в данном узле (см. рис. 3.64):

$$\sum M_1 = r_{1,1} - \frac{4EI}{l} - \frac{4EI}{h} = 0.$$

Из полученного уравнения находим  $r_{1,1} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{h}$ .

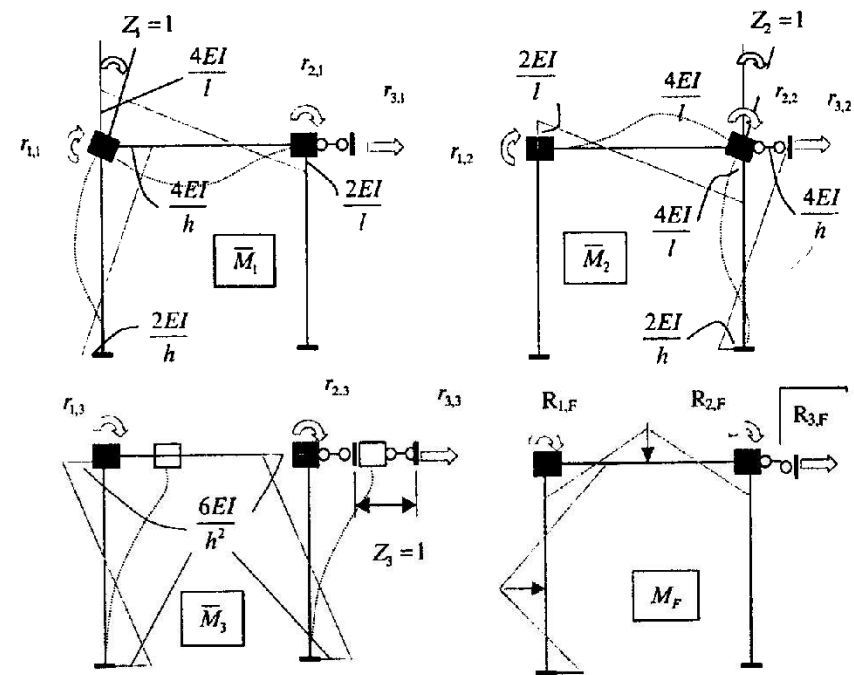


Рис.3.63

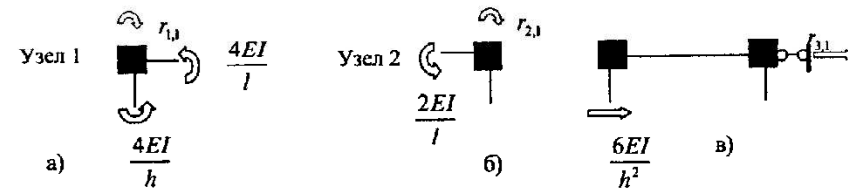


Рис.3.64

Для определения  $r_{2,1}$  вырежем узел 2 в первом единичном состоянии (см. рис. 3.64,б). Уравнение равновесия узла 2 имеет вид:

$$\sum M_2 = r_{2,1} - \frac{2EI}{l} = 0.$$

Из полученного уравнения находим:

$$r_{2,1} = \frac{2EI}{l}.$$

Аналогичным образом находим остальные реакции, представляя собой реактивные моменты в дополнительных заделках. Для определен

реакции  $r_{3,1}$  рассечем раму на две части, как показано на рис. 3.64,в и составим уравнение равновесия верхней отсеченной части в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось. Получим

$$r_{3,1} + \frac{6EI}{h^2} = 0.$$

Отсюда

$$r_{3,1} = -\frac{6EI}{h^2}.$$

Аналогичным образом определяются другие коэффициенты системы уравнений, представляющие собой реакции в дополнительном опорном стержне. После определения коэффициентов и решения системы канонических уравнений окончательная эпюра моментов может быть построена по формуле

$$M = M_F + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3.$$

Дальнейший расчет проводится так же, как и при использовании метода сил.

### 3.2.4. Матричная форма метода перемещений

#### Матрица жесткости стержня

Предположим, что нужно рассчитать некоторую произвольную пространственную стержневую систему, изображенную на рис. 3.65.

Расчет будем вести методом перемещений с учетом всех видов деформаций стержня: растяжения-сжатия, кручения и изгиба. В качестве основных

неизвестных примем узловые перемещения и повороты. При принятых предпосылках в каждом узле будет 3 линейных и 3 угловых перемещения. Будем определять эти перемещения в некоторой общей для всей конструкции системе координат XYZ, называемой в дальнейшем глобальной

системой координат. Общее число неизвестных равно, таким образом,  $6 \times N$ , где  $N$  - число узлов конструкции. Если у конструкции имеются опорные связи, число которых равно  $C_0$ , то соответствующие им перемещения равны ну-

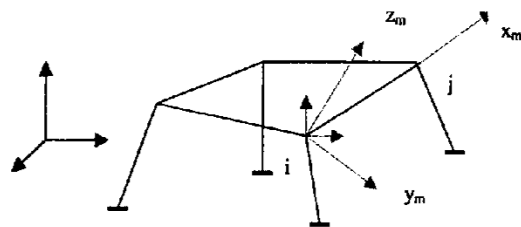


Рис.3.65

лю и число неизвестных уменьшится на  $C_0$ . Следовательно, общее число неизвестных  $n$  равно  $6 \times N - C_0$ .

Рассмотрим реализацию метода, считая (для простоты выводов), что внешние силы приложены только в узлах конструкции. Пролетные нагрузки всегда можно привести к узловым силам, так что введенное ограничение не является принципиальным.

Выберем  $i$ -й узел конструкции (см. рис.3.66).

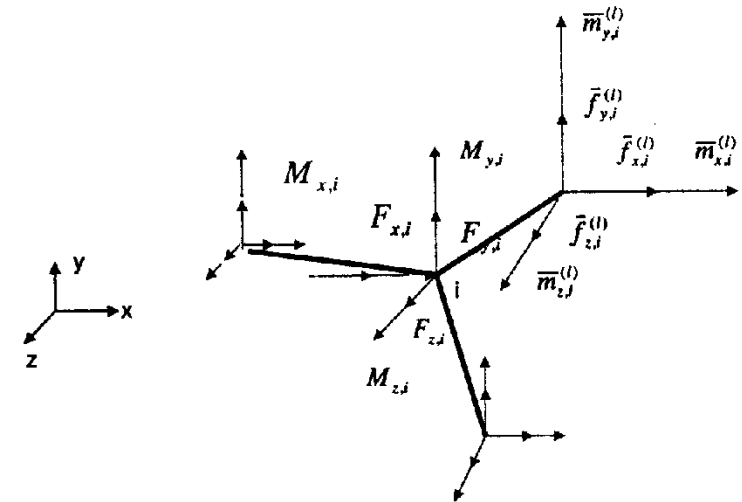


Рис. 3.66

Уравнения равновесия  $i$ -го узла имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum x = \sum_{l=1}^L \bar{f}_{x_i}^{(l)} + F_{x_i} = 0; \quad \sum y = \sum_{l=1}^L \bar{f}_{y_i}^{(l)} + F_{y_i} = 0; \quad \sum z = \sum_{l=1}^L \bar{f}_{z_i}^{(l)} + F_{z_i} = 0; \\ \sum M_x = \sum_{l=1}^L \bar{m}_{x_i}^{(l)} + M_{x_i} = 0; \quad \sum M_y = \sum_{l=1}^L \bar{m}_{y_i}^{(l)} + M_{y_i} = 0; \quad \sum M_z = \sum_{l=1}^L \bar{m}_{z_i}^{(l)} + M_{z_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Суммирование усилий проводится по всем стержням, сходящимся в данном узле. Номера этих стержней меняются от 1 до L. Уравнения (3.48) в матричном виде записываются так:

$$\sum_{l=1}^L \{\bar{f}_i^{(l)}\} + \{F_i\} = 0, \quad (3.49)$$

где

$$\bar{f}_i^{(l)} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_i}^{(l)} \\ \bar{f}_{y_i}^{(l)} \\ \bar{f}_{z_i}^{(l)} \\ \bar{m}_{x_i}^{(l)} \\ \bar{m}_{y_i}^{(l)} \\ \bar{m}_{z_i}^{(l)} \end{Bmatrix} \quad (3.50) \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{z,i} \\ M_{x,i} \\ M_{y,i} \\ M_{z,i} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Вектор  $\{\bar{f}_i^{(l)}\}$  содержит проекции концевых сил стержня  $i-j$  на координатные оси  $XYZ$ . Сразу найти эти проекции по формулам сопротивления материалов не представляется возможным. Можно, однако, найти концевые силы в местной системе координат  $x_m y_m z_m$ , которая выбирается следующим образом: ось  $x_m$  направляется вдоль оси стержня, а оси  $y_m$  и  $z_m$  совмещаются с главными осями инерции поперечного сечения. Местная система координат для стержня  $i-j$  показана на рис.3.65. На рис.3.67 и 3.68 показаны положительные направления для концевых усилий и перемещений стержня в местной системе координат. В отличие от сопротивления материалов, принято единое правило знаков для  $i$ -го и  $j$ -го концов стержня.

С учетом введенного правила знаков для усилий и перемещений зависимость между ними в местной системе координат (МСК) на основании таблицы сил и моментов для однопролетной статически неопределимой балки раздел 3.2.2 выше) можно представить в виде одной матричной формулы:

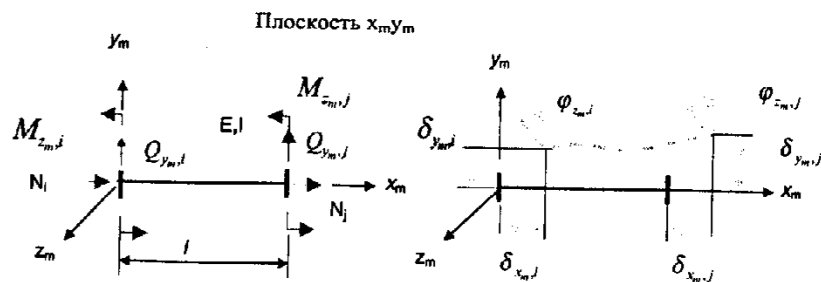


Рис.3.67

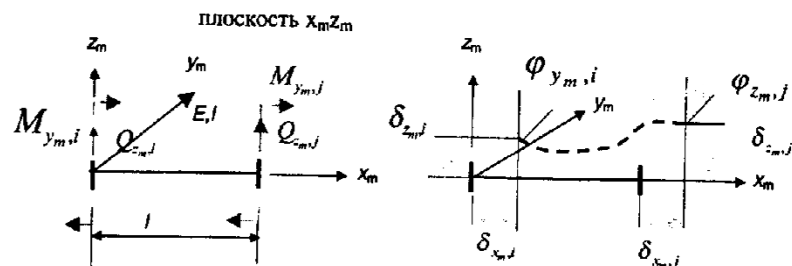


Рис.3.68

$$\{f_m\} = [K_{e,m}] \{\delta_m\} + \{\tilde{f}_m\}, \quad (3.52)$$

где

$$\{\varphi_m\} = \begin{Bmatrix} \delta_{x_m,i} \\ \delta_{y_m,i} \\ \delta_{z_m,i} \\ \varphi_{x_m,i} \\ \varphi_{y_m,i} \\ \varphi_{z_m,i} \\ \delta_{x_m,j} \\ \delta_{y_m,j} \\ \delta_{z_m,j} \\ \varphi_{x_m,j} \\ \varphi_{y_m,j} \\ \varphi_{z_m,j} \end{Bmatrix}; \quad (3.53) \quad \{f_m\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_{y_m,i} \\ Q_{z_m,i} \\ M_{x_m,i} \\ M_{y_m,i} \\ M_{z_m,i} \\ N_j \\ Q_{y_m,j} \\ Q_{z_m,j} \\ M_{x_m,j} \\ M_{y_m,j} \\ M_{z_m,j} \end{Bmatrix}; \quad (3.54)$$

$$[K_{e,m}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{kp}}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

а вектор  $\{\tilde{f}_m\}$  состоит из двенадцати компонентов узловых сил, обусловленных пролетными нагрузками. Эти компоненты могут быть найдены в зави-

симости от вида пролетной нагрузки из таблиц, приведенных в разделе 3.2.2 данной книги.

### Переход к глобальной системе координат

Перейдем теперь к глобальной системе координат (ГСК). Для этого выразим компоненты узловых сил и перемещений в МСК через компоненты узловых сил и перемещений в ГСК. На рис.3.69 показан стержень  $i-j$ , а также местная и глобальная системы координат для этого стержня. Обозначим направляющие косинусы местных осей элемента в глобальной системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x_m, x); & l_2 &= \cos(y_m, x); & l_3 &= \cos(z_m, x); \\ m_1 &= \cos(x_m, y); & m_2 &= \cos(y_m, y); & m_3 &= \cos(z_m, y); \\ n_1 &= \cos(x_m, z); & n_2 &= \cos(y_m, z); & n_3 &= \cos(z_m, z). \end{aligned} \quad (3.56)$$

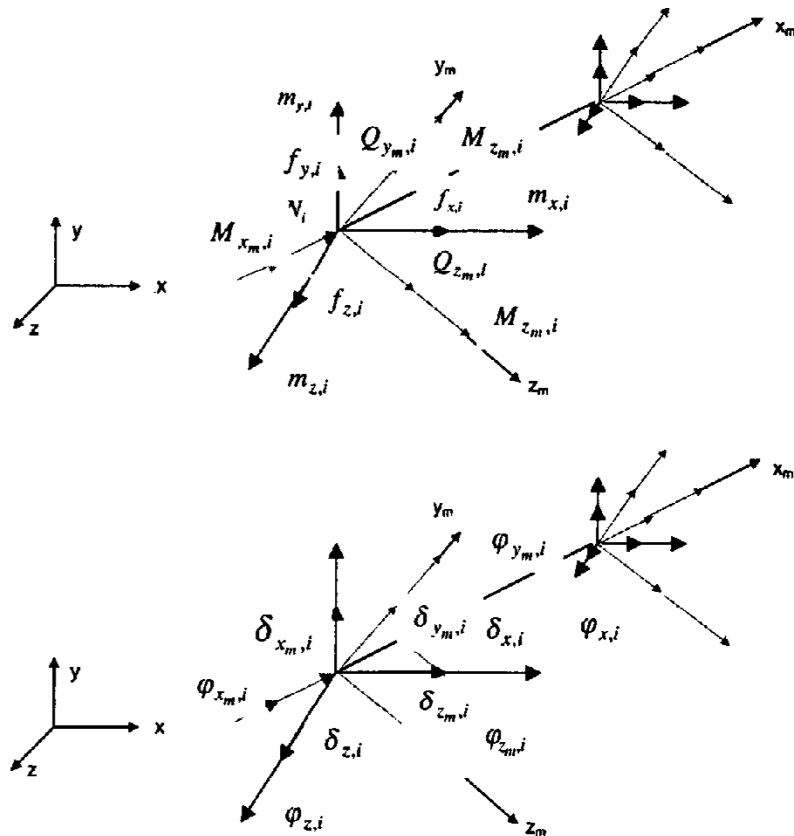


Рис. 3.69

При принятых обозначениях, проектируя перемещения узлов элемента  $i-j$  в глобальной системе координат на местные координатные оси, получаем составляющие перемещений узлов этого элемента в местной системе:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{x_m,i} &= \delta_{x,i}l_1 + \delta_{y,i}m_1 + \delta_{z,i}n_1 \\ \delta_{y_m,i} &= \delta_{x,i}l_2 + \delta_{y,i}m_2 + \delta_{z,i}n_2 \\ \delta_{z_m,i} &= \delta_{x,i}l_3 + \delta_{y,i}m_3 + \delta_{z,i}n_3 \\ \varphi_{x_m,i} &= \varphi_{x,i}l_1 + \varphi_{y,i}m_1 + \varphi_{z,i}n_1 \\ \varphi_{y_m,i} &= \varphi_{x,i}l_2 + \varphi_{y,i}m_2 + \varphi_{z,i}n_2 \\ \varphi_{z_m,i} &= \varphi_{x,i}l_3 + \varphi_{y,i}m_3 + \varphi_{z,i}n_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.57) \quad \left. \begin{aligned} \delta_{x_m,j} &= \delta_{x,j}l_1 + \delta_{y,j}m_1 + \delta_{z,j}n_1 \\ \delta_{y_m,j} &= \delta_{x,j}l_2 + \delta_{y,j}m_2 + \delta_{z,j}n_2 \\ \delta_{z_m,j} &= \delta_{x,j}l_3 + \delta_{y,j}m_3 + \delta_{z,j}n_3 \\ \varphi_{x_m,j} &= \varphi_{x,j}l_1 + \varphi_{y,j}m_1 + \varphi_{z,j}n_1 \\ \varphi_{y_m,j} &= \varphi_{x,j}l_2 + \varphi_{y,j}m_2 + \varphi_{z,j}n_2 \\ \varphi_{z_m,j} &= \varphi_{x,j}l_3 + \varphi_{y,j}m_3 + \varphi_{z,j}n_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Объединим формулы (3.57) и (3.58) и запишем их в матричном виде:

$$\{\delta_m\} = [T]\{\delta\}, \quad (3.59)$$

где

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \dots \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{x,i} \\ \delta_{y,i} \\ \delta_{z,i} \\ \varphi_{x,i} \\ \varphi_{y,i} \\ \varphi_{z,i} \\ \delta_{x,j} \\ \delta_{y,j} \\ \delta_{z,j} \\ \varphi_{x,j} \\ \varphi_{y,j} \\ \varphi_{z,j} \end{Bmatrix}; \quad (3.60) \quad [T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 \end{bmatrix}; \quad [T_1] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}; \quad (3.61)$$

Найдем проекции концевых сил элемента  $i-j$  на глобальные оси  $X$ . Для  $i$ -го узла получим

$$\left. \begin{aligned} f_{x,i} &= f_{x_m,i}l_1 + f_{y_m,i}l_2 + f_{z_m,i}l_3 \\ f_{y,i} &= f_{x_m,i}m_1 + f_{y_m,i}m_2 + f_{z_m,i}m_3 \\ f_{z,i} &= f_{x_m,i}n_1 + f_{y_m,i}n_2 + f_{z_m,i}n_3 \\ m_{x,i} &= m_{x_m,i}l_1 + m_{y_m,i}l_2 + m_{z_m,i}l_3 \\ m_{y,i} &= m_{x_m,i}m_1 + m_{y_m,i}m_2 + m_{z_m,i}m_3 \\ m_{z,i} &= m_{x_m,i}n_1 + m_{y_m,i}n_2 + m_{z_m,i}n_3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} f_{x,j} &= f_{x_m,j}l_1 + f_{y_m,j}l_2 + f_{z_m,j}l_3 \\ f_{y,j} &= f_{x_m,j}m_1 + f_{y_m,j}m_2 + f_{z_m,j}m_3 \\ f_{z,j} &= f_{x_m,j}n_1 + f_{y_m,j}n_2 + f_{z_m,j}n_3 \\ m_{x,j} &= m_{x_m,j}l_1 + m_{y_m,j}l_2 + m_{z_m,j}l_3 \\ m_{y,j} &= m_{x_m,j}m_1 + m_{y_m,j}m_2 + m_{z_m,j}m_3 \\ m_{z,j} &= m_{x_m,j}n_1 + m_{y_m,j}n_2 + m_{z_m,j}n_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$



Формулы (3.62) в матричном виде:

$$\{f\} = [T]^T \{f_m\} \quad (3.63)$$

где

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x,i} \\ f_{y,i} \\ f_{z,i} \\ m_{x,i} \\ m_{y,i} \\ m_{z,i} \\ \dots \\ f_{x,j} \\ f_{y,j} \\ f_{z,j} \\ m_{x,j} \\ m_{y,j} \\ m_{z,j} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Подставив в формулу (3.64) соотношение (3.63), в котором, в свою очередь, учтем соотношение (3.52), получим:

$$\{f\} = [T]^T [K_{e,m}] [T] \{\delta\} + [T]^T \{\tilde{f}_m\} \quad (3.65)$$

или

$$\{f\} = [K_e] \{\delta\} + \{\tilde{f}\} \quad (3.66)$$

где

$$[K_e] = [T]^T [K_{e,m}] [T], \quad \{\tilde{f}\} = [T]^T \{\tilde{f}_m\} \quad (3.67)$$

есть матрица жесткости и вектор нагрузки элемента  $i-j$  в глобальной системе координат, соответственно.

Для составления уравнений равновесия конструкции формулу (3.66) представим в блочном виде:

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i,i} & \dots & k_{i,j} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{j,i} & \dots & k_{j,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \dots \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_i \\ \dots \\ \tilde{f}_j \end{Bmatrix}, \quad (3.68)$$

откуда

$$\{f_i\} = [k_{i,i}] \{\delta_i\} + [k_{i,j}] \{\delta_j\} + \{\tilde{f}_i\} \quad (3.69)$$

В формуле (3.69) векторы  $\{f_i\}$ ,  $\{\delta_i\}$ ,  $\{\delta_j\}$  состоят из шести компонентов каждый, а матрицы  $[k_{i,i}]$  и  $[k_{i,j}]$  имеют порядок  $6 \times 6$  и представляют собой блоки матрицы жесткости стержня  $i-j$ .

### Матрица жесткости конструкции

Вернемся к уравнениям (3.48) равновесия  $i$ -го узла конструкции. Отметим, что в эти уравнения входит вектор сил  $\{\tilde{f}_i^{(j)}\}$ , представляющий результат действия стержня  $i-j$  на данный узел. Вектор сил  $\{f_i\}$ , фигурирующий в формуле (3.69), представляет собой результат действия  $i$ -го узла на стержень. Очевидно, что

$$\{\tilde{f}_i^{(j)}\} = \{f_i\}. \quad (3.70)$$

Подставляя (3.70) в уравнения (3.48) и учитывая (3.69), получаем:

$$\sum_{j=1}^m ([k_{i,i}] \{\delta_i\} + [k_{i,j}] \{\delta_j\} + \{\tilde{f}_i\}) = \{F_i\} \quad (3.71)$$

или

$$\left( \sum_{j=1}^m [k_{i,i}] \{\delta_i\} + \sum_{j=1}^m [k_{i,j}] \{\delta_j\} \right) = \{F_i\} - \sum_{j=1}^m \{\tilde{f}_i\} \quad (3.72)$$

Составив уравнения по типу (3.72) для всех узлов конструкции и объединив их, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \sum [k_{1,1}] \{\delta_1\} + \sum [k_{1,j}] \{\delta_j\} \right) &= \{F_1\} - \sum \{\tilde{f}_1\} \\ \left( \sum [k_{2,2}] \{\delta_2\} + \sum [k_{2,j}] \{\delta_j\} \right) &= \{F_2\} - \sum \{\tilde{f}_2\} \\ \dots & \\ \left( \sum [k_{N,N}] \{\delta_N\} + \sum [k_{N,j}] \{\delta_j\} \right) &= \{F_N\} - \sum \{\tilde{f}_N\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

или, в компактном виде:

$$[K] \{\Delta\} = \{F\}, \quad (3.74)$$

где  $[K]$  - матрица жесткости конструкции,  $\{\Delta\}$  - объединенный вектор узловых перемещений,  $\{F\}$  - объединенный вектор узловых нагрузок, причем

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix}; \quad (3.75) \quad [K] = \begin{bmatrix} \sum k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,N} \\ k_{2,1} & \sum k_{2,2} & \vdots & k_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N,1} & k_{N,2} & \dots & \sum k_{N,N} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Вектор узловых нагрузок  $\{F\}$  находится суммированием заданных внешних узловых сил и узловых эквивалентов пролетных нагрузок, т.е.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 - \sum \{\tilde{F}_1\} \\ F_2 - \sum \{\tilde{F}_2\} \\ \vdots \\ F_N - \sum \{\tilde{F}_N\} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

### Алгоритм расчета конструкций методом перемещений в матричной форме

Исходя из изложенного выше, алгоритм расчета произвольных стержневых конструкций методом перемещений можно сформулировать следующим образом:

1. Для каждого стержня: а) вычислить матрицу жесткости в местной системе координат по формуле (3.55); б) вычислить матрицу жесткости в глобальной системе координат по формуле (3.67); в) вычислить вектор узловых сил в защемлении от пролетных нагрузок;
2. Путем суммирования матриц жесткостей элементов вычислить матрицу жесткости конструкции по формуле (3.76) и вектор узловых нагрузок по формуле (3.77);
3. Решить систему линейных алгебраических уравнений (3.74);
4. Вычислить усилия в стержнях, используя формулы (3.52) и (3.59).

### Реализация матричной формы метода перемещений на ЭВМ

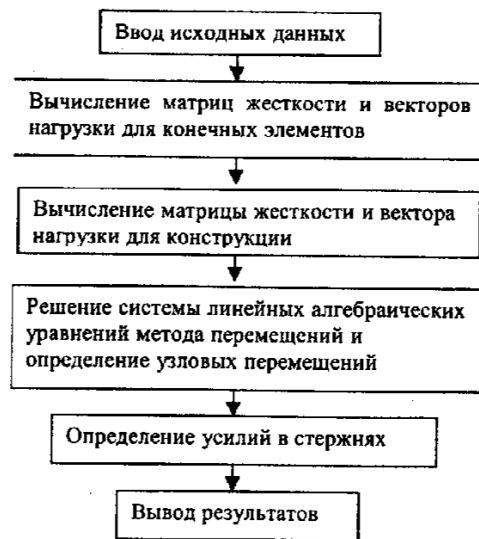


Рис.3.70

Описанная выше методика линейного статического расчета стержневых систем реализована в вычислительном комплексе ПРИНС. Упрощенная блок-схема алгоритма расчета приведена на рис.3.70.

Программа ПРИНС снабжена препроцессором, значительно облегчающим ввод исходных данных, а также постпроцессором, обеспечивающим рисование деформированной схемы конструкции и эпюр усилий в ее элементах.

Ниже приводятся результаты расчета стержневых конструкций методом перемещений по программе ПРИНС.

## 3.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

### 3.4.1. Пример расчета рамы методом перемещений

Пусть требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы, изображенной на рис.3.71, при  $F=0.8$  кН и  $EI=const$ .

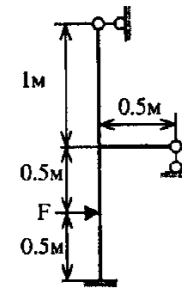


Рис.3.71

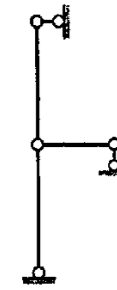


Рис.3.72

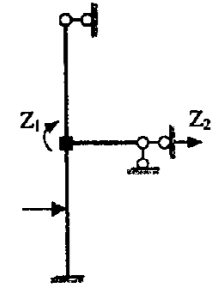


Рис.3.73

Подсчитаем число неизвестных. Рама имеет один жесткий узел, следовательно  $n_y = 1$ . Для определения числа линейных перемещений поставим шарниры во все узлы, считая опорные, как показано на рис.3.72. Степень свободы полученной шарнирно-стержневой системы равна  $2V - C - C_0 = 2 \times 4 - 3 - 4 = 1$ . Следовательно, число независимых линейных смещений равно  $n_x = 1$ . Общее число неизвестных метода перемещений  $n = n_y + n_x = 1 + 1 = 2$ .

Основную систему метода перемещений получим, наложив связь, препятствующую угловому перемещению узла 1 и линейному перемещению узлов 1 и 2 по горизонтали. Основная система показана на рис.3.73.

Канонические уравнения метода перемещений для рассчитываемой рамы имеют вид

$$\begin{cases} r_{1,1}Z_1 + r_{1,2}Z_2 + R_{1,F} = 0 \\ r_{2,1}Z_1 + r_{2,2}Z_2 + R_{2,F} = 0 \end{cases}$$

Для определения коэффициентов канонических уравнений построим эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений в направлении наложенных связей и от приложенной нагрузки для основной системы. Эпюры строятся с помощью данных, приведенных в разделе 3.2.2 (см. рис.3.74).

Коэффициенты канонических уравнений найдем статическим способом. Для определения коэффициента  $r_{1,1}$  вырежем узел 1 в первом единичном состоянии (рис.3.75,а) и составим для этого узла уравнения равновесия в виде суммы моментов. Получим:

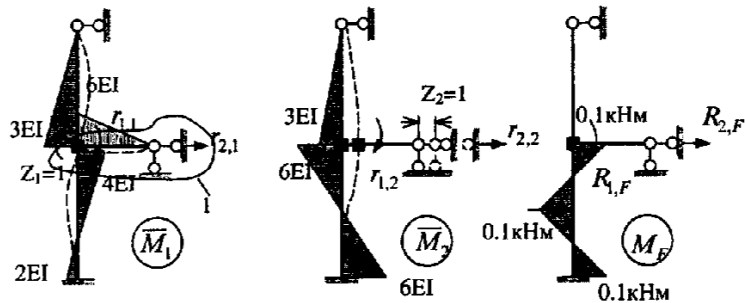


Рис.3.74

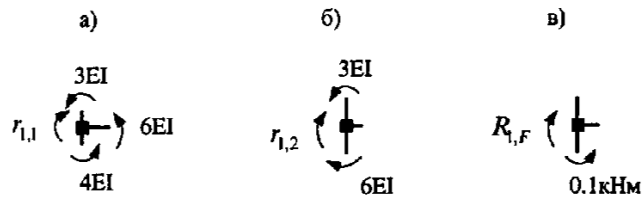


Рис.3.75

$$\sum M_1 = r_{1,1} - 3EI - 6EI - 4EI = 0, \text{ отсюда } r_{1,1} = 13EI.$$

Последовательно вырезая узел 1 во втором единичном и грузовом состояниях (рис.3.75,б,в) и составляя для этого узла уравнения равновесия в виде суммы моментов, получаем:

$$\sum M_1 = r_{1,2} - 3EI + 6EI = 0, \text{ отсюда } r_{1,2} = -3EI.$$

$$\sum M_1 = R_{1,F} - 0.1 = 0, \text{ отсюда } R_{1,F} = 0.1 \text{кНм}$$

Для определения коэффициентов второй строки, представляющих собой реакции в дополнительном горизонтальном опорном стержне, воспользуемся круговым разрезом 1, показанным на рис.3.74. Для отсеченной части, изображенной на рис.3.76, составим уравнения равновесия в виде суммы

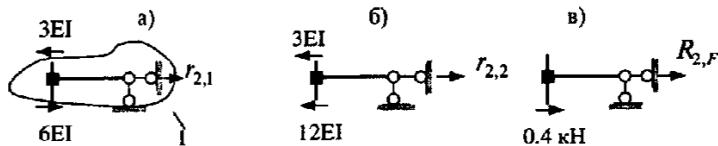


Рис.3.76

проекции всех сил на горизонтальную ось в единичных (рис.3.76,а,б) и грузовом (рис.3.76,в) состояниях.

Получим:

$$r_{2,1} + 6EI - 3EI = 0; \quad r_{2,2} - 12EI - 3EI = 0; \quad R_{2,F} + 0.4 = 0.$$

Решая составленные уравнения, находим

$$r_{2,1} = -3EI; \quad r_{2,2} = 15EI; \quad R_{2,F} = -0.4.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в канонические уравнения метода перемещений и решим их:

$$\left. \begin{aligned} 13EIZ_1 - 3EIZ_2 + 0.1 &= 0 \\ -3EIZ_1 + 15EIZ_2 - 0.4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$Z_1 = -0.00161/EI; \quad Z_2 = 0.0263/EI.$$

Окончательную эпюру моментов для заданной рамы построим по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_F$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, предварительно построим эпюры  $\bar{M}_1 Z_1$  и  $\bar{M}_2 Z_2$ . Эти две эпюры и окончательная эпюра моментов показаны на рис.3.77.

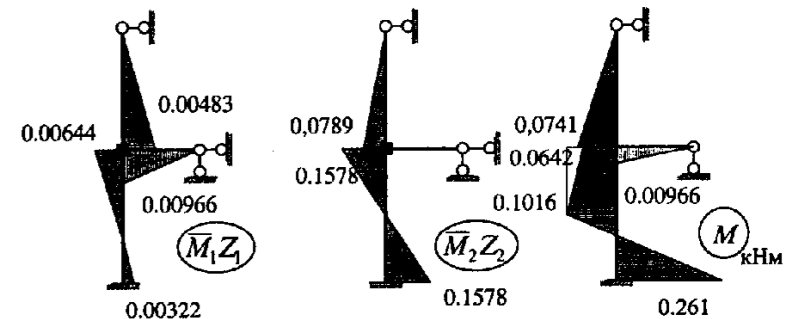


Рис.3.77

Поперечные силы в стержнях рамы можно найти по эпюре изгибающих моментов на основании дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$ . Так как эпюра изгибающих моментов состоит из отрезков прямых, то попереч-

ная сила на каждом участке рамы находится как тангенс угла наклона огibaющей эпюры моментов. Эпюра поперечных сил показана на рис.3.78.

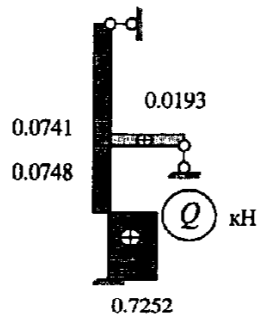


Рис.3.78

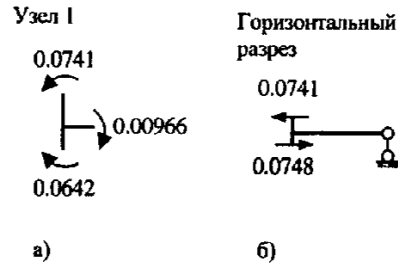


Рис.3.79

Для проверки правильности построения эпюр  $M$  и  $Q$  проверим равновесие рамы. Вырежем узел 1 и приложим к нему моменты, действующие на этот узел со стороны отброшенных стержней (рис.3.79). Значения моментов определяем по эпюре  $M$  (рис.3.77). Найдем сумму моментов в данном узле. Получим:

$$\sum M = 0.0741 - 0.00966 - 0.0642 = 0.0741 - 0.07386 = 0.00024.$$

Таким образом, неуравновешенный момент в узле 1 составляет  $0.00024 \text{ кНм}$ . Абсолютное значение погрешности не позволяет судить о точности результатов, поэтому вычислим относительную погрешность  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{0.00024}{0.07386} 100\% = 0.27\%.$$

Как видим, относительная погрешность определения изгибающих моментов мала, возникновение же ее объясняется тем обстоятельством, что при выполнении расчетов все результаты округлялись на третьей значащей цифре.

Аналогичным образом проверяется равновесие по поперечным силам. Проведем круговое сечение, как показано на рис.3.79,б, приложим поперечные силы, действующие на узел со стороны отброшенных стержней и вычислим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось, обозначив последнюю буквой  $x$ . Получим:

$$\sum X = 0.0748 - 0.0741 = 0.0007.$$

Относительная погрешность составляет  $\frac{0.0007}{0.0748} 100\% = 0.936\%$ .

### 3.4.2. Расчет рамы грузового автомобиля на ЭВМ

Ниже приводятся результаты расчета рамы грузового автомобиля методом перемещений на ЭВМ по программе ПРИНС. Аналогом рассчитанной конструкции является рама грузового автомобиля ЗИЛ-150. Расчетная схема рамы с указанием основных размеров приведена на рис.3.80. Рама состоит из двух лонжеронов, соединенных между собой пятью поперечными балками. Лонжероны имеют переменное сечение, поэтому они разбиты на шесть участков, в пределах которых размеры сечений принимаются постоянными. Нумерация участков лонжеронов и поперечин показана на рис.3.80. Характеристики сечений лонжеронов и поперечин приведены в табл.3.1.

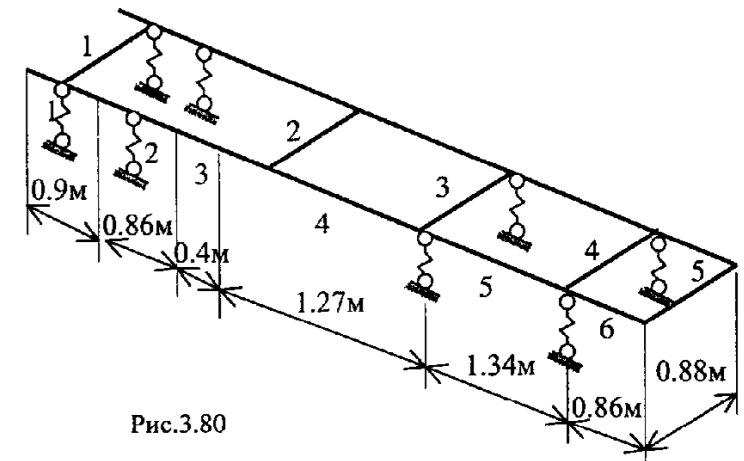


Рис.3.80

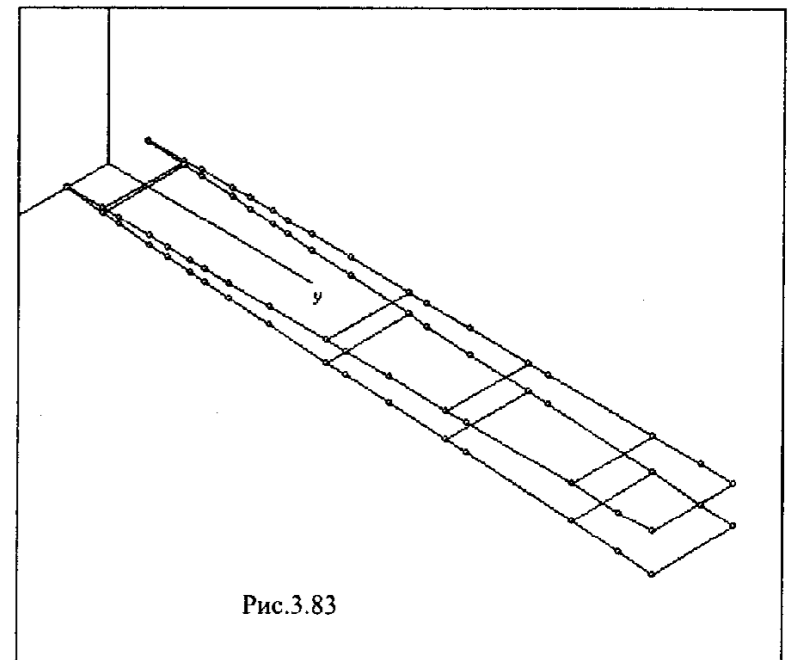
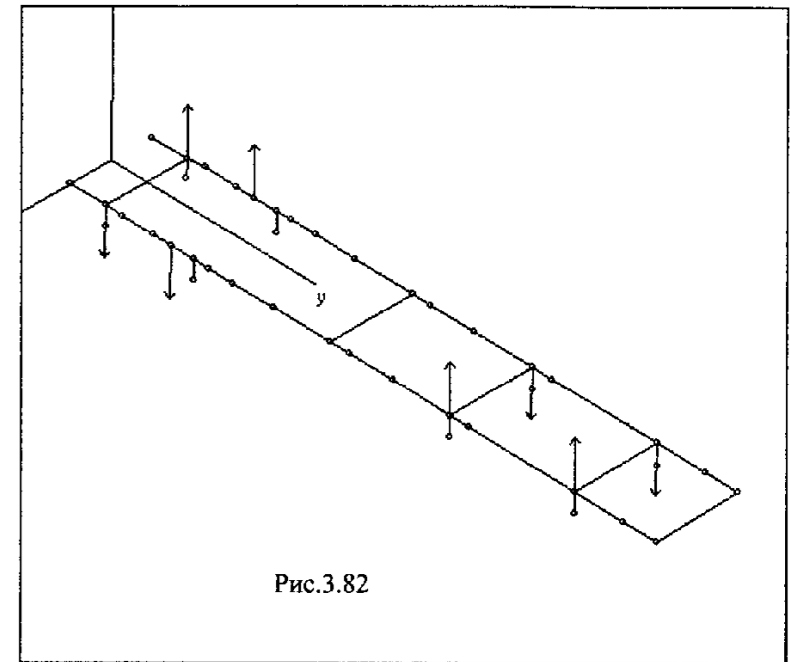
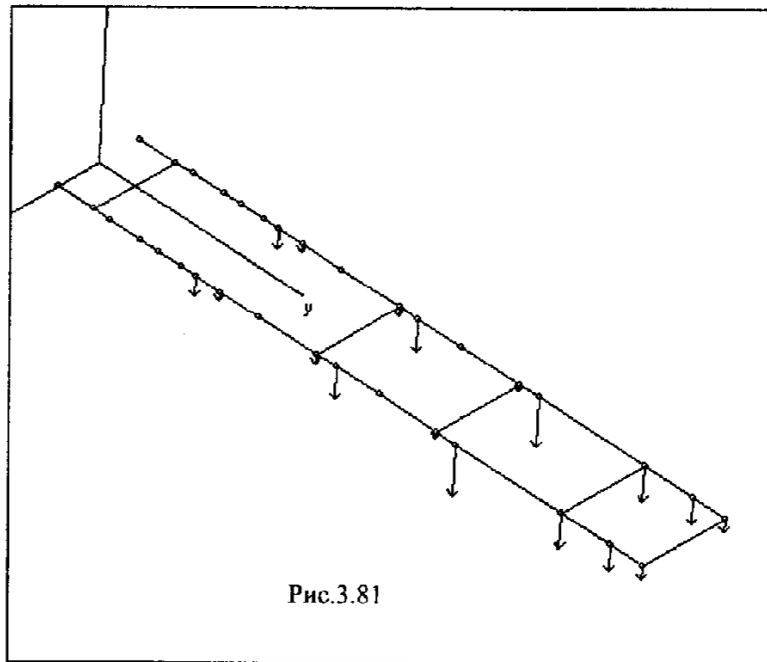
Таблица 3.1

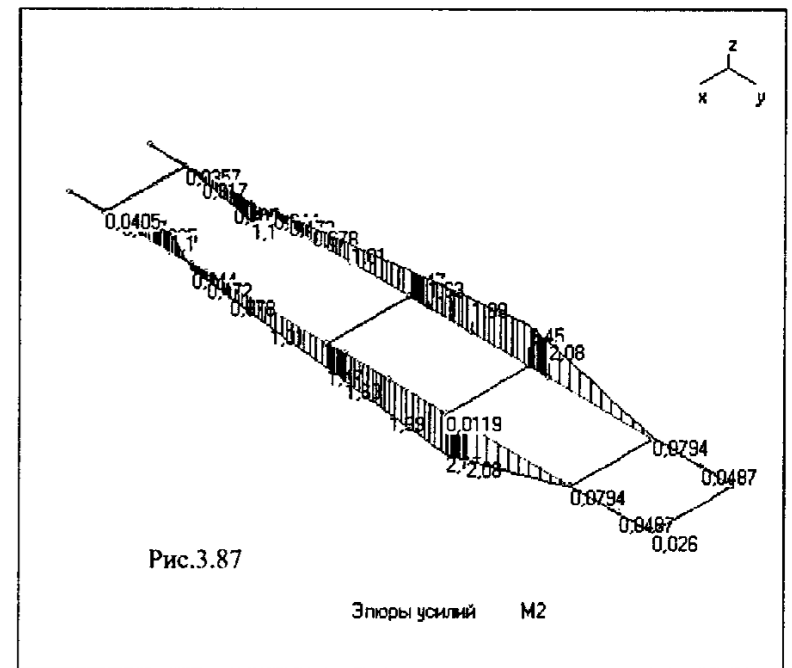
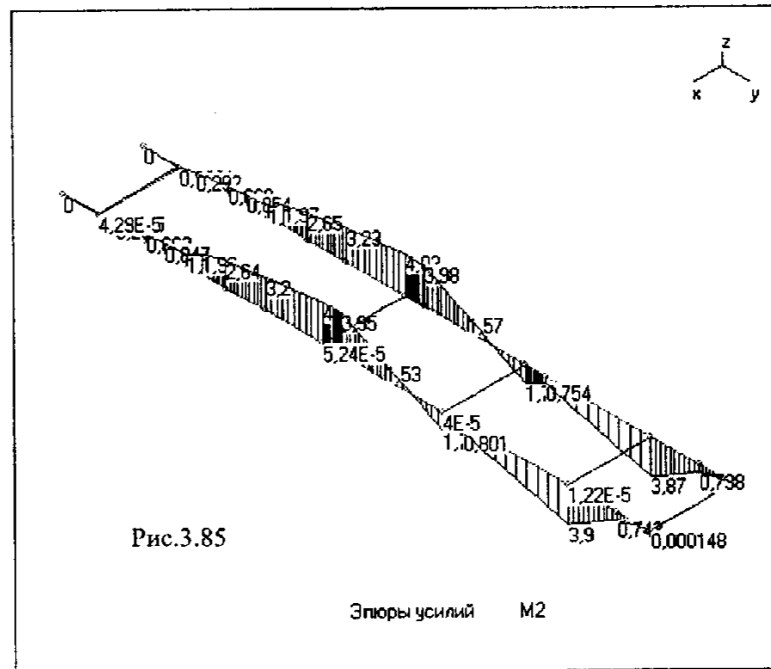
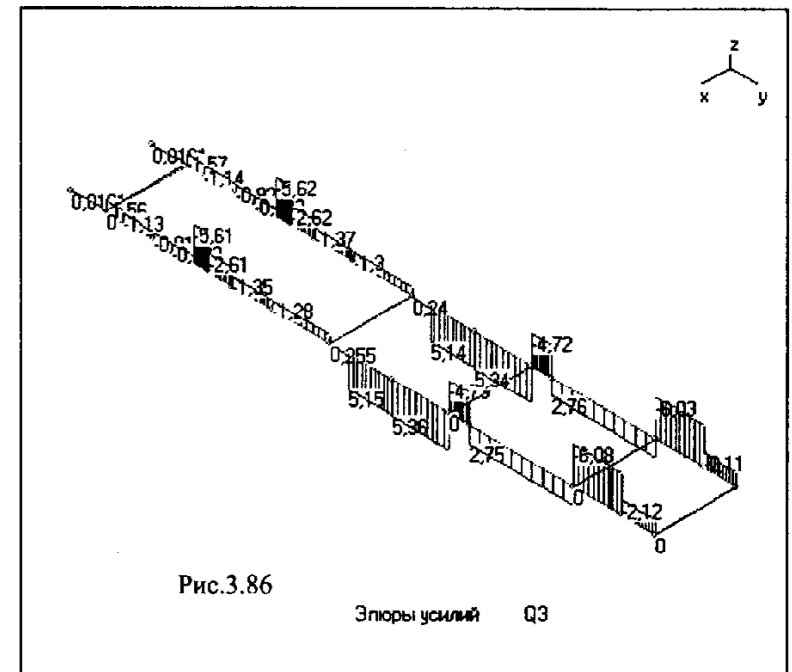
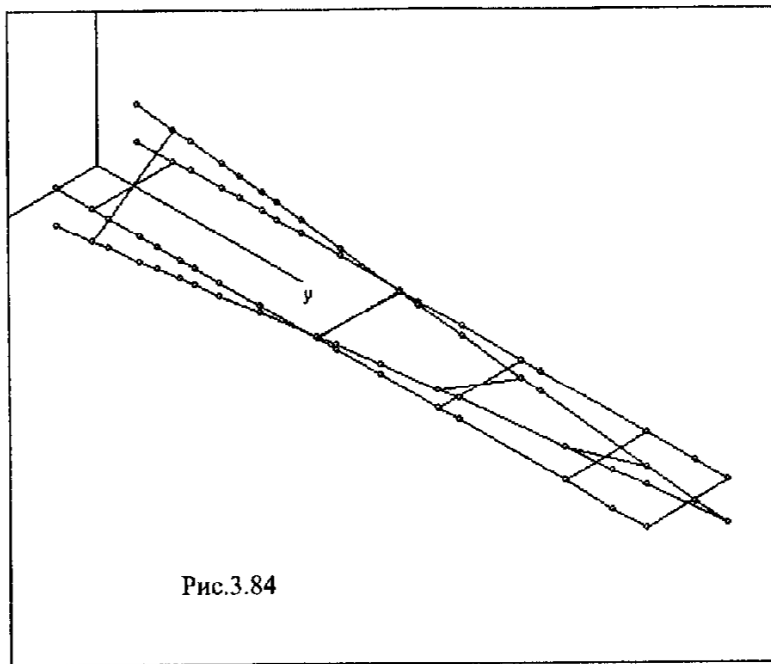
Характеристики сечений	Участки лонжерона					Поперечины				
	1	2	3	4	5	6	1,2	3	4	5
Площадь, $\text{см}^2$	10.8	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9
Момент инерции $I_k, \text{см}^4$	1.92	2.32	2.84	3.00	2.53	1.98	2.2	2.2	2.07	2.14
Момент инерции $I_b, \text{см}^4$	358	782	1490	1630	900	377	412	412	300	353

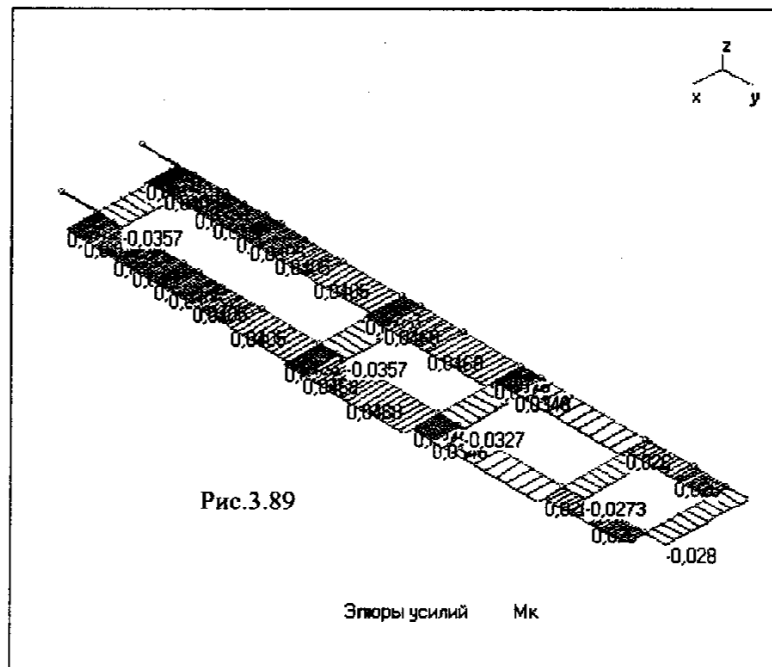
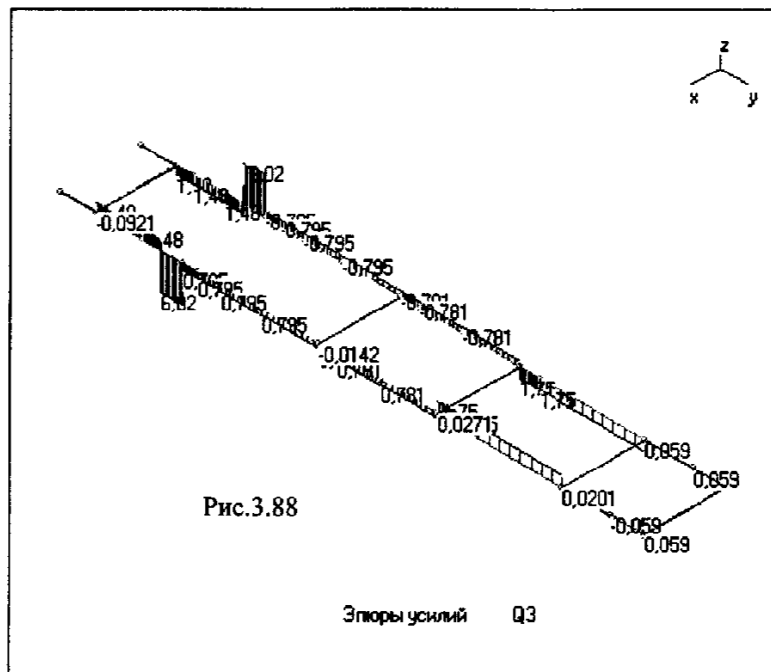
Лонжероны опираются на рессоры, жесткость которых в расчете принята равной  $400 \text{ кН/м}$ . Рама рассчитана на два варианта нагружения, показанные на рис.3.81 и 3.82. Суммарная нагрузка на лонжерон в каждом из вариантов нагружения составила  $30 \text{ кН}$ . В первом варианте нагружения рама испытывает симметричный относительно оси автомобиля изгиб, во втором – кручение. На рис.3.83 и 3.84 показаны деформированные схемы рамы для

первого и второго вариантов нагружения, соответственно, а на рис.3.85 – 3.89 приведены эпюры изгибающих и крутящих моментов, а также эпюры поперечных сил, построенные постпроцессором программы ПРИНС. При этом эпюры рис.3.85 и 3.86 относятся к первому варианту нагружения, а остальные – ко второму. Изгибающие моменты выражены на результирующих эпюрах в кНм, а поперечные силы – в кН.

Расчетная схема рамы содержит 42 узла, при этом матрица жесткости конструкции имеет порядок  $138 \times 138$ . Время решения на персональном компьютере с процессором Pentium II составило 27 сек. Полученные результаты дают возможность полностью исследовать напряженно-деформированное состояние рамы. Таким образом, метод перемещений при реализации его на ЭВМ является мощным средством расчета конструкций на прочность.







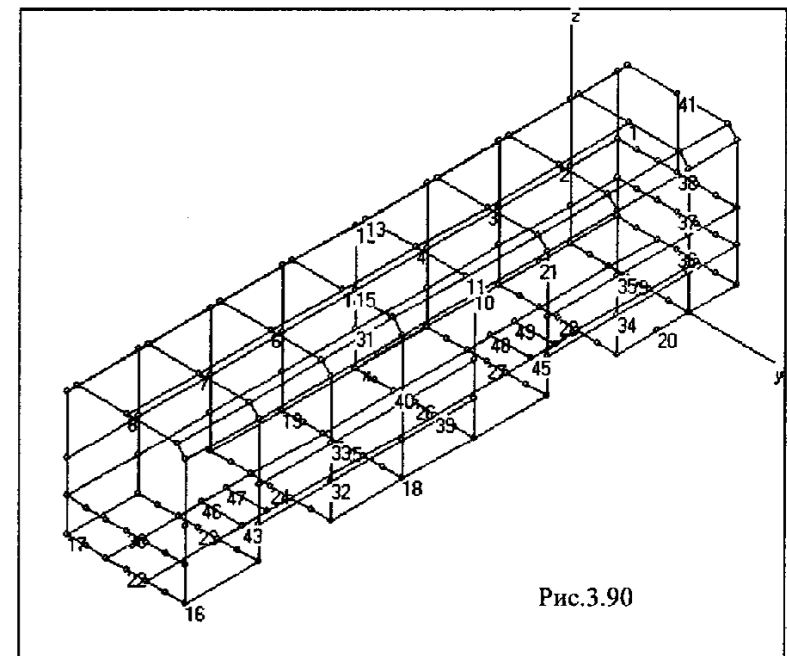
### 3.4.3. Расчет каркаса автобуса на ЭВМ

В качестве иллюстрации возможностей современных методов расчета и составленных на их основе программ приводим результаты расчета каркаса кузова автобуса по программе ПРИНС. Расчетная схема каркаса приведена на рис.3.90, а отдельные ее фрагменты – на рис.3.91 и 3.92. Каркас состоит из шпангоутов, лонжеронов и нервюр. Характеристики сечений элементов конструкции приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Характеристики сечений	Шпангоуты 1-9	Лонжероны 16-21	Нервюры
Площадь, см <sup>2</sup>	16.3	10.9	16.13
Момент инерции I <sub>к</sub> , см <sup>4</sup>	2.0	2.6	0.50
Момент инерции I <sub>л1</sub> , см <sup>4</sup>	136.6	174.0	23.1
Момент инерции I <sub>л2</sub> , см <sup>4</sup>	75.2	20.4	23.1

Расчет проводился на действие собственного веса, веса оборудования и пассажиров. На рис.3.94 и 3.95. Приведены некоторые из результатов, полученных по программе ПРИНС. При этом на рис.3.94 показана общая схема деформаций конструкции при действии суммарной нагрузки, а на рис. 3.95 приведена эпюра изгибающих моментов для шпангоутов. Аналогичные результаты могут быть выведены для всех остальных элементов конструкции. Эти результаты дают возможность полностью проанализировать прочность и жесткость конструкции и дать рекомендации по ее усилению и модернизации.



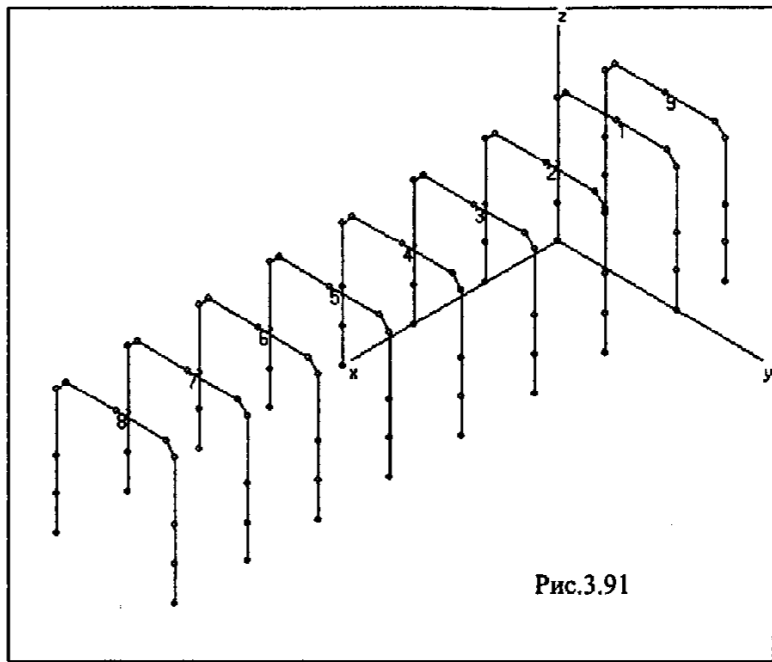


Рис.3.91

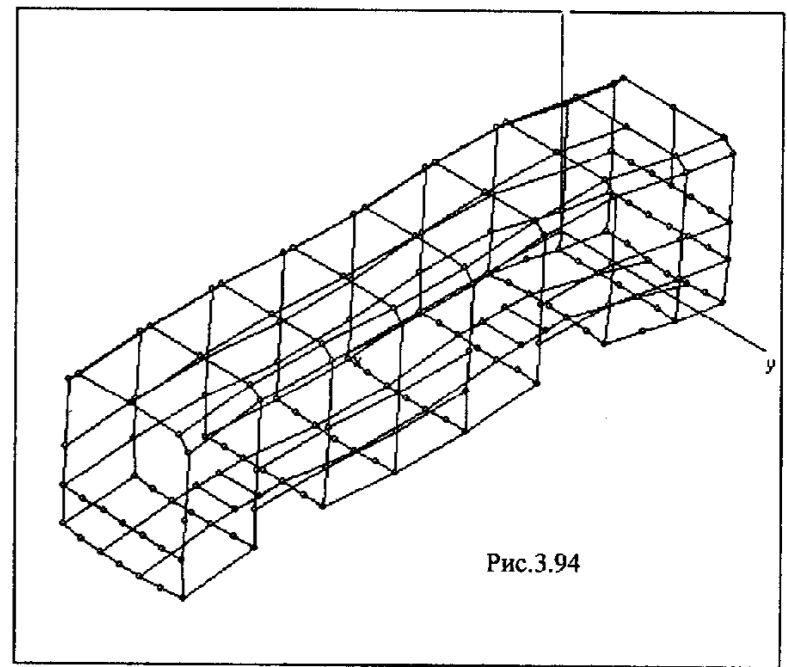


Рис.3.94

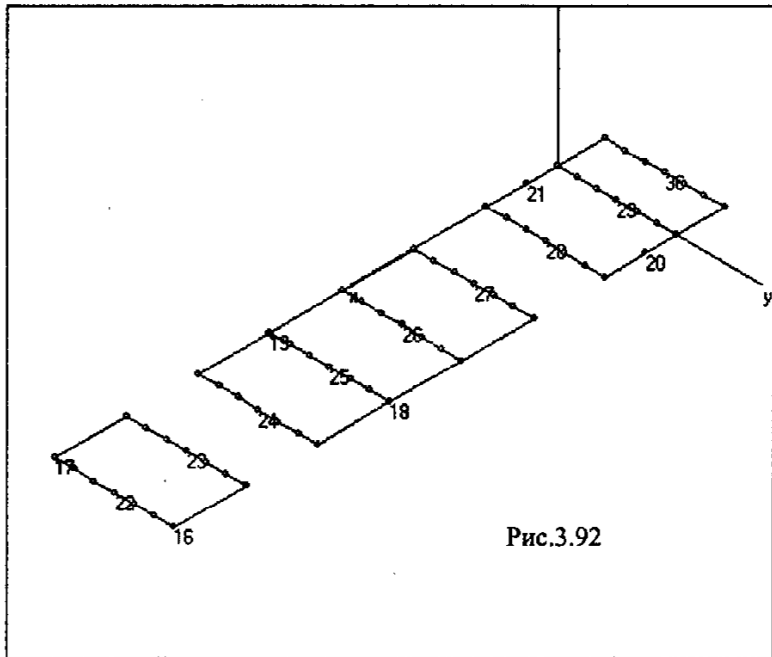


Рис.3.92

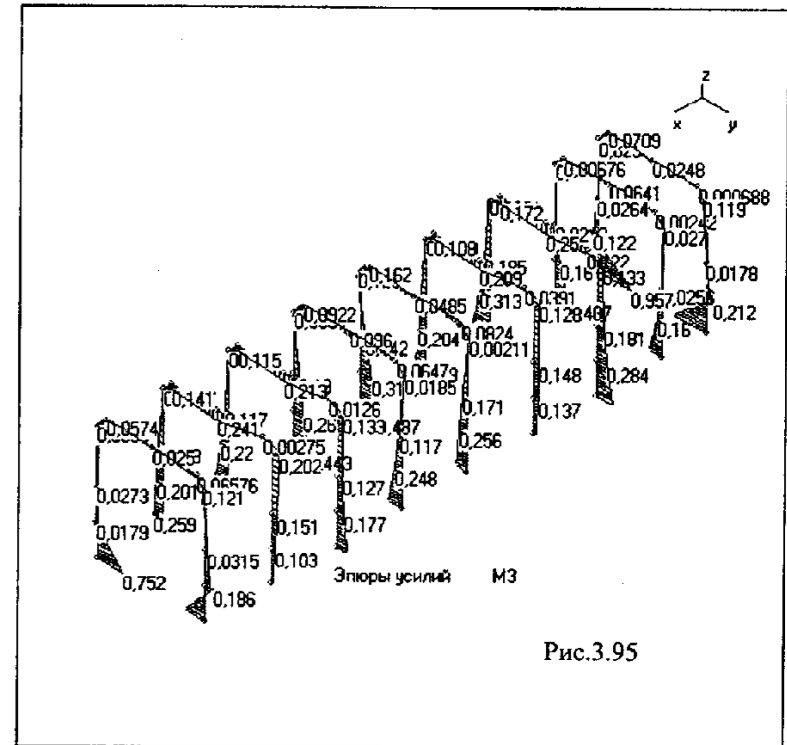


Рис.3.95



## РАСЧЕТ ДЕТАЛЕЙ И ЭЛЕМЕНТОВ АВТОТРАКТОРНОЙ ТЕХНИКИ, ОБЛАДАЮЩИХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

### 4.1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В КОЛЬЦЕВЫХ ДЕТАЛЯХ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

#### Осесимметричная деформация кольцевых деталей

Детали, имеющие форму колец, широко применяют в автотракторостроении. Примерами кольцевых деталей, нагруженных осесимметричной радиальной и осевой нагрузками, могут служить фланцы, нажимные втулки, ободы дисков и т. п. Кольца широко используют также в качестве подкрепляющих элементов тонкостенных конструкций. В этом случае они могут быть нагружены как осесимметричной нагрузкой, так и нагрузкой, вызывающей плоский или пространственный изгиб.

Рассмотрим деформацию кольцевых деталей, возникающую под действием радиальных и осевых сил или моментной нагрузки, равномерно распределенных по окружности. Такую деформацию можно представить как

растяжение кольца и осесимметричный изгиб, сопровождающийся поворотом поперечных сечений в их плоскости (кольцо растягивается и выворачивается).

Если кольцо не является тонкой пластиной или оболочкой, то его можно рассматривать как замкнутый кривой брус, поперечные сечения которого при нагружении не изменяют своей формы.

Примером кольцевой детали, испытывающей осесимметричную деформацию, может служить фланец, изображенный на рис. 4.1.

В основу рассматриваемой далее упрощенной теории осесимметричной деформации кольцевых деталей положены следующие допущения [11,24]:

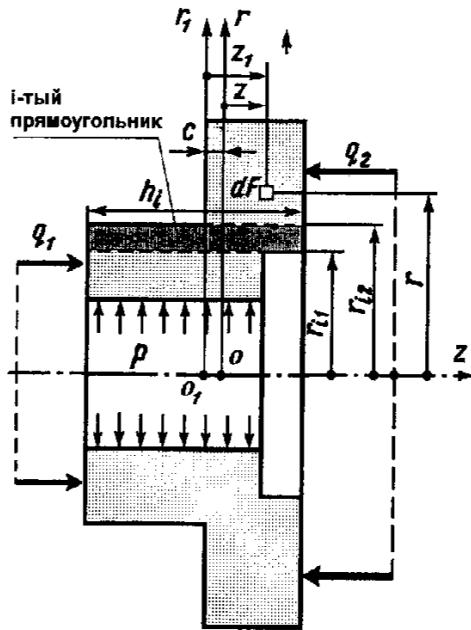


Рис.4.1.

1. Форма поперечного сечения кольца считается неизменной. Это означает, что расстояние между двумя произвольными точками сечения при деформации остается постоянным.

2. Предполагается, что напряженное состояние в любой точке кольца является одноосным. Кольцевые волокна, деформируясь в окружном направлении, не оказывают силового воздействия одно на другое.

При расчете будут использоваться следующие специальные геометрические характеристики поперечного сечения кольца:

$$I_1 = \int_A \frac{dA}{r}, \quad (4.1)$$

$$I_2 = \int_A z \frac{dA}{r}, \quad (4.2)$$

$$I_3 = \int_A z^2 \frac{dA}{r}, \quad (4.3)$$

где  $z$  и  $r$  — координаты произвольной точки сечения (см. рис. 4.1). Положение начала координат на оси  $z$  пока считаем произвольным.

Первый и третий интегралы всегда положительны; второй может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от положения начала координат.

Ось  $r$  будем называть главной осью сечения кольца (см. рис.4.1), если интеграл  $I_2$  равен нулю. Для определения положения главной оси выберем произвольную вспомогательную ось  $r_1$ . Расстояние между осями  $r_1$  и  $r$  обозначим через  $c$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \\ z = z_1 - c. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставим выражение (4.4) под знак интеграла (4.2), и, приравняв последний нулю, определим  $c$ :

$$c = \frac{\int_A z_1 \frac{dA}{r}}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{I_2(r_1)}{I_1}. \quad (4.5)$$

Для колец, имеющих плоскость симметрии  $c = 0$ , главная ось  $r$  совпадает с плоскостью симметрии. При вычислении интеграла  $I_3$  координата  $z$  всегда отсчитывается от главной оси  $r$ .

В некоторых случаях, однако, может оказаться более удобным вначале вычислить интеграл  $I_1(r_1)$  относительно вспомогательной оси  $r_1$ , а затем относительно главной оси  $r$ . Для этого следует воспользоваться зависимостью

$$I_3 = I_3(r_i) - I_1 c^2. \quad (4.6)$$

Отметим, что относительно главной оси  $r$  интеграл  $I_3$  имеет минимальное значение.

В отдельных случаях поперечное сечение можно разбить на  $n$  прямоугольников (см. рис. 4.1). Тогда интегралы  $I_1, I_2, I_3$  можно записать в виде сумм:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^n (z_{ib} - z_{ia}) \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}; \\ I_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{z_{ib}^2 - z_{ia}^2}{2} \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}; \\ I_3 &= \sum_{i=1}^n \frac{z_{ib}^3 - z_{ia}^3}{3} \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $z_{ia}$  и  $z_{ib}$  — абсциссы крайних точек при текущем значении координаты  $r$ ;  $r_{i1}$  и  $r_{i2}$  — внутренний и наружный радиусы  $i$ -того прямоугольника.

Если ввести обозначения:  $z_{ib} - z_{ia} = h_i$  — высота  $i$ -того прямоугольника;  $\frac{z_{ib} + z_{ia}}{2} = z_{ic}$  — абсцисса центра тяжести  $i$ -го прямоугольника, то формулы (4.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_1^n h_i \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}, \\ I_2 &= \sum_1^n h_i z_{icp} \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}, \\ I_3 &= \sum_1^n \left( \frac{h_i^3}{12} + h_i z_{icp}^2 \right) \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для сечения, состоящего из одного прямоугольника при условии, что ось  $r$  проходит через его центр,

$$I_1 = h \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad I_2 = 0; \quad I_3 = \frac{h^3}{12} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.9)$$

Перейдем к выводу основных зависимостей рассматриваемой теории. Рассмотрим осесимметричную деформацию колец в предположении малых перемещений.

При действии осесимметричной нагрузки в поперечных сечениях кольца возникают только нормальные напряжения. Эти напряжения могут

быть положительными или отрицательными. В точках нейтральной линии напряжения равны нулю.

Предположим, что точка  $C$  (рис. 4.2), находится на нейтральной линии. Тогда окружное напряжение и окружная деформация в этой точке равны нулю. Следовательно, радиус  $O_0C$  остается неизменным. Это позволяет рассматривать перемещение сечения кольца как поворот его относительно точки  $C$  на некоторый угол  $\varphi$ . Если угол  $\varphi$  мал, то можно считать, что все точки, лежащие на прямой  $O_0r_0$  перемещаются параллельно оси кольца. Следовательно, окружная деформация и напряжение в этих точках также равны нулю, т.е. линия  $O_0r_0$  — нейтральная линия.

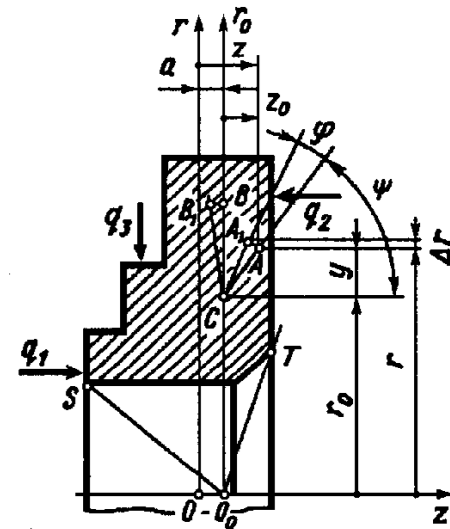


Рис.4.2

Заметим, что при малых перемещениях за центр поворота сечения может быть принята любая точка, принадлежащая нейтральной линии (например, точка  $B$ ). Действительно, если после поворота сечения вокруг точки  $C$  кольцо сместить как жесткое целое в направлении оси  $z$  на величину  $BB_1$ , то точка  $B$  займет положение, которое она занимала до деформации.

Рассмотрим теперь некоторую произвольную точку  $A$ , расположенную на расстоянии  $z_0$  от нейтральной линии. При повороте сечения эта точка переместится по дуге радиуса  $CA = \rho$  на расстояние  $AA_1 = \rho\varphi$ ; при этом она получит радиальное смещение

$$\Delta r = AA_1 \cos \psi = \rho\varphi \frac{z_0}{\rho} = \varphi z_0. \quad (4.10)$$

Относительная деформация кольцевого волокна составит

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\varphi z_0}{r}. \quad (4.11)$$

Соответственно, окружное нормальное напряжение

$$\sigma_r = E\varepsilon_r = E \frac{\varphi z_0}{r}. \quad (4.12)$$

Согласно зависимости (4.12), справа от нейтральной линии  $O_0r_0$ , т.е. при положительных значениях  $z_0$  напряжения положительны (растяжение), а

слева — отрицательны (сжатие). Вдоль лучей, проведенных из точки  $O_0$ , напряжения имеют постоянное значение, так как —  $z_0 r = const$ .

Для вычисления величины напряжения с помощью зависимости (4.12) необходимо знать положение нейтральной линии, от которой отсчитывают  $z_0$  и угол поворота сечения  $\varphi$ . Эти неизвестные определяют по внутренним силовым факторам в поперечном сечении кольца, т. е. по нормальной силе  $N$  и изгибающему моменту  $M$ . Последние, в свою очередь, связаны с внешней нагрузкой и могут быть найдены по уравнениям равновесия половины кольца (рис. 4.3).

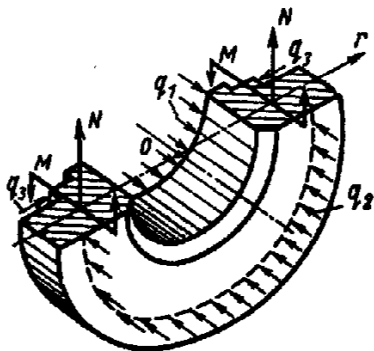


Рис.4.3 Внутренние силовые факторы, действующие в кольце.

Выразим силовые факторы через напряжения. За ось, к которой приводятся внутренние силы, примем главную ось сечения кольца. С учетом зависимости (4.12) получим

$$N = \int_A \sigma_r dA = E\varphi \int_A \frac{z_0}{r} dA, \quad (4.13)$$

$$M = \int_A z\sigma_r dA = E\varphi \int_A \frac{zz_0}{r} dA.$$

Расстояние между главной осью  $r$  (см. рис. 4.2) и нейтральной линией  $O_0r_0$  обозначим через  $a$ , тогда

$$z_0 = z - a, \quad (4.14)$$

и уравнения (4.13), принимают вид

$$N = E\varphi \left[ \int_A \frac{z dA}{r} - a \int_A \frac{dA}{r} \right]; \quad (4.15)$$

$$M = E\varphi \left[ \int_A \frac{z^2 dA}{r} - a \int_A \frac{z dA}{r} \right].$$

Используя введенные обозначения и полагая  $I_2=0$ , так как ось  $r$  — главная, получим

$$N = -\varphi E a I_1; \quad (4.16)$$

$$M = \varphi E I_3.$$

Отсюда угол поворота сечения

$$\varphi = \frac{M}{E I_3} \quad (4.17)$$

и расстояние до нейтральной линии

$$a = -\frac{N}{E I_1 \varphi} = -\frac{N I_3}{M I_1}. \quad (4.18)$$

Для того чтобы выразить напряжения через внутренние факторы, подставим выражения (4.14), (4.17) и (4.18) в (4.12), в результате получим:

$$\sigma_r = \frac{N}{r I_1} + \frac{M z}{r I_3}. \quad (4.19)$$

Первое слагаемое в этой формуле учитывает растяжение; второе — изгиб кольца. Если растягивающая сила  $N$  равна нулю, то в кольце возникает только изгиб; в этом случае, согласно зависимости (4.19),  $a = 0$ , т. е. нейтральная линия совпадает с главной осью сечения. Если же изгибающий момент  $M$  равен нулю, а  $N$  не равно нулю, то нейтральная линия уходит в бесконечность; второе слагаемое в формуле (4.19) обращается в нуль и, следовательно, напряжение  $\sigma$  от координаты  $z$  не зависит.

Практически важный случай соотношений получается для колец малой кривизны, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом. Приближенно считаем, что радиус  $r$  является постоянным и равным  $r_{cp}$ , для всех точек сечения. Вынося  $r_{cp}$  за знак интегралов  $I_1$  и  $I_3$  из уравнения (4.19), получим:

$$\sigma_r = \frac{N}{A} + \frac{M z}{I_r} \quad (4.20)$$

где  $I_r = \int_A z^2 dA$  — осевой момент инерции сечения относительно оси  $r$ ;

$A$  — площадь сечения.

Формула (4.20) представляет собой известную формулу для вычисления напряжения в бруске малой кривизны при совместном растяжении и изгибе. Угол поворота сечения  $\varphi$  в этом случае определяется выражением

$$\varphi = \frac{Mr_{\sigma}}{EI_r} \quad (4.21)$$

Определим положение наиболее напряженных точек сечения. Согласно зависимости (4.12), наиболее напряженной будет та точка, для которой отношение  $z_0/r$  имеет максимальное значение. Это отношение представляет собой тангенс угла, заключенного между лучом  $O_0S$  (см. рис. 4.2) и радиусом. Следовательно, для определения положения наиболее напряженной точки надо провести на чертеже нейтральную линию. Затем из точки ее пересечения с осью  $z$  (точка  $O_0$  на рис. 4.2) провести лучи, касающиеся контура сечения. Точки касания ( $S$  и  $T$ ) и будут самыми напряженными. Подставив координаты этих точек в уравнение (4.19), получим значения максимальных напряжений.

### Пример.

Определить напряжения во втулке, поперечное сечение которой изображено на рис. 4.4. Втулка нагружена осевой силой  $F=6 \times 10^4$  Н и внутренним давлением  $p=1,2$  МПа

Дано:

$E = 2 \times 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $r_{11} = 30$  мм,  $r_{12} = r_{21} = 50$  мм;  $r_{22} = 80$  мм;  $h_1 = 60$  мм;  $h_2 = 25$  мм;  $R_1 = 40$  мм,  $R_2 = 65$  мм.

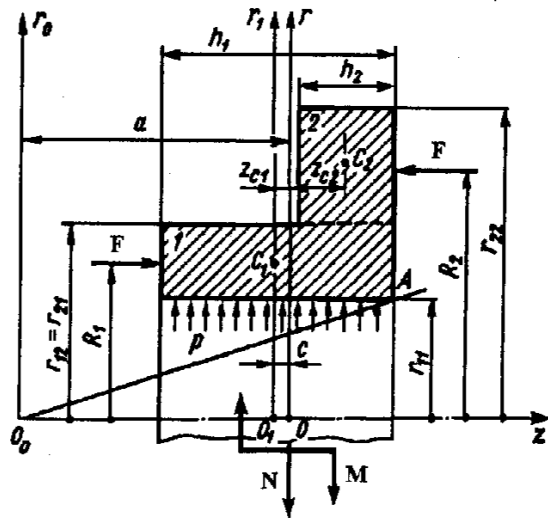


Рис.4.4

Вычислим геометрические характеристики сечения. Разбив сечение на два прямоугольника, проведем вспомогательную ось  $r_1$  через центр первого прямоугольника  $C_1$ .

По формулам (4.8) вычислим  $I_1$  и  $I_2$  и расстояние  $c$  между осью  $r_1$  и главной осью  $r$ .

$$I_1 = h_1 \ln \frac{r_{12}}{r_{11}} + h_2 \ln \frac{r_{22}}{r_{21}} = 60 \ln \frac{5}{3} + 25 \ln \frac{5}{5} = 42,5 \text{ мм}^3$$

$$I_2 = h_1 z_{c_1}^{(r_1)} \ln \frac{r_{12}}{r_{11}} + h_2 z_{c_2}^{(r_1)} \ln \frac{r_{22}}{r_{21}} = 0 + 25 \cdot 17,5 \ln \frac{8}{5} = 205,6 \text{ мм}^2$$

$$c = \frac{I_2^{(r_1)}}{I_1} = 4,85 \text{ мм}$$

По формуле (4.8) вычислим  $I_3$  относительно главной оси

$$I_3 = \left( \frac{h_1^3}{12} + h_1 z_{c_1}^2 \right) \ln \frac{r_{12}}{r_{11}} + \left( \frac{h_2^3}{12} + h_2 z_{c_2}^2 \right) \ln \frac{r_{22}}{r_{21}} = 12 \,410 \text{ мм}^3,$$

где

$$z_{c_1} = z_{c_1}^{(r_1)} - c = 12,65 \text{ мм}; \quad z_{c_2} = z_{c_2}^{(r_1)} - c = -4,85 \text{ мм}.$$

Определим внутренние силовые факторы в поперечном сечении. По уравнению проекций всех сил на нормаль к сечению найдем силу  $N$ :

$$N = pr_1 h_1 = 2,16 \times 10^4 \text{ Н}$$

и по уравнению моментов относительно оси, проходящей через точку  $O$ , момент  $M$ :

$$M = \frac{F(R_2 - R_1)}{2\pi} - pr_1 h_1 c = 1,342 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

По формуле (4.18) вычисляем расстояние до нейтральной линии

$$a = -\frac{NI_3}{MI_1} = -48 \text{ мм}$$

Проведя на чертеже (рис. 4.4) нейтральную линию  $O_0 r_0$ , увидим, что сечение втулки расположено целиком по одну сторону от нее. Следовательно, во всех точках сечения действуют напряжения одинакового знака (растяжение). Наибольшее напряжение возникает в точке  $A$ , для которой угол наклона луча, проведенного из точки  $O_0$ , наибольший. Координаты точки  $A$  относительно главных осей:  $z_A = 25,15$  мм;  $r_A = 30$  мм.

Максимальное напряжение составит:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{I_1 r_A} + \frac{M z_A}{I_3 r_A} = 26,1 \text{ МПа}$$

Радиальное перемещение точек поперечного сечения  $u$  может быть вычислено по углу поворота сечения  $\varphi$ :

$$u = \varphi z_0$$

или, по окружной деформации

$$u = \varepsilon_r r = \frac{\sigma_r}{E} r.$$

В данном примере перемещение точки  $u_A$  составит:

$$u_A = \frac{\sigma_A}{E} r_A = 3,9 \times 10^{-3} \text{ мм.}$$

## 4.2. ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫЕ ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

### 4.2.1. Расчет толстостенных цилиндров. Задача Ламе

Многие ответственные элементы автотракторной техники могут рассматриваться как полые цилиндры, работающие при действии внутреннего или внешнего давления (толстостенные трубы, цилиндрические сосуды высокого давления, валы и втулки при наличии прессовых посадок и т. д.). Цилиндр следует считать толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра. При расчете тонкостенных цилиндрических оболочек предполагается, что в окружном направлении напряжения постоянны по толщине стенки, а в радиальном пренебрежимо малы. Такие допущения для толстостенных цилиндров неприемлемы.

Рассмотрим круговой цилиндр при осесимметричном, постоянном по длине нагружении и постоянной температуре (рис. 4.5).

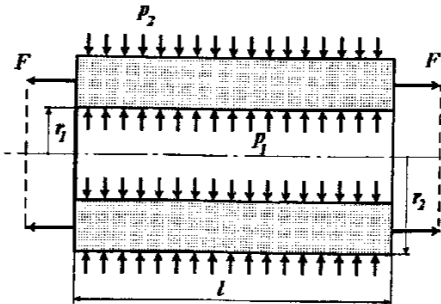


Рис.4.5

Внутренний радиус равен  $r_1$  и наружный -  $r_2$ . Длина цилиндра  $l$  существенно больше его радиусов. Цилиндр подвержен действию внутреннего давления  $p_1$ , наружного  $p_2$  и растягивается вдоль оси постоянной силой  $F$ .

При указанных условиях поперечные сечения цилиндра остаются плоскими. Искажения, которые могут возникнуть только возле торцов, занимают по принципу Сен-Венана небольшие области, и ими в рассматриваемой модели пренебрегаем. Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации также симметричны относительно его оси.

Выделим элемент цилиндра двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстояние  $dz$ , двумя цилиндрическими поверхностями радиусами  $r$  и  $r + dr$  и, наконец, двумя меридиональными плоскостями, составляющими угол  $d\varphi$  (рис. 4.6).

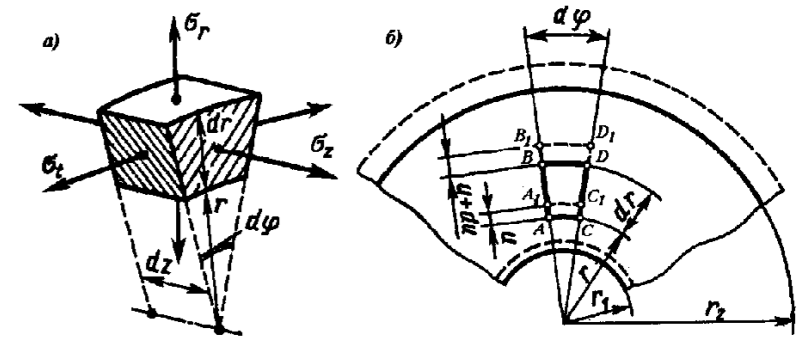


Рис. 4.6.

По граням этого элемента будут действовать: радиальное  $\sigma_r$ , окружное  $\sigma_\varphi$  и осевое  $\sigma_z$  напряжения (рис 4.6,а). В силу осевой симметрии и постоянства нагрузки вдоль оси эти напряжения будут главными, т.е. касательные напряжения в указанных гранях отсутствуют. Для определения деформации в радиальном направлении рассмотрим отрезок АВ длиной  $dr$ . В деформированном состоянии длина отрезка изменится на величину  $du$  (см. рис. 4.6,б). Величина деформации в радиальном направлении будет равна:

$$\varepsilon_r = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{dr + u + du - dr - u}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (4.22)$$

Для определения деформации в окружном направлении рассмотрим изменение длины дуги АС. Тогда

$$\varepsilon_\varphi = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \frac{(r + u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (4.23)$$

Формулы (4.22) и (4.23) выражают деформации в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  при осесимметричном нагружении.

Выражение для осевой деформации  $\varepsilon_z$ , имеет такой же вид, как и при одноосном растяжении-сжатии

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.24)$$

где  $w$  — перемещение в направлении оси  $z$ . Поскольку поперечное сечение и нагрузка постоянны по длине трубы, величина осевой деформации также является постоянной величиной.

Исключив из равенств (4.22) и (4.23) перемещение  $w$ , получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{d(\epsilon_r)}{dr} - \epsilon_r = 0. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) является уравнением неразрывности для рассматриваемой задачи.

### Уравнения равновесия элемента цилиндра

На рис. 4.7 представлены элемент цилиндра и действующие на него усилия.

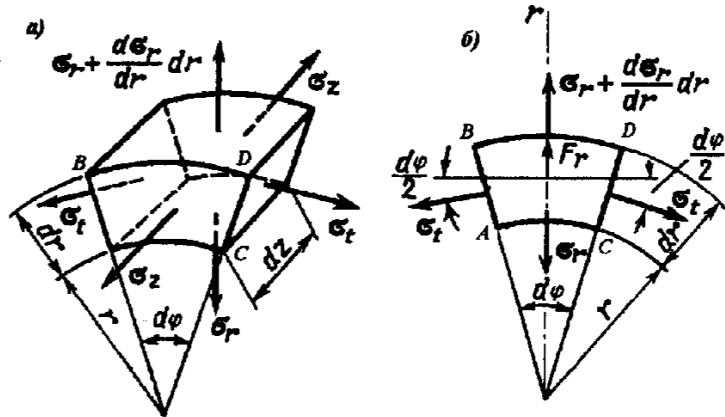


Рис.4.7

По граням элемента приложены напряжения:  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  и  $\sigma_z$ , зависящие от радиуса  $r$ ; по  $\varphi$  и  $z$  напряжения постоянны. Окружное напряжение  $\sigma_t$  одинаково на двух противоположных гранях, составляющих угол  $d\varphi$ , так как оно не зависит от угла  $\varphi$ . Постоянным на гранях элемента оказывается и напряжение  $\sigma_z$ , так как напряжения не изменяются по координате  $z$ . Различными по величине могут быть только радиальные напряжения.

Рассмотрим уравнение равновесия сил в радиальном направлении. На рис. 4.7,б показана проекция элемента на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра (оси  $z$ ). Проектируя все силы на ось  $r$ , проходящую через центр тяжести элемента, пренебрегая величинами высшего порядка малости и учитывая равенство

$$\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2},$$

получаем:

$$\sigma_r dr d\varphi dz + d\sigma_r r d\varphi dz - \sigma_r dr d\varphi dz = 0.$$

Преобразуя, получаем дифференциальное уравнение равновесия для бесконечно малого элемента цилиндра

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0. \quad (4.26)$$

Отметим, что два других уравнения равновесия, а именно, уравнения проекций сил на направление, перпендикулярное  $r$ , и на ось  $z$  выполняются тождественно в силу условий симметрии задачи.

### Физические соотношения

В случае изотропного линейно-упругого материала, подчиняющегося закону Гука, будем иметь следующие соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)] \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Будем считать, что напряжение  $\sigma_z$  может быть вычислено независимо из условий равновесия на ось  $z$ :

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (4.28)$$

Из соотношений (4.27) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu\epsilon_t) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_t + \nu\epsilon_r) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Выразим напряжение  $\sigma_z$ , используя (4.27) и (4.29):

$$\sigma_z = \epsilon_z E + \nu\sigma_r + \nu\sigma_t. \quad (4.30)$$

Подставив выражения (4.27) в уравнение совместности деформаций (4.25) и проведя несложные преобразования, получим уравнение совместности деформаций в напряжениях:

$$r \frac{d\sigma_t}{dr} + \sigma_t - \sigma_r = 0. \quad (4.31)$$

Уравнения (4.26) и (4.30) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными. Используя (4.26), выразим  $\sigma_t$ :

$$\sigma_t = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \quad (4.32)$$

Подставив полученное выражение в (4.10), получаем:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (4.33)$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}. \quad (4.34)$$

Для напряжения  $\sigma_t$ , принимая во внимание (4.34) и (4.32) получаем:

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \quad (4.35)$$

Радиальное перемещение произвольной точки цилиндра можно определить, используя соотношение (4.23):

$$u = \varepsilon_r r = \frac{r}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r - \nu). \quad (4.36)$$

С учетом (4.34) и (4.35):

$$u = \frac{1}{E} \left[ C_1 (1 - \nu) r + C_2 (1 + \nu) \frac{1}{r} - \nu \sigma_z r \right]. \quad (4.37)$$

Содержащиеся в формулах (4.34), (4.35) и (4.37) постоянные интегрирования находят из граничных условий. Для рассматриваемого случая (рис. 4.5) граничные условия запишутся в виде:

- 1) при  $r = r_1$   $\sigma_r = -p_1$ ;
- 2) при  $r = r_2$   $\sigma_r = -p_2$

Подставляя граничные условия в выражение (4.34) получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 - \frac{C_2}{r_1} &= -p_1 \\ C_1 + \frac{C_2}{r_2} &= -p_2 \end{aligned} \right\}$$

решая которую, находим:

$$C_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad C_2 = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4.38)$$

После подстановки постоянных в (4.34) и (4.35) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}, \\ \sigma_t &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Выражение для радиального перемещения (4.37) получает вид:

$$u = \frac{1 - \nu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\nu \sigma_z r}{E}. \quad (4.40)$$

Формулы (4.39), (4.40) известны под названием формул Ламе.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся частные случаи нагружения толстостенных цилиндров.

1. Цилиндр с днищами нагружен только внутренним давлением  $p_1 = p$ . В этом случае, согласно формулам (4.28) и (4.39)

$$\sigma_r = p \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_t = p \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right), \quad \sigma_z = p \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Эпюры распределения напряжений по радиусу приведены на рис. 4.8. Наиболее напряженная точка находится на внутренней поверхности этой точке

$$\sigma_r = -p = \sigma_3; \quad \sigma_t = p \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_1; \quad \sigma_z = p \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_2.$$

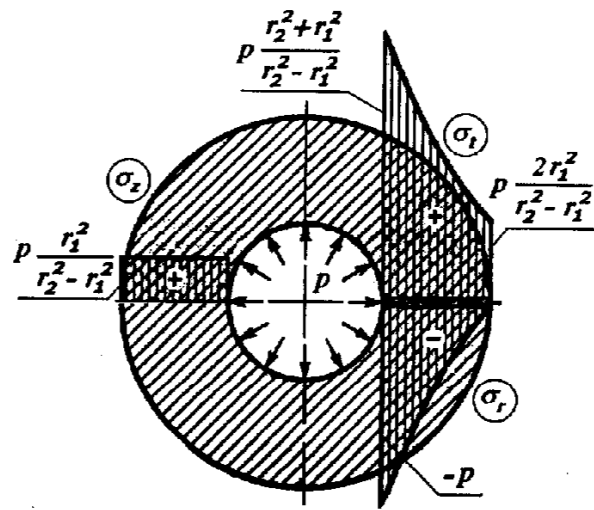


Рис. 4.8

Эквивалентное напряжение, подсчитанное по энергетической теории прочности, равно

$$\sigma_{\text{эке}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = p \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.41)$$

Эквивалентное напряжение, подсчитанное по теории наибольших касательных напряжений, составляет:

$$\sigma_{\text{эке}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + p = p \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.42)$$

2. Цилиндр с днищами нагружен только внешним давлением  $p_2 = p$ .  
В этом случае, согласно формулам (4.28) и (4.39),

$$\sigma_r = -p \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = -p \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_z = -p \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

- 4.9. Эпюры распределения напряжений по радиусу приведены на рис.

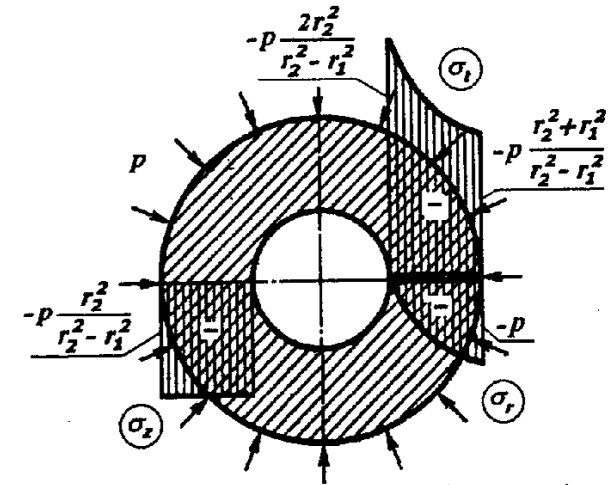


Рис. 4.9

Наиболее напряженная точка находится на внутренней поверхности. В этой точке

$$\sigma_r = 0 = \sigma_1; \quad \sigma_t = -p \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_3; \quad \sigma_z = -p \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \sigma_2.$$

Эквивалентное напряжение, подсчитанное по теории наибольших касательных напряжений, составляет

$$\sigma_{\text{эке}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.43)$$

#### 4.2.2. Расчет и проектирование составных труб

Иследуем, каким образом можно увеличить предельное внутреннее давление в трубе.

Эквивалентное напряжение в наиболее опасных внутренних точках трубы не должно превышать допускаемого напряжения для данного материала

$$\sigma_{\text{эке}} = p \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \leq [\sigma] \quad (4.44)$$



Проанализируем, как зависит величина эквивалентного напряжения и вес трубы от отношения радиусов  $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$ . Поскольку анализ удобно проводить в безразмерных величинах, охарактеризуем вес трубы с помощью отношения площади поперечного сечения к площади отверстия

$$\beta = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\pi r_1^2} = \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.45)$$

В табл. 4.1 представлены значения величин  $\sigma_{эке}$  и  $\beta$  в зависимости от параметра  $\alpha$ .

Таблица 4.1

$\alpha$	1	1,5	2	3	5	10	$\infty$
$\beta$	0	1,25	3	8	24	99	$\infty$
$\sigma_{эке}/p$	$\infty$	3,4	2,67	2,25	2,083	2,02	2

Как видно, увеличение толщины трубы эффективно примерно до значения  $\alpha \approx 3$ , затем увеличение толщины трубы практически не приводит к повышению прочности, в то время как количество материала, необходимого для изготовления трубы, возрастает значительно.

Если в толстостенном сосуде надо удержать высокое давление, необходимо, чтобы предел текучести материала был бы, по крайней мере, в два раза большим, чем величина давления. Следовательно, для сосудов высокого давления необходимо использовать другие конструктивные решения. Одним из таких решений является создание составных труб, соединенных с натягом.

Этот прием используется как в технике высоких давлений, так и в артиллерийской практике для упрочнения стволов мощных орудий.

Положим, мы имеем два цилиндра (рис. 4.10). Предполагаем, что оба цилиндра изготовлены из одного материала. Внутренний радиус первого цилиндра обозначим через  $a$ , а внешний — через  $c$ . У второго цилиндра внутренний радиус на величину  $\frac{\Delta}{2}$  меньше наружного радиуса первого цилиндра. Величину  $\Delta$  называют диаметральной натягом. Внешний радиус второго цилиндра равен  $c$ . Чтобы соединить цилиндры,

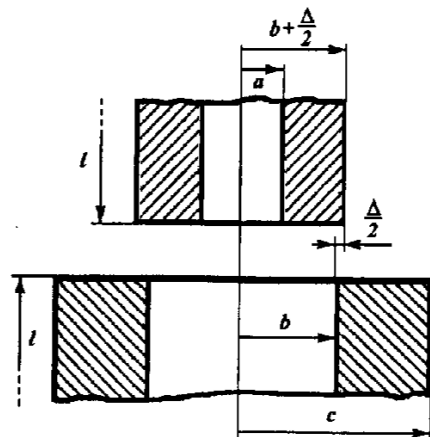


Рис. 4.10

соединить цилиндры, наружный цилиндр обычно нагревают; при этом он расширяется и его можно надеть на внутренний цилиндр. После остывания наружный цилиндр плотно с натягом охватывает внутренний цилиндр и между цилиндрами возникает контактное давление  $p_k$ . При одинаковой длине цилиндров  $l$  контактное давление равномерно распределяется по посадочной поверхности. Величина  $p_k$  может быть определена из уравнения совместности деформаций. При посадке внешний радиус внутреннего цилиндра уменьшается, и точки цилиндра на контактной поверхности получают отрицательное смещение  $u_1$ . Внутренний радиус внешнего цилиндра увеличивается и точки получают положительное смещение  $u_2$ . Уравнение совместности перемещений запишется в виде:

$$-u_1 + u_2 = \frac{1}{2} \Delta. \quad (4.45)$$

Величины смещений можно записать, используя формулу (4.40), полагая для внутреннего цилиндра  $p_1 = 0, p_2 = -p_k$  и для наружного цилиндра  $p_1 = -p_k, p_2 = 0$ .

$$u_1 = -p_k \frac{b}{E} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) \quad (4.46)$$

$$u_2 = p_k \frac{b}{E} \left( \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu \right)$$

Подставив выражения (4.45) в (4.44) и решив его относительно контактного давления  $p_k$ , получим:

$$p_k = \frac{E \cdot \Delta}{2b \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} \right)} = \frac{E \Delta (c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{4b^3 (c^2 - a^2)}. \quad (4.47)$$

Остановимся на особенностях напряженно-деформированного состояния в цилиндрах, составленных из двух и более труб, посаженных один на другой с натягом. За счет натяга в составном цилиндре возникают начальные напряжения, характер распределения которых по поперечному сечению показан на рис. 4.11, а. При этом в наружном цилиндре возникает растягивающее окружное напряжение, а во внутреннем — сжимающее. При приложении внутреннего рабочего давления на начальные напряжения накладываются рабочие напряжения (рис. 4.11, б), в результате получают суммарные напряжения (рис. 4.11, в). В точках, расположенных на внутренней поверхности составного цилиндра, суммарное окружное напряжение получается меньше, чем в тех же точках целого цилиндра, в то время как в наружных точках окружные напряжения, наоборот, возрастают.

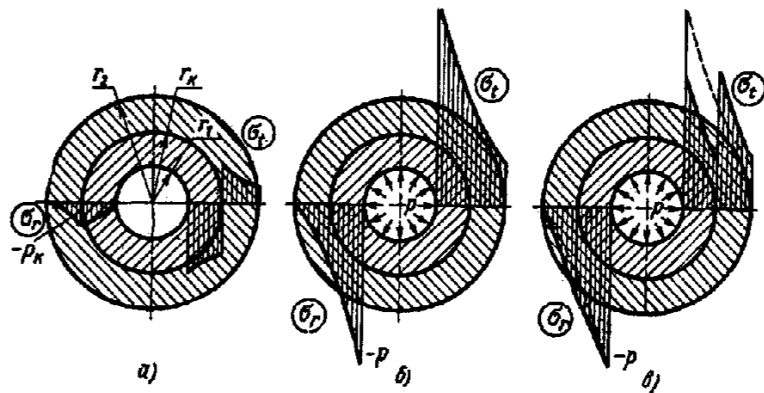


Рис.4.11

Оптимальное значение контактного давления  $p_k$  и соответствующего ему натяга  $\Delta$  можно определить из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндра, а оптимальное значение радиуса контактной поверхности — из условия наибольшего снижения эквивалентного напряжения в опасной точке.

Согласно этим условиям, оптимальный радиус контактной поверхности

$$r_k = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (4.48)$$

Оптимальная величина контактного давления при выполнении условия (4.47)

$$p_k = \frac{p}{2} \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (4.49)$$

Натяг, соответствующий этому давлению:

$$\Delta = \frac{2 p r_k}{E}. \quad (4.50)$$

Минимальное эквивалентное напряжение в этом случае составит

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{min}} = p \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \quad (4.51)$$

Полученные соотношения носят название условий А.В.Гадолина, по имени русского ученого, впервые их получившего.

### 4.3. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКАХ

#### 4.3.1. Напряжения в дисках при неравномерном нагреве

Вращающиеся диски являются ответственными элементами силовых и энергетических установок автотракторной техники [9, 10, 11]. Прочность и долговечность дисков определяют возможность получения хороших параметров работы машин, обеспечивают необходимый срок их службы. Критериями оценки конструкций дисков являются коэффициенты запасов по различным параметрам, определяющим их напряженность, деформативность, несущую способность и долговечность. Расчет долговечности должен быть основан на точной оценке напряжений и деформаций, учете концентрации напряжений, знании свойств материала в аналогичных условиях нагружения и использовании современных представлений о накоплении повреждений.

Развитие вычислительной техники и внедрение современных методов расчета (метод конечных элементов, метод граничных элементов и т.д.) позволяет производить численные расчеты дисков сложной конфигурации, не используя при этом дополнительных упрощений. Однако замкнутые аналитические решения для частных задач расчета дисков, рассматриваемые в данном разделе, необходимы для контроля расчетов, упрощенных оценок и обоснования результатов, получаемых при использовании численных методов.

#### Основные гипотезы и упрощения

Основными нагрузками, действующими на вращающиеся диски, являются центробежные силы. Определение напряжений и деформаций от центробежных сил — главный этап расчета дисков на прочность. К возникновению напряжений приводит также и неравномерный нагрев, причем температурные напряжения могут оказаться весьма существенными, особенно при нестационарных режимах работы машин. Равномерно нагретые по толщине, симметричные относительно плоской срединной поверхности диски достаточно рассчитывать только на растяжение.

Для дисков сложной формы с изогнутой срединной поверхностью при неравномерном нагреве по толщине или осевых нагрузках и моментах при расчетах следует учитывать изгиб. Имеют место также напряжения концентрического кручения, за счет передаваемого диском крутящего момента. Однако, как правило, напряжения изгиба и кручения могут быть определены независимо от напряжений растяжения и имеют второстепенное значение. Поэтому эти напряжения в настоящей главе не рассматриваются.

При вращении и неравномерном нагреве в дисках возникают окружные и радиальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ . На рис. 4.12 изображены диски, используемые в машинах различного типа. Эти диски могут быть сплошными (рис. 4.12, а) или с центральным отверстием (рис. 4.12, б и в). Толщина дис-

ков  $h$  обычно бывает переменной по радиусу. По наружной поверхности эти диски нагружены напряжением  $\sigma_m$ , создаваемым центробежными силами рабочих лопаток и узлов их крепления. По внутренней поверхности диска с центральным отверстием действует контактное давление  $p_k$  от напряженной посадки на вал. Кроме того, по всему объему диска действуют массовые силы инерции, возникающие при его вращении.

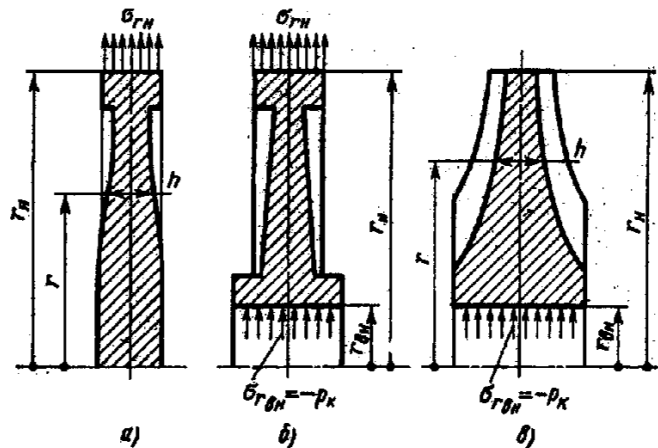


Рис.4.12

При рассмотрении равновесия диска следует, согласно принципу Даламбера, учесть силы инерции. При вращении диска все его точки испытывают центростремительное ускорение. Следовательно, силы инерции направлены по радиусу от центра. Интенсивность сил инерции  $q$  равна произведению плотности материала на центростремительное ускорение

$$q = \rho \omega^2 r, \quad (4.52)$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

Температурные напряжения в диске зависят от поля распределения температур, определяемого в каждом конкретном случае посредством анализа теплового режима работы диска. При значительном перепаде температур следует учитывать зависимость от температуры модуля упругости и характеристик прочности материала. Так, например, при повышении температуры от 20 до 500°C модуль упругости стали снижается приблизительно на 40%.

Инженерная теория расчета дисков [9,11] основана на следующих основных допущениях:

1. Нормальные напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости диска, считаются равными нулю, т.е., напряженное состояние в диске предполагается плоским (двухосным).

2. Температура  $T$ , а также напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  считаются постоянными по толщине диска и являются функциями только текущего радиуса  $r$ .

Основные исходные уравнения для вращающихся неравномерно нагруженных дисков аналогичны соответствующим уравнениям для толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним и внешним давлениями. В частности, остаются в силе выражения деформаций  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_t$  через радиальное перемещение  $u$  (4.22, 4.23)

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}$$

и уравнение совместности деформаций

$$\frac{d(\epsilon_t r)}{dr} - \epsilon_r = 0. \quad (4.53)$$

С учетом нагрева зависимости закона Гука для двухосного напряженного состояния можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_t) + \theta; \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r) + \theta, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где  $\theta = \alpha(t - t_0)$  — температурная деформация.

Подставив выражения (4.54) в уравнение (4.53), получим уравнение совместности деформации в напряжениях:

$$r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r) \right] + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_t - \sigma_r) + r \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (4.55)$$

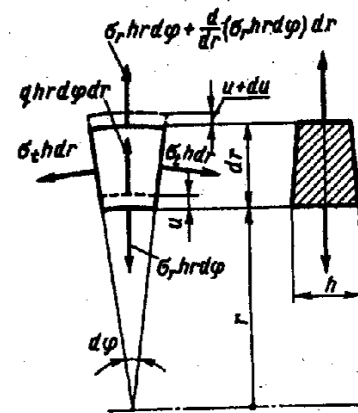


Рис. 4.13

Второе уравнение с неизвестными  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  составляется на основании условий равновесия. Выделив бесконечно малый элемент объема диска (рис. 4.13) и приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление радиуса, получим

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_t h + q r h = 0. \quad (4.56)$$

Уравнения (4.55) и (4.56) представляют собой разрешающие уравнения вращающихся неравномерно нагруженных дисков.

Для некоторых частных случаях эти уравнения удастся проинтегрировать аналитически. В общем случае уравнения решаются численными методами на ЭВМ.

#### 4.3.2. Вращающиеся неравномерно нагретые диски постоянной толщины

При  $h = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$  и  $\nu = \text{const}$  уравнения (4.54) и (4.55) упрощаются и принимают вид:

$$r \frac{d}{dr} (\sigma_t - \nu \sigma_r) + (1 + \nu) (\sigma_t - \sigma_r) + Er \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r r) - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2 = 0. \quad (4.58)$$

Из уравнения (4.58) найдем  $\sigma_t$ :

$$\sigma_t = \frac{d}{dr} (\sigma_r r) + \rho \omega^2 r^2. \quad (4.59)$$

Подставив найденное значение в (4.57), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\sigma_r$ :

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = -(3 + \nu) \rho \omega^2 r - E \frac{d\theta}{dr}. \quad (4.60)$$

Используя тождество

$$r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\sigma_r r^2) \right], \quad (4.61)$$

запишем уравнение (4.60) в виде

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\sigma_r r^2) \right] = -(3 + \nu) \rho \omega^2 r - E \frac{d\theta}{dr}. \quad (4.62)$$

Проинтегрировав уравнение (4.62) дважды, получим

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 - \frac{E}{r^2} \int \tilde{r} \theta d\tilde{r}. \quad (4.63)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования. В стоящем в правой части температурном интеграле независимая переменная изменяется в пределах  $r_1 \leq \tilde{r} \leq r$ . Поскольку выбор нижнего предела интегрирования влияет только на величину констант  $A$  и  $B$ , целесообразно принять его равным внутреннему радиусу диска. В этом случае температурный интеграл при  $r = r_1$  обращается в нуль и запись граничных условий упрощается.

Напряжение  $\sigma_t$  определяется по соотношению (4.58), которое при подстановке в него выражения (4.62) принимает вид

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{(1 + 3\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 + \frac{E}{r^2} \int \tilde{r} \theta d\tilde{r} - E \theta. \quad (4.64)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  в каждом частном случае определяются по граничным условиям на наружной и внутренней поверхностях или в центре диска.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) *Сплошной вращающийся диск (без центрального отверстия) постоянной толщины; неравномерный нагрев отсутствует (рис. 4.14).*

Граничные условия:

в центре диска при  $r = 0$ , на основании симметрии,  $\sigma_r = \sigma_t$ ;

на наружной поверхности при  $r = r_2$ ,  $\sigma_r = 0$ .

По формулам (4.63), (4.64) с учетом  $\theta = 0$  и  $T = 0$  находим:

$$B = 0;$$

$$A = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 r_2^2.$$

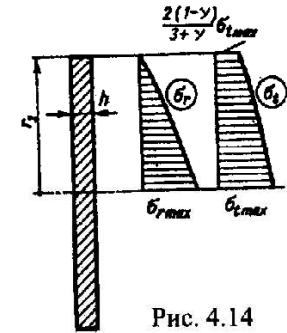


Рис. 4.14

Формулы для напряжений в этом случае принимают вид

$$\sigma_r = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 (r_2^2 - r^2), \quad (4.65)$$

$$\sigma_t = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 \left( r_2^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right).$$

Эпюры напряжений, построенные по зависимостям (4.65), приведены на рис. 4.14. Наибольшие напряжения возникают в центре диска

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{t \max} = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 r_2^2. \quad (4.66)$$

Отметим, что при заданной плотности материала  $\rho$  напряжения зависят только от окружной скорости  $\omega r_2$  на внешнем радиусе диска. Поэтому, для каждого материала можно установить предельно допустимую окружную скорость диска. Работоспособность диска можно оценивать, сопоставляя фактическую окружную скорость с допустимой.

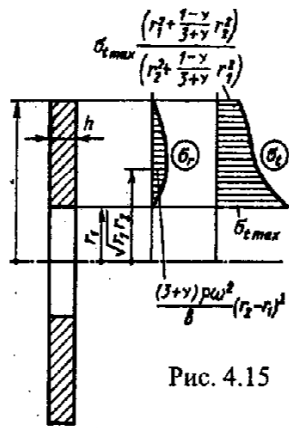


Рис. 4.15

2) Диск постоянной толщины с центральным отверстием; неравномерный нагрев отсутствует (рис. 4.15).

Если края диска свободны, то граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } r = r_1 \quad \sigma_r = \sigma_{r1}$$

$$\text{при } r = r_2 \quad \sigma_r = \sigma_{r2}$$

С учетом постоянства температуры эти условия приводят к двум уравнениям, решение которых дает значения постоянных:

$$A = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2(r_2^2 + r_1^2)}{8}, \quad (4.67)$$

$$B = \frac{(3+\nu)\rho\omega^2 r_1^2 r_2^2}{8}.$$

Формулы для напряжений принимают вид:

$$\sigma_r = \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \left( r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (4.68)$$

$$\sigma_t = \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \left( r_2^2 + r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right)$$

Эпюры напряжений для кольцевого диска приведены на рис. 4.15. Наибольшее напряжение возникает в точках диска, расположенных на внутренней поверхности:

$$\sigma_{t \max} = \frac{(3+\nu)}{8} \rho\omega^2 \left( r_2^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} r_1^2 \right). \quad (4.69)$$

При стремлении радиуса  $r_1$  отверстия к нулю максимальное напряжение стремится к величине, равной

$$\sigma_t = \frac{(3+\nu)}{4} \rho\omega^2 r_2^2.$$

Сравнивая эту величину с величиной напряжения в центре сплошного диска, можно отметить, что в окрестности малого центрального отверстия возникает концентрация напряжений с коэффициентом концентрации равным 2.

Отметим другой предельный случай, когда  $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r$ , т.е. когда диск вырождается в тонкое кольцо. По формуле (4.69) при  $r_1 = r_2 = r$  находим

$$\sigma_t = \rho\omega^2 r^2.$$

Эту величину можно также легко получить, рассматривая уравнение равновесия отсеченной части (половины) вращающегося кольца.

3) Диск постоянной толщины, находящийся в условиях неравномерного нагрева; вращение отсутствует.

Для определения температурных напряжений необходимо определить поле температур. Предположим, что температура изменяется вдоль радиуса по квадратичному закону

$$t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{r_2^2} r^2. \quad (4.70)$$

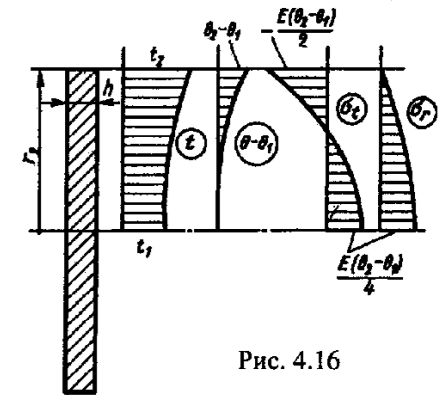


Рис. 4.16

Тогда температурная деформация равна

$$\theta = \alpha(t - t_0) = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2^2} r^2. \quad (4.71)$$

Учитывая, что равномерный нагрев диска не вызывает напряжений, первое слагаемое в выражении (4.71) можно отбросить и считать, что температурная деформация подчиняется следующей зависимости:

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2^2} r^2. \quad (4.72)$$

Температурный интеграл в формулах (4.63) и (4.64) оказывается равен

$$\int_0^r \bar{r} \theta d\bar{r} = \frac{(\theta_2 - \theta_1) r^4}{4r_2^2} \quad (4.73)$$

Для напряжений получаем зависимости

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E(\theta_2 - \theta_1)r^4}{4r_2^2}; \quad (4.74)$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3E(\theta_2 - \theta_1)r^4}{4r_2^2}.$$

Постоянные интегрирования определим по граничным условиям. В случае сплошного диска:

при  $r=0$ ,  $\sigma_r = \sigma_t$ ; при  $r=r_2$ ,  $\sigma_r = 0$ .

Согласно этим условиям

$$A = \frac{E(\theta_1 - \theta_2)}{4}; B = 0.$$

Тогда

$$\sigma_r = \frac{E(\theta_2 - \theta_1)}{4} \left( 1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right); \quad (4.75)$$

$$\sigma_t = \frac{E(\theta_1 - \theta_2)}{4} \left( 1 - 3 \frac{r^2}{r_2^2} \right)$$

Когда кроме вращения и неравномерного нагрева на внутренней и наружной поверхностях имеются заданные напряжения  $\sigma_{r1}$  и  $\sigma_{r2}$ , значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  в произвольной точке диска можно определить, используя для нахождения констант интегрирования А и В граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } r=r_1 \quad \sigma_r &= \sigma_{r1}; \\ \text{при } r=r_2 \quad \sigma_r &= \sigma_{r2}. \end{aligned}$$

### 4.3.3. Диски равного сопротивления и конические диски

С целью получения более равномерного поля напряжений диски турбомашин часто изготавливают переменной толщины. Как правило, толщина уменьшается от центра к периферии.

Представляет интерес задача проектирования диска равного сопротивления или так называемого равнопрочного диска (рис. 4.17), в котором напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  одинаковы по величине и постоянны по радиусу:

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_0 = const \quad (4.76)$$

Предполагая, что неравномерный нагрев отсутствует, выясним, как должна изменяться толщина по радиусу у диска равного сопротивления. Подставив значения напряжений в уравнения совместности и уравнения равновесия и приняв

$$\theta = 0, \quad q = \rho\omega^2 r,$$

можно убедиться, что уравнение совместности деформаций (4.55) удовлетворяется тождественно, а уравнение равновесия (4.56) принимает вид:

$$\sigma_0 r \frac{dh}{dr} + \rho\omega^2 r^2 h = 0. \quad (4.77)$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\ln h = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma_0} + C. \quad (4.78)$$

Для определения постоянной С используем условие на наружной поверхности. При  $r=r_2$  толщина диска равна заданной толщине  $h_2$ :

$$\ln h_2 = -\frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2\sigma_0} + C. \quad (4.79)$$

С учетом значения постоянной С равенство (4.79) принимает вид:

$$\ln \frac{h}{h_2} = +\frac{\rho\omega^2 (r_2^2 - r^2)}{2\sigma_0}, \quad ?$$

или

$$h = h_2 e^{\frac{\rho\omega^2 (r_2^2 - r^2)}{2\sigma_0}} \quad (4.80)$$

Толщину диска в центре найдем, приняв  $r=0$ :

$$h = h_2 e^{\frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2\sigma_0}}. \quad (4.81)$$

Отметим, что диск равного сопротивления не может иметь свободный наружный край, а также не может быть сделан с центральным отверстием или со ступицей, так как в этом случае невозможно обеспечить выполнение граничных условий.

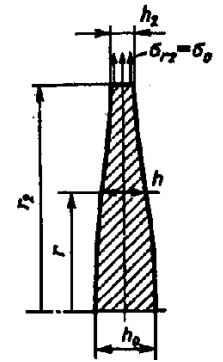


Рис. 4.17

*примечание - диск в реальности не может*

#### 4.3.4. Расчет вращающихся дисков на ЭВМ

До внедрения ЭВМ в расчетную практику широкое распространение получили аналитические и графические методы расчета дисков. С появлением ЭВМ громоздкие графические и табличные расчеты уступили место численным методам решения.

Рассмотрим растяжение дисков переменной толщины при произвольной растягивающей нагрузке, переменной вдоль радиуса температуре и параметрах упругости  $E$  и  $\nu$ .

Обозначим радиальные и окружные силы в цилиндрическом сечении диска, приходящиеся на единицу длины окружности, следующим образом:

$$N_r = \sigma_r h, \quad N_t = \sigma_t h. \quad (4.82)$$

Используя уравнение равновесия (4.56) и зависимость (4.51), находим:

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1}{r}(N_r - N_t) - \rho\omega^2 rh. \quad (4.83)$$

Выразим окружное усилие через радиальное усилие и радиальное перемещение, используя выражение для окружной деформации (4.54):

$$N_t = \nu N_r + \frac{Eh}{r}u - Eh\theta. \quad (4.84)$$

Подставляя (4.78) в (4.77), получаем:

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{r^2}u - \frac{1-\nu}{r}N_r - \rho\omega^2 rh - \frac{Eh}{r}\theta. \quad (4.85)$$

Величина радиальной деформации, согласно (4.52), определяется как производная от радиального смещения по радиусу и в то же время может быть выражена через напряжения на основании закона Гука:

$$\frac{du}{dr} = \epsilon_r = \frac{1}{E} \left( \frac{N_r}{h} - \nu \frac{N_t}{h} \right). \quad (4.86)$$

Исключая из выражения (4.86)  $N_t$ , получаем второе дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{du}{dr} = -\nu \frac{u}{r} + \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r + (1+\nu)\theta. \quad (4.87)$$

Расчет дисков сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (4.85), (4.87). В матричном виде система записывается следующим образом:

$$\frac{d\{Y\}}{dr} = [A(r)]\{Y(r)\} + \{B(r)\}, \quad (4.89)$$

где  $\{Y(r)\} = \begin{Bmatrix} u \\ N_r \end{Bmatrix}$  — вектор основных неизвестных размером  $2 \times 1$ , называемый также вектором состояния в текущем сечении;  $[A(x)]$  — квадратная матрица коэффициентов при неизвестных размером  $2 \times 2$ ;  $\{B(x)\}$  — вектор свободных членов размером  $2 \times 1$ .

$$[A(r)] = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{r} & \frac{1-\nu^2}{r} \\ \frac{Eh}{r^2} & -\frac{1-\nu}{r} \end{bmatrix}; \quad \{B(r)\} = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\theta \\ -\frac{Eh}{r}\theta - \rho\omega^2 rh \end{Bmatrix}.$$

Система дифференциальных уравнений дополняется краевыми условиями. Как правило, на краю известно либо радиальное перемещение, либо краевое усилие.

Процедура решения краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений методом начальных параметров подробно рассмотрена в разделе 2.1.2.

# Глава 5. РАСЧЕТЫ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОТРАКТОРНОЙ ТЕХНИКИ

## 5.1. ЛИСТОВЫЕ РЕССОРЫ

В качестве упругих элементов ударно- и виброзащитных систем (подвесок) машин типа автомобилей и тракторов используются пружины, листовые рессоры, торсионы, пневматические баллоны, диафрагмы и т.п. Характерная особенность их деформирования заключается в появлении относительно больших упругих перемещений. Строго говоря, расчет конструкций следует вести с учетом геометрической нелинейности, т.е. с учетом изменения взаимного положения элементов в процессе деформирования. В данном разделе рассмотрим, однако, приближенный расчет, основанный на линейной теории.

### 5.1.1. Расчет листовых рессор по методу общей кривизны

Рассмотрим одну из основных расчетных схем листовых рессор, представленную на рис. 5.1,а.

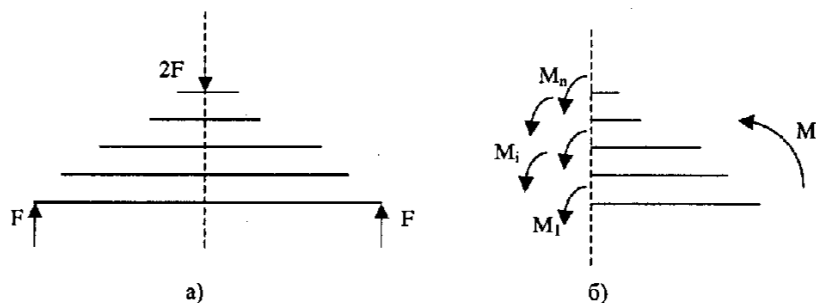


Рис.5.1

Простейшая гипотеза о характере взаимодействия листов в такой рессоре заключается в предположении, что при деформировании все листы рессоры принимают одинаковую, общую для всех листов кривизну. При этом условие равновесия (равенство момента внешних сил сумме моментов внутренних сил) для некоторого произвольного сечения пружины можно записать в следующем виде:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i,$$

где  $M$  – момент внешних сил,  $M_i$  – изгибающий момент в сечении  $i$ -ого листа,  $n$  – число листов в рессоре.

Условие равенства кривизны всех листов в рессоре можно записать в виде

$$\frac{M_k}{E_k J_k} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n E_i J_i}, \quad k=1,2,\dots,n,$$

где  $E_i J_i$  – модуль упругости и момент инерции сечения  $i$ -ого листа при любом  $k=1,2,\dots,n$ .

Отсюда следует равенство

$$M_k = \frac{E_k J_k}{\sum_{i=1}^n E_i J_i} M. \quad (5.1)$$

Максимальное напряжение в  $k$ -ом листе

$$\sigma_{k,\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{E_k J_k}{\sum_{i=1}^n E_i J_i} \frac{M}{W_k}. \quad (5.2)$$

Если модули упругости всех листов одинаковы, то

$$\sigma_{k,\max} = \frac{J_k}{\sum_{i=1}^n J_k} \frac{M}{W_k}. \quad (5.3)$$

### 5.1.2. Расчет листовых рессор по методу концевых сил

В основу метода концевых сил положена гипотеза о том, что листы в рессоре контактируют между собой только по концам листов. При этом задача становится статически неопределимой. Неизвестные усилия  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ , возникающие по концам листов, определяются из условия равенства перемещений в точках контакта (рис. 5.2).

Рассмотрим  $k$ -й и  $(k+1)$ -й по счету снизу листы рессоры ( $k=1,2,\dots,n-1$ , где  $n$  – число листов в рессоре). Для составления соотношений, выражающих условие равенства перемещений в точках А этих двух листов, рассмотрим две схемы нагружения консольной балки, показанные на рис. 5.3.



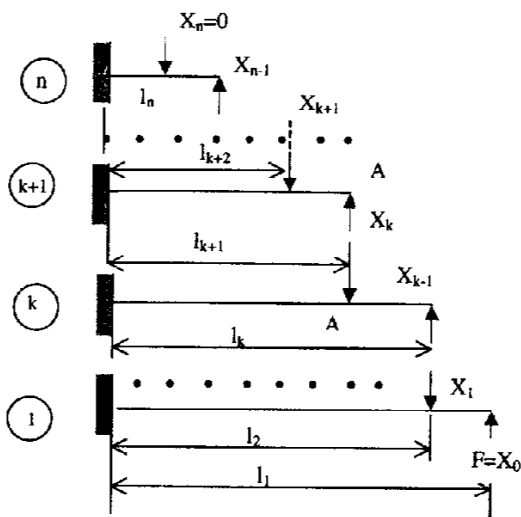


Рис. 5.2

На основании теоремы о взаимности перемещений (см. (1.137)) перемещения в точках А в обоих случаях будут одинаковы. Вычислив эти перемещения, получим

$$\delta_A = \frac{F}{EJ} \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \quad (5.4)$$

где  $EJ$  – жесткость сечения балки.

Приняв жесткости сечений всех листов рессоры одинаковыми, получим на основании (5.4) следующие соотношения, выражающие равенство перемещений в точках А  $k$ -го и  $(k+1)$ -го листов в рессоре (см. рис.5.3):

$$X_{k+1} \left( \frac{l_{k+1}l_{k+2}^2}{2} - \frac{l_{k+2}^3}{6} \right) - X_k \frac{l_{k+2}^3}{3} = X_k \frac{l_{k+1}^3}{3} - X_{k-1} \left( \frac{l_{k+1}l_{k+2}^2}{2} - \frac{l_{k+2}^3}{6} \right)$$

или

$$A_k X_{k-1} - B_k X_k + C_k X_{k+1} = 0, \quad (5.5)$$

где

$$A_k = 3 \frac{l_k}{l_{k+1}} - 1; \quad B_k = 4; \quad C_k = \frac{l_{k+2}^3}{l_{k+1}^3} \left( 3 \frac{l_{k+1}}{l_{k+2}} - 1 \right)$$

Приняв  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $X_n = 0$  и  $X_0 = F$ , получим из (5.5) следующую систему уравнений:

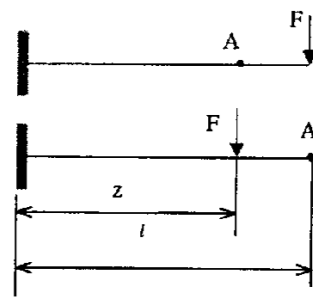


Рис. 5.3

$$\begin{cases} A_1 F - B_1 X_1 + C_1 X_2 = 0 \\ \dots \\ A_{n-1} X_{n-2} - B_{n-1} X_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Решив систему уравнений (5.6), получим значения искомых концевых сил  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ . Теперь расчет каждого листа рессоры сводится к расчету консольной балки с двумя заданными сосредоточенными силами. Эпюры изгибающих моментов имеют вид, показанный на рис. 5.4.

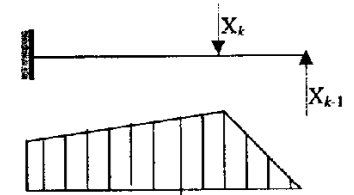


Рис.5.4.

Длины листов рессоры подбирают таким образом, чтобы было некоторое снижение изгибающего момента в заделке по сравнению с максимальным изгибающим моментом. Тем самым обеспечивается компенсация концентрации напряжений, имеющей место в центре рессоры и обусловленное ее конструктивными особенностями.

### 5.1.3. Учет контактного взаимодействия листов в рессоре

В рассмотренных выше методах расчета рессор не учитывается реальное контактное взаимодействие листов в рессоре при ее нагружении. Рассмотрим возможность учета такого взаимодействия на примере двухлистовой рессоры, расчетная схема которой приведена на рис. 5.5,а. Обозначим через  $q(x)$  – неизвестное контактное давление между листами, а через  $2a$  – неизвестную длину участка контакта.

Расчетное определение контактного давления между листами рессоры возможно только с учетом деформации сдвига. Поэтому вначале внесем соответствующее уточнение в дифференциальное уравнение упругости линии листов рессоры. Поскольку угол сдвига (см. рис. 5.6)

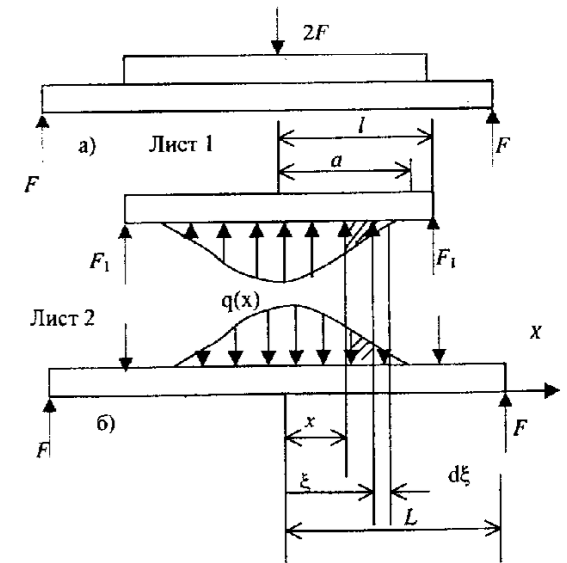


Рис. 5.5

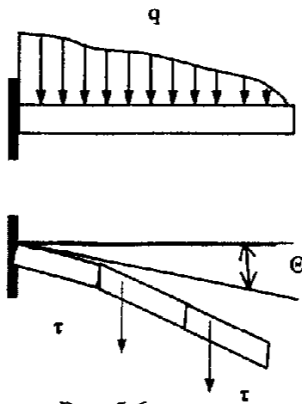


Рис. 5.6

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GA} = \theta, \quad (5.7)$$

где  $\theta = y'$  - угол наклона упругой линии листа,  $y$  - его прогиб, то, дифференцируя соотношение (5.7) по  $x$  и используя формулу  $q = dQ/dx$ , получим, что вторая производная от прогиба в обычном дифференциальном уравнении упругой линии изгиба листов должна быть дополнена выражением:  $y'' = q/(GA)$ .

С учетом этого уточненное уравнение упругой линии изгиба листов будет следующим:

$$EJy'' = M - \beta^2 q, \quad (5.8)$$

где  $\beta = EJ/(GA)$ .

Изгибающий момент в сечении с координатой  $x$ :  
для первого листа

$$M_1 = F_1(l-x) + \int_a^x (x-\xi)q(\xi)d\xi,$$

для второго листа

$$M_2 = F(L-x) - F_1(l-x) - \int_a^x (x-\xi)q(\xi)d\xi, \\ (0 \leq x \leq l, \quad x \leq \xi \leq a).$$

Уравнения упругих линий будут иметь следующий вид:  
для первого листа

$$EJy_1'' = F_1(l-x) + \int_a^x (x-\xi)q(\xi)d\xi - \beta^2 q(x),$$

для второго листа

$$EJy_2'' = F(L-x) - F_1(l-x) - \int_a^x (x-\xi)q(\xi)d\xi + \beta^2 q(x).$$

Из условия равенства кривизны листов на участке их контакта получим соотношение

$$q(x) - \frac{1}{\beta^2} \int_a^x (x-\xi)q(\xi)d\xi = -\frac{F}{2\beta^2}(L-x) + \frac{F_1}{2\beta^2}(l-x). \quad (5.9)$$

Соотношение (5.9) представляет собой интегральное уравнение для определения неизвестной функции  $q(x)$ . Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$q(x) = -\frac{F}{2\beta^2} \left[ (L-a)ch \frac{x-a}{\beta} - \beta sh \frac{x-a}{\beta} \right] + \\ + \frac{F_1}{\beta^2} \left[ (l-a)ch \frac{x-a}{\beta} - \beta sh \frac{x-a}{\beta} \right], \quad (0 \leq x \leq a). \quad (5.10)$$

Справедливость соотношения (5.10) можно проверить непосредственной его подстановкой в уравнение (5.9), которое при этом обращается в тождество.

Запишем уравнение равновесия

$$F_1 + \int_0^a q(x)dx - F = 0. \quad (5.11)$$

Подставив соотношение (5.10) в формулу (5.11), получим

$$F_1 = \frac{F}{2} \frac{(L-a)sh \frac{a}{\beta} + \beta \left( 1 + ch \frac{a}{\beta} \right)}{(l-a)sh \frac{a}{\beta} + \beta ch \frac{a}{\beta}}. \quad (5.12)$$

Подставив значение  $F_1$  в формулу (5.10), определим

$$q(x) = -\frac{F}{2\beta} \frac{(L-l)ch \frac{x}{\beta} - \left[ (l-a)ch \frac{x-a}{\beta} - \beta sh \frac{x-a}{\beta} \right]}{(l-a)sh \frac{a}{\beta} + \beta ch \frac{a}{\beta}}. \quad (5.13)$$

Из условия  $q(a)=0$  получим следующее уравнение для определения величины  $a$ :

$$a + (L-l)ch \frac{a}{\beta} = l. \quad (5.14)$$

При  $l/L=0,5$  имеем равенство

$$a + lch \frac{a}{\beta} = l. \quad (5.15)$$

Равенство (5.15) выполняется только при  $a=0$ . Отсюда следует, что при соотношении листов  $l/L \leq 0,5$  контакт между листами в центральной части рессоры отсутствует и внешняя нагрузка  $2F$  передается в этом случае только с листа на лист по концам короткого листа. При этом  $F_1=F$ . При  $l=L$  листы контактируют по всей длине. В этом случае  $F_1=0,5F$ .

На рис. 5.7 представлены зависимости относительной длины контакта  $\alpha = a/l$  и величины  $\gamma = F_1/F$  от соотношения листов  $l/L$  при различной их относительной жесткости  $\beta/l$ . Из полученных данных, в частности, следует, что при данном соотношении листов  $l/L$  с увеличением жесткости листов  $\beta/l$  увеличивается длина контакта  $a$  и концевая сила  $F_1$ . Например, при  $l/L=0,7$   $\beta/l=0,05$ ,  $a = 0,0725l$  и  $F_1 = 0,73F$ ; а при  $\beta/l=0,3$ ,  $a = 0,315l$ ,  $F_1 = 0,82F$ .

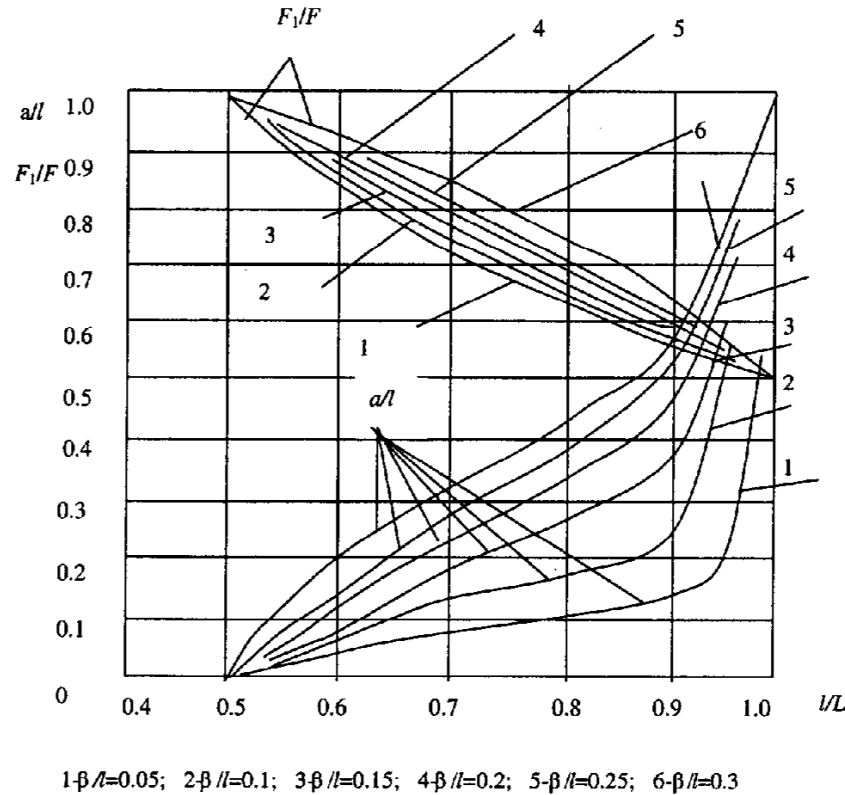


Рис. 5.7

На рис. 5.8 приведены графики распределения контактных давлений между листами рессоры при различных соотношениях длин  $l/L$  и относительных жесткостей  $\beta/l$ .

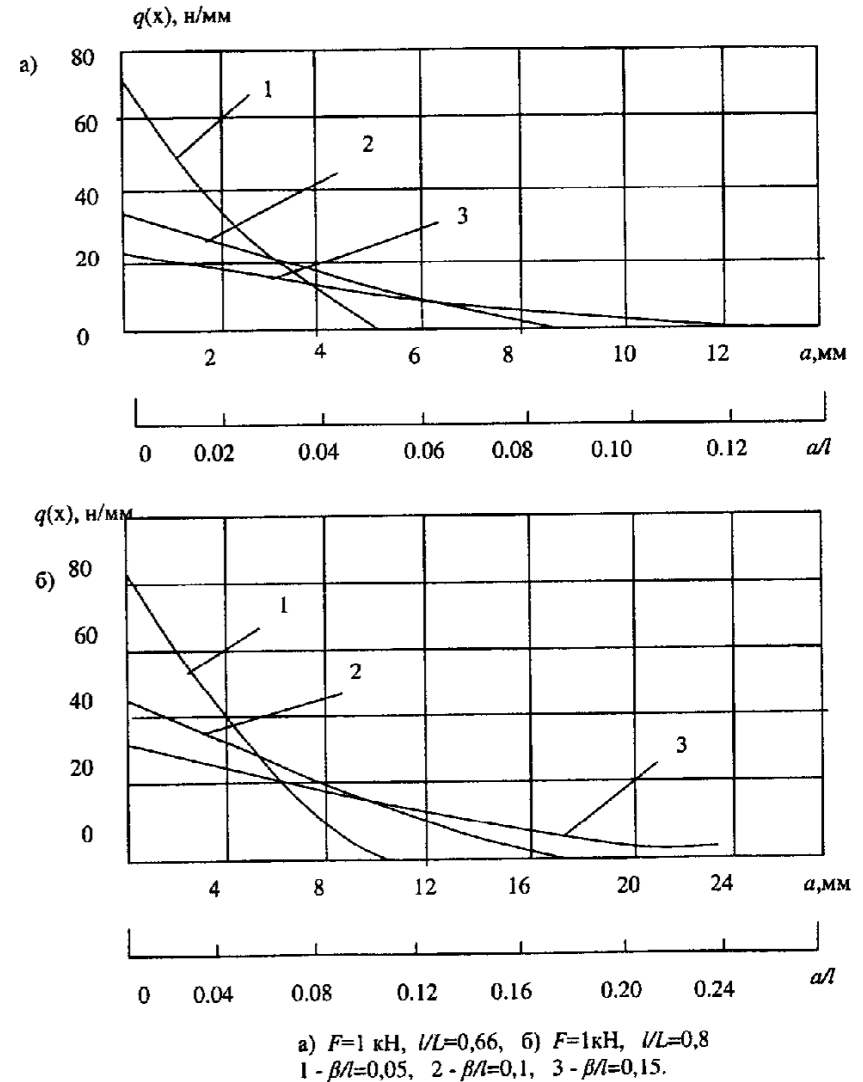


Рис. 5.8

Приведенные расчетные данные позволяют полностью выявить характер взаимодействия листов в рессоре. Дальнейший ее расчет сводится к расчету отдельных балок (листов) с заданными для них нагрузками.

### 5.1.4. Расчет рессор на ЭВМ

Рассмотрим расчет листовой рессоры методом перемещений по программе ПРИНС. Рессора состоит из 11 листов толщиной 1 см и шириной 7.5 см.

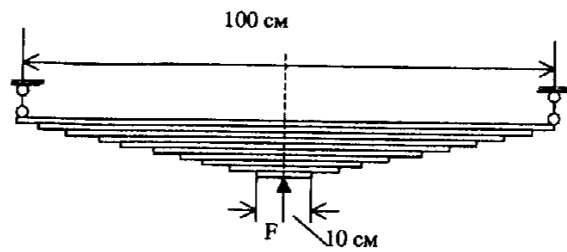


Рис.5.9

Расчетная схема рессоры с указанием габаритных размеров представлена на рис.5.9.

Конструкция рессоры рассчитана как составная балка, при этом для обеспечения совместной работы балок каждая из них разбита на элементы длиной 5 см, и в

узлы полученной расчетной схемы вставлены вертикальные стержни большой жесткости, моделирующие поперечные связи рессоры (рис.5.10). Особенность расчета состоит в том, что введенные связи должны быть односторонними, т.е. работающими только на сжатие, так как контактное давление между листами рессоры возникает только в том случае, когда листы надавливают друг на друга.

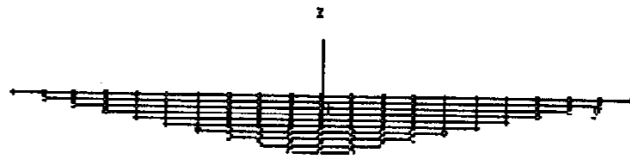


Рис.5.10

Нагрузка в виде сосредоточенной силы прикладывалась в центральном сечении рессоры и равнялась 1500 кг. Результаты расчета получены в виде эпюр усилий и перемещений в листах рессоры. Эпюра перемещений приведена на рис.5.11, а эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для наружных и среднего листов рессоры – на рис.5.12-5.14. Максимальное значение перемещения в среднем сечении рессоры составило 3.84 см. По найденному прогибу легко вычислить жесткость рессоры, а по эпюрам внутренних усилий можно найти напряжения в листах. Отметим, что рессора работает как балка равного сопротивления изгибу.



Рис.5.11

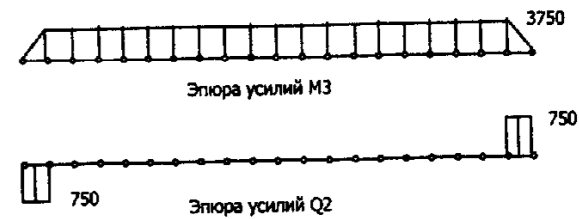


Рис.5.12

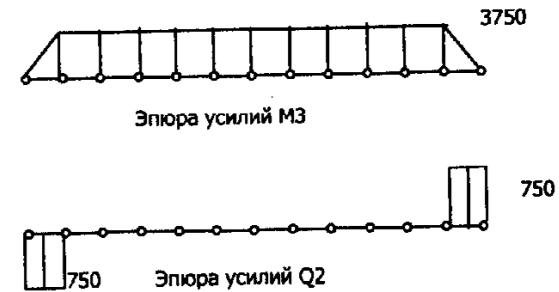


Рис.5.13

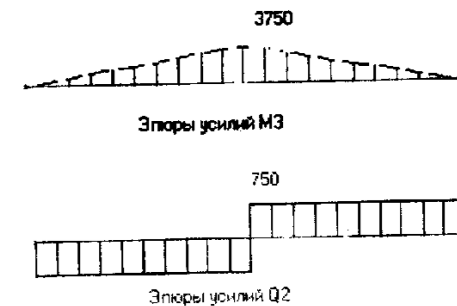


Рис.5.14

## 5.2. ВИТЫЕ ПРУЖИНЫ

### 5.2.1. Определение внутренних силовых факторов в сечениях витков пружин

По характеру деформирования витые пружины подразделяются на пружины-сжатия, кручения и изгиба. На рис. 5.15,а внешние силовые воздействия на пружину представлены в виде следующих векторных величин:  $F$  – для пружин растяжения-сжатия, момента  $M$  – для пружин изгиба, момента  $T$  – для пружин кручения. В общем случае на пружину могут действовать одновременно все эти внешние воздействия.

По геометрической форме витые пружины подразделяются на цилиндрические, конические, параболические и т.п. Средняя линия витков пружины представляет собой винтовую линию. Угол подъема этой линии может быть как постоянным по высоте пружины, так и переменным. Форма сечения также может быть переменной.

Для определения внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях витых пружин, рассмотрим равновесие некоторой отсеченной ее части рис. 5.15,б. При этом примем следующие обозначения:  $N$ ,  $Q$  – нормальная и поперечная силы в сечении;  $M_I = FR$  – момент в сечении, обусловленный действием силы  $F$ ;  $R$  – радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению;  $T_M$ ,  $T_T$ ,  $T_F$ ,  $M_M$ ,  $M_T$ ,  $M_F$  – крутящие и изгибающие моменты в сечении, обусловленные внешними воздействиями  $M$ ,  $T$ ,  $F$ , соответственно. На рис. 5.15,б символ векторных величин опущен.

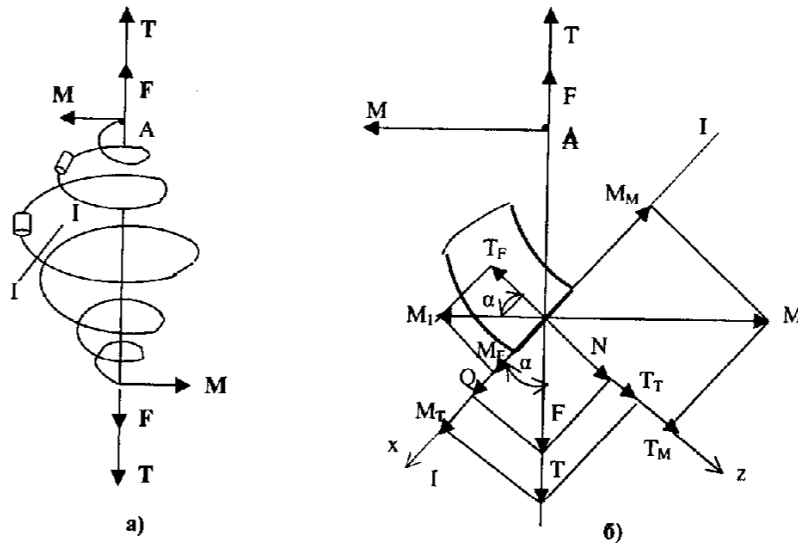


Рис.5.15

Из условия равновесия получаем следующие выражения для определения внутренних силовых факторов в сечениях витков пружин.

Нормальная сила

$$N = F \sin \alpha. \quad (5.16)$$

Поперечная сила

$$Q = F \cos \alpha. \quad (5.17)$$

Изгибающий момент

$$M_T + M_F - M_M = T \cos \alpha + (FR - M) \sin \alpha. \quad (5.18)$$

Крутящий момент

$$T_T + T_M - T_F = T \sin \alpha + (M - FR) \cos \alpha. \quad (5.19)$$

В формулах (5.16)-(5.19)  $\alpha$  - угол подъема средней линии витков пружины.

### 5.2.2. Расчет напряжений и деформаций в пружинах

Для примера рассмотрим пружину с малым углом подъема ( $\alpha < 5^\circ$ ) средней линии витков, находящуюся под воздействием силы  $F$ . В этом случае в поперечных сечениях витков пружины возникает крутящий момент  $T \cong FR$  и поперечная сила  $Q \cong F$ . Нормальная сила  $N$  и изгибающий момент  $M$  примерно равны нулю. Касательные напряжения в точках 1 и 2 сечения витка пружины (см. рис. 5.16) равны

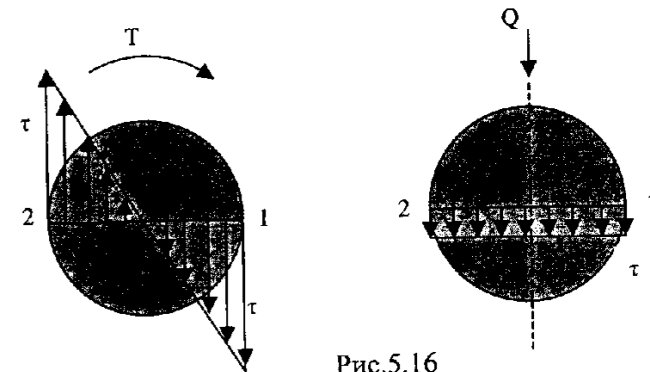


Рис.5.16

$$\tau_{1,2} = \frac{T}{w_p} \pm \frac{Q}{A} = \frac{T}{w_p} \left( 1 \pm \frac{1}{2m} \right) \quad (5.20)$$

где  $w_p = \frac{1}{2}\pi r^3$  - полярный момент сопротивления сечения,  $r$  - радиус сечения,  $m=R/r$  - индекс пружины.

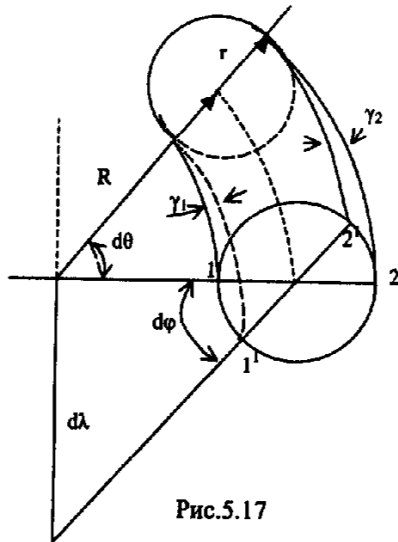


Рис.5.17

Составим отношение

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m+1}{m-1} \quad (5.21)$$

Полагая, что выполняется условие

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \tau = \frac{T}{w_p} \quad (5.22)$$

приходим к системе двух уравнений (5.21) и (5.22) для определения двух неизвестных  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Решив эту систему уравнений, получим

$$\tau_{1,2} = \frac{m \pm 1}{m} \tau \quad (5.23)$$

Максимальное напряжение в точке 1, с учетом поперечной силы  $Q$  будет равно

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \frac{Q}{A} = \left( 1 + \frac{1,5}{m} \right) \frac{T}{w_p} \quad (5.24)$$

Удлинение пружины за счет деформирования элемента витка длиной  $dS$  при действии крутящего момента  $T$  приближенно можно вычислить по формуле

$$d\lambda = R d\varphi = \frac{FR^2 dS}{GJ_p},$$

где  $J_p$  - полярный момент инерции сечения витка пружины.

Полное удлинение пружины

$$\lambda = \int_0^l \frac{FR^2 dS}{GJ_p} \quad (5.25)$$

Полная энергия деформации пружины

$$\Pi = \int_0^l \frac{F^2 R^2 dS}{2GJ_p} \quad (5.26)$$

Для цилиндрических пружин с постоянным сечением прутка

$$\lambda = \frac{4FR^3 n}{Gr^4} \quad (5.27)$$

$$\Pi = \frac{2F^2 R^3 n}{Gr^4} \quad (5.28)$$

Здесь  $l$  - длина прутка, из которого изготовлена пружина,  $n$  - число витков в пружине.

## Глава 6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

### 6.1. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С ТОНКОСТЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

#### 6.1.1. Общие сведения. Основные гипотезы

Тонкостенными называют такие стержни, толщина стенок которых мала по сравнению с размерами поперечного сечения. При этом сечения могут иметь как открытый, так и замкнутый профиль. Примеры поперечных сечений тонкостенных стержней показаны на рис.6.1.

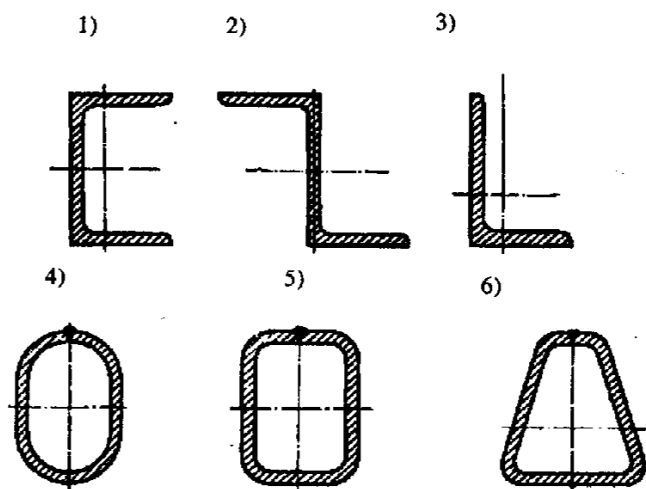


Рис. 6.1

Тонкостенные стержни находят широкое применение в транспортном строительстве, в том числе и в автомобиле- и тракторостроении. Формы поперечных сечений оказываются при этом весьма разнообразными и определяются, в первую очередь, конструктивными особенностями транспортных средств. Однако с точки зрения анализа напряженного состояния таких стержней принципиальным остается деление на стержни открытого и замкнутого профилей.

Тонкостенные стержни, входящие в состав конструкций транспортных средств, подвергаются сложному нагружению, т.е. испытывают одновременно деформации растяжения-сжатия, кручения и изгиба. Стержни замкнутого

профиля рассчитываются на прочность и жесткость методами сопротивления материалов. Что касается расчета стержней открытого профиля, то он имеет ряд особенностей, которые и рассматриваются в данной главе. Отметим, однако, что и в этом случае расчет на осевое растяжение-сжатие и изгиб может быть выполнен методами сопротивления материалов, если нагрузки прикладываются по линии центров изгиба (центров кручения). Но любую нагрузку, действующую на стержень, можно привести к этой линии, при этом в общем случае в поперечных сечениях возникают изгибающие и крутящие моменты. Таким образом, остается рассмотреть лишь особенности, связанные с кручением тонкостенных стержней открытого профиля.

В теории кручения тонкостенных стержней открытого профиля используются следующие гипотезы. Предполагается, что касательные напряжения изменяются по линейному закону (рис.6.2), при этом на срединной поверхности стержня они равны нулю. Вследствие этого равны нулю деформации сдвига в срединной поверхности. Предполагается также, что при кручении стержня его поперечные сечения поворачиваются как жесткие диски, т.е. контур поперечного сечения не изменяется. Поэтому изложенная ниже теория кручения тонкостенных стержней открытого профиля справедлива лишь в той степени, в какой справедливы принятые в этой теории гипотезы.

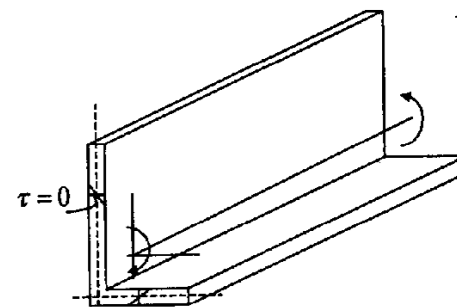


Рис.6.2

#### 6.1.2. Свободное кручение тонкостенного стержня открытого профиля

Свободным называется такое кручение тонкостенного стержня, при котором перемещения сечений вдоль оси стержня ничем не стеснены. Отличительной особенностью тонкостенных стержней открытого профиля является депланация поперечных сечений при кручении. Депланацией называется искажение формы поперечного сечения. При депланации возникают перемещения вдоль оси.

Стесненное кручение характеризуется тем, что перемещения отдельных сечений ограничены. При этом депланация изменяется по длине стержня, вследствие чего в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения. Таким образом, НДС тонкостенных стержней существенно зависит от характера депланации. Изучение этого явления начнем со случая свободного кручения.

## Перемещения и деформации тонкостенного стержня. Секториальные координаты

Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля с произвольной формой сечения, изображенный на рис.6.3.

Касательное напряжение при свободном кручении изменяется по толщине  $\delta$  по линейному закону, причем на срединной поверхности  $\tau = 0$  и  $\gamma = 0$  (как при кручении прямоугольного сечения с малой  $\delta$ ). При кручении тонкостенного стержня возникает деформация сечения, т.е. искривление формы поперечного сечения. Выразим деформацию через угол закручивания  $\varphi(z)$ . Изобразим срединную поверхность стержня (рис.6.4). Положение произвольной точки  $M(z, s)$  зададим двумя координатами  $z$  и  $s$ , причем координата  $s$  отсчитывается от некоторой точки  $M_0$ , положение которой будет определено далее.

Через  $v$  и  $w$  обозначим перемещения вдоль касательной к линии контура и вдоль образующей. Перемещение точки  $M$  по оси  $z$  равно  $w$ . Тогда перемещение бесконечно близкой к ней точки  $K$  вдоль оси  $z$  равно  $w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$  (см. рис.6.4).

Если перемещение точки  $M$  вдоль линии контура  $S$  равно  $v$ , то перемещение точки  $K$  вдоль  $S$  равно  $v + \frac{\partial v}{\partial z} dz$ .

Аналогично, перемещение точки  $N$  вдоль оси  $z$  равно  $w + \frac{\partial w}{\partial z} ds$ .

Так как в срединной поверхности отсутствуют напряжения  $\tau$  и сдвиг  $\gamma$ , то элемент  $MNLK$  должен переместиться и повернуться как жесткое целое, без изменения углов. Следовательно, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны между собой.

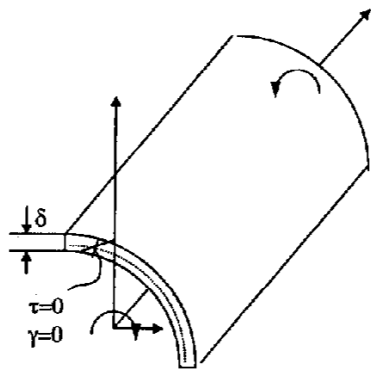


Рис.6.3

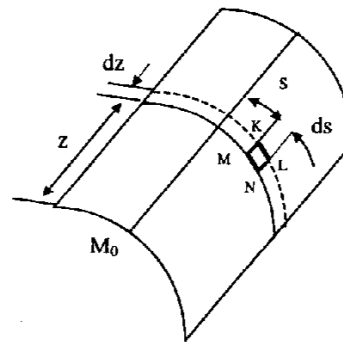


Рис.6.4

Из рис.6.5 получаем  $\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial s} ds$  и  $\varphi_2 = -\frac{\partial v}{\partial z} dz$ . (Знак "-" объясняется тем, что приращение перемещений  $\frac{\partial v}{\partial z} dz$  направлено в отрицательную

сторону линии  $s$ . После сокращения получаем

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad (6.1)$$

Выразим тангенциальное перемещение  $v$  через угол поворота  $\varphi(z)$ . Примем гипотезу о том, что сечения поворачиваются вокруг некоторой точки  $A$ , как жесткие диски. Точку  $A$  назовем полюсом или центром кручения. Угол  $\varphi$  будем считать положительным по правилу "правой руки".

Из рис. 6.6 находим полное перемещение  $MM_1$  в плоскости сечения  $MM_1 = AM \cdot \varphi$ . Тогда  $v = MM_1 \cos \beta = \varphi AM \cos \beta$ . Но  $AM \cos \beta = r$ , следовательно

$$v = r\varphi. \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -r\varphi'. \quad (6.3)$$

Интегрируем (6.3):

$$w = -\varphi' \int_{M_0}^M r ds + w_0. \quad (6.4)$$

Произведение  $r ds = d\omega$  есть удвоенная площадь элементарного треугольника с основанием  $ds$ , а  $\int_{M_0}^M r ds$  дает секториальную площадь, покрываемую радиусом точки при ее движении вдоль контура из начальной точки  $M_0$  в точку  $M$ . Значение  $\omega > 0$ , если радиус  $\rho$  вращается против часовой стрелки при взгляде в положительном направлении оси  $z$ .

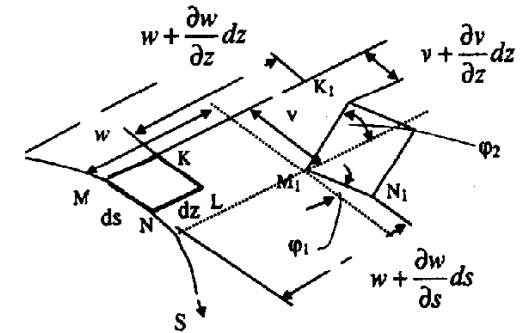


Рис.6.5

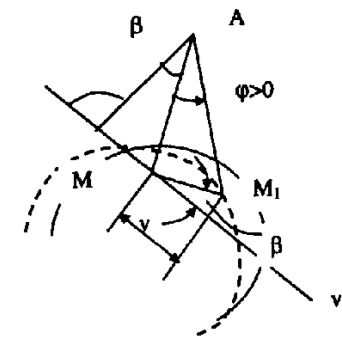


Рис.6.6



В дальнейшем примем, что  $w_0 = 0$ , тогда (6.4) примет вид  $w = -\varphi'\omega$  (6.5).

Формула (6.5) выражает закон изменения перемещения  $w$  вдоль контура сечения вследствие деформации сечения в срединной поверхности.

Параметр  $\varphi'$  связан с крутящим моментом формулой  $Q = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_{kp}}$ ,

где  $GI_{kp}$  – жесткость тонкостенного стержня при кручении. Пример построения эпюры секториальных координат приведен на рис.6.7.

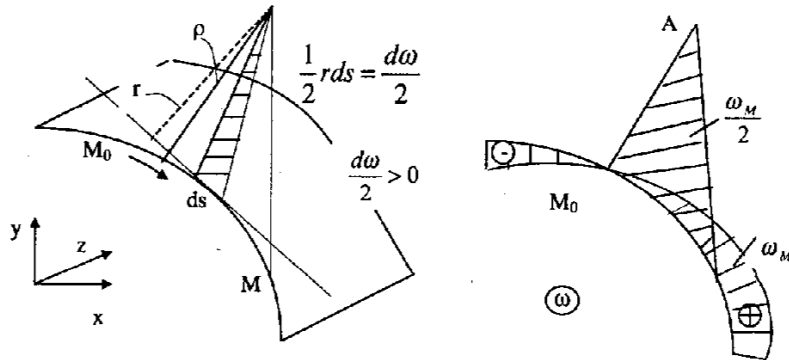


Рис.6.7

При изучении стесненного кручения приходится использовать несколько новых геометрических характеристик сечений в связи с появлением новой координаты – секториальной площади. Эти характеристики определяются следующим образом:

$$\int_A \omega dA = S_\omega \text{ – секториально-статический момент.}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_A y \omega dA = S_{x\omega} \\ \int_A x \omega dA = S_{y\omega} \end{aligned} \right\} \text{ – секториально-линейные статические моменты.}$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \text{ – секториальный момент инерции.} \quad (6.6)$$

Координаты  $\omega$ , удовлетворяющие равенствам

$$S_\omega = S_{x\omega} = S_{y\omega} = 0, \quad (6.7)$$

называют главными секториальными координатами. Механический смысл этих равенств легко понять, если условно принять, что  $\sigma = c_1 \omega$ . Тогда равенства (6.7) можно трактовать как отсутствие (равенство нулю) при кручении продольной силы и изгибающих моментов относительно осей  $x$  и  $y$ .

### Определение главных секториальных координат. Изменение секториальной координаты при изменении положения полюса

На рис. 6.8 изображены изменения секториальных площадей  $d\omega_B > 0$  и  $d\omega_A > 0$  при переходе из точки  $M$  в точку  $M_1$  на пути  $ds$ . При этом координата точки  $M$  изменяется на  $dy$  и  $dx$ . Из рис.6.8 видно, что  $d\omega_B = r_b ds$  и  $d\omega_A = r_a ds$ . Тогда  $d\omega = d\omega_A - d\omega_B = d(\omega_A - \omega_B) = (r_a - r_b) ds = \Delta r ds$ .

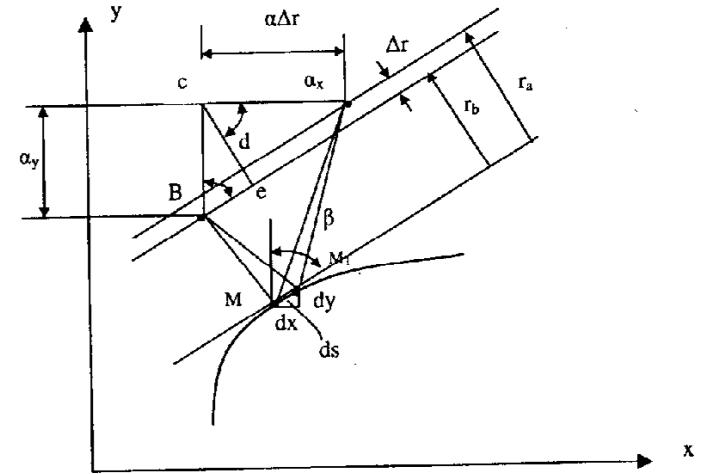


Рис.6.8

Нетрудно увидеть, что  $\Delta r = \alpha_y \sin \beta - \alpha_x \cos \beta$ , причем  $\cos \beta = \frac{dy}{ds}$  и  $\sin \beta = \frac{dx}{ds}$ . Следовательно,  $d(\omega_A - \omega_B) = \left( \alpha_y \frac{dx}{ds} - \alpha_x \frac{dy}{ds} \right) ds = \alpha_y dx - \alpha_x dy$

Интегрируя предыдущую формулу, получаем

$$\omega_A - \omega_B = \alpha_y x - \alpha_x y + C \text{ или } \omega_A = \omega_B - \alpha_x y + \alpha_y x + C, \quad (6.8)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

### Главные секториальные координаты

Значения секториальных координат определяются положением полюса  $A$  и началом отсчета  $M_0$ . Секториальные координаты, соответствующие центру кручения, называются главными, если для них удовлетворяются три равенства (6.7). Используя эти равенства, найдем положение центра кручения  $A$  и начала отсчета  $M_0$ .

Пусть  $B$  – произвольная точка,  $A$  – центр кручения. Подставим (6.8) в (6.6) и учтем второе и третье равенства (6.7):

$$S_{xw_A} = \int_A y \omega_A dA = \int_A y (\omega_B - \alpha_x y + \alpha_y x - C) dA = S_{yw_B} - \alpha_x I_x + \alpha_y I_{xy} - CS_x = 0$$

$$S_{yw_A} = \int_A x \omega_A dA = \int_A x (\omega_B - \alpha_x y + \alpha_y x - C) dA = S_{xw_B} - \alpha_x I_{xy} + \alpha_y I_y - CS_y = 0$$

Так как  $x$  и  $y$  – главные центральные оси сечения, то  $I_{xy} = S_x = S_y = 0$ . В результате получаем:

$$\alpha_x = \frac{S_{xw_B}}{I_x}; \quad \alpha_y = -\frac{S_{yw_B}}{I_y}.$$

Величины  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  определяют координаты центра кручения сечения.

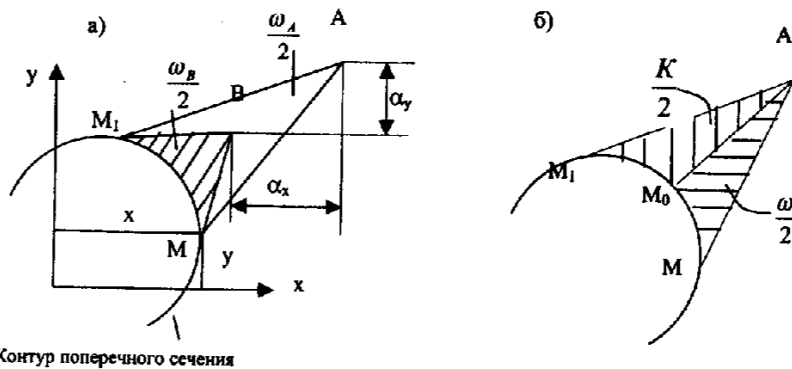


Рис.6.9

Для определения положения точки  $M_0$  используем первое равенство (6.7). Из рис. 6.7 видно, что  $\omega_A$  и  $\omega$  отличаются на некоторую константу, т.е.  $\omega = \omega_A - K$ . Подставляя  $\omega = \omega_A - K$  в первое условие (6.7), находим

$$S_w = \int \omega dA = \int \omega_A dA - K \int dA = 0; \quad K = \frac{S_{w_A}}{A} = \frac{\int \omega_A dA}{\int dA}$$

Вычитая  $K$  из ординат эюры  $\omega_A$ , получаем эюру главных секториальных координат.

**Пример.** Определить положение центра кручения для швеллера. Построить эюры главных секториальных площадей. Найти секториальный момент инерции.

**Решение.** Сечение имеет одну ось симметрии, поэтому центр кручения лежит на этой оси. Для определения координаты  $\alpha_x$  центра кручения выберем вспомогательный полюс в точке  $B$  (рис.6.10,б). Эюра секториальных площадей с полюсом в точке  $B$  и началом отсчета в этой же точке приведена на рис.6.10,в. Для определения секториально-линейного статического момента  $S_{xw_B}$  строим эюру координат  $y$  (рис.6.10,г), а затем вычисляем  $S_{xw_B}$  по формуле:

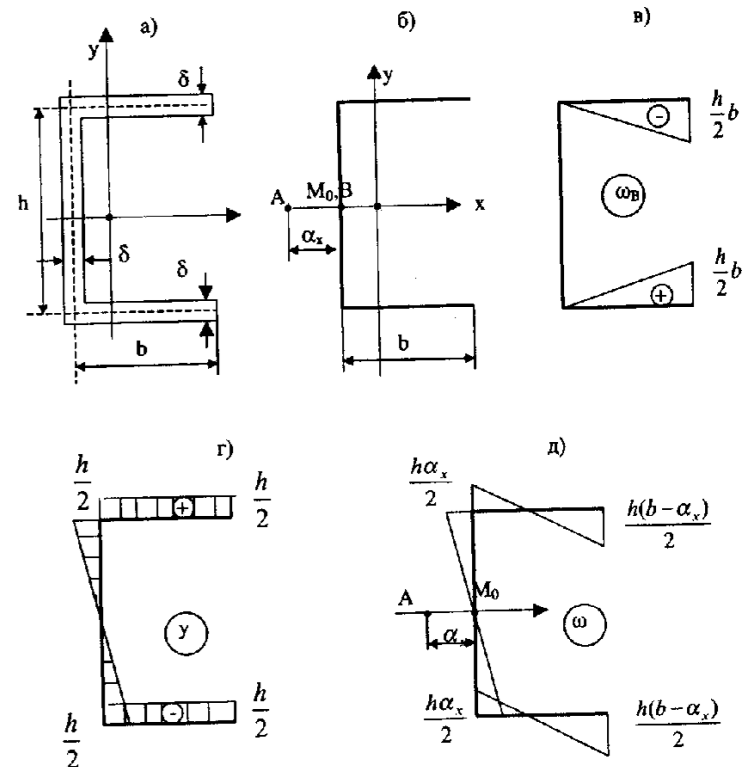


Рис.6.10

$$S_{x\omega_B} = \int_A y\omega_B dA = \sum \delta_i \int_{b_i} y\omega_B ds$$

Вычисляя интеграл на каждом участке по способу Верещагина, находим:

$$S_{x\omega_B} = -2 * \frac{h}{2} * \frac{b^2}{2} * \frac{h}{2} * \delta = -\frac{h^2 b^2}{4} \delta.$$

Момент инерции сечения

$$I_x = \frac{h^3 \delta_{cm}}{12} + 2 \left[ \frac{\delta^3 b}{12} + \delta b \left( \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{h^2 \delta}{12} (h + 6b).$$

При вычислении момента инерции пренебрегли слагаемым  $\frac{\delta^3 b}{6}$ , которое мало по сравнению с двумя другими слагаемыми. Таким образом:

$$\alpha_x = \frac{S_{x\omega_B}}{I_x} = \frac{-\frac{h^2 b^2}{4} \delta}{\frac{\delta h^2}{12} (h + 6b)} = -\frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Знак минус в полученной формуле указывает на то, что центр тяжести сечения и центр кручения лежат по разные стороны стенки швеллера.

Строим эпюру секториальных площадей с полюсом в центре кручения  $A$ .

$$\omega_A^{(B)} = 0; \quad \omega_A^{(2)} = 2 \frac{1}{2} \frac{h}{2} \alpha_x = \frac{h}{2} \alpha_x = \frac{3b^2 h}{2(h + 6b)};$$

$$\omega_A^{(1)} = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{h}{2} \alpha_x - \frac{1}{2} b \frac{h}{2} \right) = -\frac{h(b - \alpha_x)}{2} = -\frac{bh h + 3b}{2 h + 6b};$$

$$\omega_A^{(3)} = -\omega_A^{(2)}; \quad \omega_A^{(4)} = \omega_A^{(1)}.$$

Эпюра секториальных площадей  $\omega_A$  приведена на рис.6.10,д.

Очевидно, что  $\int_A \omega_A dA = 0$  в силу того, что эпюра  $\omega_A$  является обратно

симметричной, следовательно,  $\omega_A = \omega$  и построенная эпюра является эпюрой главных секториальных координат.

Эпюра деформации сечения может быть построена по формуле  $w = -\varphi' \omega$ .

Находим секториальный момент инерции, вычисляя интеграл способом Верещагина:

$$I_\omega = \int \omega^2 dA = \sum \delta_i \int_0^{b_i} \omega^2 ds = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \alpha_x \frac{2}{3} \frac{h}{2} \alpha_x + \frac{1}{2} \frac{h}{2} \alpha_x \alpha_x \frac{2}{3} \frac{h}{2} \alpha_x + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (b - \alpha_x) \frac{h}{2} (b - \alpha_x) \frac{2}{3} \frac{h}{2} (b - \alpha_x) \right) = \frac{\delta h^2 b^3}{12} \frac{2h + 3b}{h + 6b}.$$

### 6.1.3. Стесненное кручение тонкостенных стержней

Как уже отмечалось выше, стесненным называется такое кручение тонкостенного стержня, при котором деформация стержня изменяется по его длине. Если при свободном кручении в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения (см. рис.6.11), то при стесненном кручении вследствие неравномерной деформации сечений в них возникают дополнительные напряжения, как касательные, так и нормальные (рис.6.12). Определение этих дополнительных напряжений и составляет основную задачу теории стесненного кручения.

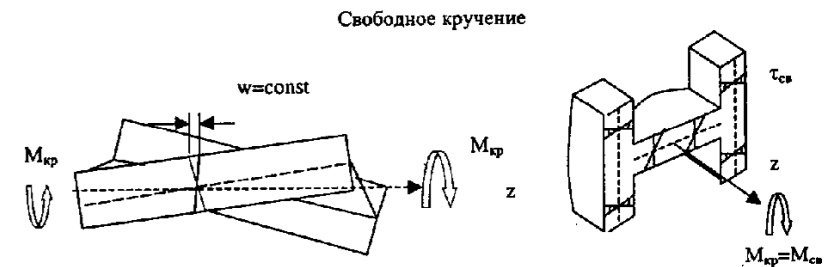


Рис.6.11

### Нормальные напряжения $\sigma_\omega$ .

При стесненном кручении перемещения  $w$  по длине стержня изменяются, и, вследствие этого, возникают нормальные напряжения  $\sigma$ . Кроме того, при изгибе полков возникают поперечные силы, которые создают дополнительный крутящий момент (см. рис.6.12).

Величины крутящих моментов при свободном и стесненном кручении можно записать так:

$$\text{Свободное кручение} \quad M_{CB} = GI_{KP} \varphi' = M_{KP} \quad (6.9)$$

$$\text{Стесненное кручение} \quad M_{KP} = M_{CB} + M_\omega = GI_{KP} \varphi' + M_\omega \quad (6.10)$$

Стесненное кручение

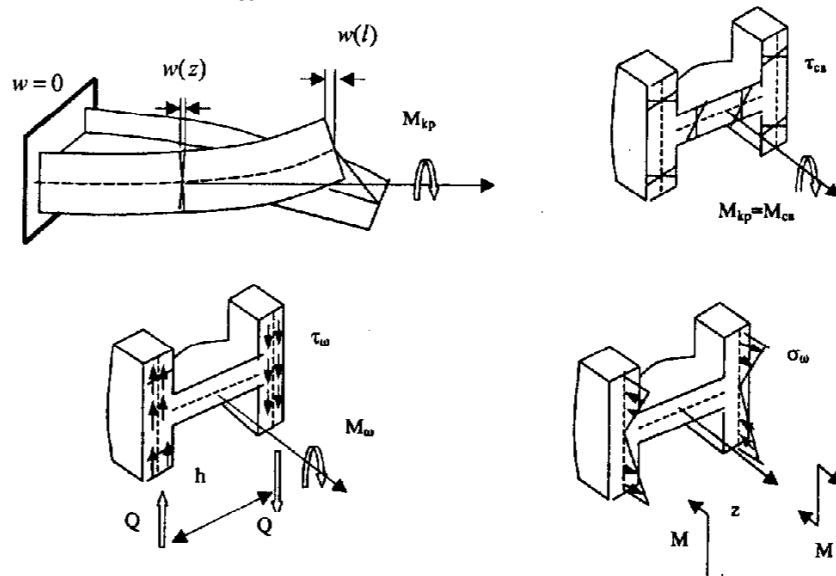


Рис.6.12

Из (6.9) и (6.10) видно, что моменты  $M_{св}$  и  $M_{\omega}$  можно найти, предварительно определив угол закручивания  $\varphi$ .

Отметим, что в случае двутавра возникает бипара – два противоположно направленных момента  $M$ .

В любом поперечном сечении из условий равновесия имеем:

$$N = \int \sigma_{\omega} dA = 0; \quad M_x = \int (\sigma_{\omega} dA) y = 0; \quad M_y = \int (\sigma_{\omega} dA) x = 0. \quad (6.11)$$

Таким образом, напряжения  $\sigma_{\omega}$  самоуравновешены. Выразим напряжение  $\sigma_{\omega}$  через функцию углов закручивания  $\varphi(z)$ . При этом используем ранее сформулированные допущения, а именно:

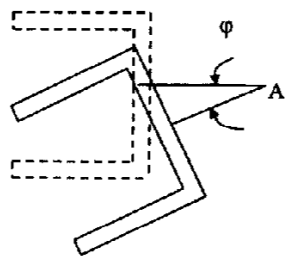


Рис.6.13

1) Поперечные сечения поворачиваются вокруг оси центров кручения А-А как жесткие диски на углы  $\varphi$  (см. рис.6.13)

2) Делпланация сечений происходит по закону секториальных площадей, как при свободном кручении. Это означает, что мы пренебрегаем деформациями сдвига в срединной поверхности за счет  $\tau_{\omega}$ .

3) Напряжения  $\sigma_{\omega}$  и  $\tau_{\omega}$  считаем равномерно распределенными по толщине.

4) Принимаем гипотезу об отсутствии давления между слоями, т.е.  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  равны нулю.

На основании гипотезы (2)

$$w = -\varphi'(z)\omega \quad (6.12) \quad \sigma_{\omega} = \varepsilon_z E = -\varphi''(z)E\omega \quad (6.13)$$

Таким образом, нормальные напряжения  $\sigma_{\omega}$  распределены в сечении по закону секториальных площадей.

Введем понятие единичной делпланации. Примем относительный угол закручивания таким, что  $-\varphi' = 1$ . Тогда, из формулы (6.12) получаем  $\bar{w} = \omega$ . Найдем работу нормальных напряжений  $\sigma_{\omega}$ . При единичной делпланации элементарная сила  $\sigma_{\omega} dA$ , действующая на площадку  $dA$ , совершает работу на перемещении  $\bar{w}$  в направлении этой силы (см. рис.6.14), равную

$$B_{\omega} = \int_A (\sigma_{\omega} dA) \bar{w} = -\varphi'' E \int_A \omega^2 dA = -\varphi'' EI_{\omega}. \quad (6.14)$$

В формуле (6.14)  $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$  – секториальный момент инерции. Произведение  $EI_{\omega}$  называется секториальной жесткостью тонкостенного стержня. Работа напряжений  $\sigma_{\omega}$  при относительном угле закручивания  $-\varphi'$  равна:

$$A = B_{\omega} (-\varphi') \quad (6.15)$$

Величину  $B_{\omega}$  можно рассматривать как обобщенную силу. Эта сила имеет размерность  $\text{Нм}^2$  и называется бимоментом. Ей соответствует обобщенное перемещение  $(-\varphi')$ . Из (6.14) имеем:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega. \quad (6.16)$$

Формула (6.16) аналогична формуле для нормальных напряжений при обычном изгибе. Положительное значение  $\sigma_{\omega}$  соответствует растяжению. Внесем  $\sigma_{\omega}$  в формулы (6.11):

$$\int \sigma_{\omega} dA = \int \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega dA = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \int \omega dA = 0.$$

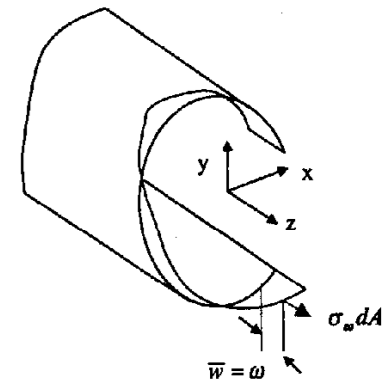


Рис.6.14

Так как  $\frac{B_\omega}{I_\omega} \neq 0$ , то  $\int \omega dA = 0$ . Аналогично,  $\int \omega y dA = 0$  и  $\int \omega x dA = 0$ . Следовательно, в формуле (6.16)  $\omega$  - это главные секториальные координаты.

### Касательные напряжения $\tau_\omega$ .

Для определения касательных напряжений  $\tau_\omega$  отсечем часть стержня, как показано на рис.6.15.

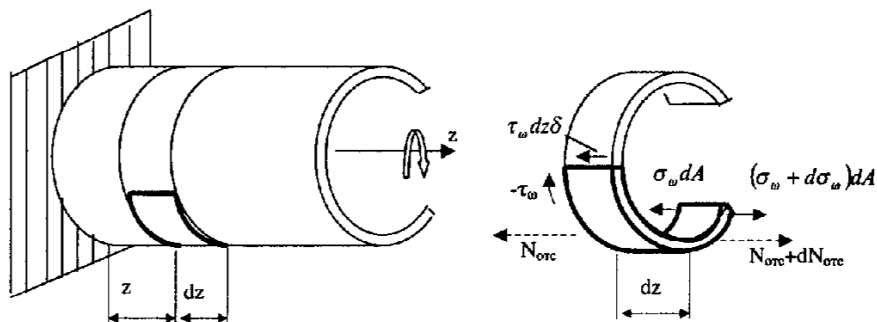


Рис.6.15

Составим уравнение равновесия отсеченной части в виде:

$$\sum z = 0; \quad \delta_a dz \bar{a} - dN_{отс} = 0, \quad \text{откуда} \quad \delta_a = \frac{1}{\bar{a}} \frac{dN_{отс}}{dz}. \quad (6.17)$$

Очевидно, что

$$N_{отс} = \int \sigma_\omega dA = \frac{B_\omega}{I_\omega} S_\omega^{омс}, \quad (6.18)$$

где

$$S_\omega^{омс} = \int_{A_{отс}} \omega dA, \quad (6.19)$$

где  $S_\omega^{омс}$  - секториальный статический момент отсеченной части.

Будем считать, что сечение стержня постоянно по его длине. Тогда  $I_\omega$  и  $S_\omega^{отс}$  не зависят от  $z$  и

$$\frac{dN_{отс}}{dz} = \frac{S_\omega^{омс}}{I_\omega} \frac{dB_\omega}{dz}; \quad \tau_\omega = \frac{dB_\omega}{dz} \frac{S_\omega^{отс}}{I_\omega \delta}. \quad (6.20)$$

Часть крутящего момента, обусловленного касательными напряжениями  $\tau_\omega$ , обозначим  $M_\omega$ . Для его определения воспользуемся принципом возможных перемещений для элемента стержня длиной  $dz$ . В качестве возможного перемещения примем угол закручивания  $d\varphi = \varphi' dz$  и соответствующую депланацию  $w = -\varphi' \omega$ .

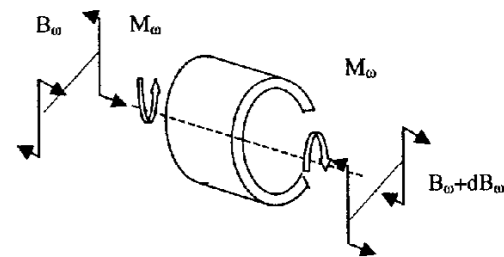


Рис.6.16

Работа внешних сил на возможных перемещениях равна  $M_\omega d\varphi$ , а работа внутренних сил -  $(-dB_\omega \varphi')$ . Следовательно,  $M_\omega d\varphi - dB_\omega \varphi' = 0$ , откуда

$$M_\omega = \frac{dB_\omega \varphi'}{d\varphi} = \frac{dB_\omega \varphi'}{\varphi' dz}. \quad \text{Таким образом:}$$

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dz}. \quad (6.21)$$

С учетом (6.7) получаем:

$$M_\omega = -EI_\omega \varphi'''. \quad (6.22)$$

Окончательно для касательных напряжений  $\tau_\omega$  на основании (6.20) и (6.21) имеем:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{отс}}{I_\omega \delta}. \quad (6.23)$$

Напряжение  $\tau_\omega$  считается положительным, если оно направлено в сторону, противоположную оси  $z$ .

Таким образом, для определения как  $\sigma_\omega$ , так и  $\tau_\omega$  необходимо знание функции углов закручивания  $\varphi(z)$ .

### Дифференциальное уравнение стесненного кручения и его решение

Дифференциальное уравнение стесненного кручения получим, подставив в уравнение равновесия (6.10) значения  $M_{св}$  и  $M_\omega$  из уравнений (6.9) и (6.22) соответственно. Уравнение (6.10) принимает вид:

$$GI_{кр} \varphi' - EI_\omega \varphi''' = M_{кр}. \quad (6.24)$$

Обозначим

$$\theta = -\frac{d\varphi}{dz} \quad (6.25)$$

С учетом обозначения (6.25) уравнение (6.24) приводится к виду:

$$\theta'' - k^2\theta = \frac{M_{kp}}{EI_{\omega}} \quad (6.26)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{GI_{kp}}{EI_{\omega}}} \quad (6.27)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6.26) имеет вид:

$$\theta = A_1 shkz + A_2 chkz + \frac{1}{kEI_{\omega}} \int_0^z M_{kp}(z_1) shk(z - z_1) dz_1 \quad (6.28)$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий.

При постоянном крутящем моменте формула (6.28) несколько упрощается и принимает вид:

$$\theta = A_1 sh(kz) + A_2 ch(kz) - \frac{1}{k^2 EI_{\omega}} M_{kp} (1 - ch(kz)). \quad (6.29)$$

Учитывая формулу (6.27) и вводя новые постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , приводим уравнение (6.29) к виду:

$$\theta = -\frac{M_{kp}}{GI_{kp}} (1 + C_1 ksh(kz) + C_2 kch(kz)). \quad (6.30)$$

Угол закручивания  $\varphi$  найдем из уравнения (6.25), подставив в это уравнение значение  $\theta$  из (6.30) и выполнив интегрирование, предполагая, что угол закручивания в начале координат равен нулю. Получим:

$$\varphi = \frac{M_{kp}}{GI_{kp}} (z + C_1 (ch(kz) - 1) + C_2 sh(kz)). \quad (6.31)$$

Формулы для внутренних усилий принимают вид:

$$\begin{aligned} B &= -M_{kp} (C_1 ch(kz) + C_2 sh(kz)); \\ M_{\omega} &= -M_{kp} k (C_1 sh(kz) + C_2 ch(kz)). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Рассмотрим несколько практически важных случаев.

**Случай 1.** Стержень имеет постоянное сечение. Деформация на концах стержня равна нулю.

Поместим начало координат в середине стержня (рис.6.17).

Условие равенства нулю деформаций на концах стержня приводит к следующим двум соотношениям:  $\theta = 0$  при  $z = \pm \frac{l}{2}$ .

Используя эти два соотношения, из уравнения (6.30) находим:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{1}{kch\frac{kl}{2}}$$

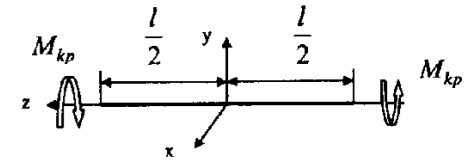


Рис.6.17

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в уравнение (6.32), находим внутренние усилия:

$$B = \frac{M_{kp}}{kch\frac{kl}{2}} sh(kz); \quad M_{\omega} = \frac{M_{kp}}{ch\frac{kl}{2}} ch(kz). \quad (6.33)$$

Полный угол закручивания находим, подставляя  $z = \pm \frac{l}{2}$  в формулу (6.31) и суммируя полученные результаты. Получаем:

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{GI_{kp}} \left(1 - \frac{2}{kl} th\frac{kl}{2}\right). \quad (6.34)$$

**Случай 2.** Стержень зашпелен одним концом.

Начало координат помещаем на зашпеленном конце стержня. Граничные условия при этом принимают вид:  $\theta = 0$  при  $z = 0$  и  $B = 0$  при  $z = l$ .

Используя эти граничные условия, из уравнений (6.30) и (6.32) находим:

$$C_1 = \frac{1}{k} th(kl); \quad C_2 = -\frac{1}{k}$$

Подставляя постоянные интегрирования в формулы (6.32), находим внутренние усилия:

$$B = -\frac{M_{kp}}{kch(kl)} sh(k(l - z)); \quad M_{\omega} = \frac{M_{kp}}{ch(kl)} ch(k(l - z)).$$

Угол закручивания стержня находим из формулы (6.31) при  $z=l$ :

$$\varphi = \frac{M_{kp}l}{GI_{kp}} \left(1 - \frac{1}{kl} th(kl)\right).$$

**Случай 3.** Стержень состоит из нескольких участков различного сечения. Крутящий момент на разных участках также может иметь разные значения.

Помещая начало координат для каждого участка на его правом конце и полагая бимоменты равными  $B_n$  и  $B_{np}$ , находим с помощью первого уравнения (6.32)

постоянные интегрирования, а затем подставляем их в формулы (6.30), (6.31) и (6.32). Получаем:

$$\theta = -\frac{1}{GI_{kp}} \left[ M_{kp} - \frac{B_n k}{sh(kl)} ch(kz) + \frac{B_{np} k}{sh(kl)} ch(k(l-z)) \right]; \quad (6.35)$$

$$\varphi = \frac{1}{GI_{kp}} \left[ M_{kp} z - \frac{B_n}{sh(kl)} sh(kz) + \frac{B_{np}}{sh(kl)} (sh(kl) - sh(k(l-z))) \right]; \quad (6.36)$$

$$B = -\frac{1}{sh(kl)} \left[ B_n sh(kz) - B_{np} sh(k(l-z)) \right]; \quad (6.37)$$

$$M_\omega = -\frac{k}{sh(kl)} \left[ B_n ch(kz) + B_{np} ch(k(l-z)) \right]$$

С помощью формулы (6.36) находим полный угол закручивания для рассматриваемого участка:

$$\varphi = \frac{M_{kp}l}{GI_{kp}} \left( 1 + \frac{B_{np} - B_n}{M_{kp}l} \right) \quad (6.38)$$

а с помощью формулы (6.35) – значения параметра  $\theta$  на концах участка:

$$\theta_{np} = -\frac{1}{GI_{kp}} \left( M_{kp} - \frac{B_n k}{sh(kl)} + \frac{B_{np} k}{th(kl)} \right); \quad (6.38a)$$

$$\theta_n = -\frac{1}{GI_{kp}} \left( M_{kp} - \frac{B_n k}{th(kl)} + \frac{B_{np} k}{sh(kl)} \right)$$

Так как бимоменты на границах между участками из условий равновесия должны быть равны между собой, то при наличии  $m$  участков число не-

известных бимоментов будет равно  $m+1$ . Для их определения следует составить  $m-1$  уравнений совместности деформаций (уравнений равенства деформаций) для границ между участками и присоединить к ним два граничных условия для концов стержня. Составив и решив эти уравнения относительно бимоментов, дальнейший анализ напряженно-деформированного состояния составного стержня можно выполнить по формулам (6.35) - (6.38).

## 6.2. РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК

### 6.2.1. Основные понятия теории изгиба пластинок

Пластинкой называется тело, у которого высота  $h$  мала по сравнению с размерами в плане. Плоскость, делящая пластинку по толщине пополам, называется срединной плоскостью (рис.6.18). Пластинка называется тонкой, если отношение ее толщины к наименьшему размеру в плане меньше или равно 0.1.



Рис.6.18

При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинок координатная плоскость  $XOY$  совмещается со срединной поверхностью. Перемещение в направлении, перпендикулярном срединной плоскости, называется прогибом пластины. В автотракторном машиностроении к пластинкам можно отнести элементы кузовов, кабин, крышки различных механизмов и т.п.

Тонкие пластинки рассчитываются по приближенной теории – по так называемой технической теории изгиба пластинок. Эта теория основывается на следующих гипотезах.

#### Гипотеза прямых нормалей

Согласно этой гипотезе любой линейный элемент, перпендикулярный срединной плоскости пластинки до деформации, остается прямым и перпендикулярным изогнутой срединной поверхности после деформации, длина его не изменяется. Эта гипотеза иллюстрируется на рис. 6.19, где показаны линейные элементы на передней и правой боковой гранях до и после деформации.

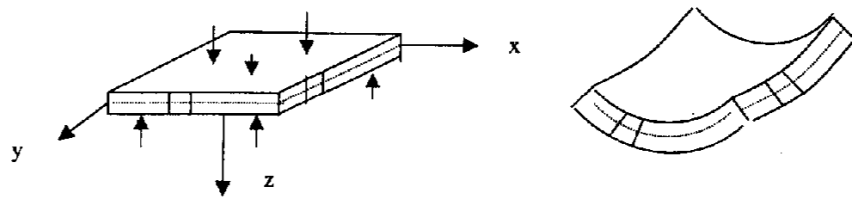


Рис.6.19

Данная гипотеза означает, что равны нулю следующие компоненты деформаций:

$$\gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad (6.39) \quad \varepsilon_z = 0 \quad (6.40)$$

### Гипотеза об отсутствии давления между слоями

Эта гипотеза позволяет пренебречь нормальными напряжениями в направлении оси  $z$ , т.е. принять  $\sigma_z = 0$ .

### 6.2.2. Перемещения и деформации пластинки

Рассмотрим изгиб пластинки под действием поперечной нагрузки.

Из теории упругости известно, что деформация в направлении оси  $z$  определяется формулой  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ . В силу первой гипотезы  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , следовательно, прогибы пластинки не зависят от координаты  $z$ , т.е. являются функцией только двух координат -  $x$  и  $y$ .

Из формул (6.39) с использованием геометрических уравнений теории упругости для сдвигов получаем

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.41)$$

Интегрируя соотношения (6.41) по  $z$ , получаем

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \quad (6.42)$$

При малых прогибах пластинки ( $w < h$ ) перемещениями  $u$  и  $v$  в срединной плоскости (т.е. при  $z = 0$ ) можно пренебречь, следовательно,

$$u_0 = -0 \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y) = 0; \quad v_0 = -0 \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y) = 0 \quad (6.43)$$

или

$$f_1(x, y) = 0; \quad f_2(x, y) = 0. \quad (6.44)$$

На основании (6.42) и (6.44) получаем

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.45)$$

Используя геометрические соотношения теории упругости, находим компоненты деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad (6.46)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

### 6.2.3. Напряжения в пластинке

Для вычисления напряжений используем закон Гука. Уравнения обобщенного закона Гука имеют следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (6.47)$$

Из первых двух уравнений (6.47) находим

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x). \quad (6.48)$$

Подставляя в формулы (6.48) значения деформаций из (6.46), получаем

$$\sigma_x = -\frac{E}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (6.49)$$



Из третьей формулы (6.47) находим

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.50)$$

Напряжение  $\sigma_z = 0$ , как было установлено на основании первой гипотезы, или гипотезы прямой нормали. Но основании этой же гипотезы равны нулю деформации сдвига  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ . Следовательно, в силу закона Гука, должны быть равны нулю и напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Однако, если принять эти напряжения равными нулю, то не будут соблюдаться дифференциальные уравнения равновесия, которые для любого твердого тела, как известно из теории упругости, имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (6.51)$$

Таким образом, возникает некоторое противоречие, обусловленное принятыми кинематическими гипотезами относительно деформирования пластинки. Эти противоречия можно устранить, если касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  принять отличными от нуля и искать их из уравнений равновесия (6.51). Подставляя в первые два уравнения (6.51) значения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , определяемые формулами (6.49) и (6.50) и решая эти уравнения относительно  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , получаем

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad \tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (6.52)$$

Эпюры напряжений в пластинке, определяемых формулами (6.49), (6.50) и (6.52), показаны на рис.6.20.

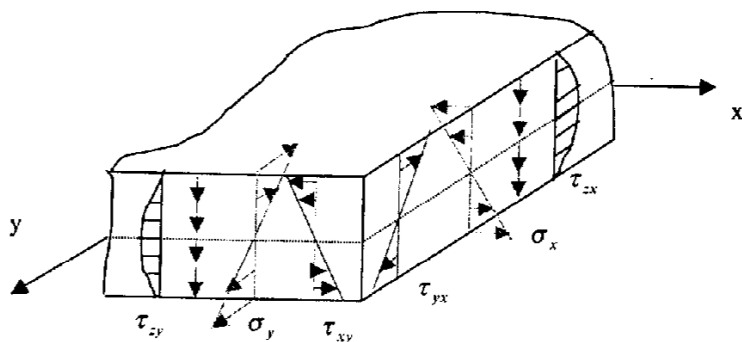


Рис.6.20

## 6.2.4. Усилия в пластинке

Из приведенных выше формул видно, что все параметры НДС (перемещения, деформации, напряжения) пластинки выражаются через одну единственную функцию – функцию прогибов  $w$ . Для определения этой функции составляется уравнение равновесия пластинки, выраженное через усилия в ее поперечных сечениях. Рассмотрим эти усилия. Для этого вырежем из пластинки прямоугольный элемент с размерами сторон, равными единице (рис.6.21). На рис.6.21,а показаны напряжения, действующие на гранях элемента, а на рис.6.21,б – усилия, приведенные к срединной поверхности.

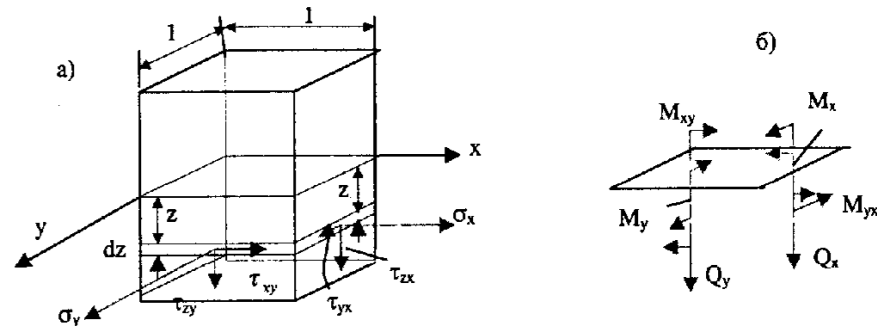


Рис.6.21

Усилия находятся как равнодействующие напряжений. Например, изгибающий момент  $M_x$  находится так:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x dz) z = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz =$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{h^3}{12} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

где буквой  $D$  обозначена так называемая цилиндрическая жесткость пластинки, равная

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Аналогичным образом находим остальные усилия. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); & Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\
 M_{yx} = M_{xy} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{6.53}$$

### Выражение напряжений через усилия

Напряжения в элементе пластинки, изображенном на рис.6.21, могут быть выражены через усилия, как для балки прямоугольного сечения, т.е.

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{1 \times h^2} = \frac{6M_x}{h^2}.$$

В этой формуле через  $W_x$  обозначен момент сопротивления элемента пластинки изгибу в плоскости  $XOZ$ .

Аналогично находим:

$$\max \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \max \tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2}; \quad \max \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}; \quad \max \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}$$

### 6.2.5. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

Для получения основного разрешающего уравнения для пластинки вырежем из нее элемент срединной поверхности с размерами сторон  $dx$  и  $dy$ , покажем усилия, действующие на элемент (рис.6.22), и составим уравнения равновесия. Отметим, что усилия на ребрах элемента, расположенных друг от друга на бесконечно малых расстояниях  $dx$  и  $dy$ , также отличаются между собой на бесконечно малые величины, и найдены путем разложения функций, выражающих эти усилия, в ряд Тейлора.

Спроектируем все силы, действующие на элемент пластинки, на ось  $z$ . Получим

$$\sum Z = -Q_x dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0.$$

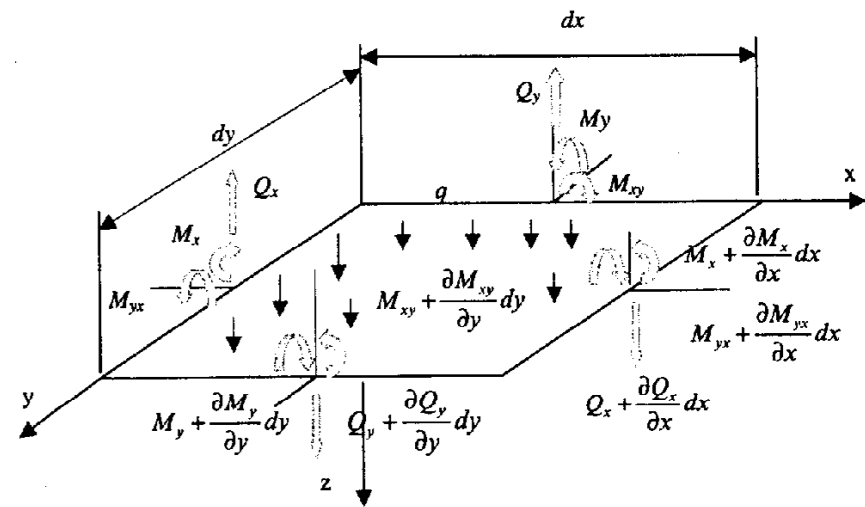


Рис.6.22

После элементарных преобразований находим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q.
 \tag{6.54}$$

Из уравнения  $\sum M_y = 0$  получаем (промежуточные преобразования опущены):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x,
 \tag{6.55}$$

а из уравнения  $\sum M_x = 0$ :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y.
 \tag{6.56}$$

Дифференцируя (6.55) по  $x$ , (6.56) – по  $y$ , суммируя левые и правые части этих уравнений и учитывая (6.54), получаем

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q
 \tag{6.57}$$

Подставляя в уравнение (6.57) значения изгибающих и крутящих моментов, выраженные через прогибы  $w$ , находим

$$-D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q,$$

или, после упрощений,

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q. \quad (6.58)$$

Уравнение (6.58) называется дифференциальным уравнением изогнутой срединной поверхности пластинки, или уравнением Софи Жермен. Это уравнение необходимо решать при соблюдении граничных условий, или условий на контуре. Наиболее просто граничные условия формулируются для прямоугольной пластинки с защемленными краями. В этом случае (см. рис.6.23) для края  $AB$  при  $y=0$  имеем:  $w=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ , т.е. прогибы и углы поворота равны нулю. На шарнирно опертых краях  $BC$  и  $AD$  (рис.6.23) равны нулю прогибы и изгибающие моменты, т.е.  $w=0$  и  $M_x=0$ . Выражая изгибающий момент через прогибы согласно соотношениям (6.53), условие равенства нулю изгибающего момента приводим к виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Так как на шарнирно опертых краях прогибы равны нулю, то вторая производная  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$  и граничные условия для шарнирно опертых краев,

параллельных оси  $y$ , принимают вид: при  $x=0$  и  $x=a$   $w=0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ .

Более сложный вид имеют граничные условия для свободного края. На свободных краях пластинки равны нулю изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы. Так, для края  $CD$  пластинки рис.6.23 при  $y=b$  имеем:  $M_y=0$ ,  $M_{xy}=0$  и  $Q_y=0$ . Для решения дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки для каждого края необходимо иметь два условия, здесь же мы имеем три. Объединим два условия  $M_{xy}=0$  и  $Q_y=0$  в одно. Выделим на грани  $CD$  два соседних участка длиной  $dx$  каждый (рис.6.24).

Если на одном участке  $dx$  действует крутящий момент  $M_{xy}dx$ , то на соседнем с ним участке такой же длины будет действовать крутящий момент  $(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx)dx$ . Первый из них представим в виде пары сил  $M_{xy}$  с плечом  $dx$ , а второй – в виде пары сил  $(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx)$  с тем же плечом. На границе между участками равнодействующая этих сил равна  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$ . Эту силу можно представить как равнодействующую некоторой поперечной нагрузки интенсивностью  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$ . Объединив эту нагрузку с действующей на грани  $CD$  поперечной силой  $Q_y$ , получаем приведенную поперечную силу интенсивностью  $Q_y^{прив} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ .

Исключение составляют крайние точки  $C$  и  $D$ , в которых остаются сосредоточенные силы  $M_{xy}^C$  и  $M_{xy}^D$ . На гранях, параллельных оси  $y$ , приведенная поперечная сила  $Q_x^{прив} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ . Граничные условия для свободного края  $CD$ , параллельного оси  $x$ , принимают вид: при  $y=b$   $M_y=0$ ,  $Q_y^{прив}=0$ . Выразив усилия, входящие в эти условия, через прогиб  $w$  согласно формулам (6.53), при  $y=b$  получаем

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

### 6.2.6. Круглые пластинки

При расчете круглых пластинок удобнее как нагрузки, так и граничные условия задавать не в декартовой, а в полярной системе координат. Но в этом случае желательно и усилия, действующие в пластинке, и дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности также записать в полярных координатах. Это можно сделать следующим образом.

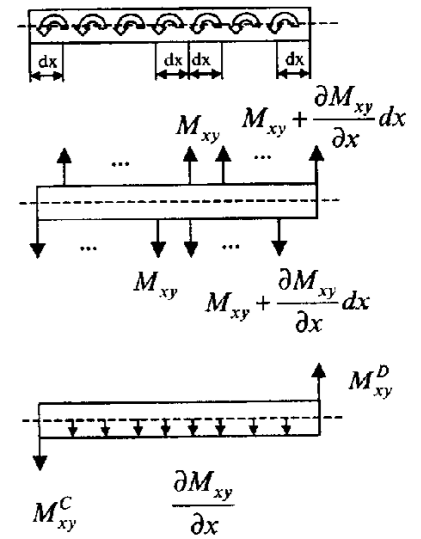


Рис.6.24

Отсчет полярных координат в пластинке будем производить, как показано на рис.6.25. Выразим полярные координаты через декартовы:

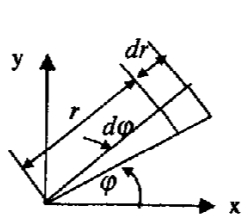


Рис.6.25

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Найдем производные от  $r$  и  $\theta$  по  $x$  и  $y$ .  
Получим:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Выразим теперь производные от прогибов пластинки  $w$  по декартовым координатам через полярные координаты.

Согласно правилам дифференцирования сложных функций имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \sin \varphi. \quad (6.59)$$

Применяя полученное правило дифференцирования по  $x$  дважды к функции прогибов, получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \varphi -$$

$$- 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + 2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \quad (6.60)$$

Аналогичным образом можно найти:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}, \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial r} \frac{\cos 2\varphi}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos 2\varphi}{r^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2}. \quad (6.62)$$

С учетом формул (6.60) и (6.62) оператор Лапласа записывается так:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (6.63)$$

Представляя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (6.58) в виде

$$D \nabla \nabla w = q \quad (6.64)$$

и заменяя в этом уравнении оператор Лапласа его представлением (6.63) в полярных координатах, получаем:

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q}{D}. \quad (6.65)$$

Уравнение (6.65) дает возможность рассчитывать круглые пластинки в полярных координатах при действии произвольной нагрузки. Внутренние усилия в пластинке в этом случае также целесообразно относить к полярным координатам. Вырежем из пластинки элемент двумя осевыми плоскостями, угол между которыми равен  $d\varphi$ , и двумя цилиндрическими поверхностями радиуса  $r$  и  $r+dr$  (рис.6.26). Моменты и силы, действующие на

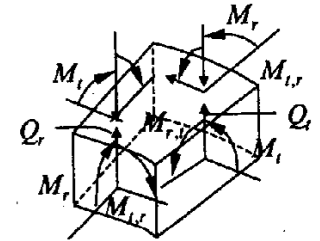


Рис.6.26

границах элемента, обозначим  $M_r, M_t, M_n, Q_r, Q_t$ . При  $\varphi=0$  (см.рис.6.25) радиус  $r$  совпадает с осью  $x$  и указанные усилия будут равны усилиям  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ . Учитывая это обстоятельство и подставляя в формулы для усилий производные от прогиба по декартовым координатам, выраженные через полярные координаты, получаем:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right];$$

$$M_t = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]; \quad (6.66)$$

$$M_n = (1-\mu) D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right];$$

$$Q_r = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right);$$

$$Q_t = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Если радиус пластинки равен  $R$ , то граничные условия при различных способах опирания записываются следующим образом.

В случае защемления:

$$(w)_{r=R} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

В случае шарнирного опирания:

$$(w)_{r=R} = 0; (M_r)_{r=R} = 0.$$

В случае свободного контура:

$$(M_r)_{r=R} = 0; Q^{npus} = \left(Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\pi}}{\partial \varphi}\right)$$

### Изгиб круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластинок

Детали в виде круглых и кольцевых пластинок находят широкое применение в технике. Рассмотрим случай осесимметричного нагружения, когда закон распределения нагрузки и условия закрепления пластинки не изменяются по угловой координате  $\varphi$  (рис. 6.27,а). В этом случае уравнение (6.65) существенно упрощается и принимает вид:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D} \quad (6.67)$$

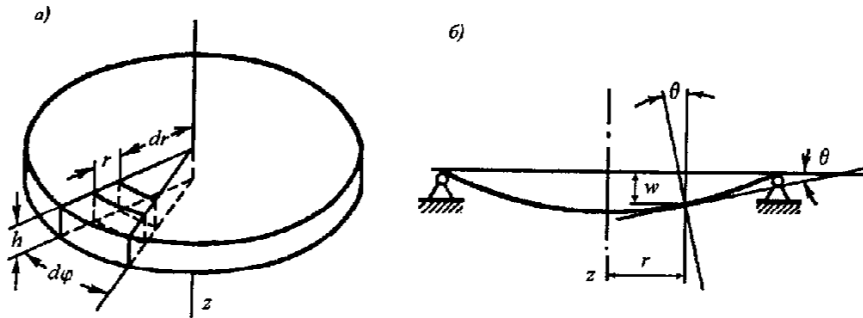


Рис.6.27

Умножив левую и правую части уравнения (6.67) на  $r$  и проинтегрировав полученное соотношение, получим:

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{rD} \int_0^r q r dr. \quad (6.68)$$

Между поперечной силой  $Q_r$ , распределенной по периметру кругового сечения радиуса  $r$ , и нагрузкой  $q$  легко установить следующее соотношение:

$$Q_r 2\pi r = \int_0^r q 2\pi r dr.$$

Из этого соотношения находим

$$Q_r = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (6.69)$$

При принятом на рис.6.27 правиле знаков для перемещений  $w$  и углов поворота  $\theta$  нормали к пластинке вокруг касательной к окружности радиуса  $r$  между указанными величинами существует следующая дифференциальная зависимость:

$$\theta = -\frac{dw}{dr}. \quad (6.70)$$

С учетом соотношений (6.69) и (6.70) дифференциальное уравнение (6.68) приводится к виду

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} = -\frac{Q_r}{D}. \quad (6.71)$$

Формулы для внутренних усилий (6.66) также упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} M_r &= D \left( \frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right); & M_t &= D \left( \frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right); \\ Q_r &= D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right); & Q_t &= M_{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Ограничимся случаем расчета пластин постоянной толщины ( $D=const$ ). В этом случае интеграл уравнения (6.71) имеет вид:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int [\hat{r}] Q d\tilde{r} \Big|_r, \quad (6.73)$$

где  $\hat{r}$  и  $\tilde{r}$  — вспомогательные переменные (в формуле (6.73) и в дальнейшем поперечная сила  $Q_r$  обозначается буквой  $Q$  без индекса).

Рассмотрим методику определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ . Эти величины определяются по граничным условиям на краях или в центре пластины. Наиболее часто встречаются следующие граничные условия:

1. Внутренний или наружный край пластины жестко заделан или зашпелен. В этом случае при соответствующем значении радиуса  $r$  угол поворота нормали  $\vartheta$  равен нулю.

2. Край пластины шарнирно оперт или свободен. В этом случае напряжение  $\sigma_r$  и момент  $M_r$  на краю равны нулю и, следовательно, на основании зависимости (6.72) получаем

$$D \left[ \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right]_{r=r^*} = 0, \quad (6.74)$$

где  $r^*$  — радиус, соответствующий данному краю.

3. К краю пластины приложен распределенный момент  $m$ ; тогда, согласно уравнению (6.72), должно выполняться равенство

$$D \left[ \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right]_{r=r^*} = m. \quad (6.75)$$

4. Для сплошной пластины без отверстия угол поворота нормали при  $r = 0$  не должен обращаться в бесконечность; следовательно, в этом случае  $C_2 = 0$ .

5. Пластина подкреплена краевым кольцевым ребром высотой  $H$  и толщиной  $B$ . По условию равновесия изгибающий момент в поперечном сечении кольца равен (см. раздел 4.1)

$$M_k = (M_r \cdot r)_{r=r^*}.$$

С другой стороны, угол поворота кольца  $\varphi$ , равный углу поворота пластины  $\vartheta$  в рассматриваемом сечении, определяется по формуле (4.21)

$$\varphi = \frac{M_k}{EI_3} = \frac{M_k r^*}{EI_x},$$

где  $I_x = \frac{BH^3}{12}$  — момент инерции сечения ребра.

Учитывая соотношения, связывающие моменты и углы поворота кольца и пластины в рассматриваемом сечении, получаем

$$\vartheta = \varphi = \frac{M_k r^*}{EI_x} = (M_r \cdot r^*) \frac{r^*}{EI_x} = D \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \frac{(r^*)^2}{EI_x}$$

или

$$\left( \frac{1}{D} - \frac{\nu (r^*)^2}{r EI_x} \right) \vartheta - \frac{d\vartheta}{dr} \frac{(r^*)^2}{EI_x} = 0. \quad (6.76)$$

Отметим, что в предельных случаях для очень жесткого и очень податливого кольцевого ребра формула (6.76) описывает граничные условия 1 и 2.

Формулы для вычисления напряжений по изгибающим моментам получим, используя равенства (6.49), (6.60), (6.61) и (6.72):

$$\sigma_r = \frac{12M_r z}{h^3}; \quad \sigma_t = \frac{12M_t z}{h^3}. \quad (6.77)$$

Максимальные нормальные напряжения возникают при  $z = \pm \frac{h}{2}$ :

$$\sigma_{r \max} = \pm \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_{t \max} = \pm \frac{6M_t}{h^2}. \quad (6.78)$$

Рассмотрим вопрос об определении прогиба  $w$ . Прогиб связан с углом поворота нормали  $\vartheta$  соотношением (6.70). Откуда следует, что

$$w = C_3 - \int_{r_0}^r \vartheta dr. \quad (6.79)$$

Постоянная  $C_3$  имеет физический смысл прогиба в начальной точке интервала интегрирования, т.е. прогиба при  $r=r_0$ . В случае неподвижного опирания при  $r=r_0$ ,  $C_3=0$ . Если в начальной точке интегрирования прогиб неизвестен, то постоянная  $C_3$  определяется из граничного условия, наложенного на функцию прогиба. Для случая, когда прогиб  $w$  на контуре пластины (при  $r=R$ ) равен 0, получаем

$$w = C_3 - \int_{r_0}^R \vartheta dr = 0, \quad C_3 = \int_{r_0}^R \vartheta dr$$

Поэтому для определения прогиба можно использовать выражение, не содержащее постоянную  $C_3$

$$w = \int_{r_0}^R \vartheta dr - \int_{r_0}^r \vartheta dr = \int_r^R \vartheta dr = - \int_r^R \vartheta dr. \quad (6.80)$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.**

Исследовать напряженно-деформированное состояние в круглой пластине радиуса  $R$  постоянной толщины  $h$ , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $p$ . Контур пластины неподвижно зашпемлен (рис.6.28).

*Решение.*

Для определения величины  $Q$  рассмотрим равновесие центральной части пластины, вырезанной по окружности текущего радиуса. Это уравнение записывается в виде

$$Q \cdot 2\pi r - p \cdot \pi r^2 = 0, \text{ откуда } Q = \frac{pr}{2}.$$

Из выражения (6.73) после двукратного интегрирования находим

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

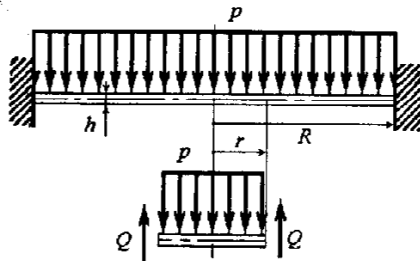


Рис.6.28

Поскольку угол поворота пластины  $\theta$  в центре (при  $r = 0$ ) должен быть равен нулю, константа  $C_2 = 0$ . Таким образом, выражение для угла поворота приобретает вид

$$\theta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D}.$$

На контуре при  $r=R$  угол  $\theta = 0$ , откуда  $C_1 = \frac{pR^2}{16D}$  и  $\theta = \frac{pr}{16D} (R^2 - r^2)$

Согласно выражениям (6.72), получаем

$$M_r = \frac{p}{16} [R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)], \quad M_t = \frac{p}{16} [R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)].$$

Используя выражения (6.78), получим формулы для определения напряжений в точках, расположенных у поверхности пластины (при  $z = \pm \frac{h}{2}$ ):

$$\sigma_r = \pm \frac{3p}{8h^2} [R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$$

$$\sigma_t = \pm \frac{3p}{8h^2} [R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$$

На рис. 6.29 показаны эпюры распределения напряжений по радиусу для точек, прилегающих к верхней поверхности пластины.

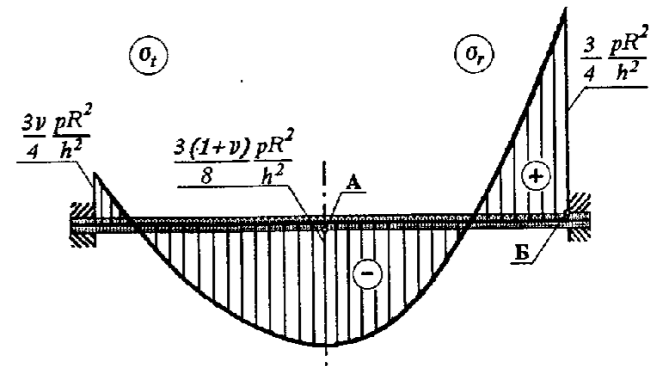


Рис.6.29

Оценку прочностных характеристик пластины проведем, воспользовавшись энергетической теорией начала текучести. Учитывая, что напряженное состояние в пластине двухосное, эквивалентное напряжение  $\sigma_{экв}$  в анализируемых опасных точках подсчитываем по формуле

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t}.$$

В центре пластины (точка А) эквивалентное напряжение равно

$$\sigma_{экв}^A = \frac{3(1+\mu)}{8} \cdot \frac{pR^2}{h^2}.$$

На краю пластины

$$\sigma_{экв}^B = \frac{3\sqrt{1-\mu+\mu^2}}{4} \cdot \frac{pR^2}{h^2}.$$

При  $\mu = 0,3$  это составит:

$$\sigma_{экв}^A \approx 0,488 \cdot \frac{pR^2}{h^2}, \quad \sigma_{экв}^B \approx 0,666 \cdot \frac{pR^2}{h^2}$$

Таким образом, наиболее опасной точкой будет точка у зашпемленного края.

Для оценки деформативных свойств пластины подсчитаем величину максимального прогиба. Согласно (6.80)

$$w = C_3 - \int_0^r \theta dr = \int_r^R \theta dr = \int_r^R \frac{pr}{16D} (R^2 - r^2) dr = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2.$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластины при  $r = 0$  и равен

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D}. \quad (6.81)$$

При расчетах бывает полезно знать величину объема, заключенного между начальной срединной плоскостью пластины и ее упругой поверхностью. Объем элементарного кольца равен (см. рис.6.30)  $dV = 2\pi r dr w$ .

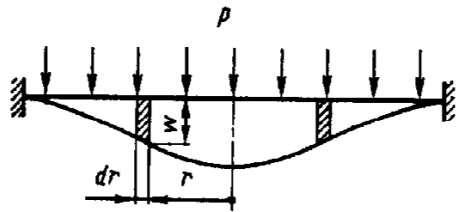


Рис.6.30

Полный объем  $V$  найдем, просуммировав элементарные объемы. Получим:

$$V = 2\pi \int_0^R wr dr.$$

Используя выражение для прогиба (6.81), получаем

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 w_{\max}. \quad (6.82)$$

### Пример 2.

Кольцевая пластина, защемленная по контуру, усилена кольцевым ребром по внутреннему радиусу. Пластина нагружена по кольцу распределенной погонной нагрузкой  $P=5$  Н/мм. Материал пластины сталь: модуль упругости  $E=2 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu=0,3$ ; предел текучести

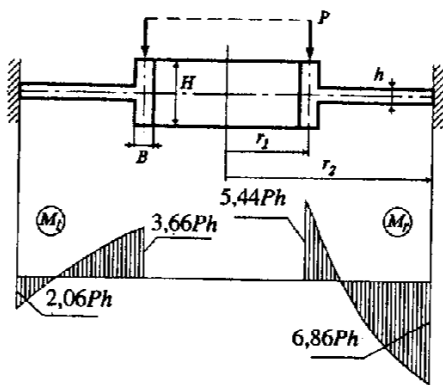


Рис.6.31

материала  $\sigma_r = 400$  МПа; толщина пластины  $h=1$  мм. Характерные размеры пластины:  $r_1=20h$ ;  $r_2=40h$ ;  $H=3h$ ;  $B=2h$  (см. рис.6.31)

Требуется определить коэффициент запаса по текучести и максимальный прогиб пластины.

Рассматривая отсеченную текущим радиусом  $r$  внутреннюю кольцевую часть пластины, находим

$$Q = \frac{Pr_1}{r}.$$

Используя правило интегрирования по частям, подсчитываем интеграл в формуле (6.73):

$$\begin{aligned} \int [r] Q d\bar{r} dr &= \int \left[ r \int \frac{Pr_1}{r} dr \right] dr = \int r (Pr_1 \ln r) dr = Pr_1 \left[ \frac{r^2}{2} \ln r - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right] = \\ &= Pr_1 r^2 \left( \frac{1}{2} \ln r - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{Pr_1 r}{2D} \ln r + \frac{Pr_1 r}{4D} - \frac{Pr_1 r}{2D} \ln r_1 + \frac{Pr_1 r}{2D} \ln r_1.$$

Два последних слагаемых, равные в сумме нулю, добавлены, чтобы избавиться от размерной величины под логарифмом. Группируя слагаемые и вводя новую константу  $C_1^* = C_1 + \frac{Pr_1}{4D} + \frac{Pr_1}{2D} \ln r_1$ , получаем зависимость для определения угла поворота  $\vartheta$

$$\vartheta = C_1^* r + \frac{C_2}{r} - \frac{Pr_1 r}{2D} \ln \frac{r}{r_1}.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{d\vartheta}{dr} = C_1^* - \frac{C_2}{r^2} - \frac{Pr_1 r}{2D} \left( \ln \frac{r}{r_1} + 1 \right).$$

Согласно выражениям (6.72), изгибающие моменты равны:

$$\begin{aligned} M_r &= D \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) = (1 + \mu) DC_1^* - (1 - \mu) \frac{DC_2}{r^2} - (1 + \mu) \frac{Pr_1}{2} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{Pr_1}{2}; \\ M_r &= D \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) = (1 + \mu) DC_1^* + (1 - \mu) \frac{DC_2}{r^2} - (1 + \mu) \frac{Pr_1}{2} \ln \frac{r}{r_1} - \mu \frac{Pr_1}{2}. \end{aligned}$$

Граничные условия записываются следующим образом:

1. При  $r=r_1$  используем условие (6.76), описывающее сопряжения пластины с кольцевым ребром:

$$\vartheta - \frac{D(r_1)^2}{EI_x} \left( \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_1} + \mu \frac{\vartheta}{r_1} \right) = 0,$$

$$\text{где } I_x = \frac{BH^3}{12} = \frac{2h \cdot (3h)^3}{12} = 4,5h^4.$$



2. На внешнем контуре пластины при  $r=r_2$  угол поворота  $\vartheta=0$ .

При дальнейших расчетах удобно все линейные размеры выразить в долях толщины пластины  $h$ . Вспомогательное соотношение в граничном условии 1 для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{D(r_1)^2}{EI_x} = \frac{Eh^3 \cdot (20h)^2}{12(1-\mu^2) \cdot E \cdot 4,5h^4} = 8,14h.$$

Подставляя выражения для угла поворота и его производной в граничные условия, получаем систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} -9,42h \cdot C_1^* - \frac{0,0643}{h} \cdot C_2 = 81,4 \cdot \frac{Ph^2}{D} \\ 40h \cdot C_1^* - \frac{0,025}{h} \cdot C_2 = 277,2 \cdot \frac{Ph^2}{D} \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, находим значения постоянных коэффициентов

$$C_1^* = 8,50 \cdot \frac{Ph}{D}, \quad C_2 = -2510 \cdot \frac{Ph^3}{D}.$$

Искомая функция угла поворота имеет вид

$$\vartheta = 8,50 \cdot \frac{Ph}{D} \cdot r - 2510 \cdot \frac{Ph^3}{Dr} - 10 \frac{Ph}{D} \cdot r \ln \frac{r}{r_1}.$$

Выражения для изгибающих моментов записываются следующим образом:

$$M_r = \left[ 11,05 + 1757 \cdot \frac{h^2}{r^2} - 10 \left( 1 + 1,3 \ln \frac{r}{20h} \right) \right] \cdot Ph;$$

$$M_t = \left[ 11,05 - 1757 \cdot \frac{h^2}{r^2} - 10 \left( 0,3 + 1,3 \ln \frac{r}{20h} \right) \right] \cdot Ph.$$

Эпюры распределения изгибающих моментов представлены на рис.6.31.

Наиболее опасной является точка, примыкающая к внешнему зашеченному контуру пластины:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 6,86 \cdot Ph}{h^2} \approx 206 \text{ МПа}, \quad \sigma_t = \frac{6M_t}{h^2} = \frac{6 \cdot 2,06 \cdot Ph}{h^2} \approx 61,8 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение по энергетической теории прочности составляет:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2} \approx 183 \text{ МПа},$$

а коэффициент запаса по текучести будет равен

$$n_y = \frac{400}{183} \approx 2,19.$$

Максимальный прогиб, возникающий при  $r=r_1$ , подсчитаем, проинтегрировав функцию угла поворота согласно (6.80):

$$\begin{aligned} w &= -\int_1^2 \vartheta dr = -\int_{20h}^{20h} \left( 8,50 \cdot \frac{Ph}{D} \cdot r - 2510 \cdot \frac{Ph^3}{Dr} - 10 \frac{Ph}{D} \cdot r \ln \frac{r}{20h} \right) dr = \\ &= \frac{Ph}{D} \left[ 8,50 \cdot \frac{r}{2} - 2510 \cdot h^2 \cdot \ln 2 - 10 \left( \frac{r^2}{2} \cdot \ln \frac{r}{20h} - \frac{r^2}{4} \right) \right] = 0,22 \text{ мм}. \end{aligned}$$

### Расчет круглых и кольцевых пластин на ЭВМ

Уравнение (6.72) допускает получение аналитического решения в ограниченном числе случаев. Более удобной формой представления разрешающих соотношений является их представление в виде системы линейных дифференциальных уравнений.

Согласно соотношению (6.70),

$$\frac{dw}{dr} = -\vartheta. \quad (6.83)$$

Используя первое из выражений (6.72), выразим производную угла поворота через изгибающие моменты:

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{M_r}{D} - \mu \frac{\vartheta}{r}. \quad (6.84)$$

Третье соотношение получаем, используя уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил, действующих на бесконечно малый элемент пластинки (рис.6.33), относительно касательной к окружности (ось  $y$  на рис.6.33):

$$\frac{d(M_r r)}{dr} - M_t = -Qr \quad (6.85)$$

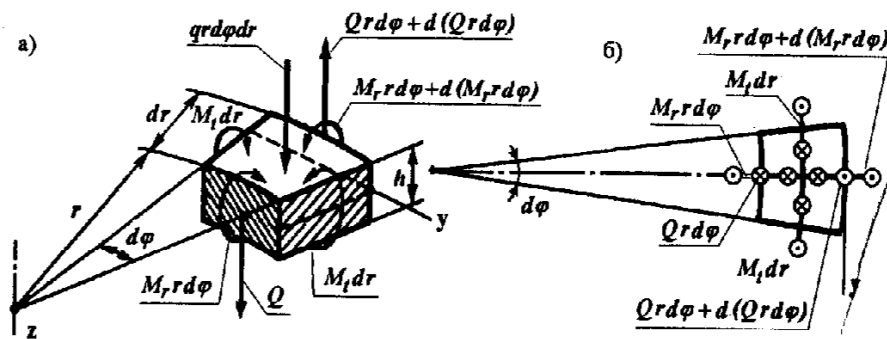


Рис.6.32

Из (6.85) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dM_r}{dr} &= \frac{1}{r}(M_t - M_r) - Q = \frac{1}{r} \left[ D \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right) - M_r \right] - Q = \\ &= \frac{1}{r} \left[ D \left( \frac{\vartheta}{r} + \nu \left( \frac{M_r}{D} - \nu \frac{\vartheta}{r} \right) \right) - M_r \right] - Q = \\ &= (1 - \nu^2) \frac{D\vartheta}{r^2} - (1 - \nu) \frac{M_r}{r} - Q. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Завершающее комплектование системы четвертое соотношение получим, используя уравнение равновесия бесконечно малого элемента в виде суммы проекций всех сил на ось z:

$$\frac{d(Qr)}{dr} = qr. \quad (6.87)$$

Из уравнения (6.87) находим:

$$\frac{dQ}{dr} = q(r) - \frac{Q}{r}. \quad (6.88)$$

Система уравнений (6.83), (6.84), (6.86) и (6.88) в рамках принятой теории описывает поведение круглых и кольцевых пластин при осесимметричном нагружении. Следует обратить внимание, что в полученных соотношениях цилиндрическая жесткость рассматривается как функция радиуса r. Поэтому полученная система уравнений применима к расчету пластин переменной толщины.

Процедура решения краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений методом начальных параметров подробно рассмотрена

в разделе 2.1.2 данной книги. Остановимся на некоторых специфических особенностях задачи.

При расчете пластин приходится иметь дело с системой уравнений 4-го порядка. В векторно-матричном виде система записывается следующим образом.

$$\frac{d\{Y\}}{dr} = [A(r)]\{Y(r)\} + \{B(r)\},$$

где  $\{Y(r)\} = \{w, \vartheta, M_r, Q\}^T$  — вектор-столбец основных неизвестных размером  $4 \times 1$ , называемый также вектором состояния в текущем сечении;  $[A(x)]$  — квадратная матрица коэффициентов при неизвестных размером  $4 \times 4$ , причем

$$[A(r)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{r} & \frac{1}{D} & 0 \\ 0 & (1 - \nu^2) \frac{D}{r^2} & \nu - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix},$$

$\{B(r)\} = \{0, 0, 0, q\}^T \{B(x)\}$  — вектор столбец свободных членов размером  $4 \times 1$ .

Краевые условия, по два на каждом краю, имеют вид:

$$\begin{aligned} [A_0]\{Y(0)\} + \{B_0\} &= \{0\}, \\ [A_1]\{Y(1)\} + \{B_1\} &= \{0\}, \end{aligned}$$

где  $[A_0]$  и  $[A_1]$  — матрицы краевых условий размером  $2 \times 4$ .

Запишем граничные условия для примера 2. В начальной точке интервала интегрирования ( $r = r_1$ ) нам известно, что угол поворота  $\vartheta$  связан с моментом  $M_r$  через характеристики кольцевого ребра

$$\vartheta - \frac{M_r}{EI_x} = 0.$$

Известно также значение перерезывающей силы  $Q = P$ . Поэтому матрица краевых условий приобретает вид:

$$[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{EI_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

В конечной точке интервала интегрирования ( $r=r_2$ ) прогиб  $w=0$  и угол поворота  $\theta=0$ , что позволяет представить матрицу граничных условий в виде:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все компоненты векторов-столбцов свободных членов в начальной и конечной точках интервала интегрирования  $\{B_0\}$  и  $\{B_1\}$  равны нулю.

Полученных соотношений достаточно для анализа напряженно-деформированного состояния круглых пластин на ЭВМ.

## 6.3. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК

### 6.3.1. Элементы общей теории оболочек

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями. Расстояние между поверхностями (толщина оболочки) может быть как постоянным, так и переменным. В связи с этим различают оболочки постоянной и переменной толщины. В зависимости от значения толщины оболочки делят на тонкостенные и толстостенные. Оболочки находят широкое применение в автомобилях, тракторах и других транспортных конструкциях. К ним относятся, например, кузова автомобилей, корпуса двигателей и коробок передач, всевозможные мембраны и т.п. Поэтому знание закономерностей деформирования оболочек и методов их расчета необходимо инженеру, занимающемуся проектированием и расчетом автотракторной техники.

Одним из основных методов определения усилий в элементах конструкций является метод сечений. При расчете стержней и пластин выбор сечения не представляет трудностей, обычно сечения проводятся перпендикулярно оси (в случае стержня) или срединной поверхности (в случае пластины). При расчете оболочек выбор сечения не является столь очевидным, поэтому изучению методов расчета оболочек обычно предшествует ознакомление с элементами теории поверхностей.

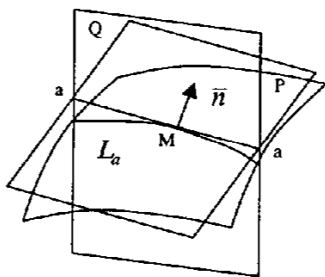


Рис.6.33

Рассмотрим некоторую криволинейную поверхность (рис.6.33). Проведем плоскость  $P$ , касательную к поверхности в точке  $M$ , и плоскость  $Q$ , перпендикулярную плоскости  $P$  и проходящую через ту же точку. Очевидно, что нормаль  $\bar{n}$  к поверхности в точке  $M$  лежит в плоскости  $Q$ . Проведем через точку  $M$  линию  $a-a$ , перпендикулярную нормали  $\bar{n}$  и лежащую в плоскости  $Q$ . Линию пересечения плоскости  $Q$  с поверхностью обозначим  $L_a$ . Линия  $L_a$

называется нормальным сечением поверхности в точке  $M$  по направлению  $a-a$ . В теории поверхностей доказано, что в каждой точке поверхности существуют два таких направления, кривизны нормальных сечений вдоль которых принимают максимальное и минимальное значения. Эти кривизны называются главными кривизнами, а соответствующие им направления - главными направлениями. Главные направления ортогональны. Линии на поверхности, касательные к которым в каждой точке совпадают с главными направлениями в этой точке, называются линиями кривизны поверхности. Обозначим главные кривизны и главные радиусы через  $k_1, k_2, R_1, R_2$  соответственно (рис.6.34). Напомним, что эти величины связаны между собой следующими соотношениями:

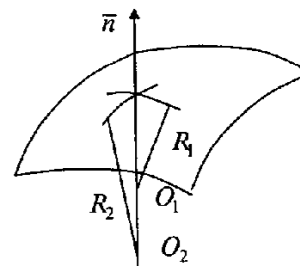


Рис.6.34

$$k_1 = \frac{1}{R_1}; \quad k_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Произведение кривизн  $\kappa = k_1 k_2$  называется главной кривизной. Различают оболочки нулевой, положительной и отрицательной гауссовой кривизны. Примеры различных типов оболочек приведены на рис.6.35.

Для определения положения точки на поверхности можно использовать любую систему криволинейных координат  $\alpha, \beta$ .

Координатными линиями на поверхности называются такие, вообще говоря, кривые линии, вдоль которых соблюдаются отношения  $\alpha = const; \beta = const..$

Если координатные линии совпадают с линиями главных кривизн, уравнения теории оболочек получаются наиболее простыми.

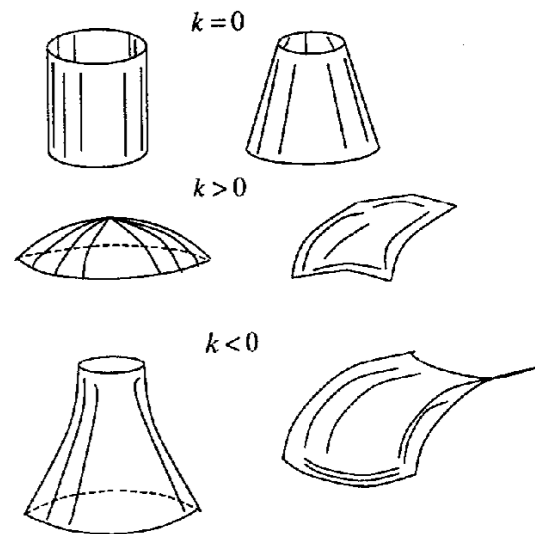


Рис.6.35

Уравнение любой поверхности в декартовых координатах можно записать так:

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = ix + jy + kz, \quad (6.89)$$

где  $i, j, k$  – единичные векторы неподвижной системы координат (см. рис. 6.36),  $r$  – радиус-вектор точки поверхности.

Для получения некоторых общих характеристик произвольной поверхности исследуем бесконечно малую область в окрестности точки  $M$  (рис. 6.37).

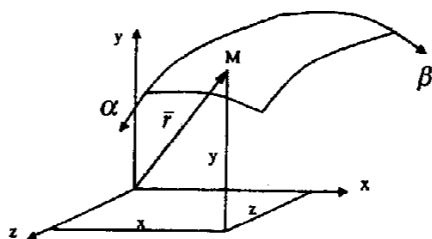


Рис. 6.36

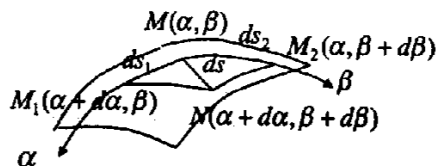


Рис. 6.37

В точке  $M$  проведем касательные к поверхности в направлении координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$  и в направлении точки  $N$  с координатами  $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$ . Бесконечно малые отрезки  $MM_1, MM_2, MN$  называются линейными элементами поверхности.

Представим линейные элементы  $ds_1$  и  $ds_2$  в виде:

$$ds_1 = A(\alpha, \beta)d\alpha; \quad ds_2 = B(\alpha, \beta)d\beta. \quad (6.90)$$

Тогда

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (6.91)$$

Выражение (6.91) называется первой квадратичной формой поверхности, а параметры  $A$  и  $B$  – коэффициентами первой квадратичной формы.

Линейные элементы  $ds_1$  и  $ds_2$  можно рассматривать как приращения вектора  $\vec{r}$  при переходе из точки  $M$  в точки  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Тогда

$$ds_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right| d\alpha; \quad ds_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| d\beta. \quad (6.92)$$

На основании (6.90) и (6.92) получаем:

$$A = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|; \quad B = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right|. \quad (6.93)$$

С учетом формулы (6.89)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = i \frac{\partial x}{\partial \alpha} + j \frac{\partial y}{\partial \alpha} + k \frac{\partial z}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = i \frac{\partial x}{\partial \beta} + j \frac{\partial y}{\partial \beta} + k \frac{\partial z}{\partial \beta}.$$

Тогда

$$A = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2}; \quad (6.94)$$

$$B = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2}.$$

Найдем в качестве примера коэффициенты первой квадратичной формы для поверхности вращения, образованной вращением некоторой произвольной кривой вокруг оси  $z$  (рис. 6.38,а). Радиус вращения для некоторой точки, принадлежащей заданной кривой, является функцией одной координаты –  $z$ . Главными линиями кривизны являются меридианы и параллели (рис. 6.38,б). Положение меридиана определяется углом  $\theta$ , а положение параллели – координатой  $z$ . Таким образом, за основные параметры поверхности вращения можно принять  $\alpha = z$  и  $\beta = \theta$ . Декартовы координаты точки находятся при этом следующим образом:

$$x = r(z) \cos \theta; \quad y = r(z) \sin \theta.$$

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы.

По формулам (6.94) получаем:

$$A = \sqrt{(r' \cos \theta)^2 + (r' \sin \theta)^2 + 1} = \sqrt{r'^2 + 1};$$

$$B = \sqrt{(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} = r.$$

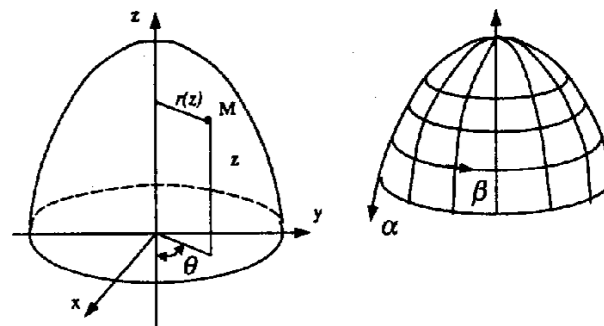


Рис. 6.38

Эти коэффициенты можно найти и непосредственно из рис.6.39.

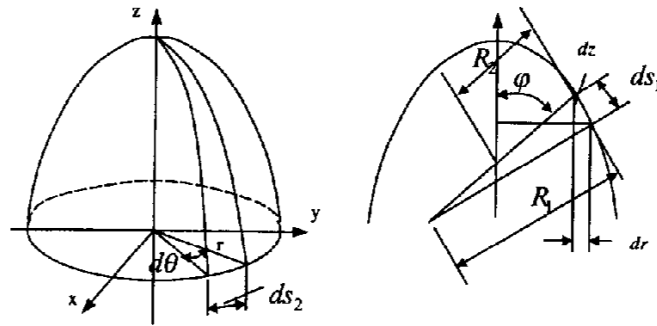


Рис.6.39

Получим:

$$ds_1 = \frac{dz}{\sin \varphi} = dz \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz; \quad ds_2 = r d\theta.$$

Из двух последних формул получаем те же самые значения коэффициентов  $A$  и  $B$ .

Как уже отмечалось, все оболочки можно разделить на две категории – тонкостенные и толстостенные. Методика расчета толстостенных оболочек рассматривалась выше (см. раздел 4.2). Теория расчета тонкостенных оболочек основана на некоторых гипотезах, учитывающих специфику работы этого типа конструкций. Основы этой теории излагаются ниже.

### Гипотезы Кирхгофа-Лява

1. Первая гипотеза является геометрической и формулируется следующим образом: отрезок прямой, перпендикулярный к срединной поверхности оболочки до ее деформации, остается прямым и перпендикулярным к срединной поверхности оболочки после деформации и сохраняет свою длину.
2. Вторая гипотеза по сути дела является физической и заключается в следующем: нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, малы по сравнению с остальными напряжениями.

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки будем пользоваться системой координат  $\alpha, \beta, z$ , где  $\alpha, \beta$  –

криволинейные координаты поверхности,  $z$  – координата, отсчитываемая по нормали к поверхности оболочки (рис.6.40,а). Определим длину бесконечно малого элемента  $dS$ , расположенного на расстоянии  $z$  от срединной поверхности (рис.6.40,б).

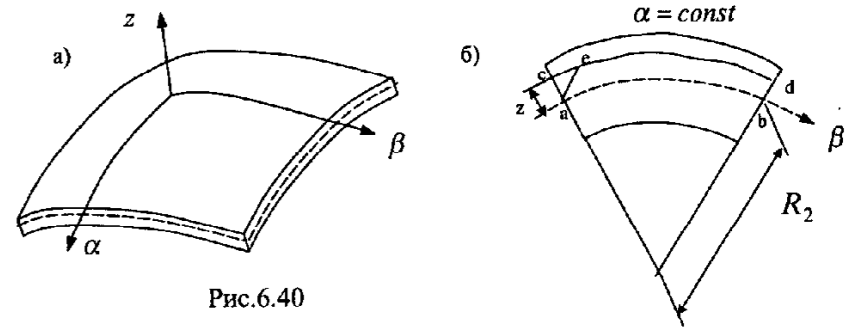


Рис.6.40

Из рис.6.40,б для плоскости  $\alpha = \text{const}$  находим:

$$\frac{ce}{ab} = \frac{z}{R_2}; \quad ce = \frac{z}{R_2} ab; \quad cd = ce + ed = ce + ab = ab \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) = ab(1 + zk_2)$$

Но длина элемента в срединной поверхности  $ab = ds_2 = B d\beta$ . Следовательно

$$cd = B(1 + zk_2) d\beta = B^* d\beta.$$

Аналогично, длина элемента расположенного на расстоянии  $z$  от срединной поверхности и лежащего в плоскости  $\beta = \text{const}$ , равна  $A(1 + zk_1) d\alpha = A^* d\alpha$ .

Длина элемента  $dS$ , расположенного на расстоянии  $z$  от срединной поверхности и лежащего в произвольной плоскости, может быть найдена из соотношения:

$$dS^2 = A^{*2} d\alpha^2 + B^{*2} d\beta^2 \quad (6.95)$$

где коэффициенты  $A^*$  и  $B^*$  определяются формулами:

$$A^* = A(1 + zk_1); \quad B^* = B(1 + zk_2). \quad (6.96)$$

Приступим теперь к отысканию усилий и напряжений, возникающих в оболочке под действием внешних сил.

### Связь между напряжениями и усилиями

Двумя плоскостями  $\alpha = const$  и  $\beta = const$  проведем сечения, как показано на рис.6.41. Напряжения, действующие в сечениях, заменим равнодействующими усилиями, приведя их к срединной поверхности оболочки (рис.6.42). Техника приведения распределенных по сечению напряжений к равнодействующим усилиям иллюстрируется рисунком 6.43. Пусть  $N_1$  – погонная продольная сила, действующая в направлении координатной оси  $\alpha$ . Тогда на элемент длиной  $ds_2 = Bd\beta$  будет действовать сила  $N_1 Bd\beta$ . Продольная сила, действующая на элементарную площадку, расположенную на расстоянии  $z$  от срединной

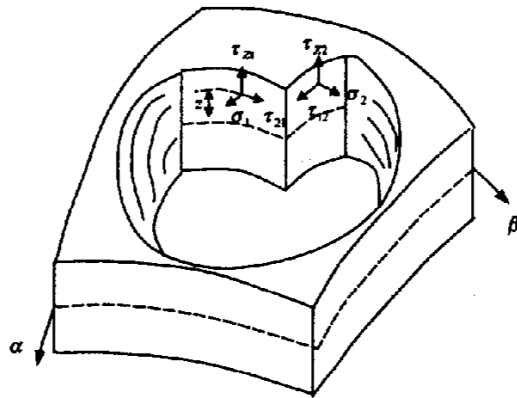


Рис.6.41

поверхности (см. рис.6.43), равна  $\sigma_1 B^* d\beta dz$ . Она найдена как произведение напряжения  $\sigma_1$  на элементарную площадь  $B^* d\beta dz$ . Из условия равновесия получаем

$$N_1 Bd\beta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 B^* d\beta dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 B(1 + zk_2) d\beta dz, \text{ откуда } N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1(1 + zk_2) dz.$$

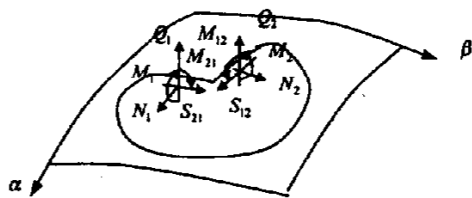


Рис.6.42

моментами  $M_1$  и  $M_2$ , крутящие моменты  $M_{12}$  и  $M_{21}$ . Они определяются следующими формулами:

Аналогичным образом могут быть найдены остальные усилия, показанные на рис.6.42. Всего в двух взаимно перпендикулярных сечениях оболочки действуют десять усилий: продольные силы  $N_1$  и  $N_2$ , сдвигающие силы  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ , изгибающие

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1(1 + zk_2) dz; & N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2(1 + zk_1) dz; \\ S_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}(1 + zk_2) dz; & S_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}(1 + zk_1) dz \\ Q_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{z1}(1 + zk_2) dz; & Q_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{z2}(1 + zk_1) dz; \\ M_1 &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1(1 + zk_2) z dz; & M_2 &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2(1 + zk_1) z dz; \\ M_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}(1 + zk_2) z dz; & M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}(1 + zk_1) z dz; \end{aligned} \quad (6.97)$$

### Уравнения равновесия

Для определения неизвестных усилий вырежем из оболочки двумя парами нормальных сечений при  $\alpha = const, \alpha + d\alpha = const, \beta = const$  и  $\beta + d\beta = const$  элемент, как показано на рис.6.43, и рассмотрим его равновесие.

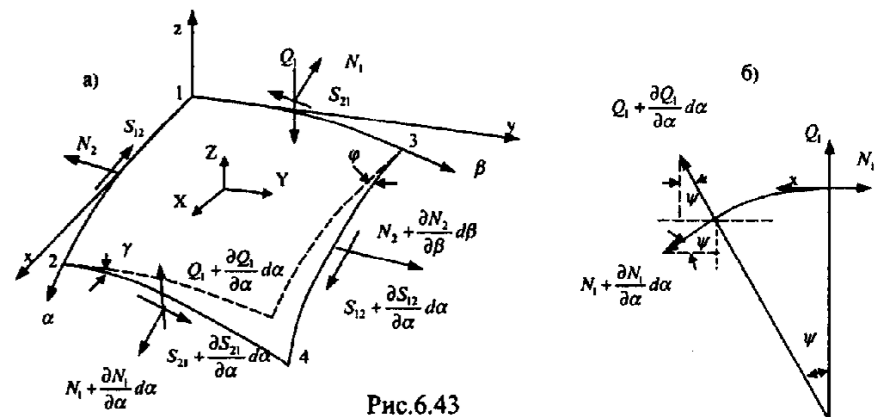


Рис.6.43

Для отсеченной части можно составить шесть уравнений равновесия – три уравнения проекций на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и три уравнения моментов относительно этих осей. При этом оси  $x$  и  $y$  направлены по касательным к координатным линиям  $\alpha$  и  $\beta$ . На рис.6.43 показаны только те силы, которые дают проекции на ось  $x$ . Для составления уравнений равновесия необходимо знать усилия, действующие на гранях элемента, длины ребер и углы их наклона к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Определим эти величины.

На грани 1-3 действуют продольная, поперечная и сдвигающая силы  $N_1$ ,  $Q_1$ ,  $S_{21}$  соответственно. Все эти силы определены выше как погонные. На грани 2-4 значения этих сил будут другие. Их можно найти, используя разложение функций в ряд Тейлора. При переходе от грани 1-3 к грани 2-4 приращение получает только криволинейная координата  $\alpha$ ; сохраняя при разложении в ряд Тейлора бесконечно малые величины только первого порядка малости, находим, что на грани 2-4 действуют усилия  $N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha$ ,  $Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} d\alpha$ ,  $S_{21} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha} d\alpha$ . Рассуждая аналогичным образом, находим, что если на грани 1-2 действуют усилия  $N_2$ ,  $Q_2$ ,  $S_{12}$ , то на грани 3-4 будут действовать усилия  $N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} d\beta$ ,  $Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} d\beta$ ,  $S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \beta} d\beta$ .

Длины линейных элементов оболочки в направлении координатных осей  $\alpha$  и  $\beta$  определяются коэффициентами первой квадратичной формы  $A$  и  $B$ , которые, как указывалось выше, также являются функциями координат  $\alpha$ ,  $\beta$ . Поэтому, если коэффициенты первой квадратичной формы имеют на гранях 1-2 и 1-3 значения  $A$  и  $B$ , то на гранях 2-4 и 3-4 они будут равны  $B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha$ ,  $A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta$  соответственно. При этом длины ребер будут иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{ребро 1-2} &- A d\alpha, & \text{ребро 1-3} &- B d\beta, \\ \text{ребро 2-4} &- \left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta, & \text{ребро 3-4} &- \left( A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Из рис.6.43 находим углы  $\varphi$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ . При этом, в силу малости этих углов, их значения приравняем значениям синусов. Получаем:

$$\varphi = \frac{\left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta - B d\beta}{A d\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta; \quad \gamma = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha; \quad \psi = \frac{A}{R_1} d\alpha.$$

Уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на ось  $x$  принимает следующий вид (с учетом того, что косинусы углов  $\varphi$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  равны 1):

$$\begin{aligned} &- N_1 B d\beta + \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta - S_{12} A d\alpha + \\ &+ \left( S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \beta} d\beta \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha + \\ &+ \left( S_{21} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha + \\ &+ \left( Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta \frac{A}{R_1} d\alpha - \\ &- \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} d\beta \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta + X A d\alpha B d\beta = 0 \end{aligned}$$

Раскрывая в полученном выражении скобки, деля его на произведение  $d\alpha d\beta$  и пренебрегая бесконечно малыми величинами, приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_{12} A) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + S_{21} \frac{\partial A}{\partial \beta} + Q_1 \frac{AB}{R_1} + XAB = 0.$$

Аналогичным образом можно получить остальные пять уравнений равновесия. В результате получаем шесть уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_{12} A) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + S_{21} \frac{\partial A}{\partial \beta} + Q_1 \frac{AB}{R_1} + XAB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_{21} B) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + S_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + Q_2 \frac{AB}{R_2} + YAB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A) - N_1 \frac{AB}{R_1} - N_2 \frac{AB}{R_2} + ZAB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_{21} B) - \frac{\partial}{\partial \beta} (M_{21} A) + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_2 AB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (M_{12} A) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_{12} B) + M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_{21} \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_1 AB &= 0, \\ S_{21} - S_{12} + \frac{M_{21}}{R_1} - \frac{M_{12}}{R_2} &= 0 \end{aligned} \tag{6.98}$$

При значениях усилий, определяемых формулами (6.97), последнее уравнение обращается в тождество. Заметим также, что для тонкостенных оболочек произведения  $k_{12}$  и  $k_{21}$  намного меньше единицы и в силу этого (см.(6.97)) можно принять

$$S_{12} = S_{21} = S; \quad M_{12} = M_{21} = M.$$

При этих предпосылках число уравнений сокращается до пяти, а оставшиеся уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2 S) + k_1 Q_1 AB + XAB &= 0. \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2 S) + k_2 Q_2 AB + YAB &= 0. \\ -AB(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A) + ZAB &= 0. \\ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(MB^2) - \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 A) + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_2 AB &= 0. \\ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(MA^2) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 B) + M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_1 AB &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

Эти уравнения содержат восемь неизвестных величин —  $N_1, N_2, S, M_1, M_2, M, Q_1, Q_2$ . Следовательно, задача об определении усилий в оболочке в общем случае статически неопределима и для ее решения приходится рассматривать деформации конструкции.

### Геометрические уравнения

Получим формулы, связывающие деформации в оболочке с перемещениями ее точек. Под деформациями будем понимать изменения длин линейных отрезков и углов между ними. Используем для этой цели геометрические уравнения трехмерной теории упругости, выражающие зависимости между деформациями и перемещениями в криволинейной системе координат. Рассмотрим эти зависимости, чтобы переход к геометрическим уравнениям теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, был более понятен.

Выделим из пространственного тела, деформирующегося под действием приложенных к нему нагрузок, линейный отрезок  $MN$ . В результате деформаций тела элемент переместится в новое положение  $M'N'$ . Перенесем начало криволинейных координат в точку  $M$  и проведем из этой точки касательные к координатным линиям  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис.6.44).

Направляющие косинусы отрезка  $MN$  обозначим следующим образом:

$$l = \cos(MN, x); \quad m = \cos(MN, y); \quad n = \cos(MN, z). \quad (6.100)$$

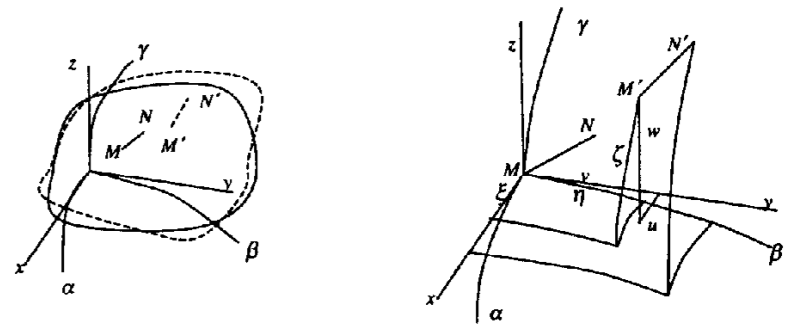


Рис.6.44

Пусть проекции отрезка  $MN$  на криволинейные координатные линии равны  $d\alpha, d\beta, d\gamma$ . Тогда соответствующие им линейные отрезки, совпадающие с касательными  $x, y$  и  $z$ , будут равны  $\tilde{A}d\alpha, \tilde{B}d\beta, \tilde{C}d\gamma$ , где  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  — коэффициенты первых квадратичных форм координатных поверхностей, преобразующие криволинейные координаты в линейные отрезки. С другой стороны, используя направляющие косинусы отрезка  $MN$ , проекции этого отрезка на оси  $x, y$  и  $z$  можно записать в виде  $l \times MN, m \times MN, n \times MN$ . Приравнявая полученные значения, получаем следующие соотношения:

$$l \times MN = \tilde{A}d\alpha; \quad m \times MN = \tilde{B}d\beta; \quad n \times MN = \tilde{C}d\gamma. \quad (6.101)$$

Длина элемента  $MN$  может быть найдена из соотношения:

$$MN^2 = (\tilde{A}d\alpha)^2 + (\tilde{B}d\beta)^2 + (\tilde{C}d\gamma)^2. \quad (6.102)$$

Пусть в результате деформаций точка  $M$  получает приращения криволинейных координат  $\xi, \eta, \zeta$ . Обозначим проекции полного перемещения точки  $M$  на оси  $x, y$  и  $z$  через  $u, v, w$  соответственно. Тогда будут справедливы следующие соотношения:

$$u = \tilde{A}d\alpha; \quad v = \tilde{B}d\beta; \quad w = \tilde{C}d\gamma. \quad (6.103)$$

Точка  $N$ , бесконечно близкая к точке  $M$ , также получит приращения криволинейных координат. Их значения можно найти, используя разложение функции в ряд Тэйлора. Получим:



$$\begin{aligned}\xi_N &= \xi + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \eta_N &= \eta + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \zeta_N &= \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} d\gamma.\end{aligned}\quad (6.104)$$

Учитывая первоначальную разность криволинейных координат точек  $M$  и  $N$ , равную  $d\alpha, d\beta, d\gamma$ , разность координат точек  $M'$  и  $N'$  в деформированном состоянии представим в виде:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \Delta\beta &= d\beta + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \Delta\gamma &= d\gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} d\gamma.\end{aligned}\quad (6.105)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы также изменяются при переходе от точки к точке. Значение этих коэффициентов найдем разложением функций в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{M'} &= \tilde{A} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} \Delta\alpha_{M'} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} \Delta\beta_{M'} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \Delta\gamma_{M'} = \tilde{A} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} \xi + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} \eta + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \zeta; \\ \tilde{B}_{M'} &= \tilde{B} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} \Delta\alpha_{M'} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \beta} \Delta\beta_{M'} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} \Delta\gamma_{M'} = \tilde{B} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} \xi + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \beta} \eta + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} \zeta; \\ \tilde{C}_{M'} &= \tilde{C} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} \Delta\alpha_{M'} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} \Delta\beta_{M'} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \gamma} \Delta\gamma_{M'} = \tilde{C} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} \xi + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} \eta + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \gamma} \zeta.\end{aligned}\quad (6.106)$$

Найдем теперь длину отрезка  $MN$  в деформированном состоянии, т.е. длину отрезка  $M'N'$ .

Проекции элемента на оси  $x, y, z$ , касательные к криволинейным координатам в точке  $M'$  равны соответственно:

$$\Delta x_{M'N'} = \tilde{A}_M \Delta\alpha; \Delta y_{M'N'} = \tilde{B}_M \Delta\beta; \Delta z_{M'N'} = \tilde{C}_M \Delta\gamma \quad (6.107)$$

Значения проекций отрезка  $M'N'$  найдем, используя соотношения (6.105) и (6.106). Получим:

$$\begin{aligned}\Delta x_{MN} &= \left( \tilde{A} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} \xi + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} \eta + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \zeta \right) \left( d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} d\gamma \right) = \\ &= \tilde{A} d\alpha + \tilde{A} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \tilde{A} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta + \tilde{A} \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} \xi d\alpha + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} \eta d\alpha + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \zeta d\alpha\end{aligned}\quad (6.108)$$

В последнем выражении после раскрытия скобок были отброшены слагаемые второго порядка малости. Подставляя в это выражение формулы (6.101) и (6.103), находим:

$$\begin{aligned}\Delta x_{MN} &= \\ &= MN \left[ l \left( 1 + \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} + \frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \right) + m \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) + n \frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) \right];\end{aligned}\quad (6.109)$$

Аналогичным образом находят две другие проекции отрезка  $M'N'$ :

$$\begin{aligned}\Delta y_{MN} &= MN \left[ l \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) + m \left( 1 + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} \right) + n \frac{\tilde{B}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) \right]; \\ \Delta z_{MN} &= MN \left[ l \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) + m \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) + n \left( 1 + \frac{1}{\tilde{C}} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{v}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} \right) \right];\end{aligned}$$

Длина элемента  $M'N'$  может быть теперь найдена из соотношения:

$$(M'N')^2 = (\Delta x_{M'N'})^2 + (\Delta y_{M'N'})^2 + (\Delta z_{M'N'})^2$$

Удлинение элемента  $MN$  равно

$$\varepsilon = \frac{M'N' - MN}{MN} \quad (6.110)$$

Все величины, входящие в формулу (6.110), определены. Опуская промежуточные преобразования, приведем окончательную формулу для удлинения элемента  $MN$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha l^2 + \varepsilon_\beta m^2 + \varepsilon_\gamma n^2 + \varepsilon_{\alpha\beta} lm + \varepsilon_{\beta\gamma} mn + \varepsilon_{\gamma\alpha} nl \quad (6.111)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{\bar{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{\bar{A}\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \beta} + \frac{w}{\bar{A}\bar{C}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \gamma}; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\bar{A}\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \alpha} + \frac{w}{\bar{B}\bar{C}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \gamma}; \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{\bar{C}} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{v}{\bar{B}\bar{C}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \beta} + \frac{u}{\bar{A}\bar{C}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha}; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\bar{B}} \right) + \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\bar{A}} \right); \\ \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{\bar{C}}{\bar{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{w}{\bar{C}} \right) + \frac{\bar{B}}{\bar{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v}{\bar{B}} \right); \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{\bar{A}}{\bar{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\bar{A}} \right) + \frac{\bar{C}}{\bar{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w}{\bar{C}} \right). \end{aligned} \quad (6.112)$$

Первые три компонента являются составляющими продольной деформации в направлении осей  $x, y, z$ , а три последние – углами сдвига в соответствующих касательных плоскостях.

При использовании для расчета оболочек смешанной системы координат  $\alpha, \beta, z$ , показанной на рис.6.43, и гипотез Кирхгофа-Лява формулы (6.112) несколько упрощаются. Так как координата  $z$  линейная, то  $\gamma = z$  и  $\bar{C} = 1$ .

Для координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$ , расположенных на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, коэффициенты первой квадратичной формы определяются соотношениями (6.96). Таким образом

$$\bar{A} = A(1 + zk_1), \quad \bar{B} = B(1 + zk_2). \quad (6.113)$$

На основании гипотезы прямой нормали удлинение в направлении оси  $z$  и сдвиги в плоскостях  $\alpha z$  и  $\beta z$  равны нулю, т.е.  $\varepsilon_z = \varepsilon_\gamma = 0; \varepsilon_{\beta z} = \varepsilon_{\beta\gamma} = 0; \varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\gamma\alpha} = 0$ . Вычисляя эти компоненты деформаций по формулам (6.112) с учетом того, что  $\bar{C} = 1$ , и приравнявая их нулю, получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (6.114)$$

$$\frac{1}{B(1 + k_2 z)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B(1 + k_2 z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{B(1 + k_2 z)} \right) = 0; \quad (6.115)$$

$$A(1 + k_1 z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{A(1 + k_1 z)} \right) + \frac{1}{A(1 + k_1 z)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.116)$$

Из (6.114) следует, что прогибы  $w$  (перемещения в направлении оси  $z$ ) не зависят от координаты  $z$  или, иначе говоря, являются функцией только двух координат  $\alpha$  и  $\beta$ .

Преобразуем формулу (6.116) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{A(1 + k_1 z)} \right) + \frac{1}{A^2(1 + k_1 z)^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$$

и проинтегрируем полученное выражение по  $z$ . Получим:

$$\begin{aligned} \int_0^z \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{A(1 + k_1 z)} \right) + \frac{1}{A^2(1 + k_1 z)^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) dz &= \frac{u}{A(1 + k_1 z)} \Big|_0^z - \frac{1}{A^2 k_1(1 + k_1 z)} \Big|_0^z \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ &= \frac{u}{(1 + k_1 z)} - \frac{u_0}{1} - \frac{1}{A k_1(1 + k_1 z)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{A k_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = u - u_0(1 + k_1 z) + \frac{z}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned}$$

где через  $u_0$  обозначены перемещения вдоль касательной к линии  $\alpha$  при  $z=0$ .

Отсюда

$$u = u_0(1 + k_1 z) - \frac{z}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.117)$$

Аналогично, из формулы (6.115) находим:

$$v = v_0(1 + k_2 z) - \frac{z}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0. \quad (6.118)$$

Подставляя в формулы (6.112) значения  $u$  и  $v$  из (6.117) и (6.118), а также значения коэффициентов первой квадратичной формы из (6.113), для ненулевых компонентов деформации оболочки получаем следующие формулы:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + zk_1; \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_2 + zk_2; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{12} + 2z\chi, \quad (6.119)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_0}{A} \right); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \\ \chi &= \frac{1}{2} \left[ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Геометрический смысл параметров, входящих в формулу (6.119), заключается в следующем.

Параметры  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_{12}$  являются компонентами линейных и сдвиговых деформаций срединной поверхности оболочки. Параметры  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  представляют изменения кривизн срединной поверхности в сечениях  $\beta = const$  и  $\alpha = const$  соответственно и, наконец, параметр  $\chi$  характеризует кручение оболочки.

### Физические уравнения (уравнения состояния)

Так как согласно второй гипотезе Кирхгофа-Лява нормальное напряжение  $\sigma_z = 0$ , то остальные компоненты нормальных напряжений могут быть найдены из обобщенного закона Гука аналогично тому, как это делалось для пластинок (см. формулы (6.48) и (6.50)):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\alpha + \mu \varepsilon_\beta); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\beta + \mu \varepsilon_\alpha); \\ \tau_{12} &= G \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Если в формулы (6.121) подставить значения компонентов деформаций из (6.119), а затем полученные значения напряжений подставить в формулы (6.97), то, пренебрегая величинами  $k_1 z$  и  $k_2 z$  по

сравнению с единицей, получим зависимости погонных усилий от компонентов деформаций срединной поверхности в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) & M_1 &= -D(\kappa_1 + \mu \kappa_2); \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) & M_2 &= -D(\kappa_2 + \mu \kappa_1); \\ S_{12} = S_{21} = S &= G \varepsilon_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12}; & M &= (1-\mu) D \chi, \end{aligned} \quad (6.122)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Таким образом, для расчета тонкостенных оболочек получено семнадцать уравнений (6.99), (6.120) и (7.122), содержащих семнадцать неизвестных величин  $N_1, N_2, S, M_1, M_2, M, Q_1, Q_2, u, v, w, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi$ .

### Граничные условия

В теории оболочек доказано, что при решении полного комплекта уравнений необходимо иметь по четыре граничных условия для каждого края. Если край оболочки свободен, то может возникнуть некоторое противоречие, так как на свободном краю должны быть равны нулю пять компонентов внутренних сил. Например, для свободного края  $\alpha = const$  (рис.6.45) должны соблюдаться следующие пять условий:  $N_1 = S = Q_1 = M_1 = M = 0$ . Противоречие можно устранить так же, как это было сделано для пластинок, а именно — объединением условий  $Q_1 = 0$  и  $M = 0$ .

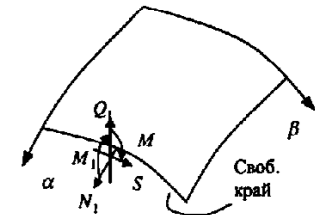


Рис.6.45

Рассмотрим два соседних элемента длиной  $ds_2$ , расположенных вдоль края  $\alpha = const$  (рис.6.46). Если на левом элементе действует крутящий момент  $M ds_2$ , то на правом — момент  $\left( M + \frac{\partial M}{\partial s_2} ds_2 \right) ds_2$ . Заменим каждый из этих двух моментов парой сил. На левом участке будет действовать сила  $M ds_2$ , а на правом —  $M + \frac{\partial M}{\partial s_2} ds_2$ . Силы, действующие на границе участка, спроектируем на нормаль и касательную к линии контура. Проекция на нормаль равна  $\frac{\partial M}{\partial s_2} ds_2$ .

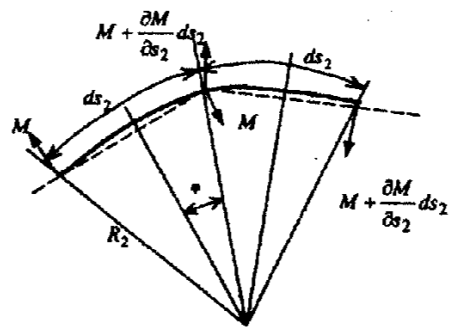


Рис.6.46

Проекция на касательную равна  
 $2M \sin \varphi = 2M\varphi = 2M \frac{ds_2}{2R_2} = \frac{M}{R_2} ds_2$ .

Суммируя полученные силы с действующими на свободном краю поперечными и сдвигающими силами, находим приведенные погонные поперечные и сдвигающие силы:

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{\partial M}{\partial s_2}; \quad S^* = S + \frac{M}{R_2} \approx S.$$

Для свободного края при  $\beta = const$  по аналогии находим:

$$Q_2^* = Q_2 + \frac{\partial M}{\partial s_1}.$$

Учитывая, что  $ds_1 = A d\alpha$  и  $ds_2 = B d\beta$ , выражения для приведенных поперечных сил записываем в виде:

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \alpha}, \quad Q_2^* = Q_2 + \frac{1}{B} \frac{\partial M}{\partial \beta}.$$

Для постановки граничных условий необходимо также иметь выражения для углов поворота нормали к линии контура вокруг этой линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Очевидно, что угол поворота нормали вокруг линии контура  $\alpha$ , обусловленный прогибом  $w$ , равен  $\frac{\partial w}{\partial s_2}$ . Однако на поворот вокруг линии контура  $\alpha = const$  влияют также и перемещения вдоль линии контура  $\beta = const$ . Дополнительный угол поворота легко найти непосредственно из рис.6.48. Если точка 1, лежащая на линии контура  $\alpha = const$ , переместится вдоль линии  $\beta$  на расстояние  $v$ , то нормаль повернется на угол  $\frac{v}{R_2}$ . С учетом

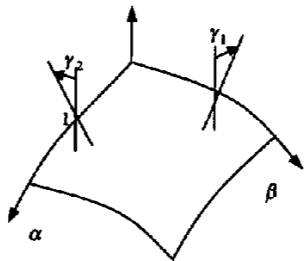


Рис.6.47

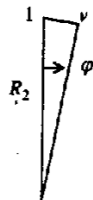


Рис.6.48

правила знаков, показанного на рис.6.47, суммарный угол поворота будет равен

$$\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial s_2} - \frac{v}{R_2} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}.$$

По аналогии находим

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial s_1} - \frac{u}{R_1} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}.$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся граничные условия.

### 1. Свободное опирание

При свободном опирании, показанном на рис.6.49 для края  $\alpha = const$ , равны нулю перемещения вдоль координатных линий  $\beta$  и  $z$ , а также усилия  $N_1$  и  $M_1$ . Таким образом, при  $\alpha = const$   $v = w = N_1 = M_1 = 0$ .

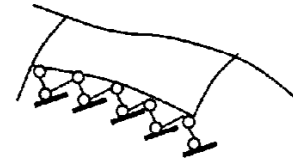


Рис.6.49

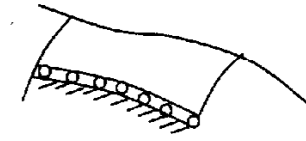


Рис.6.50

### 2. Шарнирное опирание

При шарнирном опирании края (рис.6.50) равны нулю все три компоненты линейного перемещения, а также изгибающий момент, действующий относительно линии контура. Следовательно, при  $\alpha = const$   $u = v = w = M_1 = 0$ .

### 3. Жесткое закрепление

При жестком закреплении края  $\alpha = const$  равны нулю три компонента линейного перемещения и угол поворота нормали вокруг линии контура. Граничные условия принимают вид:  $u = v = w = \gamma_1 = 0$ .

### 4. Свободный край

Для свободного края  $\alpha = const$  граничные условия имеют вид:  $N_1 = M_1 = S = Q_1^* = 0$ .

## 6.3.2. Безмоментная теория оболочек

В результате расчета оболочек с применением полученных выше уравнений определяются усилия в поперечных сечениях, перемещения точек срединной поверхности и компоненты деформаций. Анализ прочности, однако, ведется не по усилиям, а по напряжениям. Напряжения в сечениях оболочки могут быть найдены по известным погонным усилиям. При этом можно использовать формулы, полученные в курсе сопротивления материалов для прямоугольного сечения. Ширину сечения в данном случае следует принять равной единице, а высоту – равной толщине оболочки. Нормальные напряжения от продольной силы при этом оказываются равны  $\frac{N}{h}$ , а наибольшие нормальные напряжения от изгиба –  $\frac{6M}{h^2}$ . При малой толщине оболочки нормальные напряжения от изгиба оказываются намного больше напряжений от продольной силы. Поэтому оболочки, применяемые

в различных областях техники, стремятся проектировать таким образом, чтобы они работали без изгиба. Во многих случаях этого удается добиться за счет рационального выбора формы оболочки, граничных условий и способов передачи нагрузки. Состояние оболочки, при котором в ее сечениях равны нулю изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы, называется безмоментным. Уравнения, описывающие безмоментное состояние, существенно проще уравнений общей теории. Нетрудно убедиться, что при  $M_1 = M_2 = M_{12} = Q_1 = Q_2 = 0$  уравнения теории оболочек принимают следующий вид.

### Статические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (S A^2) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + X_{AB} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (S B^2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + Y_{AB} &= 0, \\ N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} &= Z. \end{aligned} \quad (6.123)$$

### Геометрические уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_0}{A} \right), \end{aligned} \quad (6.124)$$

### Физические уравнения

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \\ S &= \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (6.125)$$

Полученная система девяти уравнений содержит девять неизвестных величин  $N_1, N_2, S, u, v, w, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ . Для решения этой системы в каждой

точке контура необходимо задать два граничных условия относительно перемещений или усилий. Отметим, однако, что три уравнения равновесия содержат в данном случае три неизвестных усилия  $N_1, N_2, S$ , поэтому задача определения усилий в безмоментной оболочке статически определима – неизвестные усилия можно найти из уравнений статики (6.123), не используя геометрических и физических уравнений.

Уравнения для определения перемещений в оболочке можно получить следующим образом. Из уравнений (6.125) находим:

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh}; \quad \varepsilon_2 = \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S;$$

Подставляя найденные значения компонентов деформаций в уравнения (6.124), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v_0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1}, \\ \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}, \\ \frac{2(1+\mu)}{Eh} S &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_0}{A} \right), \end{aligned} \quad (6.126)$$

Совместным решением уравнений (6.123) и (6.126) могут быть найдены как усилия, так и перемещения оболочки.

Условия применимости безмоментной теории определяются целым рядом факторов, среди которых важную роль играет наличие в оболочке линий искажения. К линиям искажения в оболочке относятся: 1) линии контура; 2) линии, вдоль которых поверхностная нагрузка или ее производная меняются скачком; 3) линии, вдоль которых срединная поверхность претерпевает излом или скачком меняется кривизна; 4) линии, вдоль которых скачком меняется жесткость оболочки (меняется материал или толщина). Вблизи этих линий напряженное состояние, как доказано в теории оболочек, является моментным. С учетом этого понятия условие применимости безмоментной теории можно сформулировать следующим образом:

- 1) линии искажения напряженного состояния не должны образовывать на поверхности оболочки слишком густую сеть;
- 2) нагрузки, действующие на оболочку, должны изменяться плавно;
- 3) линии искажения напряженного состояния не должны проходить вдоль асимптотических линий срединной поверхности или касаться их; асимптотические линии срединной поверхности – это такие линии, кривизна нормальных сечений вдоль которых равна нулю;
- 4) срединная поверхность оболочки не должна обладать некоторыми особыми свойствами; например, если оболочка цилиндрическая,

она не должна быть слишком длинной, если оболочка коническая, она не должна содержать вершины конуса и т.п.;

- 5) оболочка должна быть жесткой; это означает, что при отсутствии усилий в оболочке деформации в ней также должны отсутствовать, а перемещения или быть равными нулю, или соответствовать перемещениям оболочки как твердого тела.

### 6.3.3. Безмоментная теория оболочек вращения

Как уже отмечалось ранее (см.рис.6.54), коэффициенты первой квадратичной формы для оболочек вращения зависят только от одной координаты, т.е.  $A = A(\alpha)$ ,  $B = B(\alpha)$ ,  $k_1 = k_1(\alpha)$ ,  $k_2 = k_2(\alpha)$ . Это еще более упрощает уравнения безмоментной теории. Уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) + A \frac{\partial S}{\partial \beta} - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + XAB &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) + B \frac{\partial S}{\partial \alpha} - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + YAB &= 0, \\ N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} &= Z, \end{aligned} \quad (6.127)$$

а геометрические уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_1}, \\ \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}, \\ \frac{2(1+\mu)}{Eh} S &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial u_0}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (6.128)$$

#### Осесимметричное напряженное состояние

Во многих случаях оболочки вращения испытывают действие осесимметричной нагрузки. Если систему координат выбрать, как показано на рис.6.38, то это означает, что  $Y=0$ ,  $X = X(\alpha)$ ,  $Z = Z(\alpha)$ . Нагрузка может изменяться вдоль координаты  $\alpha$ , оставаясь при этом осесимметричной. В этом случае обратно симметричные неизвестные будут равны нулю ( $S=0$ ,  $v=0$ ), а прямо симметричные будут зависеть только от одной координаты  $\alpha$ . Уравнения (6.127) и (6.128) еще более упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + XAB &= 0, \\ N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} &= Z \end{aligned} \quad (6.129)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_1 - \mu N_2}{Eh} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_1}, \\ \frac{N_2 - \mu N_1}{Eh} &= \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}, \end{aligned} \quad (6.130)$$

Рассмотрим решение статической задачи для оболочки вращения в сферических координатах (рис.6.51).

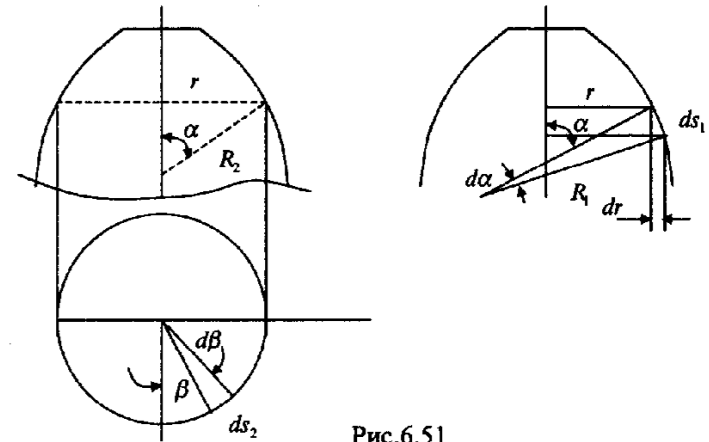


Рис.6.51

Определим параметры оболочки. Коэффициенты первой квадратичной формы можно найти непосредственно из рис.6.51. Координатными линиями являются меридианы и параллельные круги, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Длины линейных элементов вдоль координатных линий определяются следующим образом:

$$ds_1 = R_1 d\alpha, \quad ds_2 = r d\beta,$$

следовательно, коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$A = R_1; \quad B = r.$$

Из рис.6.51 находим:

$$r = R_2 \sin \alpha; \quad dr = R_2 d\alpha \cos \alpha. \quad (6.131)$$

Последние соотношения дают возможность выразить коэффициент  $B$  и его производную по  $\alpha$  следующим образом:

$$B = R_2 \sin \alpha; \quad \frac{dB}{d\alpha} = R_1 \cos \alpha$$

Подставив эти значения в уравнения (6.129), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(rN_1) - N_2 R_1 \cos \alpha + X R_1 R_2 \sin \alpha &= 0. \\ N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} &= Z \end{aligned} \quad (6.132)$$

Выразив из второго уравнения (6.132)  $N_2$  и подставив его значение в первое, приходим к одному дифференциальному уравнению с одним неизвестным:

$$\frac{d}{d\alpha}(rN_1) - N_1 R_2 \cos \alpha + R_1 R_2 (X \sin \alpha - Z \cos \alpha) = 0. \quad (6.133)$$

Умножим уравнение (6.133) на  $\sin \alpha$  и учтем (6.131):

$$\sin \alpha \frac{d}{d\alpha}(rN_1) - N_1 r \cos \alpha + R_1 r (X \sin \alpha - Z \cos \alpha) = 0. \quad (6.134)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sin \alpha \frac{d}{d\alpha}(rN_1) - N_1 r \cos \alpha = \frac{d}{d\alpha}(N_1 r \sin \alpha). \quad (6.135)$$

С учетом соотношения (6.135) уравнение (6.134) принимает вид:

$$\frac{d}{d\alpha}(N_1 r \sin \alpha) + R_1 r (X \sin \alpha - Z \cos \alpha) = 0. \quad (6.136)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$N_1 r \sin \alpha = - \int_0^\varphi R_1 r (X \sin \alpha - Z \cos \alpha) + C. \quad (6.137)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Найдя из уравнения (6.137) продольную силу  $N_1$ , продольную силу  $N_2$  можно найти потом из второго уравнения (6.129).

Заметим, что уравнение (6.137) было получено путем последовательного упрощения статических уравнений общей теории оболочек, составленных для бесконечно малого элемента. Для оболочек вращения при осесимметричной нагрузке уравнение для определения меридиональной силы можно составить, рассматривая условия равновесия части оболочки, расположенной над параллельным кругом, определяемым углом  $\alpha$  (рис.6.52). Если обозначить равнодействующую внешних сил, действующий на отсеченную часть оболочки, через  $F$ , то уравнение равновесия будет иметь вид:

$$N_1 2\pi r \sin \alpha + F = 0. \quad (6.138)$$

Можно показать, что (6.138) является результатом интегрирования (6.137).

В случае, когда уравнение меридиана удобнее задавать в цилиндрической системе координат, расчетные уравнения можно модифицировать следующим образом.

Коэффициенты первой квадратичной формы при использовании цилиндрических координат  $(z, \theta, r)$  находятся так:

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}; \quad B = r. \quad \text{Из рис.6.53 находим}$$

следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dr}{dz} = r'; \quad R_2 = \sqrt{r^2 + r^2 r'^2} = r \sqrt{1 + r'^2};$$

$$ds_1^2 = dz^2 + dr^2; \quad ds_1 = R_1 d\varphi.$$

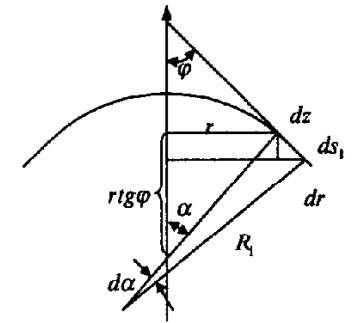


Рис.6.53

Используя эти соотношения, получаем:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(r'), \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dz} dz = (\operatorname{arctg}(r'))' dz = \frac{r'' dz}{1 + r'^2};$$

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varphi} = \frac{(1 + r'^2)^{3/2}}{r''}.$$

Из второго уравнения (6.129) находим

$$N_2 = Z R_2 - N_1 \frac{R_2}{R_1} = Z r (1 + r'^2)^{1/2} - N_1 \frac{r r''}{1 + r'^2}$$

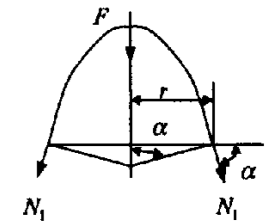


Рис.6.52

Подставляя найденное значение  $N_2$  и коэффициенты первой квадратичной формы в первое уравнение (6.129), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d(N_1 r)}{dz} + N_1 \frac{r r' r''}{(1+r'^2)^{3/2}} = -rY + r r' Z. \quad (6.139)$$

которое можно записать так:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{N_1 r}{(1+r'^2)^{1/2}} \right) = -rY + r r' Z.$$

Интегрируя по  $z$ , получаем:

$$N_1 = \frac{(1+r'^2)^{1/2}}{r} \int_{z_0}^z r(Y - r'Z) dz + C. \quad (6.140)$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Расчет сферического купола на действие собственного веса (рис.6.54).

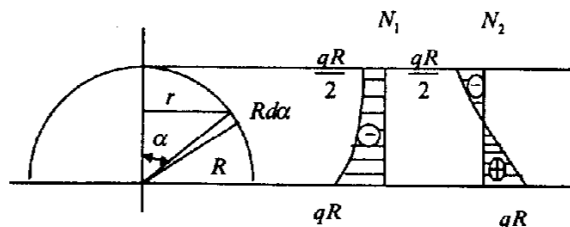


Рис. 6.54

Если  $q$  – вес единицы площади оболочки, то вес части оболочки, расположенной выше параллели, определяемой углом  $\alpha$ , равен

$$F = 2\pi \int R^2 q \sin \alpha d\alpha = 2\pi R^2 q (1 - \cos \alpha)$$

Из уравнения (6.138) находим:

$$N_1 = -\frac{qR(1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = -\frac{qR}{1 + \cos \alpha}.$$

Из второго уравнения (6.129) находим:

$$N_2 = qR \left( \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Эпюры усилий  $N_1$  и  $N_2$ , построенные по полученным формулам приведены на рис.6.54.

**Пример 2.** Полусферический сосуд радиуса  $R$  и толщины  $h$  наполнен жидкостью с удельным весом  $\gamma$  (рис.6.55). Определить усилия в сосуде.

**Решение.** Отсечем нижнюю часть сферы и составим для нее уравнение равновесия (см. рис.6.55):

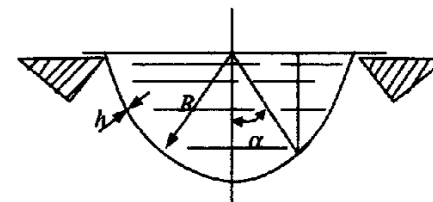


Рис.6.55

На отсеченную часть оболочки, расположенную ниже параллели, определяемой углом  $\alpha$ , действует сила, равная весу жидкости в объеме ABCDE. Найдем этот объем:

$$\begin{aligned} V_{ABCDE} &= \int_0^\varphi 2\pi (R \sin \psi) (R d\psi \cos \psi) R \cos \psi = \int_0^\varphi 2\pi R^3 \sin \psi \cos^2 \psi d\psi = \\ &= \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3 \varphi) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P = V\gamma = \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma (1 - \cos^3 \varphi) \quad \text{и} \quad \sigma_m = \frac{R^2 \gamma (1 - \cos^3 \varphi)}{3(\sin^2 \varphi) h}.$$

Учитывая, что для сферы  $\rho_m = \rho_t = R$ , то из уравнения Лапласа находим:

$$\sigma_t = \frac{pR}{h} - \sigma_m = \frac{R^2 \gamma}{3h} \left( 3 \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right).$$



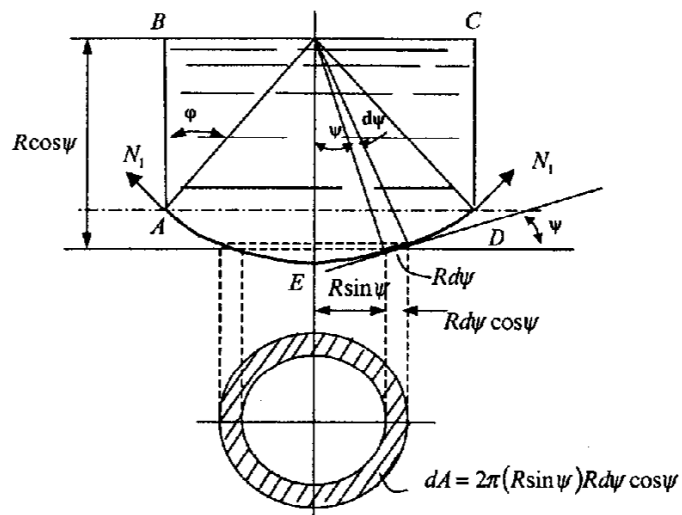


Рис. 6.56

Эпюры  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ , построенные на основании полученных формул, приведены на рис.6.57.

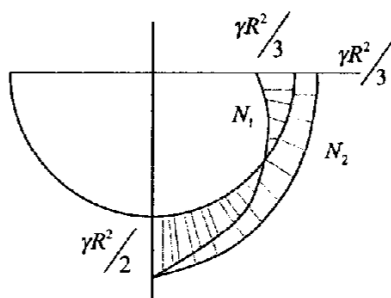


Рис.6.57

### 6.3.4. Моментная теория осесимметричных цилиндрических оболочек

#### Вывод основных уравнений

Цилиндрические оболочки (тонкостенные цилиндры) представляют собой наиболее распространенный вид оболочек вращения. Детали в форме цилиндрических оболочек широко используются в автотракторостроении. Цилиндрические оболочки можно рассматривать как частный случай оболочек вращения. Однако, ввиду того, что теория цилиндрических оболочек

значительно проще и нагляднее [7,9], чем теории расчета оболочек другой формы, целесообразно рассмотреть эту теорию отдельно от общего случая.

Осесимметричная изгибная деформация оболочки возникает в местах приложения внешних кольцевых нагрузок (рис. 6.58, а), а также в местах закрепления или сопряжения цилиндрической оболочки с другими конструктивными элементами: днищами, кольцевыми ребрами и т.д. (рис.6.58, б, в и г).

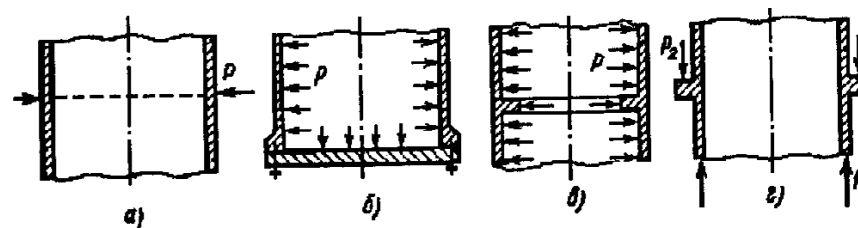


Рис. 6.58. Виды нагружения и конструктивные особенности цилиндрической оболочки, приводящие к появлению местных изгибных напряжений.

Теория осесимметричной деформации цилиндрических оболочек основана на гипотезах Кирхгофа — Лява, изложенных в разделе 6.1.1 данной книги.

Первая из двух гипотез носит геометрический характер и позволяет установить связь между деформированным состоянием в произвольной точке оболочки и изменением геометрии ее срединной поверхности. С ее помощью исследование деформации оболочки сводится к исследованию деформации ее срединной поверхности.

Вторая гипотеза носит статический характер. Она позволяет считать напряженное состояние оболочки плоским.

Следует отметить, что между гипотезами изначально существует известное противоречие, поскольку соотношения закона Гука не допускают, чтобы напряжения и деформации, действующие в направлении нормали к срединной поверхности, одновременно равнялись нулю при ненулевых компонентах напряжений и деформаций в остальных направлениях.

Тем не менее, существующий расчетный опыт и его экспериментальная проверка показали, что указанные гипотезы приблизительно выполняются с удовлетворительной для расчетных целей точностью, если толщина оболочки мала по сравнению с радиусом цилиндра. Если принять наибольшую допустимую погрешность расчета по уравнениям теории равной 5%, то, к тонкостенным следует отнести оболочки, толщина которых не превышает 1/20 радиуса. При построении разрешающих соотношений теории предполагается справедливость основных допущений о материале оболочки, который предполагается однородным, изотропным и линейно-упругим, т.е. подчиняющимся закону Гука.

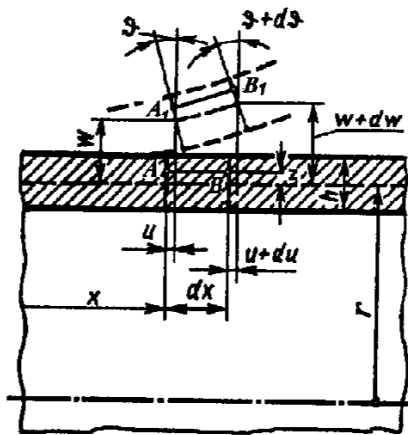


Рис. 6.59. К выводу геометрических соотношений осесимметричного изгиба цилиндрических оболочек.

Введем обозначения:  
 $r$  — средний радиус цилиндра;  
 $h$  — толщина стенки цилиндра;  
 $x$  — координата, отсчитываемая от торца в направлении оси цилиндра;

$u, w$  — перемещения произвольной точки срединной поверхности в осевом и в радиальном направлениях.

Выразим относительные деформации в произвольном слое оболочки, расположенном на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, через перемещения. Положительным направлением  $z$  будем считать направление к центру оболочки. На рис. 6.59. изображен бесконечно малый элемент оболочки до и после деформации.

Относительная деформация волокна  $ab$  в осевом направлении

$$\varepsilon_x = \frac{du + d\vartheta z}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} z. \quad (6.141)$$

Угол поворота нормали  $\vartheta$  связан с величиной прогиба соотношением

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}. \quad (6.142)$$

Относительная деформация в окружном направлении определяется как отношение приращения длины окружности, проходящей через произвольную точку  $a$ , к ее первоначальной длине

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r-z+w) - 2\pi(r-z)}{2\pi(r-z)} = \frac{w}{r-z} \approx \frac{w}{r}. \quad (6.143)$$

В случае плоского напряженного состояния соотношения закона Гука имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_t), \quad (6.144)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu \varepsilon_x)$$

Подставив в эти уравнения выражения деформаций (6.141) и (6.143), получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} z + \mu \frac{w}{r} \right); \quad (6.145)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} z \right)$$

Напряжения, возникающие в элементе оболочки, показаны на рис. 6.60. Кроме напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_t$ , в произвольном слое возникает также касательное напряжение  $\tau_{xz}$ .

Величина касательного напряжения  $\tau_{xz}$  пренебрежимо мала по сравнению с нормальными напряжениями и поэтому в расчетах на прочность не учитывается. Однако, равнодействующая касательного напряжения, которая представляет собой поперечную силу  $Q$ , мы уже пренебречь не можем. Поперечная сила входит в уравнения равновесия элемента оболочки и играет существенную роль в выводе разрешающих соотношений. Перейдем от напряжений к внутренним силовым факторам. При интегрировании по толщине оболочки напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_t$  приводятся к нормальным усилиям  $T_x$  и  $T_t$  и изгибающим моментам  $M_x$  и  $M_t$ :

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{r} \right);$$

$$T_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t dz = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} \right); \quad (6.146)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} = D \frac{d^2 w}{dx^2};$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z dz = \frac{\mu Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu D \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

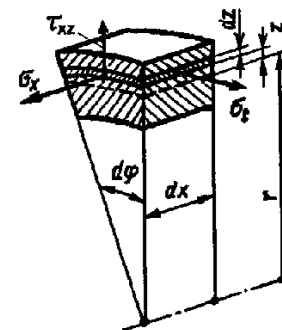


Рис. 6.60. Напряжения, возникающие в цилиндрической оболочке.

Величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (6.147)$$

носит название цилиндрической жесткости оболочки.

Исключив из уравнений (6.146) перемещение  $w$ , получим выражение окружного усилия  $T_t$  через  $w$  и  $T_x$ :

$$T_t = \mu T_x + \frac{Ehw}{r} \quad (6.148)$$

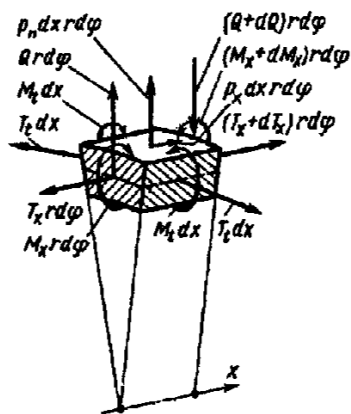


Рис. 6.61. К выводу уравнений равновесия элемента оболочки.

Из шести уравнений равновесия в данном случае можно составить только три: уравнение проекций сил на направления  $r$  и  $x$  и уравнение моментов относительно оси  $t$ , касательной к окружности:

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{T_t}{r} = p_n; \quad \frac{dT_x}{dx} = p_x; \quad \frac{dM_x}{dx} = Q. \quad (6.149)$$

Остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно. При решении полученной системы уравнений осевую силу  $T_x$  можно считать известной, так как она может быть определена заранее по второму из уравнений (6.149). Действительно, умножив обе части уравнения на  $2\pi r$  и проинтегрировав по  $x$ , найдем

$$2\pi r T_x = \int p_x 2\pi r dx + C. \quad (6.150)$$

Это уравнение представляет собой уравнение равновесия части оболочки, отсеченной по кругу  $x = \text{const}$ . Первое слагаемое в правой части равенства представляет собой интеграл от поверхностных осевых сил; второе — учитывает силы, приложенные к торцу.

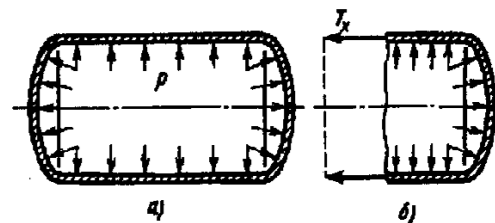


Рис. 6.62. К определению интенсивности осевого усилия.

Если, например, цилиндрическая оболочка с дном нагружена равномерным внутренним давлением (рис. 6.62, а), то, отделив часть оболочки (рис. 6.62, б), можно написать следующее уравнение равновесия:

$$p \frac{\pi r_{\text{вн}}^2}{4} - T_x 2\pi r = 0, \quad (6.151)$$

откуда, считая  $r_{\text{вн}} = r$ , найдем величину интенсивности осевого усилия

$$T_x = \frac{pr}{2}. \quad (6.152)$$

Приведем систему уравнений деформаций и равновесия к одному уравнению с одним неизвестным. Из третьего уравнения (6.149), с учетом равенства (6.146) следует

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (6.153)$$

Выражения (6.150) и (6.153) подставим в первое уравнение (6.149), тогда

$$p_n r - Dr \frac{d^4 w}{dx^4} - \mu T_x - \frac{Ehw}{r} = 0, \quad (6.154)$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_n}{D} - \frac{\mu T_x}{Dr}, \quad (6.155)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}}. \quad (6.156)$$

Дифференциальное уравнение осесимметричной деформации цилиндрической оболочки (6.155) по своей структуре аналогично уравнению упругой линии балки, опирающейся на упругое основание.

Если функция  $w$ , удовлетворяющая уравнению (6.155) и граничным условиям на краях, будет найдена, то по зависимостям (6.146) можно вычислить интенсивности изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_t$ , и по зависимости (6.148) — интенсивность окружного усилия  $T_t$ . Напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_t$ , определяются по внутренним силовым факторам

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{T_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z; \\ \sigma_t &= \frac{T_t}{h} + \frac{12M_t}{h^3} z \end{aligned} \quad (6.157)$$

Эти формулы легко получить из уравнений (6.143) и (6.144) с учетом зависимостей (6.145) — (6.148). Наибольшие напряжения возникают при  $z = \pm h/2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\max} &= \frac{T_x}{h} + \frac{6M_x}{h^2}; \\ \sigma_t^{\max} &= \frac{T_t}{h} + \frac{6M_t}{h^2}. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Перейдем к интегрированию дифференциального уравнения (6.155). Общее решение уравнения представим в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + 4\beta^4 \tilde{w} = 0 \quad (6.159)$$

и частного решения уравнения с правой частью (6.155). Решение однородного уравнения (6.159) ищем в виде

$$\tilde{w} = Ce^{kx} \quad (6.160)$$

Подставив эту функцию в левую часть уравнения (6.155), получим характеристическое уравнение

$$k^4 + 4\beta^4 = 0, \quad (6.161)$$

из которого найдем

$$k = \sqrt[4]{-4\beta^4}. \quad (6.162)$$

По правилам извлечения корней из отрицательных и мнимых чисел модуль числа  $k$  равен корню четвертой степени модуля подкоренного числа, т.е.  $\sqrt[4]{4\beta^4}$ , а аргумент числа  $k$  — аргументу подкоренного числа, деленному на показатель корня, т.е.  $\frac{\pi + 2\pi n}{4}$ , следовательно,  $k$  представляет собой комплексное число

$$k = \sqrt[4]{4\beta^4} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi n}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi n}{4} \right). \quad (6.163)$$

Придавая  $n$  значения 0, 1, 2, 3, получим четыре корня характеристического уравнения:

$$k_1 = \beta + i\beta; \quad k_2 = -\beta + i\beta; \quad k_3 = -\beta - i\beta; \quad k_4 = \beta - i\beta. \quad (6.164)$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (6.159) имеет вид

$$\tilde{w} = C_1 e^{(\beta+i\beta)x} + C_2 e^{(-\beta+i\beta)x} + C_3 e^{(-\beta-i\beta)x} + C_4 e^{(\beta-i\beta)x}, \quad (6.165)$$

или

$$\tilde{w} = e^{-\beta x} (C_2 e^{i\beta x} + C_3 e^{-i\beta x}) + e^{\beta x} (C_1 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}), \quad (6.166)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования.

Частное решение уравнения с правой частью  $w^*$  зависит от закона распределения поверхностных нагрузок  $p_n$  и  $p_x$ . Обычно на практике нагрузки  $p_n$  и  $p_x$  или постоянны, или их изменение вдоль оси  $x$  подчиняется линейному или квадратичному закону. Ограничиваясь только этими случаями и учитывая, что при указанных условиях производные выше второй степени по координате  $x$  от  $p_n, p_x$  и  $T_x$  равны нулю, получим для  $w^*$  следующее выражение:

$$w^* = \frac{1}{4\beta^4} \left( \frac{p_n}{D} - \frac{\mu T_x}{Dr} \right) = \left( p_n - \frac{\mu T_x}{r} \right) \frac{r^2}{Eh}. \quad (6.167)$$

Для практических целей общее решение уравнения (6.159), представленное в виде (6.166), недостаточно удобно; поэтому его преобразуют к другому виду, причем для длинных и для коротких оболочек это преобразование делается по-разному.

Остановимся на вопросе о постоянных интегрирования. Для определения постоянных необходимо использовать граничные условия на краях оболочки. На каждом краю обычно бывают заданы два условия.

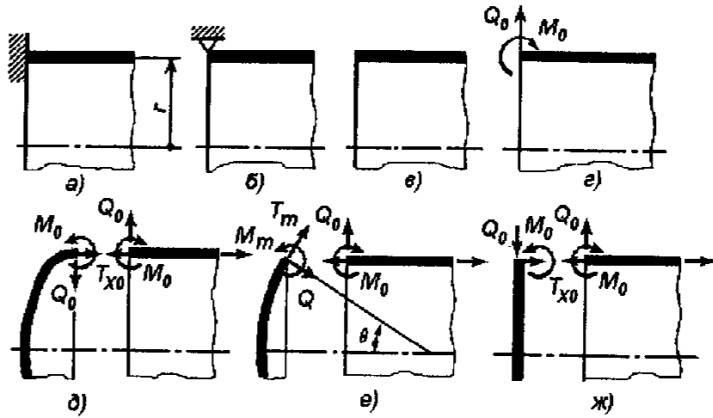


Рис. 6.63. Варианты граничных условий.

Если край жестко заделан (рис. 6.63, а), то значение функций прогиба и угла поворота на краю должны быть равными нулю:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0. \quad (6.168)$$

Для шарнирно опертого края (рис. 6.63, б)

$$w = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (6.169)$$

Для свободного края (рис. 6.63, в)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0. \quad (6.170)$$

При нагружении края оболочки заданной силой  $Q_0$  и моментом  $M_0$  (рис. 6, г)

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0; \quad D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0. \quad (6.171)$$

В случае сопряжения цилиндрической оболочки с оболочкой другого типа (рис. 6.63, д и е) необходимо иметь четыре условия (для каждого края

сопрягаемых оболочек требуется по два условия): равенство радиальных перемещений  $w$  или равенство окружных деформаций  $\varepsilon_t$ ; равенство углов поворота нормали  $\theta$ ; равенство моментов  $M_m$  и  $M_0$ ; равенство радиальных составляющих внутренних сил (сил распора):

$$(Q \sin \theta - T_m \cos \theta)_{\text{дннца}} = (Q_0)_{\text{ч. оболочки}}. \quad (6.172)$$

Заметим, что равенство осевых составляющих внутренних сил не может быть использовано при определении постоянных, так как это условие уже использовано при определении усилия  $T_x$ .

При сопряжении цилиндрической оболочки с плоским дном (рис. 6.63, ж) граничные условия несколько упрощаются, так как на основании допущения о нерастяжимости срединной поверхности пластины первое условие сопряжения принимает вид

$$w_0 = 0, \quad (6.173)$$

четвертое же условие становится ненужным.

Определение четырех постоянных интегрирования требует решения системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако практически всегда оказывается возможным построить решение так, что две постоянные определяются сразу, а остальные — в результате решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

### Особенности расчета длинных цилиндрических оболочек

Применительно к расчету длинных оболочек выражение (6.146) целесообразно преобразовать следующим образом. Используя формулы Эйлера, заменим показательные функции на тригонометрические.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (6.174)$$

Выражение (6.146) примет вид

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x) + w^*, \quad (6.175)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — новые постоянные (действительные).

Первое слагаемое, содержащее множитель  $e^{-\beta x}$ , с увеличением  $x$  быстро затухает. Второе слагаемое, содержащее множитель  $e^{\beta x}$ , наоборот, с увеличением  $x$  быстро возрастает. Учитывая, что радиальные перемещения в при больших значениях  $x$  должны оставаться конечными и малыми, можно заключить, что постоянные  $A_3$  и  $A_4$  для длинных оболочек должны быть очень малы. В области, расположенной вблизи от начала координат, вторым слагаемым можно пренебречь, т.е. положить  $A_3 = A_4 = 0$ ; тогда

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + w^* \quad (6.176)$$

В таком виде функция  $w$  пригодна для области, расположенной около края при  $x = 0$ . Для области, расположенной около второго края, второе слагаемое не может быть отброшено, так как множитель  $e^{\beta x}$  принимает очень большие значения. Однако для второго края можно выбрать новое начало координат, расположив его на втором торце оболочки и направив ось  $x$  в противоположную сторону. Тогда можно снова воспользоваться выражением (6.176) и, определив новые постоянные  $A_1$  и  $A_2$ , получить функцию для области, расположенной около второго края оболочки.

Выясним, при какой длине оболочки ее допустимо рассматривать как длинную. Считая предельно допустимую погрешность расчета равной 5% и замечая, что функции вида  $e^{-\beta x} \sin \beta x$  и  $e^{-\beta x} \cos \beta x$ , а также их производные при  $\beta x > 3$  принимают значения  $< 0,05$ , заключаем, что оболочку можно рассматривать как длинную, если

$$\beta l \geq 3. \quad (6.177)$$

При соблюдении этого условия погрешность решения, полученная при применении упрощенного выражения (6.176), не превышает 5%.

Уже при  $\beta x = 3$ ,  $e^{\beta x} \approx 20$ .

Отсюда

$$l \geq \frac{3}{\beta} = \frac{3}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}} \sqrt{Rh} \approx 2,2\sqrt{rh} = l^* \quad (6.178)$$

Как видно, решение однородного уравнения  $w(x)$  убывает очень быстро. Поэтому, если длина участка оболочки превышает  $l^*$ , то на левом его конце существенно лишь убывающее решение  $w^-(x)$ , а на правом — только  $w^+(x)$ . Оболочки, удовлетворяющие этому требованию, будем называть длинными. Расчет длинных оболочек особенно прост, так как граничные условия на каждом из торцов могут быть удовлетворены независимо.

Рассмотрим решение однородного уравнения (6.159) для длинной оболочки.

Если длинная оболочка нагружена только на одном торце ( $x=0$ ), то ее деформации описываются функцией, быстро затухающей с удалением от нагруженного торца. Поэтому оболочку можно считать полубесконечной. Функцию  $w$  представим в виде

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + w^* = A e^{-\beta x} \cos(\beta x + \psi) + w^*, \quad (6.179)$$

где постоянные  $A_1$  и  $A_2$  заменены постоянными  $A$ ,  $\psi$ , равными

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \psi = -\text{arctg} \left( \frac{A_1}{A_2} \right). \quad (6.180)$$

Установим формальные правила дифференцирования функции  $w$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{d}{dx} (A e^{-\beta x} \cos(\beta x + \psi)) = -A \beta e^{-\beta x} [\cos(\beta x + \psi) + \sin(\beta x + \psi)] = \\ &= -\sqrt{2} A \beta e^{-\beta x} \cos \left( \beta x + \psi - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (6.181)$$

Таким образом, при дифференцировании функции  $w$  ее амплитуда  $A$  умножается на  $-\beta\sqrt{2}$ , а фазовый угол  $\psi$  уменьшается на  $\frac{\pi}{4}$ .

Используя это правило, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= 2A\beta^2 e^{-\beta x} \cos \left( \beta x + \psi - \frac{\pi}{2} \right); \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= -2\sqrt{2} A \beta^3 e^{-\beta x} \cos \left( \beta x + \psi - \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (6.182)$$

### Пример.

Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую оболочку с жесткими днищами нагруженную внутренним давлением (рис. 6.64). Заданные параметры соответствуют следующим величинам: радиус оболочки = 100 мм; длина оболочки = 400 мм; толщина оболочки = 5 мм; давление = 5 МПа; модуль упругости  $E = 2 \times 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; предел текучести материала  $\sigma_T = 300$  МПа.

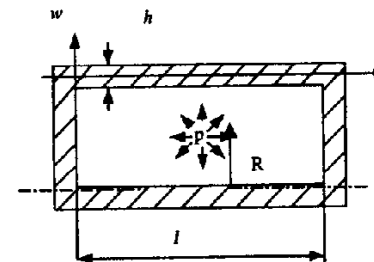


Рис. 6.64

Требуется провести расчет оболочки на прочность и жесткость.

### Решение.

По формулам (6.147, 6.156, 6.178) подсчитаем вспомогательные величины:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5^3}{12(1-0,3^2)} = 22,9 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм},$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 r^2}} = \frac{5,75}{r} = 0,0575 \text{ 1/мм},$$

$$l^* = 2,2\sqrt{rh} = 48,4 \text{ мм}.$$

Поскольку  $l > l^*$ , то, согласно (6.178), оболочку можно считать длинной и использовать для ее расчета зависимости (6.179). Используя (6.152 и 6.167), определяем частное решение  $w^*$ :

$$T_x = \frac{p\pi r^2}{2\pi r} = \frac{pr}{2},$$

$$w^* = \frac{r^2}{Eh} \left( p - \nu \frac{T_x}{r} \right) = 0,85 \frac{pr^2}{Eh} = 0,0425 \text{ мм.}$$

Общее решение запишется в виде

$$w(x) = A \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos(\beta x + \psi) + 0,85 \frac{pr^2}{Eh}.$$

Константы  $A$  и  $\psi$  определяем из граничных условий:

1)  $x = 0, w = 0;$

2)  $x = 0, \frac{dw}{dx} = 0.$

Из второго граничного условия следует:

$$-\sqrt{2}\beta \cdot A \cdot \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{откуда } \psi = \frac{3\pi}{4}.$$

Подставляя найденное значение в первое граничное условие, находим:

$$A \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 0,85 \frac{pr^2}{Eh} = 0,$$

$$A = \sqrt{2} \cdot 0,85 \frac{pr^2}{Eh} \approx 1,20 \cdot \frac{pr^2}{Eh}.$$

Подставляя найденные значения в (6.179), получаем решение:

$$w(x) = 1,2 \cdot \frac{pr^2}{Eh} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos\left(\beta x + \frac{3\pi}{4}\right) + w^* =$$

$$= 0,06 \cdot e^{-0,0575x} \cdot \cos(0,0575x + 2,356) + 0,0425 \text{ [мм].} \quad (6.183)$$

График прогиба показан сплошной линией 4 на рис. 6.65. Пунктирная линия 1 соответствует второму постоянному слагаемому в (6.183) и представляет собой решение по безмоментной теории. Рассмотрим графическое представление первого слагаемого в выражении прогиба (кривая 3).

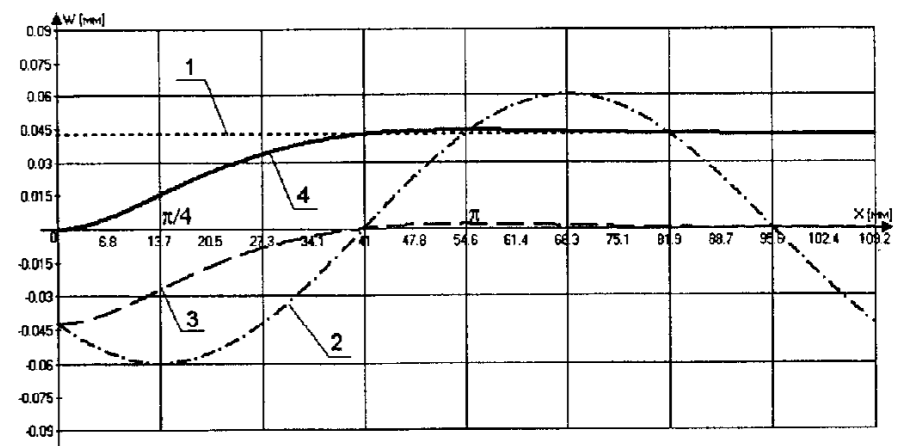


Рис. 6.65. Графики прогиба вдоль оси оболочки.

Если кривая 2 представляет собой косинусоиду, домноженную на 0,06 мм и сдвинутую по оси абсцисс на  $3\pi/4$ , то кривая 3 соответствует этой же косинусоиде, дополнительно домноженной на убывающую экспоненциальную функцию —  $e^{-\beta x}$ . Для определения характерных точек графика прогиба полезно составить следующую таблицу:

$x$ [мм]	0	13,65	27,3	40,95	54,6
$\beta x$ [рад]	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$

Анализируя график 4, видим, что уже на достаточно малом расстоянии от днища ( $\approx 50$  мм) первое слагаемое быстро уменьшается и суммарный прогиб изменяет свою величину от 0 мм в месте сопряжения с жестким днищем до значения 0,0425 мм, соответствующего решению по безмоментной теории оболочек.

Используя формулы (6.181, 6.182), получаем выражения для угла поворота ( $\theta$ ), интенсивности изгибающего момента ( $M_x$ ) и интенсивности перерезывающего усилия ( $Q$ ):

$$\theta(x) = -1,2\sqrt{2} \cdot \beta \cdot \frac{pr^2}{Eh} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -4,88 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0,0575x} \cdot \cos(0,0575x + 1,570) \text{ [рад],}$$

$$M_x(x) = 1,2 \cdot 2 \cdot \beta^2 \cdot D \cdot \frac{pr^2}{Eh} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos\left(\beta x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 908 \cdot e^{-0,0575x} \cdot \cos(0,0575x + 0,785) \text{ [н]}$$

$$Q(x) = -1,2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \beta^3 \cdot D \cdot \frac{pr^2}{Eh} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos(\beta x) =$$

$$= -73,9 \cdot e^{-0,0575x} \cdot \cos(0,0575x) \text{ [Н/мм]}$$

Подсчитаем максимальные значения силовых факторов, возникающие у дна ( $x = 0$ ):

$$M_x^{\max} = M_x(0) = 908 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 642 \text{ [Н]}$$

$$M_t^{\max} = \nu \cdot M_x(0) = 193 \text{ [Н]}$$

$$T_t^{\max} = \nu \cdot T_x + \frac{Eh}{r} \cdot w(0) = 0,3 \cdot 250 + 0 = 75 \text{ [Н/мм]}$$

Величины напряжений в наиболее опасной точке конструкции расположенной у дна внутренней поверхности оболочки, определяются по зависимостям (6.158):

$$\sigma_x^A = \frac{T_x}{h} + \frac{6M_x^{\max}}{h^2} = 204 \text{ [МПа]}, \quad \sigma_t^A = \frac{T_t^{\max}}{h} + \frac{6M_t^{\max}}{h^2} = 61,2 \text{ [МПа]}$$

Эквивалентное напряжение в наиболее опасной точке, подсчитанное по энергетической теории прочности, составит

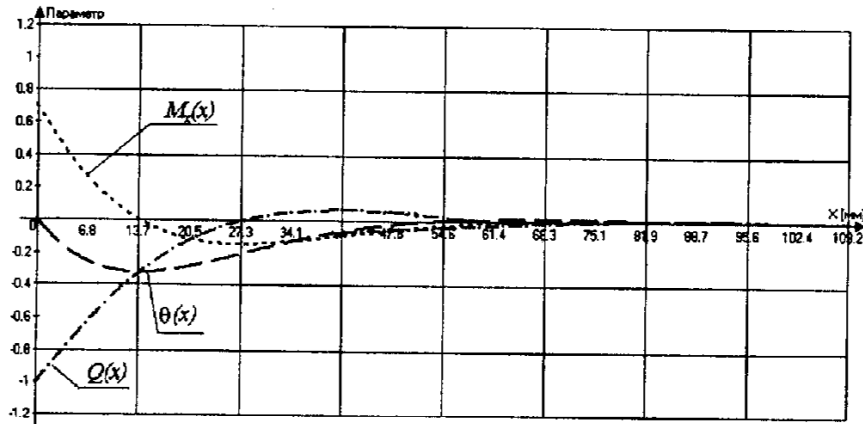


Рис. 6.66. Графики изменения угла поворота, интенсивности изгибающего момента  $M_x$  и интенсивности перерезывающей силы вдоль оси оболочки. За единицу для  $\vartheta$ ,  $M_x$  и  $Q$  и приняты величины:  $4,88 \times 10^{-3}$  рад., 908 н, 73,9 н/мм, соответственно.

$$\sigma_{\text{экв}}^A = \sqrt{(\sigma_x^{\max})^2 + (\sigma_t^{\max})^2} - (\sigma_x^{\max} \cdot \sigma_t^{\max}) = 181 \text{ [МПа]}$$

Коэффициент запаса по текучести равен

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}^{\max}} = \frac{300}{181} = 1,66.$$

## 6.4. РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 6.4.1. Расчет пластинок

#### Конечные элементы для расчета пластинок на изгиб

Выделим из конструкции элемент  $i-j-k$  (см. рис.6.67). Свяжем с элементом местную систему координат, как показано на рис.6.67. В качестве узловых перемещений примем прогибы (перемещения вдоль оси  $z_m$ ) и углы поворота вокруг осей  $x_m$  и  $y_m$ .

Составим векторы узловых перемещений и узловых сил. В каждом узле

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}; \quad (6.183)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{z_i} \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ F_{z_j} \\ M_{x_j} \\ M_{y_j} \\ F_{z_k} \\ M_{x_k} \\ M_{y_k} \end{Bmatrix} \quad (6.184)$$

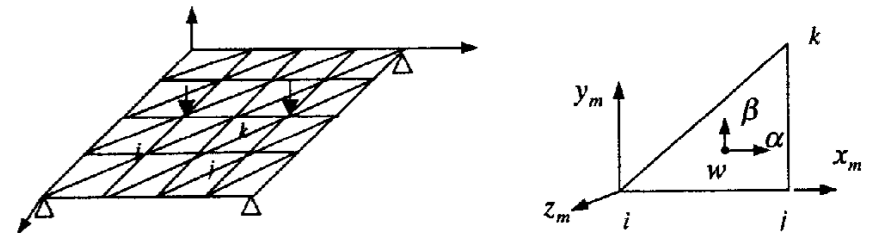


Рис. 6.67



имеется по три составляющих перемещений (прогиб и два поворота) и по три составляющих внутренних усилий (сила и два момента). Между силами и перемещениями существует соответствие в том смысле, что каждая сила совершает работу на соответствующем ей перемещении. Таким образом, векторы узловых сил и перемещений треугольного изгибного конечного элемента пластины содержат по девять компонентов каждый. Зависимость между ними можно представить с помощью следующей матричной формулы:

$$\{F\} = [K_b] \{\delta\}, \quad (6.185)$$

где  $[K_b]$  – матрица изгибной жесткости. Для вычисления этой матрицы поступим следующим образом.

Зададим функцию прогибов конечного элемента в виде неполного кубического полинома

$$w = q_1 + q_2x + q_3y + q_4x^2 + q_5xy + q_6y^2 + q_7x^3 + q_8xy^2 + q_9y^3. \quad (6.186)$$

Формула (6.186) в матричном виде записывается так:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{Bmatrix} = [\Phi_b] \{q\}. \quad (6.187)$$

В формуле (6.187) приняты следующие обозначения:

$$[\Phi_b] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \quad (6.188)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_9 \end{Bmatrix}$$

Выразим вектор  $\{q\}$  через вектор узловых перемещений  $\{\delta\}$ . Для этого, прежде всего, найдем функции углов поворота в зависимости от функции прогибов  $w$ .

Как видно из рис.6.68, углы поворота касательных к линиям прогибов в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ , обозначенные через  $\beta$  и  $\alpha$  соответственно, равны:

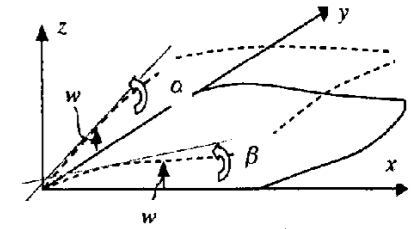


Рис.6.68

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y} = q_3 + q_5x + 2q_6y + 2q_8xy + 3q_9y^2; \quad (6.189)$$

$$\beta = -\frac{\partial w}{\partial x} = -q_2 - 2q_4x - q_5y - 3q_7x^2 - q_8y^2.$$

Используя формулы (6.187) и (6.189), можем записать:

$$\begin{aligned} w_i &= q_1; \\ \alpha_i &= q_3; \\ \beta_i &= -q_2; \\ w_j &= q_1 + q_2x_j + q_4x_j^2 + q_7x_j^3; \\ \alpha_j &= q_3 + q_5x_j; \\ \beta_j &= -q_2 - 2q_4x_j - 3q_7x_j^2; \\ w_k &= q_1 + q_2x_k + q_3y_k + q_4x_k^2 + q_5x_ky_k + q_6y_k^2 + q_7x_k^3 + \\ &\quad + q_8x_ky_k^2 + q_9y_k^3; \\ \alpha_k &= q_3 + q_5x_k + 2q_6y_k + 2q_8x_ky_k + 3q_9y_k^2; \\ \beta_k &= -q_2 - 2q_4x_k - q_5y_k - 3q_7x_k^2 - q_8y_k^2. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Соотношения (6.190) записываются с помощью одной матричной формулы

$$\{\delta\} = [A] \{q\}, \quad (6.191)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 & x_j^2 & 0 & x_j^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_j & 0 & 0 & -3x_j^2 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k & x_k^3 & x_k y_k^2 & y_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & 2y_k & 0 & 2x_k y_k & 3y_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_k & -y_k & 0 & -3x_k^2 & -y_k & 0 \end{bmatrix} \quad (6.192)$$

Из (6.191) получаем

$$\{q\} = [A]^{-1} \{\delta\} \quad (6.193)$$

Комбинируя (6.188) и (6.193), находим

$$w = [\Phi_b] [A]^{-1} \{\delta\} \quad (6.194)$$

Дальнейшие вычисления проводим в том же порядке, как и при вычислении матрицы плосконапряженного элемента. Находим деформации в соответствии с теорией изгиба пластин (см. раздел 6.2 настоящей главы):

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [\Phi_b] [A]^{-1} \{\delta\} \quad (6.195)$$

Применяя операции дифференцирования, указанные в формуле (6.195), к матрице  $[\Phi_b]$ , получаем:

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4y & 0 \end{bmatrix} [A]^{-1} \{\delta\} = -z [\bar{B}_b] \{\delta\} = [B_b] \{\delta\} \quad (6.196)$$

где  $[\bar{B}_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4y & 0 \end{bmatrix} [A]^{-1}$   $[B_b] = -z [\bar{B}_b]$

Используя закон Гука, находим напряжения в пластинке:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \{\varepsilon\} = -z [C] [\bar{B}_b] \{\delta\}. \quad (6.197)$$

Матрица характеристик материала  $[C]$  определяется так же, как и в случае плоского напряженного состояния. Следовательно, матрица жесткости треугольного изгибного элемента пластинки, на основании (2.83), равна:

$$[K] = \int_{\Delta} [B_b]^T [C] [B_b] d\Delta = \int_{\Delta} -z [A^{-1}]^T [B_b]^T [C] (-z) [\bar{B}_b] [A^{-1}] d\Delta. \quad (6.198)$$

Для вычисления отдельных элементов матрицы жесткости необходимо перемножить матрицы, стоящие под знаком интегрирования и проинтегрировать полученные выражения. Интегрирование сводится к вычислению выражений типа  $\int_A x^j y^k dA$ , где  $A$  – площадь треугольника.

#### 6.4.2. Расчет оболочек

В различных областях техники широкое применение находят многослойные пластинки и оболочки, поэтому излагаемая ниже методика построения конечного элемента относится именно к таким конструкциям. При получении матричных характеристик элемента используется гипотеза прямых нормалей.

Рассмотрим многослойный конечный элемент, имеющий в плане форму треугольника. Местная система координат для него показана на рис.6.69,а и 6.69,б, причем на рис.6.69,а, показан вид элемента в плане, а на рис.6.69,б - его поперечное сечение. Координатная плоскость  $XU$  совмещается со срединной поверхностью базового слоя.

Обозначим  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  перемещения точек срединной поверх-

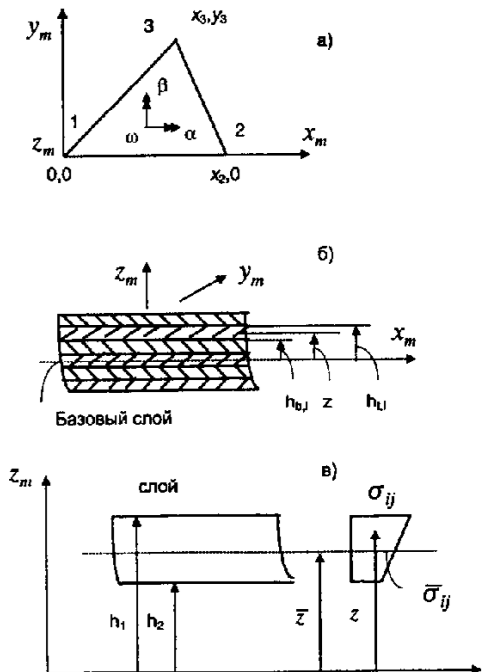


Рис.6.69

ности базового слоя. Тогда, на основании гипотезы прямой нормали, перемещения точек произвольного слоя будут равны:

$$\left. \begin{aligned} u_l &= \bar{u} + \beta z \\ v_l &= \bar{v} - \alpha z \\ w_l &= \bar{w} \end{aligned} \right\} \quad (6.199)$$

В формулах (6.199)  $\alpha$  и  $\beta$  - повороты нормали к срединной поверхности базового слоя вокруг осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Зададим следующие аппроксимирующие функции для мембранных  $(\bar{u}, \bar{v})$  и изгибных  $\bar{w}$  перемещений точек срединной поверхности базового слоя:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y^2; \\ \bar{v} &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y; \end{aligned} \right\} \quad (6.200)$$

$$\bar{w} = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 x^2 + q_5 xy + q_6 y^2 + q_7 x^3 + q_8 xy^2 + q_9 y^3. \quad (6.201)$$

Представим перемещения  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\} = [\Phi_P] [A^{-1}] \{\delta_P\} \quad (6.202)$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_9 \end{array} \right\} = [\Phi_b] [A_b^{-1}] \{\delta_b\}, \quad (6.203)$$

где

$$\begin{aligned} [\Phi_P] &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}; \\ \{\delta_P\} &= [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T; \\ [\Phi_b] &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ xy^2 \ y^3]; \\ \{\delta_b\} &= [w_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ w_2 \ \alpha_2 \ \beta_2 \ w_3 \ \alpha_3 \ \beta_3]^T. \end{aligned}$$

Матрицы  $[A_p^{-1}]$  и  $[A_b^{-1}]$ , входящие в формулы (6.202) и (6.203), связывают обобщенные  $(\alpha, q)$  и физические  $(\delta_p, \delta_b)$  перемещения с помощью соотношений

$$\{\alpha\} = [A_p^{-1}] \{\delta_p\} \quad (6.204)$$

$$\{q\} = [A_b^{-1}] \{\delta_b\}. \quad (6.205)$$

Методика получения матриц  $[A_p]$  и  $[A_b]$  описана выше.

Введем в рассмотрение объединенный вектор  $\{\delta\}$  узловых перемещений:

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_p \\ \delta_b \end{array} \right\}. \quad (6.206)$$

Тогда, на основании (6.192), (6.203) и (6.206):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \Phi_P A_p^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_b A_b^{-1} \end{bmatrix} \{\delta\}. \quad (6.207)$$

Деформации слоя равны:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_l}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + z \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_l}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - z \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_l}{\partial y} + \frac{\partial v_l}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.208)$$

Запишем формулы (6.208) в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{array} \right\}, \quad (6.209)$$

или, с учетом (6.161), в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_p A_p^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_b A_b^{-1} \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (6.210)$$

Применяя операции дифференцирования, указанные в (6.210), к матрицам  $[\Phi_p]$  и  $[\Phi_b]$ , получаем:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B_p A_p^{-1} ; -z B_b A_b^{-1}] \{\delta\}, \quad (6.211)$$

где введены следующие обозначения:

$$[B_p] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (6.212)$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4y & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.213)$$

Напряжения в слое выражаются в зависимости от деформаций следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [C_l] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [C_l B_p A_p^{-1} ; -z C_l B_b A_b^{-1}] \{\delta\}, \quad (6.214)$$

где  $[C_l]$  - матрица упругих постоянных слоя.

### Матрица жесткости

Применяя формулу (2.83) и принимая  $p_x = p_y = 0$ ,  $p_z = p$ , находим матрицу жесткости  $[K^e]$  многослойного элемента и вектор узловых сил  $(F_p)$ , обусловленный распределенной нагрузкой, причем

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_p^e & K_{p,b}^e \\ [K_{p,b}^e]^T & K_b^e \end{bmatrix}; \quad \{F_p\} = - \int_F \begin{Bmatrix} 0 \\ [A_b^{-1}] \Phi_b^T \end{Bmatrix} p dF. \quad (6.215)$$

В свою очередь

$$\begin{cases} [K_p^e] = [A_p^{-1}]^T B_p^T C^e B_p A_p^{-1}; \\ [K_b^e] = \int_F [A_b^{-1}]^T B_b^T D^e B_b A_b^{-1} dF; \\ [K_{p,b}^e] = -[A_p^{-1}]^T B_p^T L^e [\tilde{B}_b] A_b^{-1}, \end{cases} \quad (6.216)$$

где

$$\begin{cases} [C^e] = \sum [C_l] h_l \Delta; [\tilde{B}_b] = \int_F [B_b] dF; \\ [D^e] = \sum [C_l] (h_{l,l}^3 - h_{b,l}^3) / 3; \\ [L^e] = \sum [C_l] (h_{l,l}^2 - h_{b,l}^2) / 2. \end{cases} \quad (6.217)$$

В формуле (6.217)  $\Delta$  - площадь треугольника.

Напряжения в центре тяжести слоя на его срединной поверхности, согласно (6.213), равны:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix}_{c.g.} = [C_l B_p A_p^{-1} ; -z C_l [B_b]_{c.g.} A_b^{-1}] \{\delta\} \quad (6.218)$$

Приращение напряжений в центре тяжести слоя на его верхней поверхности, обусловленное изгибом, равно

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [0 ; -(h_l / 2) C_l [B_b]_{c.g.} A_b^{-1}] \{\delta\} \quad (6.219)$$

В формулах (6.218) и (6.219)

$$\bar{z}_l = (h_{l,l} + h_{b,l})/2; h_l = h_{l,l} - h_{b,l}.$$

Назовем матрицей напряжений слоя следующую матрицу:

$$[H_l] = [C_l B_p A_p; C_l [B_b]_{c,r} A_b^{-1}]$$

Эту матрицу целесообразно вычислять для тех слоев элемента, которые отличаются между собой упругими постоянными. С помощью матриц напряжений удобно определять напряжения в слоях по известным перемещениям узлов базового слоя.

Недостатком описанного выше элемента является его несимметричность и неинвариантность по отношению к местной системе координат. Перейдем теперь к построению треугольного КЭ, свободного от этих недостатков. Зададим функцию прогибов срединной поверхности базового слоя в виде:

$$w = \frac{1}{3}(\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3), \quad (6.220)$$

где  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$  - функции прогибов, определенные на субтреугольниках 1, 2, 3 (см. рис.6.61) следующим образом (все функции относятся к срединной поверхности базового слоя):

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 y_1 + a_6 y_1^2 + a_7 x_1^3 + a_8 x_1 y_1^2 + a_9 y_1^3; \\ \bar{w}_2 &= b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_2 y_2 + b_6 y_2^2 + b_7 x_2^3 + b_8 x_2 y_2^2 + b_9 y_2^3; \\ \bar{w}_3 &= c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 x_3^2 + c_5 x_3 y_3 + c_6 y_3^2 + c_7 x_3^3 + c_8 x_3 y_3^2 + c_9 y_3^3. \end{aligned} \quad (6.221)$$

Коэффициенты полиномов в формуле (6.221) могут быть выражены через узловые перемещения следующим образом:

$$\begin{cases} \{a\} = [A_1^{-1}] \{q_1\} \\ \{b\} = [A_2^{-1}] \{q_2\} \\ \{c\} = [A_3^{-1}] \{q_3\} \end{cases} \quad (6.222)$$

где

$$\begin{aligned} \{a\} &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_9]^T; \{b\} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_9]^T; \{c\} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_9]^T; \\ \{q_1\} &= [w_i \alpha_i \beta_i \ w_j \alpha_j \beta_j \ w_k \alpha_k \beta_k]^T_{(x_1, y_1)}; \\ \{q_2\} &= [w_j \alpha_j \beta_j \ w_k \alpha_k \beta_k \ w_i \alpha_i \beta_i]^T_{(x_2, y_2)}; \\ \{q_3\} &= [w_k \alpha_k \beta_k \ w_i \alpha_i \beta_i \ w_j \alpha_j \beta_j]^T_{(x_3, y_3)}. \end{aligned}$$

Матрицы  $[A_1^{-1}]$ ,  $[A_2^{-1}]$ ,  $[A_3^{-1}]$  и обобщенные координаты  $\{q_1\}$ ,  $\{q_2\}$ ,  $\{q_3\}$  определяются в зависимости от координат узловых точек субтреугольников в их местных осях  $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$ .

С учетом (6.220) и (6.222) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= [1 \ x_1 \ y_1 \ x_1^2 \ x_1 y_1 \ y_1^2 \ x_1^3 \ x_1 y_1^2 \ y_1^3] [A_1^{-1}] \{q_1\} \\ \bar{w}_2 &= [1 \ x_2 \ y_2 \ x_2^2 \ x_2 y_2 \ y_2^2 \ x_2^3 \ x_2 y_2^2 \ y_2^3] [A_2^{-1}] \{q_2\} \\ \bar{w}_3 &= [1 \ x_3 \ y_3 \ x_3^2 \ x_3 y_3 \ y_3^2 \ x_3^3 \ x_3 y_3^2 \ y_3^3] [A_3^{-1}] \{q_3\}. \end{aligned} \quad (6.223)$$

Выразим векторы  $\{q_3\}$  и  $\{q_2\}$  через вектор  $\{q_1\}$ , а координаты  $x_2, y_2, x_3, y_3$  через  $x_1 \equiv x$  и  $y_1 \equiv y$ . Получим (см. рис. 6.70,а):

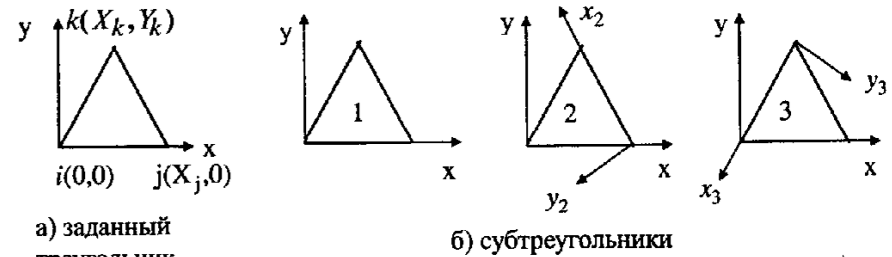


Рис. 6.70

$$\begin{cases} \{q_2\} = [P_2] [T_2] \{q_1\} \\ \{q_3\} = [P_3] [T_3] \{q_1\} \end{cases} \quad (6.224)$$

$$\begin{cases} x_2 = (x - X_j) \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y_2 = -(x - X_j) \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (6.225)$$

$$\begin{cases} x_3 = (x - X_k) \cos \theta + (y - Y_k) \sin \theta; \\ y_3 = -(x - X_k) \sin \theta + (y - Y_k) \cos \theta. \end{cases} \quad (6.226)$$

В формулах (6.224)  $[T_2]$  и  $[T_3]$  - матрицы направляющих косинусов осей  $x_2 y_2$  и  $x_3 y_3$  в осях  $x y$  соответственно,  $[P_2]$  и  $[P_3]$  - перестановочные матрицы, причем

$$\left. \begin{aligned} [T_2] &= \begin{bmatrix} \bar{T}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_2 \end{bmatrix}; & [T_3] &= \begin{bmatrix} \bar{T}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_3 \end{bmatrix}; \\ [\bar{T}_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; & [\bar{T}_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \\ [P_2] &= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 \\ E_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & [P_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_1 \\ E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \end{bmatrix}; & [E_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (6.227)$$

Подставляя соотношения (6.224)-(6.226) в формулы (6.223), получаем (промежуточные преобразования опущены):

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ xy^2 \ y^3] [A_1^{-1}] \{q_1\}; \\ w_2 &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] [C_2] [A_2^{-1}] [P_2] [T_2] \{q_1\}; \\ w_3 &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] [C_3] [A_3^{-1}] [P_3] [T_3] \{q_1\} \end{aligned} \right\} (6.228)$$

Матрицы  $[C_2]$  и  $[C_3]$  имеют порядок  $10 \times 9$  и определяются в зависимости от координат узловых точек заданного треугольника  $X_i, X_k, Y_k$  и углов  $\varphi$  и  $\theta$  (рис. 6.71,а). Ниже приводятся значения ненулевых компонентов этих матриц.

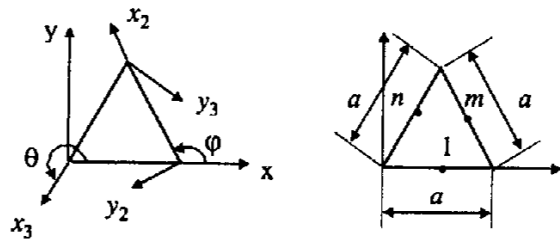


Рис. 6.71

Матрица  $[C_2]$  (для сокращения записи приняты обозначения:  $A = \sin \varphi, B = \cos \varphi$ ):

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1; & c_{12} &= -X_j B; & c_{13} &= X_j A; & c_{14} &= -c_{12}^2; & c_{15} &= c_{12} c_{13}; & c_{16} &= c_{13}^2; \\ c_{17} &= c_{12}^3; & c_{18} &= c_{12} c_{13}^2; & c_{19} &= c_{13}^3; & c_{22} &= B; & c_{23} &= -A; & c_{24} &= 2c_{12} c_{22}; \\ c_{25} &= 2c_{13} c_{22}; & c_{26} &= 2c_{13} c_{23}; & c_{27} &= 3c_{12}^2 c_{22}; & c_{28} &= 3c_{13}^2 c_{22}; & c_{29} &= 3c_{13}^2 c_{23}; \end{aligned}$$

$$c_{32} = A; \quad c_{33} = B; \quad c_{34} = 2c_{12} c_{32}; \quad c_{35} = -X_j (B^2 - A^2); \quad c_{36} = c_{25};$$

$$c_{37} = 3c_{12} c_{32}; \quad c_{38} = X_j^2 (A^3 - 2AB^2); \quad c_{39} = 3c_{13}^2 c_{33}; \quad c_{44} = B^2; \quad c_{45} = -BA$$

$$c_{46} = A^2; \quad c_{47} = -3X_j B^3; \quad c_{48} = 3c_{12} c_{32}^2; \quad c_{49} = 3c_{13} A^2; \quad c_{54} = -2c_{45};$$

$$c_{55} = B^2 - A^2; \quad c_{56} = -c_{54}; \quad c_{57} = -6c_{13} B^2; \quad c_{58} = -2X_j (A^3 - 2AB^2); \quad c_{59} = 6c_{12} A^2;$$

$$c_{64} = c_{46}; \quad c_{65} = -c_{45}; \quad c_{66} = c_{44}; \quad c_{67} = 3c_{12} A^2; \quad c_{68} = X_j (2A^2 B - B^3); \quad c_{69} = 3c_{13} B^2;$$

$$c_{77} = B^3; \quad c_{78} = BA^2; \quad c_{79} = -A^3; \quad c_{87} = 3B^2 A; \quad c_{88} = A^3 - 2AB^2; \quad c_{89} = 3A^2 B;$$

$$c_{97} = 3BA^2; \quad c_{98} = -2A^2 B + B^3; \quad c_{99} = -3AB^2.$$

Матрица  $[C_3]$  (приводятся ненулевые компоненты; для сокращения записи приняты обозначения:  $A = \sin \theta, B = \cos \theta$ )

$$c_{11} = 1; \quad c_{12} = -X_k B - Y_k A; \quad c_{13} = X_k A - Y_k B; \quad c_{14} = X_k^2 B^2 + 2X_k Y_k AB + Y_k^2 A^2;$$

$$c_{15} = -X_k^2 AB - X_k Y_k A^2 + X_k Y_k B^2 + Y_k^2 AB; \quad c_{16} = X_k^2 A^2 - 2X_k Y_k A + Y_k^2 B^2;$$

$$c_{17} = -X_k^3 B^3 - 3X_k^2 Y_k B^2 A - 3X_k Y_k^2 A^2 B - Y_k^3 A^3;$$

$$c_{18} = -X_k^3 BA^2 + 2X_k^2 Y_k B^2 A - X_k Y_k^2 B^3 - X_k^2 Y_k A^3 + 2X_k Y_k^2 A^2 B - Y_k^3 B^2 A;$$

$$c_{19} = -X_k^3 A^3 - Y_k^3 B - 3X_k^2 Y_k A^2 B + 3X_k Y_k^2 B^2 A;$$

$$c_{22} = B; \quad c_{23} = -A; \quad c_{24} = -2X_k B^2 - 2Y_k AB; \quad c_{25} = 2X_k^2 AB + Y_k A^2 - Y_k B^2;$$

$$c_{26} = -2X_k A^2 + 2Y_k AB; \quad c_{27} = 3X_k^2 B^3 + 6X_k Y_k B^2 A + 3Y_k^2 BA^2; \quad c_{28} = 3X_k^2 BA^2 -$$

$$-4X_k Y_k AB^2 + Y_k^2 B^3 + 2X_k Y_k A^3 - 2Y_k^2 BA^2;$$

$$c_{29} = -3X_k^2 A^3 + 6X_k Y_k BA^2 - 3Y_k^2 AB^2; \quad c_{32} = A; \quad c_{33} = B;$$

$$c_{34} = -2X_k BA - 2Y_k A^2; \quad c_{35} = X_k (A^2 - B^2) - 2Y_k AB;$$

$$c_{36} = 2X_k BA - 2Y_k B^2; \quad c_{37} = 3X_k^2 B^2 A + 6X_k Y_k BA^2 + 3Y_k^3 A^3;$$

$$c_{38} = -2X_k AB^2 + 2X_k Y_k B^3 + X_k^2 A^3 - 4X_k Y_k A^2 B + 3Y_k^2 B^2 A;$$

$$c_{39} = 3Y_k^2 B^3 + 3X_k^2 BA^2 - 6X_k Y_k B^2 A; \quad c_{44} = 2B^2; \quad c_{45} = -AB;$$

$$c_{46} = A^2; \quad c_{47} = -3X_k B^3 - 3Y_k B^2 A; \quad c_{48} = -3X_k BA^2 + 2Y_k B^2 A - Y_k A^3;$$

$$c_{49} = 3X_k A^3 - 3Y_k BA^2; \quad c_{54} = 2AB; \quad c_{55} = B^2 - A^2; \quad c_{56} = -c_{54};$$

$$c_{57} = -6X_k AB^2 - 6Y_k BA^2; \quad c_{58} = 4X_k AB^2 - 2Y_k B^3 - 2X_k A^3 + 4Y_k BA^2;$$

$$\begin{aligned}
c_{5,9} &= -6X_k BA^2 + 6Y_k AB^2; \quad c_{6,4} = c_{4,6}; \quad c_{6,5} = -c_{4,5}; \quad c_{6,6} = B^2; \\
c_{6,7} &= -3X_k BA^2 - 3Y_k A^3; \quad c_{6,8} = -X_k B^3 + 2X_k BA^2 - 3Y_k AB^2; \\
c_{6,9} &= -3Y_k B^3 + 3X_k AB^2; \quad c_{7,7} = B^3; \quad c_{7,8} = BA^2; \quad c_{7,9} = -A^3; \\
c_{8,7} &= 3AB^2; \quad c_{8,8} = A^3 - 2AB^2; \quad c_{8,9} = 3AB^2; \quad c_{9,7} = 3BA^2; \\
c_{9,8} &= -2BA^2 + B^3; \quad c_{9,9} = -3AB^2; \quad c_{10,7} = A^3; \quad c_{10,8} = AB^2; \quad c_{10,9} = B^3.
\end{aligned}$$

Представим первую строку формулы (6.228) в виде:

$$w_l = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] [\bar{A}_1^{-1}] \{q_1\}, \quad (6.229)$$

где  $[\bar{A}_1^{-1}]$  - расширенная матрица  $[A_1^{-1}]$ , причем расширение осуществляется добавлением нулевой строки между седьмой и восьмой строками матрицы  $[A_1^{-1}]$ , т.е.

$$[\bar{A}_1^{-1}] = \begin{bmatrix}
1\text{-я строка матрицы } A_1^{-1} \\
2\text{-я строка матрицы } A_1^{-1} \\
\vdots \\
7\text{-я строка матрицы } A_1^{-1} \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
8\text{-я строка матрицы } A_1^{-1} \\
9\text{-я строка матрицы } A_1^{-1}
\end{bmatrix}$$

С учетом формул (6.221), (6.228) и (6.229) получаем:

$$w_l = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] [A] \{q_1\}, \quad (6.230)$$

где

$$[A] = \frac{1}{3} [\bar{A}_1^{-1}] + [C_2] [A_2^{-1}] [P_2] [T_2] + [C_3] [A_3^{-1}] [P_3] [T_3]. \quad (6.231)$$

Выбор функции прогибов в виде (6.221) обеспечивает симметрию элемента. Действительно, рассмотрим равносторонний треугольный элемент, симметрично нагруженный узловыми перемещениями (рис. 6.71,б). Найдем прогибы в симметрично расположенных точках  $l$ ,  $m$  и  $n$ .

Очевидно, что первый субтреугольник дает значения прогибов в этих точках  $w_l^{(1)}$ ,  $w_m^{(1)}$ ,  $w_n^{(1)}$ , причем  $w_l^{(1)} \neq w_m^{(1)} \neq w_n^{(1)}$ . Второй и третий субтреугольники дают значения прогибов  $w_l^{(2)}$ ,  $w_m^{(2)}$ ,  $w_n^{(2)}$ ,  $w_l^{(3)}$ ,  $w_m^{(3)}$ ,  $w_n^{(3)}$  соответственно, причем в силу симметрии точек  $l$ ,  $m$  и  $n$  и узловых перемещений

$$\left. \begin{aligned}
w_l^{(1)} &= w_m^{(2)} = w_n^{(3)} \\
w_m^{(1)} &= w_n^{(2)} = w_l^{(3)} \\
w_n^{(1)} &= w_l^{(2)} = w_m^{(3)}
\end{aligned} \right\} \quad (6.232)$$

Суммарные прогибы в точках  $l$ ,  $m$  и  $n$  равны

$$w_l = \frac{w_l^{(1)} + w_l^{(2)} + w_l^{(3)}}{3}; \quad w_m = \frac{w_m^{(1)} + w_m^{(2)} + w_m^{(3)}}{3}; \quad w_n = \frac{w_n^{(1)} + w_n^{(2)} + w_n^{(3)}}{3} \quad (6.233)$$

На основании (6.231) и (6.232)  $w_l = w_m = w_n$ , что и требовалось доказать.

Функция прогибов (6.231) представляет собой полный кубический полином, коэффициенты которого выражены через девять узловых перемещений КЭ. Такая функция в декартовых координатах получена В.П.Агаповым и описана в работе [2]. При этом все преобразования, используемые для вычисления коэффициентов полинома, являются невырожденными и имеют место для треугольного КЭ произвольного вида.

Матрица жесткости треугольного КЭ с функцией прогибов (6.231) и мембранными перемещениями (6.229) может быть найдена по формулам (6.215) - (6.227) с заменой в них матриц  $[A_b^{-1}]$ ,  $[\Phi_b]$ ,  $[B_b]$  на матрицы  $[A]$ ,  $[\bar{\Phi}_b]$ ,  $[\bar{B}_b]$  соответственно, причем

$$[\bar{\Phi}_b] = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3]$$

$$[\bar{B}_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогичные замены необходимо выполнить при вычислении напряжений по формулам (6.218) и (6.219).

Треугольный элемент, построенный с использованием усредненной функции прогибов (6.241) идентифицируется в дальнейшем как LAMSHW.

Альтернативный подход к построению МЖ изгибного треугольного элемента заключается в усреднении не прогибов, а потенциальной энергии деформации субтреугольников. В этом случае

$$P = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3},$$

где  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  - потенциальная энергия деформации субтреугольников 1, 2 и 3 соответственно,  $\Pi$  - усредненное значение потенциальной энергии элемента. Применение стандартной процедуры приводит МКЭ приводит к усредненной МЖ элемента

$$[K] = \frac{[K_1] + [K_2] + [K_3]}{3},$$

где  $[K_1], [K_2]$  и  $[K_3]$  - МЖ субтреугольников 1, 2 и 3, полученные с использованием функции прогибов (6.156) и приведенные к некоторой общей для них системе координат.

Деформации и напряжения и в этом случае следует определять по усредненной функции прогибов (6.231). Конечный элемент, МЖ которого строится усреднением потенциальной энергии, идентифицируется в дальнейшем как LAMSHP.

### Матрица начальных напряжений

Матрицу начальных напряжений многослойного конечного элемента найдем по формуле (2.93)

$$[K_\sigma] = \int_V [G]^T [S] [G] dv, \quad (6.234)$$

в которой матрицы  $[S]$  и  $[G]$  определяются соотношениями (2.89) и (2.91).

Так как компоненты напряжений  $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  в каждом слое равны нулю, то матрица  $[S]$  принимает вид:

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (6.235)$$

Представим (6.234) в виде:

$$[K_\sigma] = \sum_V [G_l]^T [S_l] [G_l] dv. \quad (6.236)$$

Используя известные формулы для углов поворота  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  [30], на основании (6.199) находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x,l} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial y} - \frac{\partial v_l}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \bar{w}}{y}; \\ \omega_{y,l} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial z} - \frac{\partial w_l}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}; \\ \omega_{z,l} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{\partial u_l}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.237)$$

Подставляя (6.200) и (6.201) в (6.237) и представляя результат в матричном виде, получаем:

$$\begin{Bmatrix} \omega_{x,l} \\ \omega_{y,l} \\ \omega_{z,l} \end{Bmatrix} = [\bar{G}_p \quad \bar{G}_b] \begin{Bmatrix} \alpha \\ q \end{Bmatrix}, \quad (6.238)$$

где

$$[\bar{G}_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}; \quad (6.239)$$

$$[\bar{G}_b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -3xy & -3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.240)$$

На основании (6.204) и (6.207)

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p^{-1} & 0 \\ 0 & A_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \end{Bmatrix}. \quad (6.241)$$

Формула (6.238) принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} \omega_{x,l} \\ \omega_{y,l} \\ \omega_{z,l} \end{Bmatrix} = [G_l] \begin{Bmatrix} \alpha \\ q \end{Bmatrix}, \quad (6.242)$$

где

$$[G_l] = [\bar{G}_p \quad \bar{G}_b] \begin{bmatrix} A_p^{-1} & 0 \\ 0 & A_b^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6.243)$$



Отметим, что элементы матрицы  $[G_i]$  не зависят от  $z$ .

Эпюра напряжений  $\sigma_{ij}$  в слое имеет вид, показанный на рис. 6.69, в. Следовательно, значение этого компонента в точке с координатой  $z$  может быть представлено в виде:

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \gamma(z - \bar{z}), \quad (6.244)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}$  - значение напряжения в точке на срединной поверхности слоя,  $\bar{z}$  - координата  $z$  точки на срединной поверхности слоя и  $\gamma$  - некоторый числовой коэффициент.

Нетрудно показать, что

$$\int_{h_2}^{h_1} (\bar{\sigma}_{ij} + \gamma(z - \bar{z})) dz = \bar{\sigma}_{ij} h_l. \quad (6.245)$$

Интегрируя в формуле (6.235) по  $z$  и учитывая (6.234), получаем

$$[K_\sigma^e] = \sum h_l \int_F [G_i]^T [\bar{S}] [G_i] dF, \quad (6.246)$$

где

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{yy} & -\bar{\sigma}_{xy} & 0 \\ -\bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (6.247)$$

Подставляя в (6.246) значения  $[G_i]$  и  $[\bar{S}]$ , определяемые формулами (6.243) и (6.247) соответственно, находим

$$[K_\sigma^e] = \sum h_l \int_F \begin{bmatrix} A_p^{-1} & 0 \\ 0 & A_b^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{G}_p^T \\ \bar{G}_b^T \end{bmatrix} [\bar{S}] \begin{bmatrix} \bar{G}_p \\ \bar{G}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p^{-1} & 0 \\ 0 & A_b^{-1} \end{bmatrix} dF. \quad (6.248)$$

Выполняя умножение под знаком интеграла, получаем

$$[K_\sigma^e] = \sum h_l \int_F \begin{bmatrix} [A_p^{-1}]^T \bar{G}_p^T \bar{S}_l \bar{G}_p A_p^{-1} & [A_p^{-1}]^T \bar{G}_p^T \bar{S}_l \bar{G}_b A_b^{-1} \\ [A_b^{-1}]^T \bar{G}_b^T \bar{S}_l \bar{G}_p A_p^{-1} & [A_b^{-1}]^T \bar{G}_b^T \bar{S}_l \bar{G}_b A_b^{-1} \end{bmatrix} dF. \quad (6.249)$$

Можно показать, что  $[\bar{G}_p \bar{S}_l \bar{G}_b] = [0]$ , следовательно,

$$[K_\sigma^e] = \sum h_l \int_F \begin{bmatrix} [A_p^{-1}]^T \bar{G}_p^T \bar{S}_l \bar{G}_p A_p^{-1} & 0 \\ 0 & [A_b^{-1}]^T \bar{G}_b^T \bar{S}_l \bar{G}_b A_b^{-1} \end{bmatrix} dF. \quad (6.250)$$

Последнюю формулу можно представить также в виде

$$[K_\sigma^e] = \begin{bmatrix} K_\sigma^{e,p} & 0 \\ 0 & K_\sigma^{e,b} \end{bmatrix}, \quad (6.251)$$

где

$$[K_\sigma^{e,p}] = \int_F [A_p^{-1}]^T \bar{G}_p^T \sum h_l \bar{S}_l \bar{G}_p A_p^{-1} dF; \quad (6.252)$$

$$[K_\sigma^{e,b}] = \int_F [A_b^{-1}]^T \bar{G}_b^T \sum h_l \bar{S}_l \bar{G}_b A_b^{-1} dF. \quad (6.253)$$

Учитывая, что все матрицы, входящие в формулу (6.253), постоянные, запишем эту формулу в виде:

$$[K_\sigma^{e,p}] = [A_p^{-1}]^T \bar{G}_p^T \sum h_l \bar{S}_l \bar{G}_p A_p^{-1}. \quad (6.254)$$

Матрица начальных напряжений для усредненных конечных элементов LAMSHW и LAMSHP может быть найдена по формулам (6.252) - (6.254) с заменой в этих формулах матриц  $[\bar{G}_b]$  и  $[A_b^{-1}]$  на матрицы  $[G_b]$  и  $[A]$  соответственно. При этом матрица связи между поворотами и обобщенными перемещениями при изгибе находится на основании (6.230) и (6.237) следующим образом:

$$[G_b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x & -2xy & -3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получены формулы для вычисления всех матричных характеристик плоского комбинированного треугольного конечного элемента, необходимых для расчета пластинок и оболочек на прочность, устойчивость и колебания методом конечных элементов.

## СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОТРАКТОРНОЙ ТЕХНИКИ. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

### 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

#### КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Любая конструкция под воздействием приложенных к ней нагрузок деформируется. В результате деформации возникают внутренние напряжения, и в любом сечении конструкции равнодействующая этих напряжений уравнивает внешние силы, действующие по одну сторону от сечения. Форму, которую конструкция приобретает в результате деформации, принято называть формой равновесия в деформированном состоянии. Эта форма может быть устойчивой, неустойчивой или безразличной по отношению к дополнительным воздействиям.

Форма равновесия считается устойчивой в малом, если при устранении причин, вызвавших сколь угодно малое отклонение от этой формы, конструкция возвращается к ней. Если сколь угодно малые отклонения от формы равновесия приводят к быстрому и необратимому росту перемещений, деформаций и усилий, в результате чего конструкция может разрушиться, то форма равновесия считается неустойчивой. В безразличном состоянии любые малые отклонения от исходной формы переводят конструкцию в новое состояние равновесия, близкое к исходному, в котором она и остается после устранения причин, вызвавших отклонение.

Описанное выше поведение конструкции связывалось с малыми отклонениями от исходного состояния, поэтому введенное выше понятие устойчивости или неустойчивости принято называть устойчивостью или неустойчивостью в малом. Аналогичным образом можно ввести понятие устойчивости или неустойчивости в большом.

При статическом приложении нагрузки, т.е. при постепенном ее возрастании от нуля до конечного значения, равновесие конструкции на начальных этапах нагружения является устойчивым, но при достижении некоторого порогового значения, называемого критической нагрузкой, оно может стать сначала безразличным, а затем и неустойчивым. Переход конструкции из устойчивого состояния в безразличное называется потерей устойчивости. Достичь безразличного состояния равновесия можно лишь теоретически в идеальных конструкциях. В реальных же конструкциях, в силу всевозможных несовершенств, достичь безразличного состояния равновесия невозможно, и грань между безразличным и неустойчивым состояниями равновесия стирается. Поэтому можно определить потерю устойчивости как переход из устойчивого состояния в неустойчивое. В любом случае потеря устойчивости сопровождается появлением смежных форм равновесия, отличающихся от исходной, поэтому для определения критических

нагрузок два приведенных выше определения потери устойчивости являются равноценными.

Так как при потере устойчивости происходит быстрый рост перемещений, деформаций и усилий, что, как правило, вызывает разрушение конструкции, то определение критических нагрузок является одной из наиболее важных задач расчета конструкций и их элементов.

Для определения критических нагрузок применяются статические, энергетические и динамические методы. При использовании статических методов задаются формой равновесия конструкции, близкой к исходной, и определяют нагрузки, способные удерживать конструкцию в этом состоянии. Согласно данному выше определению, это и есть критические нагрузки.

Энергетические методы определения критических нагрузок связаны с анализом энергии системы. Наиболее часто используется вариант метода, в котором системе задается бесконечно малое перемещение, вычисляется работа внешних сил и накапливаемая в системе потенциальная энергия, и из условия равенства работы внешних сил потенциальной энергии находятся критические нагрузки.

Динамические методы основаны на исследовании собственных малых колебаний конструкций. При нагрузках, равных критическим, частоты собственных колебаний становятся равными нулю. Таким образом, динамический метод определения минимальной критической силы сводится к определению нагрузок, при которых низшая частота собственных колебаний становится равной нулю.

Расчет на устойчивость сложных пространственных конструкций требует применения ЭВМ. Поэтому отдельный раздел книги посвящен применению МКЭ в задачах устойчивости.

### 7.2. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

#### 7.2.1. Устойчивость однопролетных стержней постоянного сечения

Стержни теряют устойчивость при действии нагрузок, направленных вдоль оси и вызывающих сжатие. Исходной формой равновесия при этом является прямолинейная, а смежной, соответствующей потере устойчивости, — криволинейная (изгибная).

Рассмотрим шарнирно-опертый стержень, сжимаемый силой  $N$  (рис. 7.1).

Собственным весом стержня пренебрежем. При достижении силой  $N$  критического значения наряду с исходной прямолинейной становится возможной смежная, криволинейная форма равновесия. Решим задачу статическим методом. Для этого составим дифференциальное уравнение изогнутой оси:

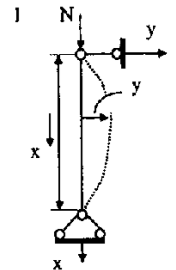


Рис. 7.1

$$Ely'' = M = -Ny, \quad (7.1)$$

или

$$y'' + \frac{Ny}{EI} = 0. \quad (7.2)$$

Обозначим

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.2) с учетом (7.3) записывается так:

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \quad (7.4)$$

Решение уравнения (7.4) записывается в виде

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x. \quad (7.5)$$

Пренебрегая сближением концов стержня при изгибе, что равносильно допущению о потере устойчивости в малом, запишем граничные условия в виде:

- 1) при  $x = 0, y = 0$ ;
- 2) при  $x = l, y = 0$ .

Первое условие дает

$$0 = A \sin \alpha 0 + B \cos \alpha 0 = B. \quad (7.6)$$

Из второго условия получаем

$$0 = A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = A \sin \alpha l. \quad (7.7)$$

Из формулы (7.5) следует, что либо  $A = 0$ , либо  $\sin \alpha l = 0$ . Но при  $A = 0$  искривления стержня не происходит, следовательно  $\sin \alpha l = 0$ . Последнее равенство имеет место лишь в том случае, если  $\alpha l = n\pi$ . С учетом обозначения (7.3) имеем

$$N_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (7.8)$$

Минимальное значение критической силы получаем при  $n=1$ . Следовательно

$$N_{кр, \min} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (7.9)$$

Для однопролетных стержней с различными условиями опирания минимальное значение критической нагрузки находится в по формуле

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (7.10)$$

где  $\mu$  - коэффициент приведения длины, зависящий от способов опирания.

Формула (7.10) известна как формула Эйлера.

Критическое напряжение может быть найдено по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.11)$$

где  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  - приведенная гибкость стержня,  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  - минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Вывод формулы Эйлера основан на использовании дифференциального уравнения упругой линии стержня, которое справедливо лишь для области упругих деформаций. Поэтому формула Эйлера применима при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности, т.е.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пл},$$

откуда

$$\lambda \geq \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пл}}}.$$

Если потеря устойчивости происходит в упруго-пластической стадии, то критическое напряжение вычисляется по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a + b\lambda + c\lambda^2, \quad (7.12)$$

где  $a, b$  и  $c$  - опытные коэффициенты, зависящие от материала и имеющие размерность напряжений (см. табл. 7.1).

Критическая сила в этом случае подсчитывается по формуле

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A.$$

Формулой Ясинского следует пользоваться, если расчетная гибкость  $\lambda$  удовлетворяет следующему соотношению:

$$\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред},$$

где  $\lambda_0$  - гибкость, при которой напряжения в поперечном сечении сжатого стержня равны пределу текучести.

Таблица 7.1

Материал	E	$\lambda_{\text{пц}}$	a	b	c	$\lambda_0$	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь Ст. 2	$2 \cdot 10^5$	180	264	0.7	-	60	105
Сталь Ст. 3	$2 \cdot 10^5$	200	310	1.14	-	60	100
Сталь Ст. 4	$2 \cdot 10^5$	217	328	1.15	-	60	96
Сталь Ст. 5	$2 \cdot 10^5$	240	343	1.13	-	57	91
Сталь 45	$2 \cdot 10^5$	270	449	1.67	-	52	85
Сплав Д16Т	$0.7 \cdot 10^5$	170	406	2.83	-	30	65
Чугун	$1.2 \cdot 10^5$	180	776	12	0.053	-	80

Критические напряжения в стержне при гибкости в интервале  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$  могут быть определены также по следующей эмпирической формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{T}} - (\sigma_{\text{T}} - \sigma_{\text{пц}}) \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{пред}}^2},$$

где  $\sigma_{\text{T}}$  - предел текучести материала стержня.

Заметим, что в любом случае критическое напряжение может быть выражено в зависимости от гибкости и свойств материала. Формулы (7.11) и (7.12) можно записать в виде

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}}(\sigma_{\text{T}}, \lambda) = \varphi \sigma_{\text{T}}, \quad (7.13)$$

где  $\varphi$  - коэффициент, зависящий от гибкости и свойств материала.

Условие устойчивости стержня можно записать в виде

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n} = \frac{\varphi \sigma_{\text{T}}}{n} = \varphi [\sigma], \quad (7.14)$$

где  $n$  - коэффициент запаса,  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение, обычно принимаемое в расчетах на прочность. Формулу (7.14) можно записать также в виде

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

Таким образом, расчеты стержней на устойчивость можно вести так же, как и расчеты на прочность при сжатии, но при пониженном значении допускаемого напряжения. Коэффициент  $\varphi$ , меньший или равный единице, называется коэффициентом снижения допускаемого напряжения. Значения этого коэффициента приводятся в справочной литературе. В табл. 7.2 приведены значения коэффициента  $\varphi$  для некоторых материалов.

Таблица 7.2

Значения коэффициента снижения допускаемого напряжения

$\lambda$	Сталь			$\lambda$	Сталь	
	Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4	Сталь Ст. 5	Чугун		Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4	Сталь Ст. 5
0	1.00	1.00	1.00	120	0.45	0.37
10	0.99	0.98	0.97	130	0.40	0.30
20	0.97	0.96	0.91	140	0.36	0.28
30	0.95	0.93	0.81	150	0.32	0.25
40	0.92	0.90	0.69	160	0.29	0.23
50	0.89	0.85	0.57	170	0.26	0.21
60	0.86	0.80	0.44	180	0.23	0.19
70	0.81	0.74	0.34	190	0.21	0.17
80	0.75	0.67	0.26	200	0.19	0.15
90	0.69	0.59	0.20	210	0.17	0.14
100	0.60	0.50	0.18	220	0.16	0.13
110	0.52	0.43	-			

Расчеты на устойчивость сводятся в основном к определению допускаемого значения сжимающей силы при известных размерах поперечного сечения или к подбору размеров поперечного сечения при заданной величине сжимающей силы.

### 7.2.2. Пример расчета на устойчивость

В качестве примера рассмотрим стержень квадратного поперечного сечения со стороной "a" (рис. 7.1), сжатый силой F. При выполнении расчетов примем  $l = 2$  м,  $F = 200$  кН. Материал стержня - сталь Ст. 3,  $[\sigma] = 160$  МПа; коэффициент приведения длины  $\mu = 1$ .

Задачу будем решать путем варьирования площади поперечного сечения.

Выразим площадь сечения, момент инерции и радиус инерции через размер сечения "a". Получим

$$A = a^2; I = \frac{a^4}{12}; i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{12}} = 0,2887 a^2.$$

В первом приближении определим размер "a" из условия прочности ( $\varphi = 1$ )

$$\frac{F}{A} = [\sigma]$$

Отсюда

$$a = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{160 \times 10^6}} = 0.0356 \text{ м} = 3,56 \text{ см.}$$

Найдем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 200}{0.2887a} = \frac{200}{0.2887 \times 3.56} = 195.$$

При  $\lambda = 195$  для стали Ст.3 находим  $\varphi = 0.2$ .

Во втором приближении задаемся

$$\varphi = \frac{1+0.2}{2} = 0.6.$$

Из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} = \varphi[\sigma]$$

находим

$$a = \sqrt{\frac{F}{\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{0.6 \times 160 \times 10^6}} = 0.0456 \text{ м} = 4.56 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 200}{0.2887a} = \frac{200}{0.2887 \times 4.56} = 152.$$

С помощью интерполяции при  $\lambda = 152$  находим  $\varphi = 0.314$ .

В третьем приближении принимаем

$$\varphi = \frac{0.6+0.314}{2} = 0.457.$$

Далее находим

$$a = \sqrt{\frac{F}{\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{0.457 \times 160 \times 10^6}} = 0.0523 \text{ м} = 5.23 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 200}{0.2887a} = \frac{200}{0.2887 \times 5.23} = 132.$$

С помощью интерполяции из табл.7.3 при  $\lambda = 132$  находим  $\varphi = 0.392$ .

В четвертом приближении принимаем

$$\varphi = \frac{0.457+0.392}{2} = 0.4245.$$

Далее находим

$$a = \sqrt{\frac{F}{\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{0.4245 \times 160 \times 10^6}} = 0.0523 \text{ м} = 5.42 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 200}{0.2887a} = \frac{200}{0.2887 \times 5.42} = 128.$$

С помощью интерполяции при  $\lambda = 128$  находим  $\varphi = 0.41$ .

Полученное значение  $\varphi = 0.41$  отличается от заданного значения  $\varphi = 0.4245$  на 3.4%. Дальнейшее уточнение результата не имеет практического смысла. Таким образом, значение "а", удовлетворяющее условию устойчивости, равно 5.42 см.

### 7.2.3. Определение критических нагрузок в сложных случаях нагружения стержней

Рассмотрим методику определения критических нагрузок при сложном нагружении стержня и при сложных граничных условиях. Стержень, изображенный на рис.7.2, нагружен осевой силой  $F$ , приложенной в центральном сечении и оперт таким образом, что нижняя опора допускает поворот опорного сечения, но не допускает линейных смещений, а верхняя опора допускает линейное смещение по горизонтали, но не допускает поворота.

Задачу решим двумя способами - статическим и энергетическим

#### Статический метод

Зададим отклонение оси стержня, как показано на рис.7.2, и составим дифференциальные уравнения равновесия для участков АВ и ВС.

Участок АВ ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ).

$$EIy_1'' = -M = -Fy_1,$$

или

$$y_1'' + k^2 y_1 = 0, \quad k^2 = \frac{F}{EI}. \quad (7.16)$$

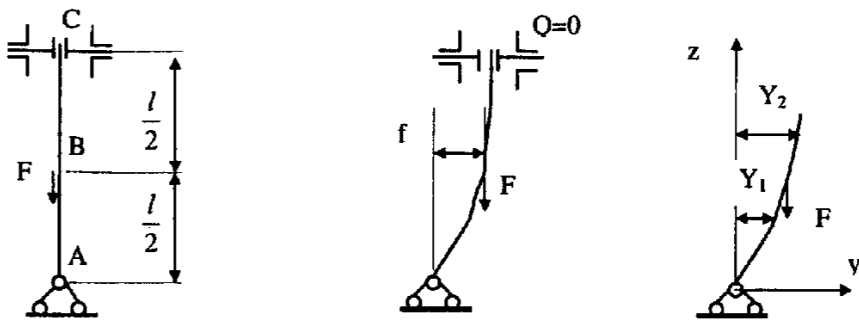


Рис. 7.2.

Решение уравнения (7.16) имеет вид

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Следовательно

$$y_1' = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx.$$

Участок BC ( $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ ):

$$EIy_2'' = -Fy_2 + F(y_2 - f) = Ff. \quad (7.17)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (7.17) удовлетворяет приведенная ниже функция:

$$y_2 = -k^2 f \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$y_2' = -k^2 f x + C_3.$$

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  должны быть подобраны таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия:

1)  $x=0$ ;  $y_1=0$ ;  $0=c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1$ ;  $c_2=0$ .

2)  $x=l/2$ ;  $y_1=f$ ;  $f=c_1 \sin \frac{kl}{2}$ ;  $c_1 \sin \frac{kl}{2} - f=0$ .

3)  $x=l/2$ ;  $y_2=f$ ;  $f=-k^2 f \frac{l^2}{8} + c_3 \frac{l}{2} + c_4$ ;  $0=c_3 \frac{l}{2} + c_4 - \left(1+k^2 \frac{l^2}{8}\right) f$

4)  $x=l$ ;  $y_1'=y_2'$ ;  $c_1 k \cos \frac{kl}{2} = -k^2 f \frac{l}{2} + c_3$ ,  $c_1 k \cos \frac{kl}{2} - c_3 + k^2 \frac{l}{2} f = 0$ .

Условия 2-4 являются условиями отсутствия скачков и перегибов функции прогибов в точке B.

5)  $x=l$ ;  $y_2'=0$ ;  $0=-k^2 l f + c_3$ .

Это условие соответствует исходным данным – верхнее сечение не имеет возможности поворачиваться.

Приведенные условия образуют систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} -1 \sin \frac{kl}{2} - f = 0; \\ c_3 \frac{l}{2} + c_4 - \left(1 + k^2 \frac{l^2}{8}\right) f = 0; \\ c_1 k \cos \frac{kl}{2} - c_3 + k^2 \frac{l}{2} f = 0; \\ c_3 - k^2 l f = 0. \end{cases} \quad (7.18)$$

Система однородных уравнений имеет нулевое ( $c_1=c_3=c_4=f=0$ ) и ненулевое решение. Нулевое (тривиальное) решение нас не интересует, так как в этом случае  $y=0$  и стержень остается прямым, т.е. не происходит потери устойчивости.

Ненулевое решение возможно только в том случае, когда определитель системы уравнений равен нулю (7.18).

Таким образом, условие потери устойчивости стержня имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \frac{kl}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{l}{2} & 1 & -(1+k^2 \frac{l^2}{8}) \\ k \cos \frac{kl}{2} & -1 & 0 & k^2 \frac{l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -k^2 l \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель  $\Delta$  по элементам третьего столбца, получаем

$$\Delta = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \sin \frac{kl}{2} & 0 & -1 \\ k \cos \frac{kl}{2} & -1 & k^2 \frac{l}{2} \\ 0 & 1 & -k^2 l \end{vmatrix} 1 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Раскрыв полученный определитель третьего порядка, приходим к уравнению

$$(-1)^{1+1} \sin \frac{kl}{2} \left( k^2 l - \frac{k^2 l}{2} \right) + (-1)^{1+3} (-1) k \cos \frac{kl}{2} = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{2}{kl}. \quad (7.19)$$

Определим наименьший корень трансцендентного уравнения (7.19) графически. Обозначим

$$\beta = \frac{kl}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\beta}. \quad (7.20)$$

Тогда

$$f_1(\beta) = \operatorname{tg} \beta; \quad f_2(\beta) = \frac{2}{kl} = \frac{1}{\beta}.$$

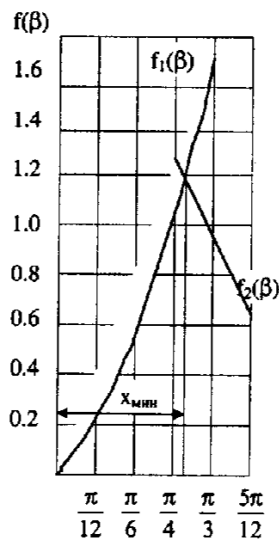


Рис. 7.3

Строя графики функций  $f_1(\beta)$  и  $f_2(\beta)$ , находим точку их пересечения  $\beta = 0.273\pi$ . С учетом соотношений (14.16) и (14.20) получаем

$$\beta_{\min} = \frac{k_{\min} l}{2} = 0.273\pi; \quad k_{\min} = \frac{1.72}{l};$$

$$k_{\min}^2 = \frac{2.96}{l^2} = \frac{F}{EJ}; \quad F = \frac{2.96EJ}{l^2}.$$

В общем случае

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

Следовательно

$$\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{2.96EJ}{l^2}; \quad \mu = \frac{\pi}{1.72} = 1.827.$$

## Энергетический метод

В приведенном выше расчете мы пренебрегли сближением концов стержня при изгибе, так как это сближение было для нас несущественным при составлении дифференциального уравнения изогнутой оси для малых прогибов. При использовании энергетического способа знание сближения концов стержня необходимо, поскольку без этой величины невозможно вычислить работу внешней силы  $F$ .

Нетрудно показать, что сближение концов стержня при изгибе (см. рис. 7.4) определяется выражением

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

Работа  $\delta T$  силы  $F$  равна

$$\delta T = F \Delta l = \frac{F}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

Приращение  $\delta V$  упругой потенциальной энергии при изгибе равно

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Поскольку  $M = EIy''$ , то  $\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y'')^2 dx$ .

Приравняв работу внешних сил потенциальной энергии деформации, получаем следующую формулу для определения критической силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EJ(y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} \quad (7.21)$$

Для определения критической силы по формуле (7.21) необходимо знать уравнение изогнутой оси.

Граничные условия для сжатого стержня, изображенного на рис. 7.2, таковы:

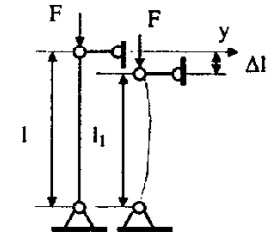


Рис. 7.4

- 1)  $x=0; y=0;$
- 2)  $x=0; y'=0$  (т.к.  $EJy'' = -M_x = 0$ );
- 3)  $x=l; y'=0;$
- 4)  $x=l; y''' = 0$  (т.к.  $EJy''' = Q_y = 0$ ).

Зададим функцию  $y(x)$  приближенно в виде полинома 4-ой степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \\ y''' &= 6a_3 + 24a_4x \end{aligned}$$

Из граничных условий получаем

- 1)  $a_0 = 0$
- 2)  $a_2 = 0$
- 3)  $a_1 + 3a_3l^2 + 4a_4l^3 = 0$
- 4)  $6a_3 + 24a_4l = 0$

Окончательно

$$y = a_4(8l^3x - 4lx^3 + x^4);$$

$$\frac{1}{a_4}y = 8l^3x - 4lx^3 + x^4;$$

$$\frac{1}{a_4}y' = 8l^3 - 12lx^2 + 4x^3;$$

$$\frac{1}{a_4}y'' = -24lx + 12x^2 = 12(x^2 - 2lx);$$

$$\frac{1}{a_4}(y''')^2 = 12^2(x^2 - 2lx)^2 = 144(x^4 - 4lx + 4l^2x^2);$$

$$\int_0^l EJ(y'')^2 dx = a_4^2 EJ 144 \left( \frac{x^5}{5} - 4l \frac{x^4}{4} + 4l \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l = 76.8l^5 EJ a_4^2;$$

$$\frac{1}{a_4^2}(y')^2 = (8l^3 - 12lx^2 + 4x^3)^2 = 64l^6 + 144l^2x^4 + 16x^6 - 192l^4x^2 + 64l^3x^3 - 48lx^5;$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} (y')^2 dx &= a_4^2 \left( 64l^6x + 144l^2 \frac{x^5}{5} + 16 \frac{x^7}{7} - 192l^4 \frac{x^3}{3} + 64l^3 \frac{x^4}{4} - 48l^2 \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \\ &= 25.793l^7 a_4^2 \end{aligned}$$

При определении работы, совершаемой силой  $F$  на своем перемещении, интегрирование следует вести в пределах от 0 до  $l/2$ , так как сила  $F$  приложена в середине стержня и действует в направлении точки  $A$  ( $x=0$ ).

Подставляя полученные зависимости в формулу (7.21), получаем

$$F_{кр} = \frac{a_4^2 76.8l^5 EJ}{a_4^2 25.793l^7} = \frac{2.98 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{2.98}} = 1.82.$$

Определим коэффициент приведения длины стержня, задав функцию  $y(x)$  в тригонометрическом виде

$$y = A \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

При  $x=0, y=0$  и при  $x=l, y=y_{\max}$ , т.е. заданная функция удовлетворяет граничным условиям.

Вычисляя производные от заданной функции прогибов и подставляя их в формулу для критической силы (7.21), получаем

$$y''' = A \frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

$$y'' = -A \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

$$y' = -A \left( \frac{\pi}{2l} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{2l}.$$



$$F_{кр} = \frac{EJ \int_0^l A^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx}{\frac{1}{2} \int_0^l A^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx} = \frac{EJA^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{2\pi} \right]_0^l}{A^2 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{2\pi} \right]_0^l} = \frac{\pi^2 EJ}{8l^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right)} = \frac{\pi^2 EI}{(1.81l)^2}$$

Следовательно,  $\mu = 1.81$ .

Если при определении критической нагрузки энергетическим способом изогнутую линию стержня задать точной, а не приближенной зависимостью, то мы получим результат, совпадающий с результатом, подсчитанным по формуле Эйлера, т.к. при выводе общих формул использовалось одно и то же дифференциальное уравнение ( $EJy'' = -M$ ).

Решая задачу энергетическим способом, мы получили завышенный результат для критической силы. Это объясняется тем, что стержень всегда изгибается таким образом, чтобы его полная энергия была минимальной. При расчете мы навязываем стержню не свойственную ему форму упругой линии, т.е. как бы вводим дополнительные связи, которые ведут к увеличению критической нагрузки.

В рассмотренном случае значения коэффициента приведения длины стержня, найденные статическим и энергетическим методами, различаются незначительно. Это объясняется тем, что форма упругой линии стержня является монотонной, без точек перегиба, и поэтому она достаточно хорошо описывается как полиномами, так и тригонометрическими функциями.

### 7.3. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

#### 7.3.1. Уравнение метода начальных параметров

Совместное действие продольных и поперечных нагрузок приводит к так называемому продольно-поперечному изгибу, при котором существенный рост перемещений и напряжений может происходить при нагрузках, существенно меньших критических. Это определяет важность расчетов на продольно-поперечный изгиб. Для решения задач продольно-поперечного изгиба сжатых и сжато-изогнутых стержней необходимо уметь определять прогибы, углы поворота сечений, изгибающие моменты и поперечные силы при одновременном действии продольных и поперечных нагрузок. Для решения этой задачи воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки

$$y'' = \frac{M}{EI}. \quad (7.22)$$

Предположим, что на балку действуют равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , опорные моменты  $M_0$  и  $M_1$  и осевая сила  $N$  (рис.7.5). Предположим также, для общности рассуждений, что левая опора упруго-податлива и под действием приложенных нагрузок получает перемещение  $y_0$ . Продольными перемещениями балки пренебрежем ввиду их малости.

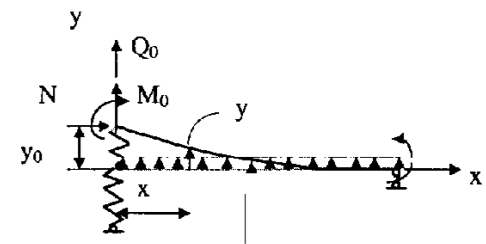


Рис. 7.5.

При принятых предположениях уравнение (7.22) принимает вид

$$y'' = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + N(y_0 - y) \right), \quad (7.23)$$

где  $N(y_0 - y)$  - дополнительный изгибающий момент, обусловленный продольной силой.

Представим уравнение (7.23) в виде

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + N y_0 \right), \quad (7.24)$$

где  $\alpha^2 = N/EI$ .

Решение дифференциального уравнения (7.24) имеет вид

$$y = y_{об} + y_{част}, \quad (7.25)$$

где  $y_{об}$  - общее решение однородного уравнения

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad (7.26)$$

а  $y_{част}$  - частное решение неоднородного уравнения (7.24).

Общее решение однородного уравнения (7.25) записывается так:

$$y_{об} = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x. \quad (7.27)$$

Частное решение найдем в виде

$$y_{част} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2. \quad (7.28)$$

Коэффициенты  $C_1 - C_3$  найдем, вычислив предварительно вторую производную  $y''_{част}$ , подставив  $y_{част}$  и  $y''_{част}$  в формулу (7.24) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$ . Получим

$$2C_3 + \alpha^2(C_1 + C_2x + C_3x^2) = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0x + \frac{qx^2}{2} + Ny_0 \right), \quad (7.29)$$

$$C_3 = \frac{q}{2EI\alpha^2}; \quad C_2 = \frac{Q_0}{EI\alpha^2}; \quad (7.30)$$

$$2C_3 + \alpha^2C_1 = \frac{M_0}{EI\alpha^2} + \frac{N}{EI}y_0 = \frac{M_0}{EI\alpha^2} + \alpha^2y_0$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{M_0}{EI\alpha^2} + y_0 - \frac{q}{EI\alpha^4}$$

Подставив найденные значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  в уравнение (7.28), получаем

$$y_{\text{част}} = y_0 + \frac{M_0}{EI\alpha^2} + \frac{Q_0}{EI\alpha^2}x + \frac{q}{2EI\alpha^4}(\alpha^2x^2 - 1). \quad (7.31)$$

По формуле (7.25) с учетом (7.27) и (7.31) получаем

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + y_0 + \frac{M_0}{EI\alpha^2} + \frac{Q_0}{EI\alpha^2}x + \frac{q}{2EI\alpha^4}(\alpha^2x^2 - 1) \quad (7.32)$$

Выразим коэффициенты  $A$  и  $B$  через перемещение и угол поворота в начале координат. Предварительно найдем выражение для углов поворота, продифференцировав формулу (7.32).

$$y' = \alpha A\cos\alpha x - \alpha B\sin\alpha x + \frac{Q_0}{EI\alpha^2} + \frac{qx}{EI\alpha^2}. \quad (7.33)$$

Подставляя  $x = 0$  в формулы (7.32) и (7.33), получаем

$$y(0) = y_0 = A \times 0 + B \times 1 + y_0 + \frac{M_0}{EI\alpha^2} - \frac{q}{2EI\alpha^4}; \quad (7.34)$$

$$y'(0) = y'_0 = \alpha A \times 1 - \alpha B \times 0 + \frac{Q_0}{EI\alpha^2}. \quad (7.35)$$

Отсюда

$$B = -\frac{M_0}{EI\alpha^2} + \frac{q}{2EI\alpha^4}; \quad A = \frac{y'_0}{\alpha} - \frac{Q_0}{EI\alpha^3}.$$

Подставив значения коэффициентов  $A$  и  $B$  в уравнение (7.32), после элементарных преобразований получаем

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{\alpha} \sin\alpha x + \frac{M_0}{EI} \frac{1 - \cos\alpha x}{\alpha^2} + \frac{Q_0}{EI} \frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{q}{2EI} \frac{\alpha^2 x^2 + \cos\alpha x - 1}{\alpha^4}. \quad (7.36)$$

Дифференцируя (7.36), находим общее выражение для угла наклона касательной к изогнутой оси балки:

$$y' = y'_0 \cos\alpha x + \frac{M_0}{EI} \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + \frac{Q_0}{EI} \frac{1 - \cos\alpha x}{\alpha^2} + \frac{q}{2EI} \frac{\alpha x - \sin\alpha x}{\alpha^3}. \quad (7.37)$$

Изгибающий момент в любом сечении балки найдем из уравнения (7.22) с использованием найденного решения для  $y$  (7.36):

$$M = EIy'' = -y'_0 \alpha EI \sin\alpha x + M_0 \cos\alpha x + Q_0 \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + q \frac{1 - \cos\alpha x}{\alpha^2}. \quad (7.38)$$

Поперечная сила в любом сечении может быть найдена на основании известной дифференциальной зависимости

$$Q = \frac{dM}{dx} = -y'_0 \alpha^2 EI \cos\alpha x - M_0 \alpha \sin\alpha x + Q_0 \cos\alpha x + q \frac{\sin\alpha x}{\alpha}. \quad (7.39)$$

Полученные формулы дают возможность полностью исследовать напряженно-деформированное состояние балки, нагруженной, как показано на рис. 7.1. Уравнения (7.36)-(7.39) являются уравнениями метода начальных параметров, так как все исследуемые величины выражены через перемещение и усилия в начале координат.

Перейдем теперь к получению уравнений метода начальных параметров для балки, имеющей два различных образом нагруженных участка, как показано на рис. 7.6.

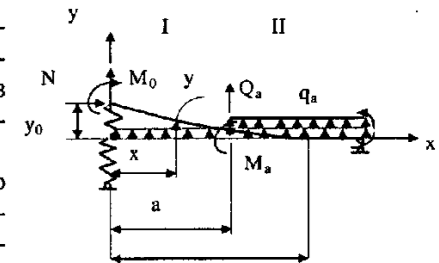


Рис. 7.6

Дифференциальное уравнение для первого участка балки записывается в виде (7.24)

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + Ny_0 \right) \quad (7.40)$$

Для второго участка, на основании (7.22), имеем

$$y_2'' = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + N(y_0 - y_2) + M_a + Q_a(x-a) + q_a \frac{(x-a)^2}{2} \right), \quad (7.41)$$

или

$$y_2'' + \alpha^2 y_2 = \frac{1}{EI} \left( M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + Ny_0 + M_a + Q_a(x-a) + q_a \frac{(x-a)^2}{2} \right). \quad (7.42)$$

Вычитая из уравнения (7.40) уравнение (7.42), получаем

$$\Delta y'' + \alpha^2 \Delta y = \frac{1}{EI} \left( M_a + Q_a(x-a) + q_a \frac{(x-a)^2}{2} \right), \quad (7.43)$$

где  $\Delta y = y_2 - y_1$  - приращение перемещения на втором участке по сравнению с первым.

Решая уравнение (7.43) описанным выше способом, но используя в качестве граничных условий равенство нулю приращений прогибов и углов поворота на границе между участками (условие стыковки участков), т.е.  $\Delta y = \Delta y' = 0$  при  $x=a$ , получаем

$$\Delta y = \frac{M_a}{EI} \frac{(1 - \cos \alpha(x-a))}{\alpha^2} + \frac{Q_a}{EI} \frac{\alpha(x-a) - \sin \alpha(x-a)}{\alpha^2} + \frac{q_a}{2EI} \frac{\alpha^2(x-a)^2 + \cos \alpha(x-a) - 1}{\alpha^4}. \quad (7.44)$$

Вычислив  $y_2 = y_1 + \Delta y$ , на основании (7.22) найдем

$$M_2(x) = y_2'' EI = -y_1'' EI + \Delta y'' EI = M_1(x) + M_a \cos \alpha(x-a) + Q_a \frac{\sin \alpha(x-a)}{\alpha} + q_a \frac{1 - \cos \alpha(x-a)}{\alpha}. \quad (7.45)$$

Поперечная сила на втором участке находится обычным способом

$$Q_2(x) = \frac{dM_2(x)}{dx} = Q_1(x) - M_a \alpha \sin(x-a) - Q_a \cos \alpha(x-a) + q_a \frac{\sin \alpha(x-a)}{\alpha} \quad (7.46)$$

Для практических расчетов может понадобиться уравнение для приращений углов поворота на втором участке, Получим его, продифференцировав выражение (7.44):

$$\Delta y' = \frac{M_a}{EI} \frac{\sin \alpha(x-a)}{\alpha} + \frac{Q_a}{EI} \frac{1 - \cos \alpha(x-a)}{\alpha^2} + \frac{q_a}{EI} \frac{\alpha(x-a) - \sin \alpha(x-a)}{\alpha^3} \quad (7.47)$$

### 7.3.2. Пример расчета на продольно-поперечный изгиб

Пусть требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 7.7 при указанных на этом рисунке размерах и нагрузках.

*Решение.*

Определение опорных реакций.

$$\sum M_B = R_B \times 6.0 - 20.0 \times 4.0 - 5.0 \times 4.0 \times 2.0 = 0; \quad R_B = \frac{80 + 40}{6} = 20 \text{ кн.}$$

Вычисление момента инерции сечения.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 8^3}{12} = 171 \text{ см}^4 = 171 \times 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисление изгибной жесткости и параметра  $\alpha$ .

$$EI = 2 \times 10^5 \times 10^6 \times 171 \times 10^{-8} = 341000 \text{ Н}^2;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \sqrt{\frac{50 \times 10^3}{341000}} = 0,383 \frac{1}{\text{м}}.$$

На основании формул (7.36) и (7.44) имеем

$$y_1 = y_0 + \frac{y_0'}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{R_A}{EI} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^2}; \quad (a)$$

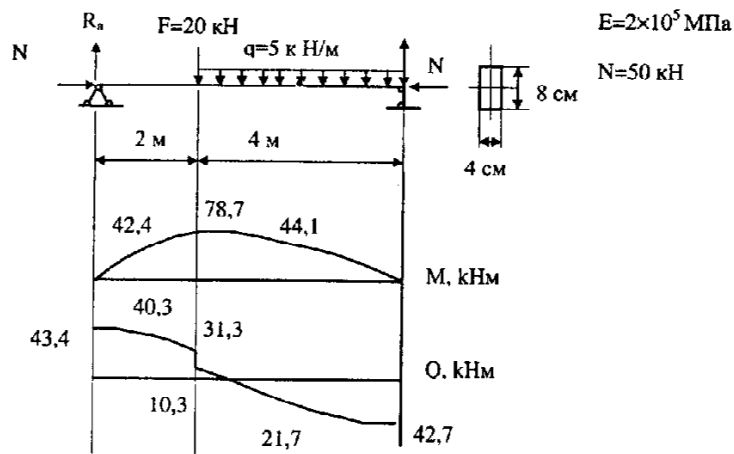


Рис. 7.7

$$y_2 = y_0 + \frac{y'_0}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{R_A}{EI} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha^2} - F \frac{\alpha(x-2) - \sin \alpha(x-2)}{\alpha^3} - \frac{q}{EI} \frac{\alpha^2(x-2)^2}{2} - 1 + \cos \alpha(x-2) \quad (b)$$

Определение начальных параметров.

Для определения  $y_0$  и  $y'_0$  используем граничные условия (условия на опорах).

Левая опора:  $x=0, y_0=0$ ;

Правая опора:  $x=6, y_1=0$ .

Из уравнения (b) при  $x=6$  получаем

$$y_2|_{x=6} = \frac{y'_0}{0,383} \sin(0,383 * 6) + \frac{20000}{341000} \frac{0,383 * 6 - \sin(0,383 * 6)}{0,383^3} - \frac{20000}{341000} \frac{0,383 * (6-2) - \sin(0,383 * (6-2))}{0,383^3} - \frac{5000}{341000} \frac{0,383^2 * (6-2)^2}{2} - 1 + \cos(0,383 * (6-2)) = 0.$$

Отсюда находим  $y'_0 = -0,470$

Формулы для изгибающих моментов и поперечных сил (см.(7.38), (7.39), (7.45) и (7.46) принимают вид

$$M_1(x) = -(-0,470) \times 0,383 \times 341000 \times \sin(0,383x) + \frac{20000}{0,383} \sin(0,383x) =$$

$$= 61400 \sin 0,383x + 52300 \sin 0,383x;$$

$$Q_1(x) = -(-0,470) \times 0,383^2 \times 341000 \cos 0,383x + 20000 \cos 0,383x =$$

$$= 23500 \cos 0,383x + 20000 \cos 0,383x;$$

$$M_2(x) = 61400 \sin 0,383x + 52300 \sin 0,383x - \frac{20000}{0,383} \sin 0,383(x-2) - \frac{5000}{0,383^2} (1 - \cos 0,383(x-2)) = 61400 \sin 0,383x + 52300 \sin 0,383x - 52300 \sin 0,383(x-2) - 34100 \times (1 - \cos 0,383(x-2));$$

$$Q_1(x) = 23500 \cos 0,383x + 20000 \cos 0,383x - 20000 \cos 0,383(x-2) - 5000 \frac{\sin 0,383(x-2)}{0,383}.$$

По полученным формулам, придавая различные значения  $x$ , строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (см. рис. 7.7).

Большое число примеров расчета на продольно-поперечный изгиб балок можно найти в работах [20] и [21].

## 7.4. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 7.4.1. Метод определения минимального критического параметра при расчете на устойчивость в малом

Уравнение устойчивости при использовании метода конечных элементов записывается в виде (см. (2.76))

$$[K - \lambda K_\sigma] \{u\} = 0. \quad (7.51)$$

Расчет на устойчивость в малом сводится, таким образом, к решению линейной проблемы собственных значений. Проблема эта достаточно трудоемка, к тому же для практических целей в большинстве случаев достаточно лишь знание минимального критического параметра. Поэтому некоторые авторы [14] решают уравнение (7.51) методом прямой итерации одного вектора, представляющими простейшую разновидность степенного метода [35] определения собственных векторов. Но так как упомянутый метод приводит к максимальному собственному значению итерируемой матрицы, то уравнение (7.51) предварительно преобразуется к виду

$$-\left(\frac{1}{\lambda}\right)[E] + [K]^{-1}[K_\sigma]\{u\} = 0, \quad (7.52)$$

где  $[E]$  - единичная матрица.

Затем строится последовательность векторов

$$\{u\}^{(s)} = [K]^{-1}[K_\sigma]\{u\}^{(s-1)}. \quad (7.53)$$

Искомое значение находится из соотношения

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{u_i^{(s)}}{u_i^{(s-1)}}. \quad (7.54)$$

Число  $s$  определяется требуемой точностью вычисления критического параметра.

Алгоритм решения задачи с использованием соотношений (7.52)-(7.54) получается достаточно простым, но включает в себя операции обращения матрицы  $[K]$  и перемножения матриц  $[K]^{-1}$  и  $[K_\sigma]$ . При больших порядках матриц эти операции могут оказаться достаточно трудоемкими, что является недостатком описанного подхода.

При заданном значении параметра нагрузки  $\lambda$  уравнения равновесия узлов конечно-элементной схемы рассчитываемой конструкции (уравнения метода перемещений) можно записать так:

$$[K - \lambda K_\sigma]\{u\} = \{p\}, \quad (7.55)$$

где  $\{p\}$  - вектор узловых нагрузок.

Обозначим

$$[R] = [K - \lambda K_\sigma] \quad (7.56)$$

Тогда уравнение (7.55) примет вид

$$[R]\{u\} = \{p\}, \quad (7.57)$$

или

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots & r_{1,k} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & \dots & r_{2,k} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i,1} & r_{i,2} & r_{i,3} & \dots & r_{i,k} & \dots & r_{i,n-1} & r_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & r_{n-1,3} & \dots & r_{n-1,k} & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ r_{n,1} & r_{n,2} & r_{n,3} & \dots & r_{n,k} & \dots & r_{n,n-1} & r_{n,n} \end{bmatrix} \{u\} = \{p\}. \quad (7.57^*)$$

Коэффициенты  $r_{i,k}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $k=1,2,\dots,n$ ) в уравнении (7.57) имеют обычный смысл коэффициентов системы уравнений метода перемещений: ( $r_{i,k}$ ) есть реакция  $i$ -ой наложенной связи при смещении  $k$ -й наложенной связи на единицу).

Решая уравнение (7.57) способом последовательного исключения неизвестных, можно привести его к виду

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,i} & \dots & r_{1,k} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & r_{1,1}^{(i-1)} & \dots & r_{i,k}^{(i-1)} & \dots & r_{i,n-1}^{(i-1)} & r_{i,n}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{n-1,n-1}^{(n-2)} & r_{n-1,n}^{(n-2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{n,n}^{(n-1)} \end{bmatrix} \{u\} = \{p\}. \quad (7.58)$$

Исключение  $i$ -й неизвестной из системы уравнений (7.57) физически означает устранение  $i$ -ой наложенной связи (имеется в виду связи, наложенные на заданную систему для образования основной системы метода перемещений). Таким образом, коэффициенты  $r_{2,2}^{(1)}$ ,  $r_{2,3}^{(1)}$  и т.д. относятся к системе с одной устраненной связью или, что то же самое, к системе с  $n-1$  наложенными связями, коэффициенты  $r_{i,i}^{(i-1)}$ ,  $r_{i,i+1}^{(i-1)}$  относятся к системе с  $i-1$  устраненными связями и т.д. Отметим, что коэффициент  $r_{n,n}^{(n-1)}$  есть реакция на единичное смещение в системе с одной наложенной связью.

Критерием потери устойчивости является равенство нулю определителя матрицы, стоящей в левой части уравнения (7.58)

$$\det \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,i} & \dots & r_{1,k} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & r_{1,1}^{(i-1)} & \dots & r_{i,k}^{(i-1)} & \dots & r_{i,n-1}^{(i-1)} & r_{i,n}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{n-1,n-1}^{(n-2)} & r_{n-1,n}^{(n-2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{n,n}^{(n-1)} & \dots \end{bmatrix} = \{0\}, \quad (7.59)$$

или

$$\prod_{i=1}^n r_{i,i}^{(i-1)} = 0. \quad (7.60)$$

Равенство нулю любого из сомножителей, входящих в левую часть уравнения (7.60), является достаточным условием потери устойчивости. Используем в качестве критерия потери устойчивости соотношение

$$r_{n,n}^{(n-1)} = 0. \quad (7.61)$$

Из соотношения (7.61) и находится критический параметр. Покажем, что при определенных условиях критерий (7.61) приводит к отысканию минимального критического параметра.

Для нахождения  $r_{n,n}^{(n-1)}$  необходимо на заданную систему наложить единственную связь, сообщить единичное перемещение по направлению этой связи и тем или иным способом рассчитать полученную систему. Если воспользоваться для этой цели методом перемещений, то расчет сводится к решению системы уравнений (7.55), составленной для конструкции с одной наложенной связью. Запишем систему уравнений (7.55) в виде

$$[K] \{u\} = \lambda [K_\sigma] \{u\} + \{P\} = \{D\} + \{P\}, \quad (7.63)$$

где

$$\{D\} = \lambda [K_\sigma] \{u\}. \quad (7.64)$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$[K] \{u\}^{(j)} = \lambda [K_\sigma] \{u\}^{(j-1)} + \{P\} = \{D\}^{(j-1)} + \{P\}. \quad (7.65)$$

Условием сходимости итерационного процесса, определяемого формулой (7.65), является положительная определенность матриц  $[K - \lambda K_\sigma]$  и  $[K + \lambda K_\sigma]$  [16]. Первая матрица положительно определена при параметре нагрузки меньшем минимального критического [31], а вторая - ввиду ее соответствия растягивающей нагрузке. Известно [22], что минимальный критический параметр системы с одной наложенной связью лежит в интервале между первым и вторым параметрами заданной системы. Следовательно, итерационный процесс (7.64) для системы с одной наложенной связью сходится только в области минимального критического параметра заданной системы.

Вектор  $\{D\}$ , входящий в формулу (7.64), назовем вектором дополнительной нагрузки. Докажем следующую теорему.

**Теорема.** При расчете деформируемой системы способом дополнительной нагрузки последняя может быть представлена в виде

$$\{D\}^{(j)} = \{D_1\} \lambda + \{D_2\} \lambda^2 + \dots + \{D_j\} \lambda^j, \quad (7.65)$$

где  $j$ - номер приближения.

**Доказательство.** Пусть дополнительная нагрузка  $(j-1)$  приближения найдена в виде

$$\begin{aligned} \{D\}^{(j-1)} &= \{D_1\} \lambda + \{D_2\} \lambda^2 + \dots + \{D_j\} \lambda^{j-1} = \\ &= \lambda [K_\sigma] [K]^{-1} \{P\} + \lambda^2 ([K_\sigma] [K]^{-1})^2 \{P\} + \dots + \lambda^{j-1} ([K_\sigma] [K]^{-1})^{j-1} \{P\}, \end{aligned} \quad (7.66)$$

где

$$\{D_l\} = ([K_\sigma] [K]^{-1})^l \{P\}, \quad l = 1, 2, \dots, j-1. \quad (7.67)$$

Тогда перемещения  $j$ -ого приближения, согласно (7.64), будут равны

$$\begin{aligned} \{u\}^{(j)} &= [K]^{-1} (\{P\} + \{D\}^{(j-1)}) = [K]^{-1} (\{P\} + \lambda [K_\sigma] [K]^{-1} \{P\} + \dots + \\ &+ \lambda^{(j-1)} ([K_\sigma] [K]^{-1})^{(j-1)} \{P\}), \end{aligned} \quad (7.68)$$

а дополнительная нагрузка  $j$ -ого приближения равна

$$\{D\}^{(j)} = \lambda [K_\sigma] [K]^{-1} (\{P\} + \lambda [K_\sigma] [K]^{-1} \{P\} + \dots + \lambda^{j-1} ([K_\sigma] [K]^{-1})^{j-1} \{P\}). \quad (7.70)$$

Обозначая  $([K_\sigma] [K]^{-1})^j \{P\} = \{D_j\}$ , приходим к соотношению (7.65). Таким образом, формула (7.65) верна, если верно предположение (7.66). Положив  $\lambda=0$ , получаем

$$\{u\}^{(0)} = [K]^{-1} \{P\}; \quad (7.70)$$

$$\{D\}^{-1} = \lambda [K_\sigma] [K]^{-1} \{P\}. \quad (7.71)$$

Формула (7.71) и кладет начало последовательности (7.65), справедливость которой в общем случае доказана выше.

На основании формулы (7.65) можно сделать следующий важный вывод: при определении дополнительной нагрузки  $j$ -ого приближения достаточно найти ее  $j$ -ый член.

Непосредственное применение формулы (7.62) к системе с одной наложенной связью может вызвать некоторые вычислительные трудности, так как в этом случае возникает необходимость формировать матрицу жесткости как для заданной системы, так и для системы с одной наложенной связью. Удобнее находить главную реакцию по направлению единственной наложенной на заданную систему связи из уравнения метода сил

$$\bar{a}_{n,n} r_{n,n}^{(n-1)} + \bar{A}_{n,p}^{(don)} = 1, \quad (7.72)$$

где  $\bar{a}_{n,n} r_{n,n}^{(n-1)}$  и  $\bar{A}_{n,p}^{(don)}$  имеют обычный смысл, причем  $\bar{A}_{n,p}^{(don)}$  представляет перемещение, вызываемое в основной системе дополнительной нагрузкой. Но основная система при использовании уравнения (7.72) совпадает с заданной, поэтому все расчеты, связанные с определением коэффициентов  $\bar{a}_{n,n} r_{n,n}^{(n-1)}$  и  $\bar{A}_{n,p}^{(don)}$ , следует вести в заданной системе.

При подсчете дополнительной нагрузки перемещения в каждом последующем цикле принимаются из предыдущего, а начальные - равными нулю. При этом, на основании (7.65)  $\bar{A}_{n,p}^{(don)}$  представляется в виде

$$\bar{A}_{n,p}^{(don)} = \bar{A}_1 \bar{e} + \bar{A}_2 \bar{e}^2 + \dots + \bar{A}_m \bar{e}^m, \quad (7.73)$$

где  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$  - некоторые числовые коэффициенты,  $m$  - число приближений.

Реакция наложенной связи при расчете конструкции описанным способом определяется многочленом:

$$r_{n,n}^{(n-1)} = r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_m \lambda^m, \quad (7.74)$$

где  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_m$  некоторые числовые коэффициенты.

Итерационный процесс (7.64), с помощью которого получено выражение (7.74), сходится и  $r_{n,n}^{(n-1)} > 0$  при параметре нагрузки  $\lambda$  меньшем

$\lambda_{1,kr}^{(n-1)}$  для системы с одной наложенной связью. В противном случае выражение (7.74) расходится. Следовательно, минимальный критический параметр заданной системы  $\lambda_{kr,min}$  должен быть единственным действительным положительным корнем уравнения

$$r_{n,n}^{(n-1)} = r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_m \lambda^m = 0 \quad (7.75)$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Практически число  $m$  определяется требуемой точностью определения критической нагрузки.

Форма потери устойчивости характеризуется вектором перемещений  $\{u\}_\lambda$  узлов системы с одной наложенной связью при  $r_{n,n}^{(n-1)} = 0$ , т.е. при  $\lambda = \lambda_{kr,min}$ . В соответствии с (7.72) и (7.73) этот вектор можно представить в виде

$$\{u\}_\lambda = \{u\}_0 + \lambda_{kr,min} \{u\}_1 + \lambda_{kr,min}^2 \{u\}_2 + \dots + \lambda_{kr,min}^m \{u\}_m \quad (7.76)$$

В формуле (7.76)  $\{u\}_0$  - вектор перемещений узлов конструкции от единичного смещения наложенной связи при  $\lambda=0$ ,  $\{u\}_1$  - вектор перемещений от дополнительной нагрузки первого приближения при  $\lambda=1$ ,  $\{u\}_2$  - вектор перемещений от дополнительной нагрузки второго приближения при  $\lambda=1$  и т.д.

Согласно идее метода сил

$$\{u\}_0 = \{\bar{u}\}_0 r_0, \quad (7.77)$$

где  $\{\bar{u}\}_0$  - вектор перемещений от единичной силы, приложенной в заданной системе по направлению единственной наложенной связи

$$\{u\}_j = \{\bar{u}\}_j + \{\bar{u}\}_0 r_j = \{\bar{u}\}_j - \frac{\Delta_{n,p}^{(j)}}{\delta_{n,n}} \{u\}_0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7.78)$$

где  $\{\bar{u}\}_j$  - вектор перемещений заданной системе от нагрузки  $j$ -ого приближения при  $\lambda=1$  и  $\Delta_{n,p}^{(j)}$  - перемещение по направлению наложенной связи в заданной системе от нагрузок  $j$ -ого приближения при  $\lambda=1$ .

Описанный выше итерационный метод расчета на устойчивость реализован в программе ПРИНС применительно к пространственным тонкостенным подкрепленным конструкциям.

Блок-схема алгоритма вычисления минимальной критической нагрузки и соответствующей формы потери устойчивости приведены на рис. 7.8.

Особенностью алгоритма является неоднократное решение системы линейных алгебраических уравнений с матрицей  $[K]$ . Чтобы облегчить и ускорить эту операцию, осуществляется треугольная декомпозиция матрицы  $[K]$  в виде

$$[K] = [L]^T [B] [L], \quad (7.79)$$

где  $[B]$  - диагональная, а  $[L]$  - верхняя треугольная матрицы. Система линейных алгебраических уравнений  $[K]\{u\} = [L]^T [B] [L]\{u\} = \{P\}$  решается затем в два этапа.

Сначала вычисляется вектор  $\{z\} = [B] [L]\{u\}$  из уравнения

$$[L]^T \{z\} = \{P\}, \quad (7.80)$$

а затем вектор  $\{u\}$  из уравнения

$$[B] [L]\{u\} = \{z\} \quad (7.81)$$

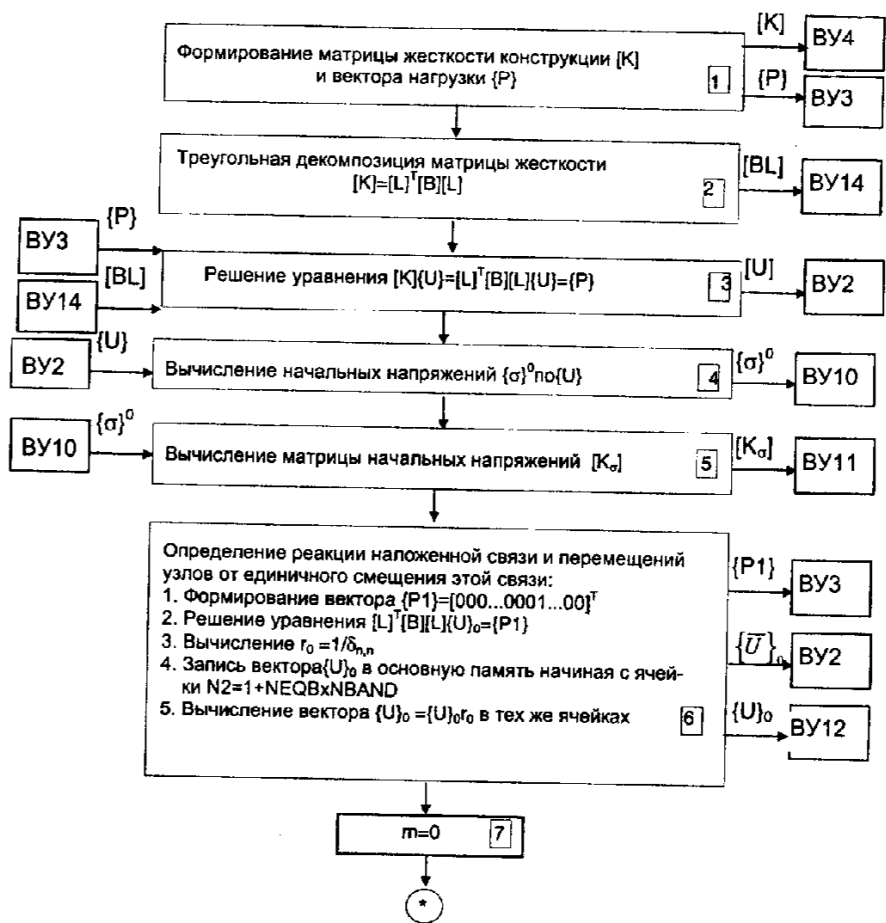


Рис. 7.8

Так как  $[D]$ ,  $[L]$  и  $[L]^T$  - треугольные матрицы, то решение уравнений (7.80) и (7.81) равносильно умножению треугольной матрицы на столбец. Система линейных алгебраических уравнений решается сначала для определения начальных усилий в конструкции (блок № 3), а затем в каждом цикле итераций (блоки №№ 8-12) для вычисления дополнительной нагрузки способом последовательных приближений. При вычислении дополнительной нагрузки по формуле (7.63) вектор перемещений находится в оперативной памяти целиком, начиная с ячейки  $N2$ , а матрица  $[K_\sigma]$  считывается в ОП по блокам, причем размер блока равен  $NEQB + MBAND$ , где  $NEQB$  - число уравнений в блоке, а  $MBAND$  - половина ширины ленты матрицы  $[K_\sigma]$ .

В блоке №6 решается уравнение (7.72) при  $\ddot{A}_{n,p}^{(don)} = 0$ , при этом формируется вектор  $\{A\}$ , состоящий из нулей и единиц по направлению той

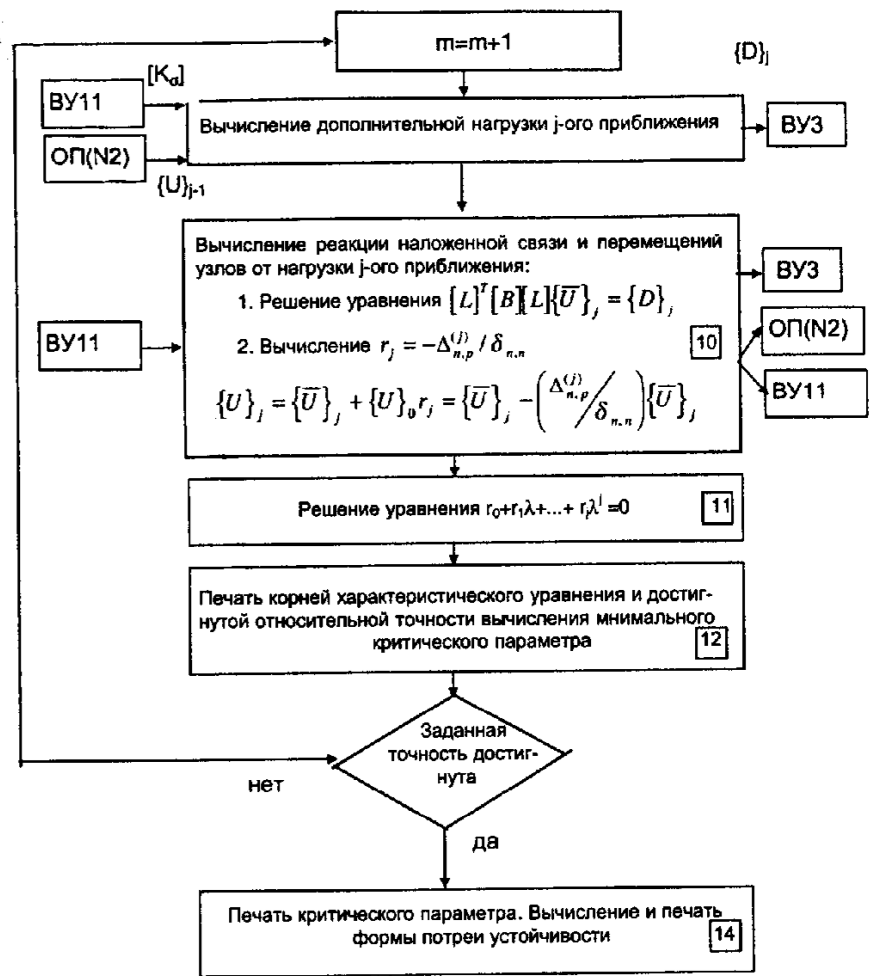


Рис. 7.8 (продолжение)

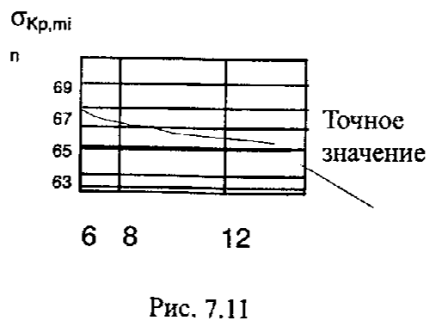
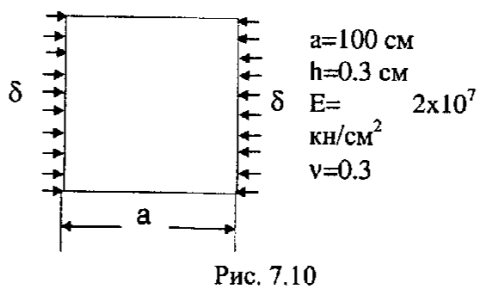
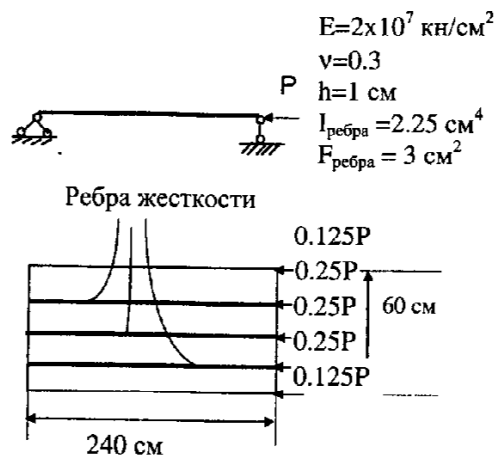
степени свободы, которая соответствует наложенной связи на заданную систему связи.

Остальные вычисления, указанные на блок-схеме рис. 7.8, проводятся в соответствии с изложенной выше теорией и не требуют пояснений.

Связь между отдельными блоками программы осуществляется через массивы данных на внешних устройствах ЭВМ.

Суммируя все сказанное относительно предложенного метода и алгоритма вычисления минимального критического параметра и соответствующей формы потери устойчивости, отметим, что удалось избежать таких операций, как решение проблемы собственных значений, обращение и перемножение матриц большого порядка.





критическое давление  $q_{kr,min}=1,36 \text{ Мпа}$  и форма потери устойчивости, характеризующаяся образованием восьми волн по окружности. Теоретическое значение критического давления составляет  $1,42 \text{ Мпа}$  (оболочка защемлена по торцам) [17]. Расхождение составляет 3,58%.

Теоретическое значение параметра волнообразования по окружности ( $n=8$ ) соответствует результату, полученному расчетом по программе ПРИНС. При расчете оболочки использовались элементы LAMSHP.

Рассмотрим пример расчета на устойчивость по составленной программе.

На рис. 7.9 приведена подкрепленная односторонне сжатая прямоугольная пластинка. При указанных на рис. 7.9 параметрах пластинки минимальная критическая сила составляет  $40,26 \text{ кН}$  [24]. По программе ПРИНС найдено значение  $P_{kr,min}=39,5 \text{ кН}$ .

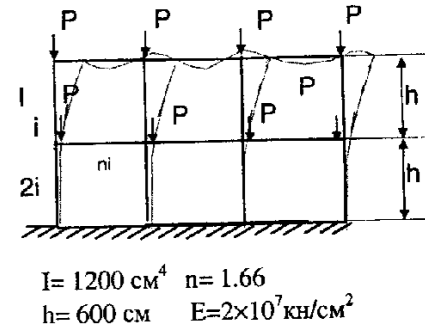
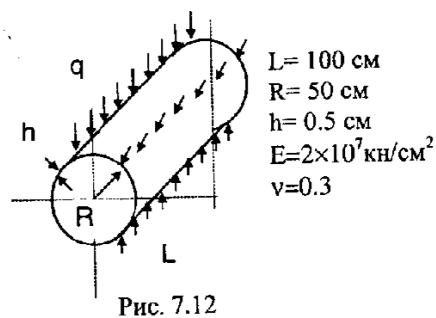
Расхождение составляет 1,88%.

Для пластинки, показанной на рис. 7.10 (пластинка шарнирно опята по контуру) исследовалась сходимость результатов при сгущении сетки конечных элементов.

Результаты представлены на рис. 7.11, где по оси ординат отложены найденные по программе значения  $\sigma_{kr,min}$ , а по оси абсцисс - число конечных элементов на сторону пластинки. Использовались согласованные конечные элементы.

Как видно из рис. 7.11, наблюдается достаточно хорошая сходимость, причем согласованные элементы дают приближение к точному результату сверху.

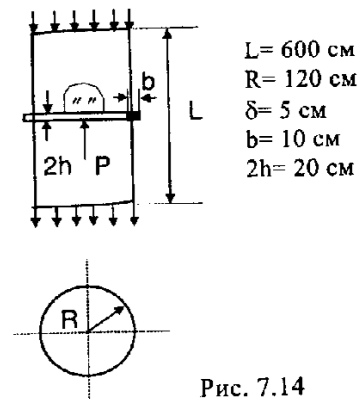
На рис. 7.12 показана оболочка, для которой по программе ПРИНС найдены



По программе ПРИНС можно рассчитывать также и стержневые системы. В качестве примера на рис. 7.13 показана рама, для которой были найдены  $P_{kr,min}$  и соответствующая форма потери устойчивости. Найденное по программе значение  $P_{kr,min}=419 \text{ кН}$  хорошо согласуется с теоретическим результатом [21] ( $P_{kr,min}=418 \text{ кН}$ ). Форма потери устойчивости показана на рис. 7.13 пунктиром. Приведенные результаты, полученные для конструкций различных типов, подтверждают эффективность предложенного метода.

Практическое значение предложенного метода проиллюстрируем на следующем примере. Рассмотрим достаточно длинную цилиндрическую оболочку, в произвольном сечении которой помещено подкрепляющее кольцо прямоугольного поперечного сечения. Центр тяжести сечения кольца расположен на срединной поверхности оболочки. К кольцу приложена сосредоточенная сила (рис. 7.14). Экспериментально установлено, что при потере устойчивости сжатой зоны оболочки непосредственно над силой образуется ямка, по форме близкая к квадратной. Данная конструкция была рассчитана на устойчивость по программе ПРИНС методом наложенной связи и альтернативным методом, связанным с непосредственным решением проблемы собственных значений (7.22) (см, например, [14]). Поскольку удовлетворительного аналитического решения данной задачи не существует, то ограничимся качественным анализом полученных результатов.

Сетка узлов конечноэлементной расчетной схемы приведена на рис. 7.15. В обоих расчетах использовались согласованные треугольные КЭ при одной и той же схеме разбиения



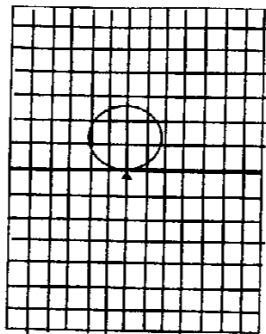


Рис. 7.15

поверхности оболочки. Расчет по программе ПРИНС найдено значение  $P_{кр, \min} = 0,459 \times 10^8$  Н и форма потери устойчивости, изображенная на рис. 7.15. Полученная форма хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Расчет альтернативным методом дал значение критической нагрузки  $P_{кр, \min} = 1,09 \times 10^8$  Н и форму потери устойчивости балочного типа, связанную с образованием одной полуволны по длине оболочки. Таким образом, предложенный метод оказывается полезным при анализе местной потери устойчивости в сложных пространственных конструкциях.

#### 7.4.2. Расчет тонкостенных конструкций на устойчивость с учетом начальных перемещений

Как показано в гл.2, расчет на устойчивость в малом с учетом начальных перемещений сводится (см. уравнение (2.75)) к решению квадратической проблемы собственных значений

$$[K + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u\} = 0, \quad (7.82)$$

где

$$[K_1] = [K_\sigma] + [K_{u1}], \quad [K_2] = [K_{u2}]. \quad (7.83)$$

Эта проблема практически не изучена. Минимальный критический параметр и форма потери устойчивости, соответствующие (7.82), могут быть найдены методом, описанным в 7.4.1 настоящей главы. Рассмотрим возникающие при этом особенности.

Реакция наложенной связи в рассматриваемом случае может быть найдена, по аналогии с (7.64), путем решения системы уравнений метода перемещений

$$[K] \{u_i\} = \{P\} - [\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-1}\}. \quad (7.84)$$

Выражение  $\{D_i\} = -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-1}\}$  и в этом случае будем рассматривать как вектор дополнительной нагрузки. Докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а .** При расчете деформируемой системы с учетом начальных перемещений и напряжений способом дополнительной нагрузки последняя может быть представлена в виде

$$\{D_i\} = \{D_{i-1}\} + \{d_i\}, \quad (7.86)$$

где

$$\{d_i\} = \lambda^i \{d_i^{(1)}\} + \lambda^{i+1} \{d_i^{(2)}\} + \dots + \lambda^{2i} \{d_i^{(i+1)}\} \quad (7.86^*)$$

а соответствующее ей перемещение в виде

$$\{u_i\} = \{u_{i-1}\} + \{\bar{u}_i\}, \quad (7.87)$$

где

$$\{\bar{u}_i\} = \lambda^i \{\bar{u}_i^{(1)}\} + \lambda^{i+1} \{\bar{u}_i^{(2)}\} + \dots + \lambda^{2i} \{\bar{u}_i^{(i+1)}\}, \quad (7.88)$$

В формулах (7.85)-(7.88)  $\{D_{i-1}\}$  и  $\{u_{i-1}\}$  - дополнительные нагрузки и перемещения  $(i-1)$ -ого приближения.

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Предположим, что нагрузки и соответствующие им перемещения  $(i-1)$ -ого приближения найдены в виде

$$\{D_{i-1}\} = \{D_{i-2}\} + \{d_{i-1}\}, \quad (7.89)$$

где

$$\{d_{i-1}\} = \lambda^{i-1} \{d_{i-1}^{(1)}\} + \lambda^{i-1+1} \{d_{i-1}^{(2)}\} + \dots + \lambda^{2(i-1)} \{d_{i-1}^{(i-1+1)}\} \quad (7.90)$$

и

$$\{u_{i-1}\} = \{u_{i-2}\} + \{\bar{u}_{i-1}\}, \quad (7.91)$$

где

$$\{\bar{u}_{i-1}\} = \lambda^{i-1} \{\bar{u}_{i-1}^{(1)}\} + \lambda^{i-1+1} \{\bar{u}_{i-1}^{(2)}\} + \dots + \lambda^{2(i-1)} \{\bar{u}_{i-1}^{(i-1+1)}\} \quad (7.92)$$

Тогда нагрузка  $i$ -ого приближения, согласно (7.84), может быть найдена в виде

$$\begin{aligned} \{D_i\} &= -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-1}\} = -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-2}\} - \\ &- [\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \left\{ \lambda^{i-1} \{u_{i-1}^{(1)}\} + \lambda^{i-1+1} \{u_{i-1}^{(2)}\} + \dots + \lambda^{2(i-1)} \{u_{i-1}^{(i-1+1)}\} \right\} \\ &= -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-2}\} - \\ &- \lambda^i [K_1] \{u_{i-1}^{(1)}\} - \lambda^{i+1} \{ [K_1] \{u_{i-1}^{(2)}\} + [K_2] \{u_{i-1}^{(1)}\} \} - \dots - \lambda^{2i} [K_2] \{u_{i-1}^{(i-1+1)}\} \end{aligned} \quad (7.93)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \{d_i^{(1)}\} &= -[K_1] \{u_{i-1}^{(1)}\} \quad \{d_i^{(2)}\} = -[K_1] \{u_{i-1}^{(2)}\} - [K_2] \{u_{i-1}^{(1)}\} \dots \\ \{d_i^{(i+1)}\} &= -[K_2] \{u_{i-1}^{(i-1+1)}\}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Учитывая, что по определению дополнительной нагрузки

$$-[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_{i-2}\} = \{D_{i-1}\} \quad (7.95)$$

приходим к выражению (7.86).

Справедливость выражения (7.88) очевидна.

Таким образом, формулы (7.85)+(7.88) верны, если верны предположения (7.89)+(7.92). Положив  $\lambda=0$ , получим  $\{u_0\} = [K]^{-1}\{P\}$  и

$$\begin{aligned} \{D_1\} &= -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] [K]^{-1} \{P\} \\ \{u_1\} &= [K]^{-1} \{P\} - [K]^{-1} [\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] [K]^{-1} \{P\} = \{u_0\} + \{\bar{u}_1\}, \end{aligned} \quad (7.96)$$

где

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_1\} &= -\lambda [K]^{-1} [K_1] [K]^{-1} \{P\} - \lambda^2 [K]^{-1} [K_2] [K]^{-1} \{P\} \\ \{D_2\} &= -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_1\} = -[\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_0\} - [\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \lambda [K^{-1} K_2 K^{-1}] \{P\} - \\ &- \lambda^2 [K^{-1} K_2 K^{-1}] \{P\} = \{D_1\} + \{d_2\}, \end{aligned} \quad (7.97)$$

где

$$\begin{aligned} \{d_2\} &= \lambda^2 [K_1 K^{-1}]^2 \{P\} + \lambda^3 [K_1 K^{-1} K_2 K^{-1} + K_2 K^{-1} K_1 K^{-1}] \{P\} + \lambda^4 [K_2 K^{-1}]^2 \{P\} \\ \{u_2\} &= [K]^{-1} \{P\} - [K]^{-1} [\lambda K_1 + \lambda^2 K_2] \{u_0\} - [K]^{-1} \{u_1\} = \{u_1\} + \{\bar{u}_2\}. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Формулы (7.97) и (7.98) и кладут начало последовательностям (7.85) и (7.87), справедливость которых в общем случае доказана выше.

При решении задачи способом дополнительной нагрузки реакция наложенной связи находится в виде

$$r_{n,n}^{(n-1)} = r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_m \lambda^{2m}, \quad (7.99)$$

где  $m$  - номер итерации.

Условия сходимости описанного выше итерационного процесса исследованы в 7.7.1, где показано, что этот процесс сходится при параметре нагрузки, меньшем минимального критического для системы с одной наложенной связью и поэтому минимальный критический параметр заданной системы является единственным действительным положительным корнем уравнения

$$r_{n,n}^{(n-1)} = r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_m \lambda^{2m} = 0 \quad (7.100)$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Практически число  $m$  определяется требуемой точностью определения критической нагрузки.

Для расчета тонкостенных конструкций на устойчивость с учетом начальных перемещений составлена программа на языке ФОРТРАН, включенная в вычислительный комплекс ПРИНС. Матрицы начальных напряжений для элементов LAMSHR, включенных в программу ПРИНС, вычисляются по методике, описанной в первой главе. Приводим результаты расчета по этой программе

Рассчитывалась оболочка, изображенная на рис. 7.12, на действие внешнего давления. При этом исследовалось влияние начальных несовершенств на величину верхней критической нагрузки. Начальные несовершенства задавались либо в виде четырех канавок вдоль образующих, либо в виде одной кольцевой канавки, расположенной посередине длины оболочки. Глубина канавок в обоих случаях равнялась удвоенному значению толщины оболочки. Ширина их в первом случае составляла 17,45 см, во втором - 15 см. Для оболочки с продольными канавками по программе ПРИНС найдено  $q_{kp, \min} = 0.68$  МПа, а для оболочки с кольцевой канавкой -  $q_{kp, \min} = 0.98$  МПа. Снижение критического давления, обусловленное начальными несовершенствами, составило в первом случае 52%, а во втором - 31%. Следует отметить, что теоретические решения для оболочек с начальными несовершенствами получены лишь для случаев, когда эти несовершенства имеют правильную (регулярную) форму, например, задаются в виде системы волн в осевом и кольцевом направлениях [22]. Предложенный метод расчета позволяет учитывать несовершенства любой формы для пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций любого типа.

#### 7.4.3. Примеры расчета на устойчивость элементов автотракторной техники

В качестве примера рассмотрим расчет на общую устойчивость каркаса кузова автобуса, для которого в гл.3 исследовалось напряженно-деформированное состояние при действии нагрузок от собственного веса, а

также веса установленного оборудования и пассажиров. Для этой конструкции по программе ПРИНС был определен минимальный критический параметр методом, описанным в разделе 7.4.1. Значение минимального критического параметра и соответствующая ему форма потери устойчивости приведены на рис.7.16. Значение критического параметра оказалось достаточно большим и равным 52.8. Это означает, что при действии заданной нагрузки конструкция обладает более чем пятидесятикратным запасом устойчивости. Тем не менее анализ формы потери устойчивости может показать слабые места конструкции, которые имеет смысл усилить для повышения ее жесткости.

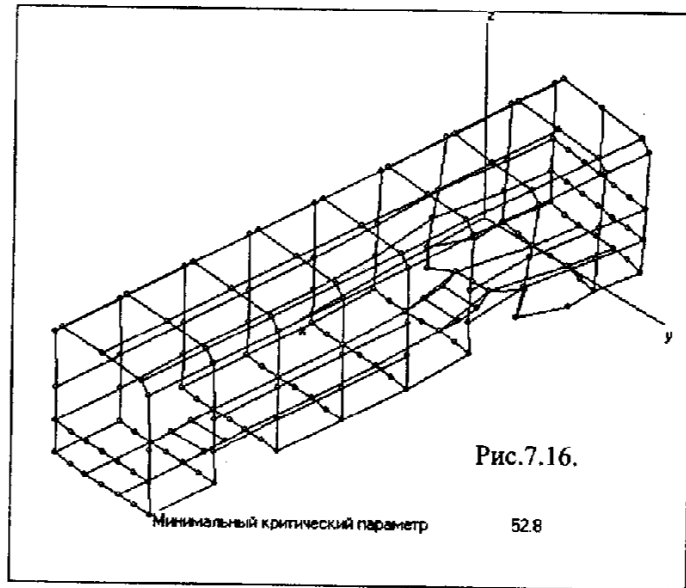


Рис.7.16.

## Глава 8. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

### 8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Большая часть конструкций транспортных средств и других объектов техники проектируется таким образом, чтобы в элементах этих конструкций при действии эксплуатационных нагрузок не возникали бы остаточные (пластические) деформации. Однако весьма важно знать, как поведет себя та или иная конструкция при превышении нагрузками их эксплуатационных значений, например, в аварийных ситуациях. Поэтому во многих областях техники, автомобиле- и тракторостроении, авиастроении, судостроении, некоторых сферах строительства, - проектирование новых объектов техники сопровождается исследованием предельных, или разрушающих нагрузок. При использовании экспериментальных методов это требует создания опытных образцов и последующего их разрушения на испытательных стендах. В последнее время эксперименты на опытных образцах все чаще заменяют экспериментами на математических моделях, т.е. расчетным путем. Расчет конструкции до разрушения требует учета реального поведения материалов под нагрузкой. Как известно, диаграмма деформирования материалов при растяжении-сжатии имеет вид, показанный на рис.8.1. Для металлов характерно наличие четырех стадий деформирования: стадии упругой работы OA, стадии общей текучести AB, стадии упрочнения BC и стадии разрушения CD.

При аналитических вычислениях реальная диаграмма деформирования часто заменяется идеализированной, показанной на рис.8.1,б. При этом предполагается, что участок текучести имеет неограниченную длину. Эта диаграмма носит название диаграммы Прандтля. Использование идеализированной диаграммы взамен реальной вносит в расчет погрешность, величину которой трудно оценить. Вместе с тем это существенно упрощает

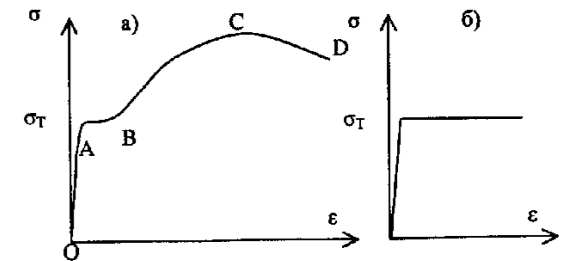


Рис.8.1

расчет, делая определение предельных нагрузок для статически неопределимых конструкций даже проще, чем расчет этих же конструкций в упругой стадии их работы. Учет реальной диаграммы деформирования снижает погрешность расчетов, но такие расчеты возможны лишь с применением электронных вычислительных машин. В настоящее время разработаны методики

и программы расчета конструкций с учетом пластических деформаций. Для быстрой оценки предельных нагрузок можно воспользоваться аналитическими методами, основанными на использовании диаграммы Прандтля, для более точных расчетов необходимо проводить расчеты на ЭВМ. Поэтому ниже описываются как аналитические, так и численные методики расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом пластических деформаций.

## 8.2. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Методы расчета конструкций по предельному равновесию основаны на двух предположениях: 1) предполагается, что внешние силы растут пропорционально одному параметру, т.е. имеет место так называемое простое нагружение и 2) считается, что если напряжение в некоторой точке конструкции достигло предела текучести  $\sigma_T$ , то дальнейший рост напряжений в этой точке при возрастании внешней нагрузки невозможен (материал следует диаграмме Прандтля).

Состоянием предельного равновесия считается такое состояние, при котором внешняя нагрузка все еще уравнивается внутренними силами, но дальнейший рост нагрузок невозможен, или нагрузка остается постоянной при неограниченном возрастании перемещений. Фактически конструкция в этом состоянии превращается в механизм.

Если стержень работает на растяжение или сжатие, то предельное равновесие стержня соответствует такому его состоянию, в котором к некоторому его сечению напряжения достигают предела текучести  $\sigma_T$ , а продольная сила – значения  $N_T = \sigma_T A$ , где  $A$  – площадь поперечного сечения (рис.8.2).

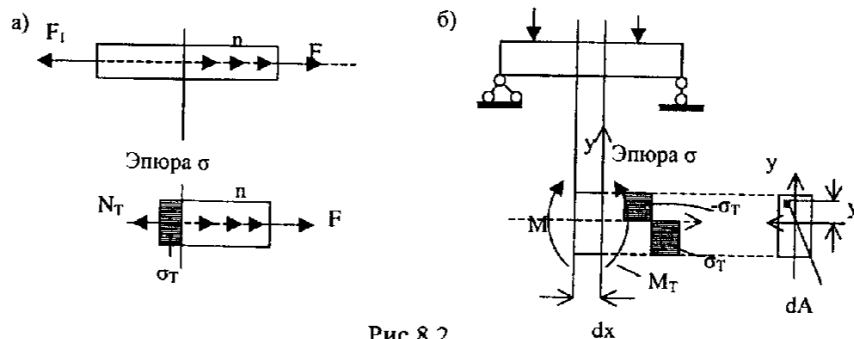


Рис.8.2

Если стержень работает на чистый изгиб, то предельное равновесие в сечении наступает тогда, когда напряжения во всех точках как растянутой, так и сжатой зоны достигают предела текучести. Если предел текучести в

растянутой и сжатой зонах один и тот же, то предельное значение изгибающего момента в сечении можно найти по формуле:

$$M_T = \int_{A_p} \sigma_T y_P dA + \int_{A_c} \sigma_T y_C dA = \sigma_T (S_P + S_C) \quad (8.1)$$

где  $S_P$  и  $S_C$  есть статические моменты растянутой и сжатой зон относительно нейтральной линии;  $y_P$  и  $y_C$  – координаты точки сечения в растянутой и сжатой зонах.

Описанное состояние сечения называется пластическим шарниром. Со стороны пластического шарнира на соседние сечения действует постоянный момент  $M_T$ , и в этом заключается отличие пластического шарнира от обычного.

Для прямоугольного сечения

$$S_P = S_C = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \quad (8.2)$$

Предельный момент для прямоугольного сечения равен

$$M_T = \sigma_T (S_P + S_C) = \sigma_T 2 \frac{bh^2}{8} = \sigma_T \frac{bh^2}{4} \quad (8.3)$$

Представим предельный момент в виде:

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^2}{4} = \sigma_T W_T, \quad (8.4)$$

где  $W_T$  – пластический момент сопротивления сечения.

При расчете в упругой стадии наибольшие напряжения при изгибе определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}, \quad \text{где } W = \frac{bh^2}{6} \quad (8.5)$$

При этом допускаемый момент находится из условия

$$\sigma = \frac{M_{np}}{W} = \sigma_T \quad (8.6)$$

Следовательно,

$$M_{np} = \sigma_T W.$$

Отношение предельного момента, найденного из расчета с учетом пластического деформирования сечения, к предельному моменту, определяемому из упругого расчета равно

$$\frac{M_T}{M_{np}} = \frac{W_T}{W} \quad (8.7)$$

Для прямоугольного сечения отношение  $\frac{W_T}{W}$  равно 1.5. Это говорит о том, что предельное значение момента с учетом распространения пластических деформаций по всему сечению в полтора раза больше того значения, которое находится из упругого расчета и соответствует появлению текучести только в наружных (фибровых) волокнах. Для стержней круглого сплошного сечения отношение  $\frac{W_T}{W}$  равно 1.7, для стержней трубчатого сечения – 1.27, для двутавра – 1.16 и т.д.

В статически определимых шарнирно-стержневых конструкциях, элементы которых работают на растяжение или сжатие, предельное равновесие наступает тогда, когда усилие хотя бы в одном из стержней достигает предельного значения  $N_T$ .

В статически определимых балках и рамах предельному равновесию соответствует появление в одном из сечений пластического шарнира.

Несколько сложнее решается задача для статически неопределимых систем. Прямой метод расчета идеально упруго-пластической статически неопределимой стержневой системы заключается в следующем.

Проводится расчет по упругой стадии работы и находится наиболее напряженное сечение. Если усилие в этом сечении меньше предельного, то пропорциональным увеличением нагрузки находится такое ее значение, при котором сечение достигает предельного состояния. Найденное значение нагрузки фиксируется. Так как дальнейшее возрастание нагрузки не приводит к росту усилия в данном сечении (усилие остается постоянным), то степень статической неопределимости понижается на единицу, к конструкции прикладывается дополнительная нагрузка, и вновь проводится упругий расчет. Для наиболее напряженного сечения находится такое значение дополнительной нагрузки, при котором это сечение достигает предельного состояния. Найденная нагрузка суммируется с предыдущей, степень статической неопределимости вновь уменьшается на единицу и т.д. Описанная процедура повторяется до тех пор, пока предельное состояние не наступит в  $n+1$  связях, что соответствует превращению конструкции в механизм. Это состояние и будет состоянием предельного равновесия для статически неопределимой конструкции.

### 8.3. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Широкие возможности для расчета конструкций с учетом пластических деформаций открывает использование вычислительных машин и численных методов решения задач, в частности, метода конечных элементов. Как отмечалось в гл.2, метод конечных элементов позволяет вести расчет конструкций в приращениях, причем такой расчет требует задания физических уравнений, связывающих приращения компонентов напряжений и деформаций с помощью соотношений (9.36), имеющих вид:

$$\{\Delta\sigma\} = [C]\{\Delta\gamma\}.$$

Если материал конструкции работает в упругой стадии на всем пути деформирования, то матрица  $[C]$  при переходе от шага к шагу нагружения остается постоянной. При появлении пластических деформаций соотношения между напряжениями и деформациями изменяются, и вследствие этого изменяются коэффициенты матрицы  $[C]$ . Если бы удалось установить закон изменения матрицы  $[C]$ , то, перевычисляя ее коэффициенты от шага к шагу нагружения, удалось бы осуществить расчет конструкции с учетом реальных законов деформирования ее элементов. Законы деформирования тел с учетом пластических деформаций изложены в гл.1. Используем эти законы для формирования физических уравнений метода конечных элементов.

Для реализации шагового алгоритма расчета МКЭ в форме метода перемещений необходимо иметь зависимости приращений напряжений от приращений деформаций. Однако уравнения (1.88) не решаются относительно приращений напряжений  $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_{xy}$ . Для получения необходимых зависимостей используем следующую методику.

Запишем выражение для интенсивности напряжений при плоском напряженном состоянии:

$$\sigma_c^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2. \quad (8.8)$$

В выражении (8.8) перейдем к дифференциалам:

$$2\sigma_i d\sigma_i = (2\sigma_x - \sigma_y) d\sigma_x + (2\sigma_y - \sigma_x) d\sigma_y + 6\tau_{xy} d\tau_{xy}$$

или

$$d\sigma_i = \frac{3}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) d\sigma_x + \frac{3}{2\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_0) d\sigma_y + \frac{3}{\sigma_i} \tau_{xy} d\tau_{xy}. \quad (8.9)$$

Предположим, что зависимость между приращением интенсивности напряжений  $d\sigma_i$  и интенсивностью приращений пластических деформаций  $d\bar{\epsilon}_{ip}$  имеет вид:

$$d\sigma_i = H'd\bar{\varepsilon}_{ip}. \quad (8.10)$$

С учетом (8.10) уравнение (8.9) приводится к виду:

$$-H'd\bar{\varepsilon}_{ip} = \frac{3}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_0)d\sigma_x + \frac{3}{2\sigma_i}(\sigma_y - \sigma_0)d\sigma_y + \frac{3}{\sigma_i}\tau_{xy}d\tau_{xy}. \quad (8.11)$$

Запишем уравнения (8.7) и (8.11) совместно в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & 0 & \frac{3\sigma_x - \sigma_0}{2\sigma_i} \\ -\mu/E & 1/E & 0 & \frac{3\sigma_y - \sigma_0}{2\sigma_i} \\ 0 & 0 & 1/G & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \\ \frac{3\sigma_x - \sigma_0}{2\sigma_i} & \frac{3\sigma_y - \sigma_0}{2\sigma_i} & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} & -H' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \bar{\varepsilon}_{ip} \end{Bmatrix}. \quad (8.12)$$

Обозначим

$$\{d\varepsilon\} = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\gamma_{xy} \quad 0]^T;$$

$$\{d\sigma\} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\tau_{xy} \quad \bar{\varepsilon}_{ip}]^T;$$

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & 0 & \frac{3\sigma_x - \sigma_0}{2\sigma_i} \\ -\mu/E & 1/E & 0 & \frac{3\sigma_y - \sigma_0}{2\sigma_i} \\ 0 & 0 & 1/G & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \\ \frac{3\sigma_x - \sigma_0}{2\sigma_i} & \frac{3\sigma_y - \sigma_0}{2\sigma_i} & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} & -H' \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Система уравнений (8.12) с учетом (8.13) может быть записана так:

$$\{d\varepsilon\} = [\bar{A}]\{d\sigma\}. \quad (8.14)$$

Обращая (8.14), находим

$$\{d\sigma\} = [\bar{A}^{-1}]\{d\varepsilon\}.$$

Отбрасывая в матрице  $[\bar{A}^{-1}]$  последний столбец и последнюю строку и сокращая векторы  $\{d\sigma\}$  и  $\{d\varepsilon\}$ , получаем соотношения, выражающие приращения напряжений через приращения деформаций:

$$\{d\sigma\} = [A^{-1}]\{d\varepsilon\}, \quad (8.15)$$

где

$$\{d\sigma\} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\tau_{xy}]^T; \quad \{d\varepsilon\} = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\gamma_{xy}]^T,$$

а через  $[A^{-1}]$  условно обозначена сокращенная матрица  $[\bar{A}^{-1}]$ .

Для получения зависимости (8.10) используется экспериментальная кривая напряжение-деформация при одноосном напряженном состоянии. В этом случае, как показано выше,  $d\bar{\varepsilon}_{ip} = d\varepsilon_p$ , т.е. интенсивность приращения пластической деформации равна приращению пластической деформации. Поэтому если построить диаграмму  $\sigma - \varepsilon_p$ , где  $\varepsilon_p$  - пластическая деформация, то параметр  $H'$  представит собой касательный модуль этой диаграммы. Построение зависимости  $\sigma - \varepsilon_p$  иллюстрируется на рис. 8.6.

Матрица  $[A]$  может быть обращена в общем виде. Для этого представим соотношения (8.12) в виде:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -H' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ \lambda \end{Bmatrix}. \quad (8.16)$$

Отсюда находим:

$$\{d\varepsilon\} = [C^{-1}]\{d\sigma\} + \{a\}\lambda$$

$$0 = \{a\}^T\{d\sigma\} - H\lambda. \quad (8.17)$$

Умножим первую строку (8.17) на  $\{a\}^T[C]$ . Получим:

$$\{a\}^T[C]\{d\varepsilon\} = \{a\}^T\{d\sigma\} + \{a\}^T[C]\{a\}\lambda. \quad (8.18)$$

Из второй строки (8.17) находим

$$\{a\}^T\{d\sigma\} = H\lambda. \quad (8.19)$$

Подставим (8.19) в соотношение (8.18):

$$\{a\}^T [C] \{d\varepsilon\} = H\lambda + \{a\}^T [C] \{a\} \lambda. \quad (8.20)$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{\{a\}^T [C] \{a\}}{H' + \{a\}^T [C] \{a\}}. \quad (8.21)$$

Подставим  $\lambda$  в первую строку (8.17):

$$\{d\varepsilon\} = [C^{-1}] \{d\sigma\} + \{a\} \frac{\{a\}^T [C] \{d\varepsilon\}}{H' + \{a\}^T [C] \{a\}}. \quad (8.22)$$

Умножая (8.22) на  $[C]$ , получаем:

$$\{d\sigma\} = \left[ [C] - [C] \{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C] \{a\}} \right] \{d\varepsilon\}. \quad (8.23)$$

Обозначим

$$[C_{ep}] = \left[ [C] - [C] \{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C] \{a\}} \right] \quad (8.24)$$

и назовем  $[C_{ep}]$  упругопластической матрицей. Коэффициенты вектора  $\{a\}$  находятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{3 \sigma_x - \sigma_0}{2 \sigma_i} \\ a_2 &= \frac{3 \sigma_y - \sigma_0}{2 \sigma_i} \\ a_3 &= 3 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i} \end{aligned} \right\}, \quad (8.25)$$

где  $\sigma_0$  - среднее напряжение.

Зависимость (8.23) и дает возможность проводить расчет двумерных конструкций при плоском напряженном состоянии и изгибе с учетом пластических деформаций методом конечных элементов.

## 8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА КОНСТРУКЦИИ АВТОМОБИЛЕЙ И ТРАКТОРОВ

### 8.4.1. Расчет бампера легкового автомобиля

В качестве примера рассмотрим расчет бампера легкового автомобиля с учетом пластических деформаций при действии сосредоточенной силы, приложенной в центральной точке. Такая ситуация возникает в реальных конструкциях при наезде на препятствие, при столкновении с другим автомобилем и в других аварийных ситуациях. В этих ситуациях бампер первым воспринимает внешнее воздействие, и от его прочности и жесткости во многом зависит безопасность автомобиля и пассажиров. Поэтому важно знать, какие нагрузки бампер может выдержать и каковы возникающие при этом деформации. Размеры бампера приведены на рис.8.3, а расчетная схема метода конечных элементов показана на рис.8.5. Для расчета использовались плоские треугольные многослойные конечные элементы комбинированного типа (комбинируются плоское напряженное и изгибное состояния). В качестве материала принималась сталь с начальным модулем упругости  $E=2 \times 10^5$  МПа, коэффициентом Пуассона  $\mu = 0.3$  и диаграммой деформирования, показанной на рис.8.4. Расчет проводился по программе ПРИНС в квазистатической постановке шаговым методом. Нагрузка прикладывалась за двадцать девять шагов и изменялась от нуля до 23 кН.

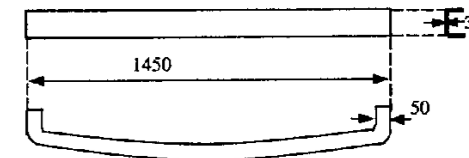


Рис.8.3

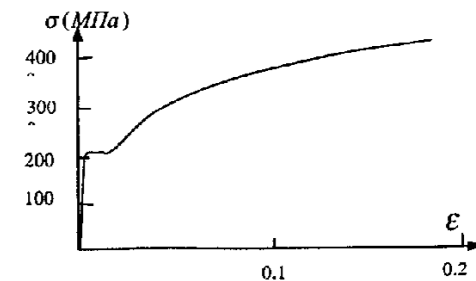


Рис.8.4



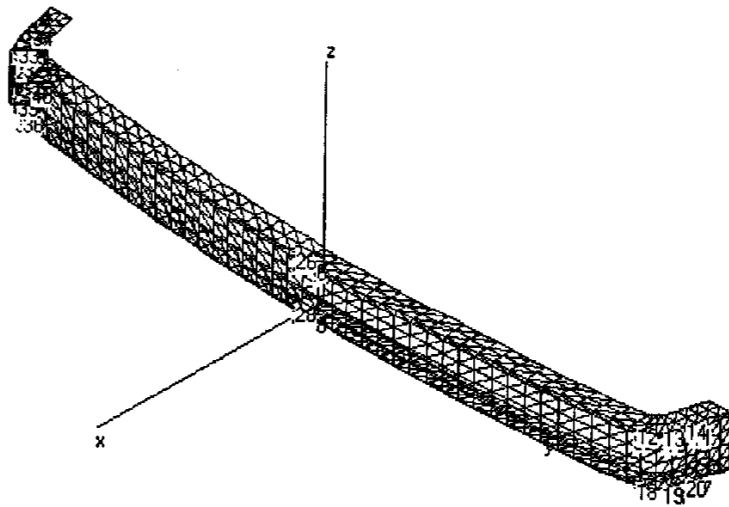


Рис. 8.5

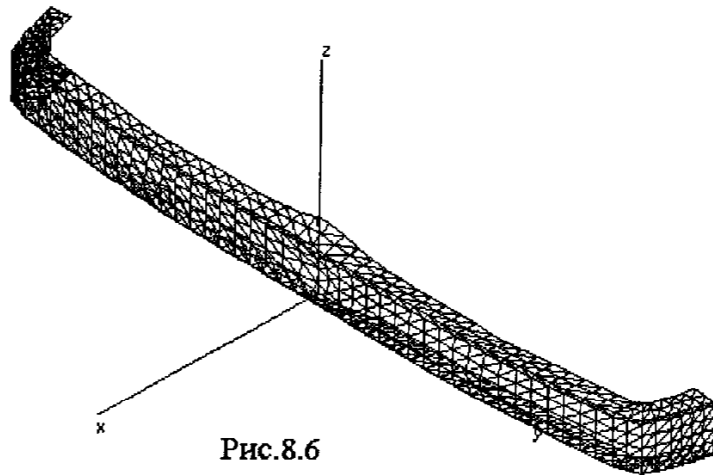


Рис. 8.6

На рис.8.7 показано деформированное состояние бампера при внешней силе, равной 23 кН, а на рис.8.8 – процесс роста перемещений точки приложения силы по мере возрастания этой силы. Перемещение точки приложения силы при наибольшей нагрузке составило 6.25 см.

На рис.8.8 показан процесс развития пластических деформаций на наружной и внутренней поверхностях бампера при возрастании нагрузки. На правой половине бампера этот процесс показан для внутренней поверхности, а на левой – для наружной. Пластические деформации возникли при нагрузке, равной 12 кН, а при нагрузке 23 кН распространились на весьма значительной части поверхности.

При нагрузке 23 кН несущая способность бампера практически исчерпана.

Таким образом, метод конечных элементов позволяет исследовать процесс деформирования конструкций при появлении и развитии пластических деформаций вплоть до их разрушения, что дает возможность проектировать более надежные конструкции.

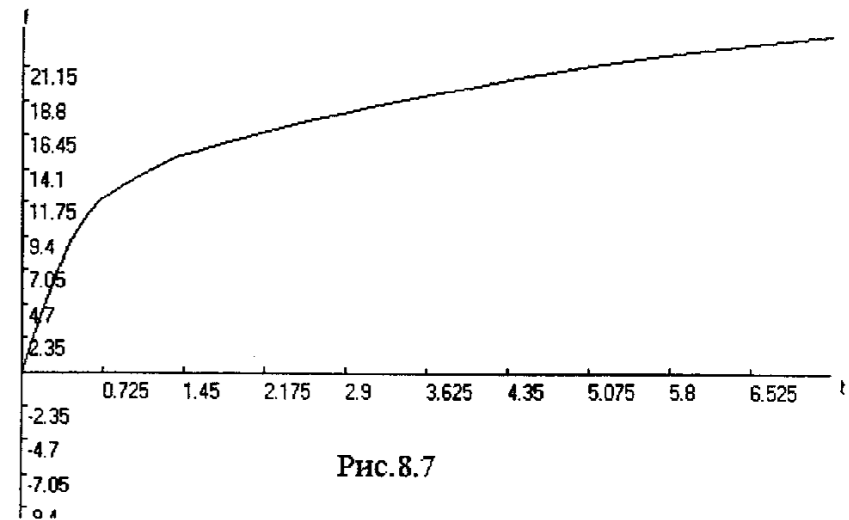


Рис. 8.7

## Глава 9. ДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ КОНСТРУКЦИЙ АВТОМОБИЛЯ И ТРАКТОРА

### 9.1. СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ КОНСТРУКЦИИ

Элементы различных конструкций часто подвергаются действию динамических нагрузок. Динамическими называются такие нагрузки, которые, изменяясь во времени, вызывают появление в конструкции инерционных сил. Инерционные силы, в свою очередь, изменяют распределение внутренних усилий в конструкции, причем последние также меняются во времени. Поэтому расчет конструкций на прочность и жесткость при действии динамических нагрузок имеет свою специфику. Сам ход динамического расчета во многом зависит от распределения масс в системе. В связи с этим введем понятие степени свободы конструкции. При выполнении динамических расчетов под степенью свободы конструкции подразумевают число геометрических параметров, определяющих положение масс системы. В принципе любая конструкция представляет собой систему с распределенной массой, или систему с бесконечно большим числом бесконечно малых масс. Таким образом, степень свободы реальной конструкции всегда равна бесконечности. Однако в инженерных расчетах используют расчетные схемы с конечным числом масс. Это возможно в тех случаях, когда на конструкции установлено некоторое оборудование, масса которого намного больше массы самой конструкции, так что последний в расчетах можно пренебречь, и когда в расчетах можно пойти на некоторое уменьшение точности при упрощении расчетной схемы. Примеры такого упрощения будут рассмотрены ниже.

Изменение параметров напряженно-деформированного состояния конструкции во времени под действием динамических нагрузок принято называть вынужденными колебаниями. Однако колебания конструкции возможны и после устранения нагрузок. Такие колебания называются свободными или собственными.

Независимо от вида исследуемых колебаний, методы динамического расчета можно разделить на две категории: статические и энергетические.

Суть статических методов расчета заключается в том, что для каждого момента времени составляются уравнения равновесия, в которых наряду с приложенными внешними силами и возникающими в конструкции внутренними усилиями учитываются еще и инерционные силы. Уравнения равновесия имеют при этом вид:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X - m\ddot{x} = 0 \\ \dots \\ \sum M_x - J_x \ddot{\alpha} = 0 \\ \dots \end{array} \right\}$$

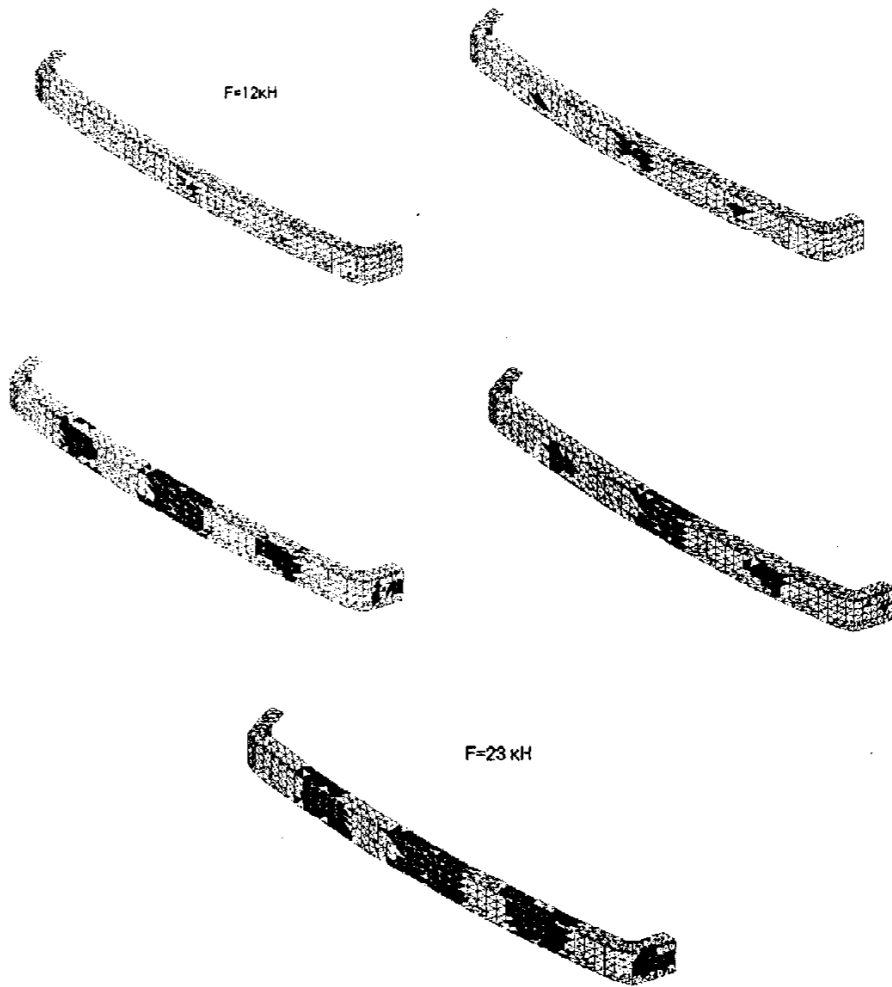


Рис.8.8

где  $m$  – масса,  $J_x$  – момент инерции массы,  $\ddot{x}$  – линейное ускорение массы,  $\ddot{\alpha}$  – угловое ускорение массы.

Энергетические методы основаны на использовании закона сохранения энергии. Для любой конструкции можно записать закон сохранения энергии в виде:

$$K+V=const,$$

где  $K$  – кинетическая, а  $V$  – потенциальная энергия системы. И та, и другая могут быть выражены с помощью известных соотношений теоретической и строительной механики, а после подстановки их в уравнение закона сохранения энергии из последнего могут быть найдены интересные расчетные величины.

## 9.2. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим конструкцию с одной сосредоточенной массой, способной перемещаться только в одном направлении (рис.9.1). Такие конструкции называются системами с одной степенью свободы.

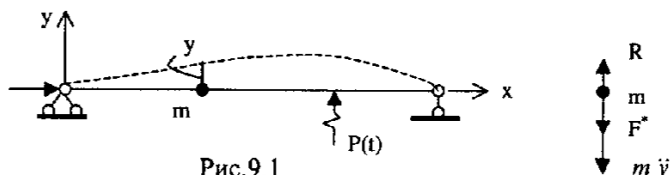


Рис.9.1

Получим уравнение движения этой конструкции статическим способом. При этом учтем, что на массу действуют реакция балки  $R$ , сила сопротивления среды  $F^*$  и сила инерции  $m\ddot{y}$ . Уравнение равновесия массы принимает вид

$$R - F^* - m\ddot{y} = 0. \quad (9.1)$$

Реакцию балки  $R$  найдем следующим образом. Со стороны массы на балку действует, согласно второму закону механики, сила, равная  $-R$ . Тогда перемещение точки присоединения массы будет равно:

$$y = -\delta_{1,1}R + \Delta_1(t) \quad (9.2)$$

Первое слагаемое в формуле (9.2) дает перемещение точки присоединения массы от силы  $-R$ , а второе представляет перемещение этой точки от внешней силы. Выразим силу  $R$  из формулы (9.2) и подставим ее значение в

уравнение (9.1). При этом примем, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости и направлена навстречу движению массы:

$$-\frac{y - \Delta_1(t)}{\delta_{1,1}} - c\dot{y} - m\ddot{y} = 0; \quad (9.3)$$

или

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{y}{\delta_{1,1}} = \frac{\Delta_1(t)}{\delta_{1,1}}; \quad (9.4)$$

Коэффициент “ $c$ ” в формуле (9.4) называется коэффициентом затухания.

Разделим левую и правую части формулы (9.4) на  $m$ . Получим:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{c}{m\delta_{1,1}}y = \frac{\Delta_1(t)}{m\delta_{1,1}}. \quad (9.5)$$

Обозначим

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{1,1}}; \quad (9.6)$$

$$2\alpha = \frac{c}{m}. \quad (9.7)$$

С учетом этих обозначений уравнение движения массы принимает вид:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2y = \omega^2\Delta_1(t). \quad (9.8)$$

### 9.2.1. Собственные колебания без учета сил сопротивления

Уравнение собственных колебаний получим в предположении, что внешние силы и силы сопротивления среды равны нулю.

$$\ddot{y} + \omega^2y = 0. \quad (9.9)$$

Решение уравнения (9.9) известно. Оно имеет следующий вид:

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \quad (9.10)$$

Скорость перемещения массы равна:

$$v = \dot{y} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t. \quad (9.11)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  найдем из начальных условий: при  $t=0$   $y=y(0)$ ,  $v=v(0)$ . Подставляя значения  $t=0$  в уравнения (9.9) и (9.11), с учетом начальных условий получаем:

$$y(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0; \quad v(0) = \omega A \cos 0 - \omega B \sin 0 = 0;$$

Из этих соотношений находим

$$A = \frac{v(0)}{\omega}; \quad B = y(0).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (9.10), получаем уравнение движения массы при свободных колебаниях:

$$y = \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t + y(0) \cos \omega t. \quad (9.12)$$

Введем новые переменные

$$A = C \cos \lambda; \quad B = C \sin \lambda. \quad (9.13)$$

Подставив введенные значения коэффициентов в формулу (9.10), получаем

$$y = C \cos \lambda \sin \omega t + C \sin \lambda \cos \omega t = C \sin(\omega t + \lambda). \quad (9.14)$$

Новые коэффициенты, согласно (9.13), равны:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{B}{A}.$$

Таким образом, масса совершает гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ , значение которой находится из формулы (9.6):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{1,1}}}. \quad (9.15)$$

Подставив в формулу (9.15) значение  $m=G/g$ , где  $G$  – вес груза,  $g$  – ускорение свободного падения и учтя, что произведение  $g \delta_{1,1} = y_{cm}$ , где  $y_{cm}$  есть перемещение точки присоединения массы от действия груза  $G$ , получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}. \quad (9.16)$$

Зная круговую частоту собственных колебаний, можно найти период колебаний  $T$  и циклическую частоту  $f$  из соотношений:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega = 2\pi f.$$

## 9.2.2. Собственные колебания с учетом сил сопротивления

Уравнение собственных колебаний с учетом сил сопротивления получим, полагая равной нулю внешнюю силу в уравнении (9.8).

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = 0; \quad (9.17)$$

Слагаемое  $2\alpha \dot{y}$  учитывает сопротивление движению: сопротивление внешней среды, трение в местах соединения элементов, внутреннее трение (неупругое сопротивление материалов) и т.д. В результате колебания, возникшие под воздействием каких-либо причин, с течением времени затухают (см. рис.9.2). В качестве меры затухания иногда принимают отношение амплитуд колебаний через период  $\eta = \frac{y_n}{y_{n+1}}$ . Но чаще в качестве такой меры

принимают логарифм этого отношения  $\delta = \ln \eta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}}$ .

Чтобы найти решение уравнения (9.17), составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

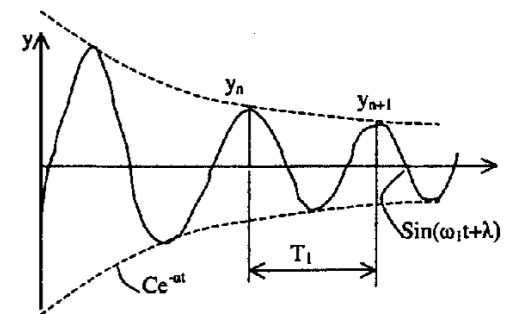


Рис.9.2

Рассмотрим различные случаи.

**Характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни, при этом  $\omega > \lambda$ .**

Корни характеристического уравнения в этом случае равны:

$$r_1 = -\alpha + i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}; \quad r_2 = -\alpha - i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Уравнение (9.17) в этом случае имеет следующее решение:

$$y = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t), \quad \text{или} \quad y = e^{-\alpha t} C \sin(\omega_1 t + \lambda). \quad (9.18)$$

График функции (9.18) показан на рис.9.2.

Отношение амплитуд через период равно:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{e^{-\alpha} C \sin(\omega_1 t + \lambda)}{e^{-\alpha(t+T_1)} C \sin(\omega_1(t+T_1) + \lambda)} = e^{\alpha T_1}.$$

Логарифмический коэффициент затухания равен

$$\delta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha T_1.$$

Отсюда  $\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ . Коэффициент пропорциональности "с" в выражении для силы сопротивления, согласно (9.7) равен

$$c = 2\alpha m = 2 \frac{\delta}{T_1} m = \frac{2\delta m \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi}.$$

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- Силы сопротивления уменьшают частоту собственных колебаний.
- Частота колебаний не зависит от амплитуды.
- Размахи колебаний с течением времени уменьшаются и колебания затухают.

**Корни характеристического уравнения вещественные и разные, при этом  $\alpha > \omega$ .**

Корни характеристического уравнения в этом случае равны

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2},$$

а уравнение (9.17) имеет следующее решение:

$$y = e^{-\alpha t} (C e^{\omega_2 t} + D e^{-\omega_2 t}) \quad (9.19)$$

Движение конструкции в данном случае оказалось аperiodическим. После отклонения конструкции от исходного состояния равновесия она постепенно возвращается к этому состоянию.

**Характеристическое уравнение имеет равные корни, при этом  $\alpha = \omega$ .**

Корни характеристического уравнения в этом случае равны:

$$r_1 = -\alpha; \quad r_2 = -\alpha.$$

Уравнение (9.17) имеет следующее решение:

$$y = e^{-\alpha t} (A + Bt).$$

И в этом случае движение является аperiodическим.

Случаем  $\alpha \geq \omega$  пользуются, когда хотят избежать колебаний.

Случай, когда  $\alpha = \omega$ , называют критическим демпфированием. На основании (9.6) коэффициент критического демпфирования  $c_{кр} = 2m\alpha = 2m\omega$ . На практике демпфирование часто задают в долях от критического, т.е. представляют коэффициент демпфирования в виде:

$$c = \xi c_{кр}.$$

Нетрудно выразить коэффициент  $\xi$  через логарифмический коэффициент затухания, учитывая, что последний определяется формулой  $\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ .

$$c = 2\alpha m = 2\alpha m \frac{\omega}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega} 2m\omega = \frac{\alpha}{\omega} c_{кр} = \frac{\delta}{T_1 \omega} c_{кр}.$$

Следовательно,

$$\xi = \frac{\delta}{T_1 \omega}.$$

### 9.2.3. Действие вибрационной силы на систему с одной степенью свободы

При действии на систему с одной степенью свободы вибрационной силы  $F(t) = F_1 \sin \theta t$  уравнение движения (9.8) запишем в виде:

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_1(t) = \omega^2 \delta_{1,F} F(t) = \omega^2 \delta_{1,F} F_1 \sin \theta t = \omega^2 \delta_{1,F} (F_1 \sin \theta t + F_2 \cos \theta t); \quad (9.20)$$

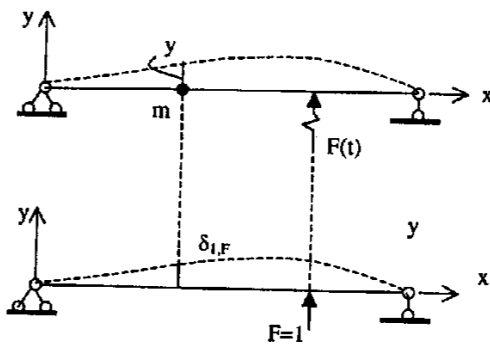


Рис.9.3

В формуле (9.20)  $\delta_{1,F}$  — перемещение точки при соединении массы под действием статической силы  $F_1=1$  (см. рис.9.3). Слагаемое  $F_2 \cos \theta t$  введено для удобства решения уравнения; в окончательных результатах положим  $F_2=0$ .

Уравнение (9.20) решается следующим образом.

Запишем частное решение в виде:

$$y_{\text{част}} = C_1 \sin \theta t + C_2 \cos \theta t. \quad (9.21)$$

Подставим  $y_{\text{част}}$  и его производные в уравнение (9.20) и приравняем коэффициенты при  $\sin \theta t$  и  $\cos \theta t$  в левой и правой частях. Получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) - C_2 \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} &= \delta_{1,F} F_1; \\ C_1 \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} + C_2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) &= \delta_{1,F} F_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Определяя  $C_1$  и  $C_2$ , подставляя их в уравнение (9.21) и приравняв  $F_2$  нулю, получаем:

$$y_{\text{част}} = \frac{\delta_{1,F} F_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{\alpha^2 \theta^2}{\omega^4}}} \sin(\theta t - \lambda) = a \sin(\theta t - \lambda). \quad (9.23)$$

В формуле (9.23)

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{2\theta\alpha}{\omega^2 - \theta^2}.$$

Кроме того, принято обозначение

$$a = \frac{\delta_{1,F} F_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{\alpha^2 \theta^2}{\omega^4}}} = \frac{y_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{\alpha^2 \theta^2}{\omega^4}}} = \beta y_{\text{ст}}, \quad (9.24)$$

где коэффициент  $\beta$ , называемый амплитудным динамическим коэффициентом, определяется равенством:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \frac{\alpha^2 \theta^2}{\omega^4}}}. \quad (9.25)$$

Общее решение уравнения (9.20) находится как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$y = y_{\text{св}} + y_{\text{част}}$$

Общее решение однородного уравнения  $y_{\text{св}}$ , найденное в предыдущем разделе, представляет собственные колебания, которые с течением времени затухают. Следовательно,  $y_{\text{част}}$  представляет незатухающую часть колебаний. Коэффициент  $\beta$  показывает, во сколько раз возрастает перемещение при динамическом действии нагрузки по сравнению со статическим ее действием. График  $\beta$  показан на рис.9.4. Как видно из этого графика, амплитуды колебаний резко возрастают при  $\theta = \omega$ . Это явление называется резонансом, а само совпадение частот — условием резонанса.

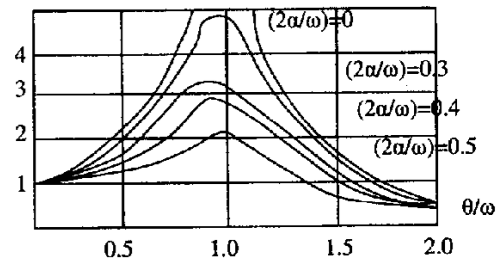


Рис.9.4

При  $\alpha=0$   $\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$ . Этим значением амплитудного динамического

коэффициента можно пользоваться в практических расчетах. Погрешность расчета в данном случае идет в запас прочности.

### 9.3. СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Получим уравнения свободных колебаний системы со многими степенями свободы (рис.9.5), пренебрегая силами сопротивления среды.

При колебаниях конструкции со многими массами на каждую массу будет действовать инерционная сила, определяемая как произведение массы на ускорение. Если каждая масса движется по закону  $y_i(t)$ , то на нее действует инерционная сила  $-m_i \ddot{y}_i(t)$ .

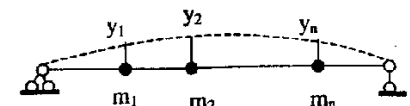


Рис.9.5

Очевидно, что точки присоединения масс будут перемещаться по следующему закону:

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \delta_{1,1}(-m_1 \ddot{y}_1(t)) + \delta_{1,2}(-m_2 \ddot{y}_2(t)) + \dots + \delta_{1,n}(-m_n \ddot{y}_n(t)) \\ &\dots \\ y_n(t) &= \delta_{n,1}(-m_1 \ddot{y}_1(t)) + \delta_{n,2}(-m_2 \ddot{y}_2(t)) + \dots + \delta_{n,n}(-m_n \ddot{y}_n(t)) \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

Исследования показали, что при свободных колебаниях систем со многими степенями свободы каждая масса движется по гармоническому закону, т.е. закон перемещения  $i$ -й массы имеет вид:

$$y_i(t) = y_i \sin(\omega t + \varphi). \quad (9.27)$$

Подставляя функции перемещений всех масс и их производные в уравнения (9.26), после приведения подобных членов и сокращения на  $\sin(\omega t + \varphi)$ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{1,1}m_1\omega^2 - 1)y_1 + \delta_{1,2}m_2\omega^2 y_2 + \dots + \delta_{1,n}m_n\omega^2 y_n &= 0 \\ \dots \\ \delta_{n,1}m_1\omega^2 y_1 + \delta_{n,2}m_2\omega^2 y_2 + \dots + (\delta_{n,n}m_n\omega^2 - 1)y_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Система уравнений (9.28) однородна и вследствие этого имеет два решения. Одно из них – нулевое. Однако в данном случае нулевое решение нас не устраивает, так как это означает отсутствие колебаний. Ненулевое решение имеет место только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Следовательно

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \delta_{1,1}m_1\omega^2 - 1 & \delta_{1,2}m_2\omega^2 & \dots & \delta_{1,n}m_n\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n,1}m_1\omega^2 & \delta_{n,2}m_2\omega^2 & \dots & \delta_{n,n}m_n\omega^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (9.29)$$

Раскрыв определитель (9.29), получим алгебраическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $\omega^2$ , из которого можно найти  $n$  частот собственных колебаний.

## 9.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 9.4.1. Собственные колебания

Как уже отмечалось в гл.2, расчет конструкций на вынужденные колебания методом конечных элементов сводится к решению системы дифференциальных уравнений второго порядка (2.67), а расчет на собственные ко-

лебания – к решению проблемы собственных значений по одному из уравнений (2.68) – (2.70). В частности, при отсутствии начальных сил и перемещений уравнения для отыскания частот и форм собственных колебаний записываются в виде (2.70):

$$[K]\{q_0\} = \omega^2 [M]\{q_0\}.$$

Индекс “0” в обозначении вектора узловых перемещений  $\{q_0\}$  означает, что этот вектор представляет собой амплитуды собственных колебаний. Для сокращения записи этот индекс в дальнейшем будем опускать.

Напомним, что уравнения (2.70) получены из уравнений Лагранжа второго рода, однако их можно получить и другим способом – непосредственно из уравнений (9.28). Представим уравнения (9.28) в матричном виде:

$$[D][M]\{y\}\omega^2 - [E]\{y\} = 0, \quad (9.30)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \dots & \delta_{n,n} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}; \quad \{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (9.31)$$

Матрица  $[D]$  содержит перемещения точек присоединения масс от единичных сил, приложенных в этих точках, поэтому ее называют матрицей податливости. Если приложить силы, отличные от единицы, то возникающие при этом перемещения можно найти по формул:

$$\{\Delta\} = [D]\{f\}. \quad (9.32)$$

Матрица  $[K]$ , входящая в уравнение (2.70), содержит жесткости, т.е. силы, соответствующие единичным перемещениям. Если умножить матрицу  $[K]$  на вектор перемещений  $\{\Delta\}$ , то получим соответствующий ему вектор сил  $\{f\}$ . Таким образом

$$\{f\} = [K]\{\Delta\}. \quad (9.33)$$

Выражая из (9.32) вектор  $\{f\}$ , находим:

$$\{f\} = [D]^{-1}\{\Delta\}. \quad (9.34)$$

Сопоставляя (9.33) и (9.34), приходим к следующему равенству:

$$[K] = [D]^{-1}. \quad (9.35)$$

Таким образом, матрица жесткости может быть найдена обращением матрицы податливости. Аналогично можно показать, что

$$[K]^{-1} = [D]. \quad (9.36)$$

Следовательно, матрицы жесткости и податливости взаимно обратны. Умножим теперь уравнение (9.30) на матрицу  $[K]$  слева:

$$[K][D][M]\{y\}\omega^2 - [K][E]\{y\} = 0. \quad (9.37)$$

Учитывая (9.35), получаем:

$$[D]^{-1}[D][M]\{y\}\omega^2 - [K][E]\{y\} = 0. \quad (9.38)$$

Так как произведение  $[D]^{-1}[D] = [E]$ , где  $[E]$  – единичная матрица, то уравнение (9.30) с точностью до обозначений перемещений совпадает с уравнением (2.70), что и требовалось доказать.

Из уравнения (2.70), так же, как и из уравнений (9.28), можно найти  $n$  частот собственных колебаний. Для этого нужно представить это уравнение в виде:

$$[K]\{q\} - \omega^2[M]\{q\} = ([K] - \omega^2[M])\{q\} = 0. \quad (9.39)$$

Система уравнений (9.39) является однородной, и, вследствие этого, имеет два решения – тривиальное (нулевое) и нетривиальное (ненулевое). Нулевое решение ( $\{q\} = 0$ ) означает, что точки конструкции не получают перемещений, т.е. конструкция не совершает колебаний. Ненулевое решение, означающее наличие колебаний, возможно только в том случае, когда определитель системы уравнений (9.39) равен нулю, т.е.:

$$\text{Det}([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (9.40)$$

Раскрыв определитель (9.40), получим алгебраическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $\omega^2$ , решив которое, найдем  $n$  частот собственных колебаний.

Соответствующую каждой частоте  $\omega_i$  форму собственных колебаний можно найти из уравнений (9.39), подставив в них значение данной частоты. Однако частота собственных колебаний обращает в нуль определитель системы уравнений (9.39), поэтому непосредственное решение этой системы невозможно. Но можно преобразовать систему уравнений (9.39) таким образом, чтобы из нее можно было найти требуемую форму. Для этого обозначим матрицу системы уравнений (9.39) через  $A$  ( $[A] = [K] - \omega_i^2[M]$ ) и запишем эту систему уравнений в виде:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & A_{1,n-1} \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{(i)} \\ q_{n-1}^{(i)} \end{Bmatrix} = 0, \quad (9.41)$$

где матрица  $A$  разделена на блоки.

Умножив нижнюю строку блочной матрицы  $[A]$  на вектор перемещений  $\{q^{(i)}\}$  и положив  $q_1^{(i)} = 1$ , получим систему уравнений относительно подвектора  $\{q_{n-1}^{(i)}\}$ , порядок которой на единицу меньше порядка исходной системы уравнений, но которая имеет невырожденную матрицу  $A_{n-1,n-1}$ :

$$\{A_{n-1,1}\}q_1^{(i)} + \{A_{n-1,n-1}\}\{q_{n-1}^{(i)}\} = 0 \quad (9.42)$$

или

$$A_{n-1,n-1}\{q_{n-1}^{(i)}\} = -\{A_{n-1,1}\}. \quad (9.43)$$

Найдя из системы уравнений (9.43) подвектор  $\{q_{n-1}^{(i)}\}$ , полный вектор исследуемой  $i$ -й собственной формы колебаний получим в виде:

$$\{q^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ q_{n-1}^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (9.44)$$

#### 9.4.2. Условия ортогональности форм собственных колебаний

Отметим одно важное свойство собственных векторов. Выражение  $\omega^2[M]\{q\}$  в формуле (9.39) представляет вектор амплитуд инерционных сил, возникающих при собственных колебаниях конструкции. Обозначив этот вектор буквой  $f$ , для  $i$ -й и  $j$ -й форм собственных колебаний имеем:

$$\{f^{(i)}\} = \omega_i^2[M]\{q^{(i)}\}, \quad \{f^{(j)}\} = \omega_j^2[M]\{q^{(j)}\}. \quad (9.45)$$

Пусть некоторая конструкция (для простоты рассмотрим балку) имеет формы собственных колебаний, показанные на рис.9.5. Каждой форме собственных колебаний соответствует своя система инерционных сил.

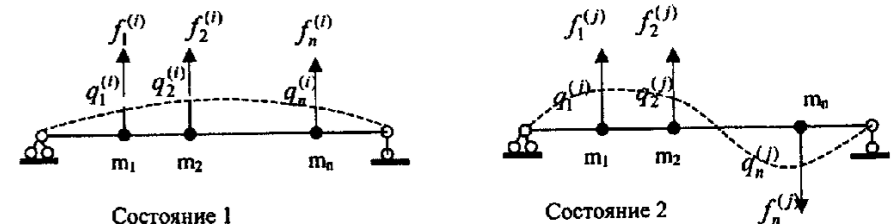


Рис.9.5



Применим принцип взаимности работ, согласно которому сумма работ внешних сил первого состояния на перемещениях второго равна сумме работ внешних сил второго состояния на перемещениях первого. Получим:

$$f_1^{(i)} q_1^{(j)} + f_2^{(i)} q_2^{(j)} + \dots + f_n^{(i)} q_n^{(j)} = f_1^{(j)} q_1^{(i)} + f_2^{(j)} q_2^{(i)} + \dots + f_n^{(j)} q_n^{(i)}. \quad (9.46)$$

Соотношение (9.46) в матричном виде записывается так:

$$\{q^{(j)}\}^T \{f^{(i)}\} = \{q^{(i)}\}^T \{f^{(j)}\}. \quad (9.47)$$

Подставив в формулу (9.47) значения инерционных сил для  $i$ -й и  $j$ -й форм из (9.45), получаем

$$\{q^{(j)}\}^T \omega_i^2 [M] \{q^{(i)}\} = \{q^{(i)}\}^T \omega_j^2 [M] \{q^{(j)}\}. \quad (9.48)$$

Произведения матриц  $\{q^{(j)}\}^T [M] \{q^{(i)}\}$  и  $\{q^{(i)}\}^T [M] \{q^{(j)}\}$  представляют собой одно и то же алгебраическое выражение, поэтому они равны между собой. Следовательно, соотношение (9.48) можно записать в виде

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{q^{(j)}\}^T [M] \{q^{(i)}\} = 0. \quad (9.49)$$

Если частоты собственных колебаний для  $i$ -го и  $j$ -го тонов различны ( $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ ), то из соотношения (9.49) вытекает, что

$$\{q^{(j)}\}^T [M] \{q^{(i)}\} = 0. \quad (9.50)$$

Полученное условие называется условием ортогональности форм собственных колебаний по отношению к матрице массы.

Запишем уравнение собственных колебаний (9.39) для  $i$ -го тона:

$$[K] \{q^{(i)}\} = \omega_i^2 [M] \{q^{(i)}\} \quad (9.51)$$

Умножим уравнение (9.51) на вектор  $\{q^{(j)}\}^T$ :

$$\{q^{(j)}\}^T [K] \{q^{(i)}\} = \omega_i^2 \{q^{(j)}\}^T [M] \{q^{(i)}\} \quad (9.52)$$

Учитывая равенство (9.50) при ( $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ ) получаем:

$$\{q^{(j)}\}^T [K] \{q^{(i)}\} = 0. \quad (9.53)$$

Полученное соотношение называется условием ортогональности форм собственных колебаний по отношению к матрице жесткости.

Соотношения ортогональности можно получить и в более общем виде.

Умножим соотношение (9.51) слева на произведение  $\{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1}$ . Получим

$$\begin{aligned} \{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1} [K] \{q^{(i)}\} &= \omega^2 \{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1} [M] \{q^{(i)}\} = \\ &= \omega^2 \{q^{(j)}\}^T [K] \{q^{(i)}\} \end{aligned} \quad (9.54)$$

С учетом (9.53) из соотношения (9.54) вытекает:

$$\{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1} [K] \{q^{(i)}\} = \{q^{(j)}\}^T [M] ([M]^{-1} [K])^2 \{q^{(i)}\} = 0. \quad (9.55)$$

Умножив уравнение (9.51) слева на произведение  $\{q^{(j)}\}^T ([K] [M]^{-1})^2 = \{q^{(j)}\}^T ([K] [M]^{-1})^2 = \{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1} [K] [M]^{-1}$ , получим:

$$\{q^{(j)}\}^T ([K] [M]^{-1})^2 [K] \{q^{(i)}\} = \omega^2 \{q^{(j)}\}^T [K] [M]^{-1} [M] \{q^{(i)}\}. \quad (9.56)$$

Откуда, с учетом условия (9.55) найдем:

$$\{q^{(j)}\}^T ([K] [M]^{-1})^2 [K] \{q^{(i)}\} = \{q^{(j)}\}^T [M] ([M]^{-1} [K])^3 \{q^{(i)}\} = 0. \quad (9.57)$$

Повторяя описанные выше действия бесконечное множество раз, придем к общему условию ортогональности в виде:

$$\{q^{(j)}\}^T [M] ([M]^{-1} [K])^l \{q^{(i)}\} = 0, \quad 0 \leq l < \infty. \quad (9.58)$$

Из соотношения (9.58) как частные случаи при  $l=0$  и  $1$  соответственно получаем условия ортогональности (9.50) и (9.53).

Можно также получить аналогичное (9.58) условие ортогональности, содержащее матрицу податливости конструкции, но так как этот случай представляет лишь теоретический интерес, то он здесь не рассматривается.

### 9.4.3. Нормирование форм собственных колебаний

Уравнения собственных колебаний (9.51) не изменятся, если умножить или разделить его левую и правую части на некоторое постоянное число. Таким образом, формы собственных колебаний всегда определяются с точностью до постоянного множителя. Условия ортогональности сохраня-

ются, естественно, для любым образом нормированных форм собственных колебаний. Будем обозначать нормированные формы буквой  $\varphi$ .

Наиболее часто в программах динамического расчета конструкций на ЭВМ используется такой способ нормирования, при котором

$$\{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(i)}\} = 1. \quad (9.59)$$

Если составить матрицу  $\Phi$ , содержащую  $n$  нормированных форм собственных колебаний, то с учетом условий ортогональности можно получить следующее соотношение:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [E], \quad (9.60)$$

где  $[E]$  - единичная матрица.

Формы колебаний, отвечающие условию (9.60), называются ортонормированными.

Если используется другой способ нормирования, то

$$\{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(i)}\} = M_i, \quad (9.61)$$

где  $M_i$  есть обобщенная масса, соответствующая  $i$ -му тону колебаний. В этом случае

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [\bar{M}], \quad (9.62)$$

где  $[\bar{M}]$  - диагональная матрица обобщенных масс.

#### 9.4.4. Вынужденные колебания

Как показано в гл.2, расчет на вынужденные колебания с учетом начальных усилий и перемещений сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.67), имеющих вид:

$$[M]\{\Delta \ddot{q}\} + [D]\{\Delta \dot{q}\} + [K + K_w + K_c]\{\Delta q\} = \{\Delta Q^p\} + \{\Delta Q^c\}.$$

Чтобы освободить дальнейшие рассуждения от излишних деталей, будем считать, что начальные усилия и перемещения равны нулю, нагрузки являются консервативными и прикладываются одновременно. Тогда уравнение (2.67) примет вид

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q^p\} = \{F(t)\}. \quad (9.63)$$

Задача заключается в определении перемещений от заданной нагрузки путем решения уравнения (9.63) с последующим анализом напряженного состояния во времени.

Эта задача может быть решена двумя способами: 1) разложением искомого решения по некоторым базисным функциям и 2) прямым интегрированием во времени.

Рассмотрим эти два способа в отдельности.

#### 9.4.5. Модальное интегрирование уравнений движения

При использовании первого способа в качестве базисных функций принимают формы собственных колебаний, при этом искомое решение относительно вектора узловых перемещений  $\{q\}$  записывается в виде:

$$\{q(t)\} = \{\varphi^{(1)}\} \lambda_1(t) + \{\varphi^{(2)}\} \lambda_2(t) + \dots + \{\varphi^{(n)}\} \lambda_n(t). \quad (9.64)$$

В матричной форме уравнения (9.64) записываются так:

$$\{q(t)\} = [\Phi] \{\Lambda(t)\}. \quad (9.65)$$

Подставив в уравнение (9.63) значение  $\{q(t)\}$  из (9.65) и умножив полученное соотношение слева на транспонированный вектор перемещений по  $i$ -й форме собственных колебаний  $\{\varphi^{(i)}\}^T$ , получим

$$\{\varphi^{(i)}\}^T [M] [\Phi] \{\dot{\Lambda}(t)\} + \{\varphi^{(i)}\}^T [D] [\Phi] \{\Lambda(t)\} + \{\varphi^{(i)}\}^T [K] [\Phi] \{\Lambda(t)\} = \{\varphi^{(i)}\}^T \{F(t)\}. \quad (9.66)$$

Запишем в развернутом виде первое слагаемое формулы (9.66):

$$\begin{aligned} \{\varphi^{(i)}\}^T [M] [\Phi] \{\dot{\Lambda}(t)\} &= \{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(1)}\} \dot{\lambda}_1(t) + \{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(2)}\} \dot{\lambda}_2(t) + \dots + \\ &+ \{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(i)}\} \dot{\lambda}_i(t) + \dots + \{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(n)}\} \dot{\lambda}_n(t) = \{\varphi^{(i)}\}^T [M] \{\varphi^{(i)}\} \dot{\lambda}_i(t) = m_i \dot{\lambda}_i(t) \end{aligned} \quad (9.67)$$

В формуле (9.67) учтено свойство ортогональности форм собственных колебаний по отношению к матрице массы. Так как формы собственных колебаний ортогональны и по отношению к матрице жесткости, то по аналогии с (9.67) третье слагаемое (9.66) записывается в виде

$$\{\varphi^{(i)}\}^T [K] [\Phi] \{\Lambda(t)\} = \{\varphi^{(i)}\}^T [K] \{\varphi^{(i)}\} \lambda_i(t) = k_i \lambda_i(t). \quad (9.68)$$

Произведение строки на столбец в правой части (9.66) дает алгебраическую функцию  $f_i(t)$ .

Если предположить, что формы собственных колебаний ортогональны также и по отношению к матрице демпфирования  $[D]$ , то второе слагаемое формулы (9.66) можно будет записать в виде:

$$\{\varphi^{(i)}\}^T [D] \{\Phi\} \{\dot{\lambda}(t)\} = d_i \dot{\lambda}(t) \quad (9.69)$$

и уравнение (9.66) запишется так:

$$m_i \ddot{\lambda}_i(t) + d_i \dot{\lambda}_i(t) + k_i \lambda_i(t) = f_i(t). \quad (9.70)$$

Обратимся к соотношению (9.51). Умножив левую и правую части этого соотношения на вектор  $\{q^{(i)}\}^T$ , получим:

$$\{q^{(i)}\}^T [K] \{q^{(i)}\} = \omega_i^2 \{q^{(i)}\}^T [M] \{q^{(i)}\} = \omega_i^2 m_i. \quad (9.71)$$

Представив  $d_i$  в виде

$$d_i = 2\xi_i \omega_i m_i, \quad (9.72)$$

где  $\xi_i$  есть параметр затухания для  $i$ -й формы собственных колебаний, методика определения которого на основе экспериментальных данных описана выше, и, учтя (9.72), приходим к следующему представлению уравнения (9.70):

$$\ddot{\lambda}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\lambda}_i(t) + \omega_i^2 \lambda_i(t) = f_i(t)/m_i. \quad (9.73)$$

Из уравнения (9.73) может быть найдена функция  $\lambda_i(t)$ .

Аналогичным образом могут быть получены дифференциальные уравнения для определения функций  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ . В силу ортогональности форм собственных колебаний все эти уравнения не будут связаны между собой, что существенно упрощает процесс решения задачи. В практических расчетах нет нужды учитывать все  $n$  форм собственных колебаний; как правило, используют несколько низших тонов.

#### 9.4.6. Условия ортогональности матрицы демпфирования

Ввиду того, что гипотеза о пропорциональности сил затухания скоростям перемещений точек достаточно условна, желательно добиться такого представления матрицы демпфирования, которое наиболее полно учитывало бы экспериментальные данные относительно параметров затухания по различным формам собственных колебаний. При этом матрица демпфирования должна удовлетворять условиям ортогональности.

Выше было показано, что условию ортогональности форм собственных колебаний удовлетворяет множество матриц, полученных как комбинация матриц жесткости и массы (см. (9.58)). Тогда матрицу демпфирования, удовлетворяющую условиям ортогональности, можно представить в виде:

$$[D] = [M] \sum_n a_n ([M]^{-1} [K])^T = \sum_n [D_n]. \quad (9.74)$$

Частным случаем формулы (9.74) является демпфирование по Релею:

$$[D] = a_0 [M] + a_1 [K]. \quad (9.75)$$

Согласно (9.72), диагональную матрицу обобщенных параметров затухания можно получить следующим образом:

$$[d] = [\Phi]^T [D] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 m_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\xi_2 \omega_2 m_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\xi_3 \omega_3 m_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (9.76)$$

Из формулы (9.76) следует, что матрицу демпфирования  $[D]$  можно получить, умножив диагональную матрицу обобщенных параметров затухания на матрицу  $[\Phi^{-1}]$  справа и  $[\Phi^T]^{-1}$  слева:

$$[D] = [\Phi^T]^{-1} [d] [\Phi]^{-1} = [\Phi^T]^{-1} [\Phi]^T [D] [\Phi] [\Phi]^{-1}. \quad (9.77)$$

Однако при этом возникает необходимость вычисления обратной матрицы форм собственных колебаний. На практике можно обойтись без этой трудоемкой процедуры, если воспользоваться условием ортогональности форм собственных колебаний матрице массы. Умножив выражение (9.62) на обратную матрицу обобщенных масс, получим единичную матрицу  $[E]$ :

$$[E] = [\bar{M}]^{-1} [\bar{M}] = [\bar{M}]^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi]. \quad (9.78)$$

С другой стороны, единичную матрицу можно получить умножением матрицы форм  $[\Phi]$  на обратную ей, т.е.

$$[E] = [\Phi]^{-1} [\Phi]. \quad (9.79)$$

Приравнявая правые части выражений (9.78) и (9.79), получаем

$$[\Phi]^{-1} = [\bar{M}]^{-1} [\Phi]^T [M]. \quad (9.80)$$

Подставляя (9.80) в (9.77), получаем матрицу затухания в виде:

$$[D] = [M][\Phi][\bar{M}]^{-1}[d][\bar{M}]^{-1}[\Phi]^T[M]. \quad (9.81)$$

Заметим, что если диагональную матрицу  $[d]$  умножить слева и справа на обращенную диагональную матрицу обобщенных масс  $[\bar{M}]^{-1}$ , то получим следующую диагональную же матрицу:

$$[\bar{M}]^{-1}[d][\bar{M}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\xi_1\omega_1}{m_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2\xi_2\omega_2}{m_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2\xi_3\omega_3}{m_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = [\xi]. \quad (9.82)$$

С учетом (9.82) формула (9.81) приводится к виду

$$[D] = [M][\Phi][\xi][\Phi]^T[M], \quad (9.83)$$

где  $[\xi]$  – матрица приведенных параметров демпфирования порядка  $n$ , определяемая формулой (9.82).

На практике ограничиваются учетом нескольких тонов собственных колебаний, вычисляя матрицу демпфирования для каждой из выбранных форм собственных колебаний по формуле:

$$[D_i] = [M]\{\varphi_i\}\xi_i\{\varphi_i\}^T[M].$$

Общая матрица демпфирования находится суммированием  $l$  модальных матриц:

$$[D] = \sum_{i=1}^l [D_i] = [M] \left[ \sum_{i=1}^l \{\varphi_i\}\xi_i\{\varphi_i\}^T \right] [M].$$

#### 9.4.7. Прямое интегрирование уравнений движения

Так как все матрицы, входящие в систему дифференциальных уравнений движения (9.63), определены, дальнейший расчет конструкции сводится к интегрированию этих уравнений. Широкое распространение на практике нашли шаговые методы интегрирования. При использовании этих методов решение уравнений (9.63) ищется в дискретные моменты времени с шагом  $\Delta t$ . Основой всех шаговых методов является аппроксимация ускорений на

определенном временном участке. Наиболее простой является линейная аппроксимация в интервале времени от  $t$  до  $t+\Delta t$  (рис.9.6). Аналитическая зависимость ускорений от времени в интервале от  $t$  до  $t+\Delta t$  имеет вид:

$$\ddot{q}(\tau) = \ddot{q}(t) + \frac{\Delta\ddot{q}}{\Delta t}\tau. \quad (9.84)$$

Интегрируя, находим:

$$\dot{q}(\tau) = \int \ddot{q}(\tau)d\tau = \ddot{q}(t)\tau + \frac{\Delta\ddot{q}}{\Delta t}\frac{\tau^2}{2} + C,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий: при  $\tau=0$   $\dot{q}(\tau) = \dot{q}(t)$ .

Следовательно,  $C = \dot{q}(t)$  и

$$\dot{q}(\tau) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\tau + \frac{\Delta\ddot{q}}{\Delta t}\frac{\tau^2}{2}. \quad (9.85)$$

Закон изменения перемещений найдем, интегрируя (9.85) при  $v(0)=v(t)$ . Получаем:

$$q(\tau) = q(t) + \dot{q}(t)\tau + \ddot{q}(t)\frac{\tau^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{q}}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6}. \quad (9.86)$$

Записывая (9.85) и (9.86) для момента времени  $t+\Delta t$ , т.е. при  $\tau = \Delta t$ , находим

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\Delta t + \Delta\ddot{q}(t)\frac{\Delta t}{2} \quad (9.87)$$

и

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \ddot{q}(t)\frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{q}(t)\frac{\Delta t^2}{6} \quad (9.88)$$

откуда

$$\Delta\dot{q}(t) = \ddot{q}(t)\Delta t + \Delta\ddot{q}(t)\frac{\Delta t}{2} \quad (9.87)$$

и

$$\Delta q(t) = \dot{q}(t)\Delta t + \ddot{q}(t)\frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{q}(t)\frac{\Delta t^2}{6}. \quad (9.88)$$

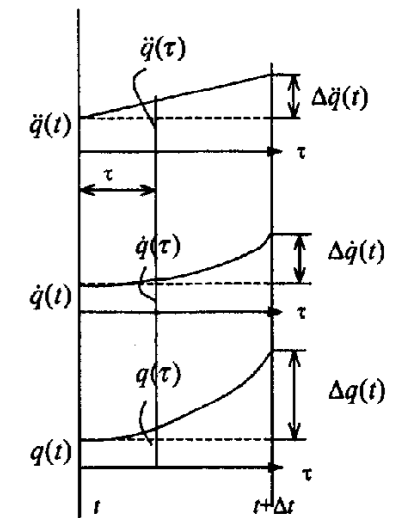


Рис.9.6

Решая (9.87) и (9.88) относительно  $\Delta\dot{q}(t)$  и  $\Delta\ddot{q}(t)$ , получаем:

$$\Delta\ddot{q}(t) = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta q(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{q}(t) - 3\ddot{q}(t); \quad (9.89)$$

$$\Delta\dot{q}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta q(t) - 3\dot{q}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}(t). \quad (9.90)$$

Вычислив полные векторы приращений скоростей и ускорений по формулам (9.89) и (9.90) и подставив их в уравнение (9.63), получаем:

$$\begin{aligned} [M] \left\{ \frac{6}{\Delta t^2} \Delta q(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{q}(t) - 3\ddot{q}(t) \right\} + [D] \left\{ \frac{3}{\Delta t} \Delta q(t) - 3\dot{q}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}(t) \right\} + \\ + [K] \Delta q = \Delta F(t) \end{aligned} \quad (9.91)$$

Переносим в полученном уравнении все слагаемые, зависящие от начальных условий в начале шага, в правую часть, приходим к системе алгебраических уравнений относительно приращений перемещений  $\{\Delta q\}$ :

$$[\tilde{K}] \{\Delta q\} = \{\Delta \tilde{F}\}, \quad (9.92)$$

где

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= \left[ [K] + \frac{6}{\Delta t^2} [M] + \frac{3}{\Delta t} [D] \right]; \\ \{\Delta \tilde{F}\} &= \left\{ \Delta F + [M] \left\{ \frac{6}{\Delta t} \dot{q}(t) + 3\ddot{q}(t) \right\} + [D] \left\{ 3\dot{q}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}(t) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (9.93)$$

есть матрица эффективной жесткости и вектор эффективной нагрузки соответственно.

После отыскания приращения перемещений из уравнения (9.92) приращения скоростей находятся по формуле (9.90). Приращения ускорений рекомендуется искать из условий равновесия в конце шага.

Из уравнений (9.63) имеем

$$\{\Delta\ddot{q}(t+\Delta t)\} = [M]^{-1} \left\{ F(t+\Delta t) - [D] \{\dot{q}(t+\Delta t)\} - [K] \{q(t+\Delta t)\} \right\}. \quad (9.94)$$

Найденные в конце шага перемещения, скорости и ускорения используются как начальные значения для следующего шага и т.д.

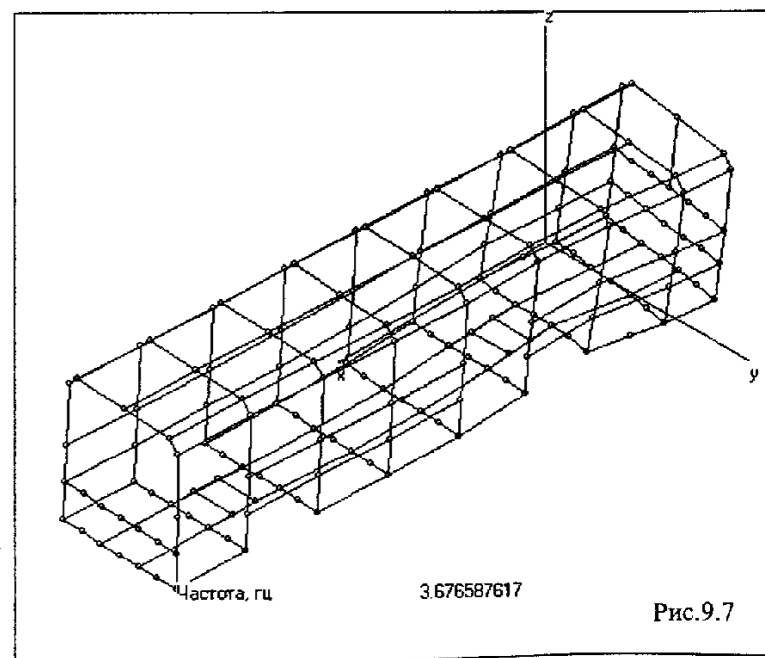
Исследования показали, что описанный метод шагового интегрирования требует большого количества временных шагов, что достигается за счет уменьшения шага интегрирования. Более точные результаты получаются с использованием модифицированных методов линейного ускорения, в част-

ности, метода Вильсона. В этом методе линейный закон изменения ускорения принимается в пределах расширенного шага интегрирования, равного  $\beta\Delta t$ . В методе Вильсона коэффициент  $\beta$  принимается равным 1.37. Схемы решения при использовании модифицированных методов аналогичны описанному выше.

## 9.5. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ АВТОМОБИЛЯ И ТРАКТОРА МКЭ НА ЭВМ

### 9.5.1. Определение частот и форм собственных колебаний каркаса кузова автобуса

Одним из обязательных этапов расчета объектов автотракторной техники в стадии их проектирования является определение частот и форм собственных колебаний, знание которых необходимо для оценки резонансных свойств этих объектов. Метод конечных элементов является удобным инструментом для решения указанной выше задачи. Возможности метода проиллюстрируем на примере определения частот и форм собственных колебаний каркаса кузова автобуса, рассмотренного в главах 3 и 7 настоящего учебника. Расчет проводился с помощью вычислительного комплекса ПРИНС, при этом исследовались пять тонов собственных колебаний, соответствующих низшим значениям частот собственных колебаний. Использовалась расчетная схема, описанная в гл.3. Результаты расчета приведены на рис.9.7–9.11.



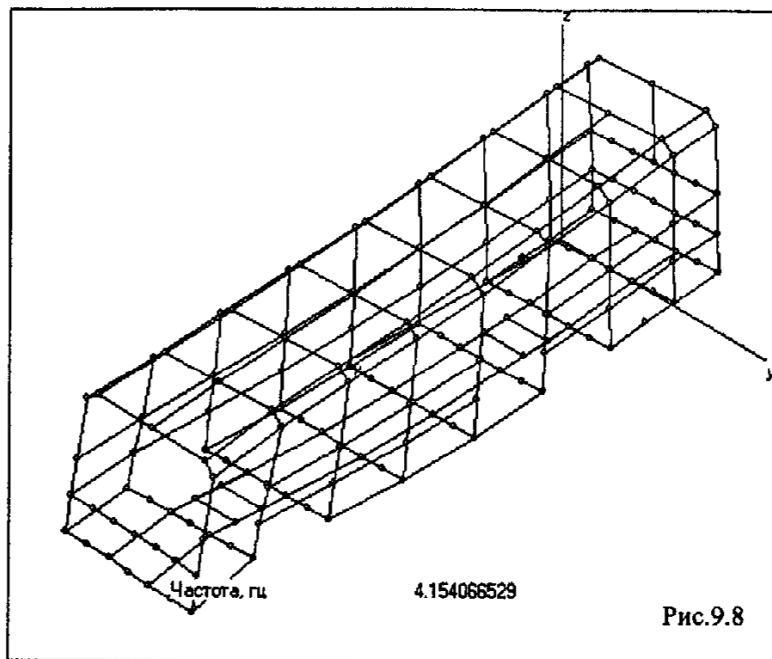


Рис.9.8

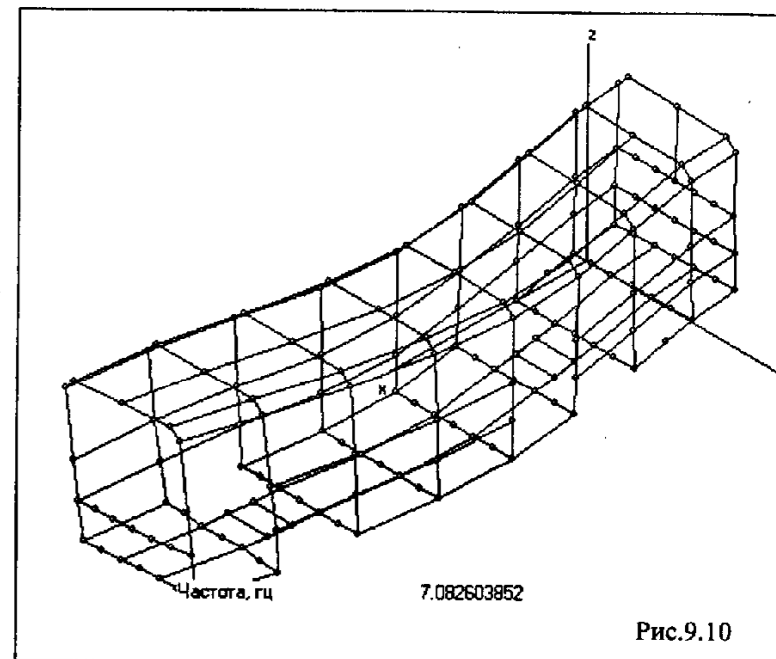


Рис.9.10

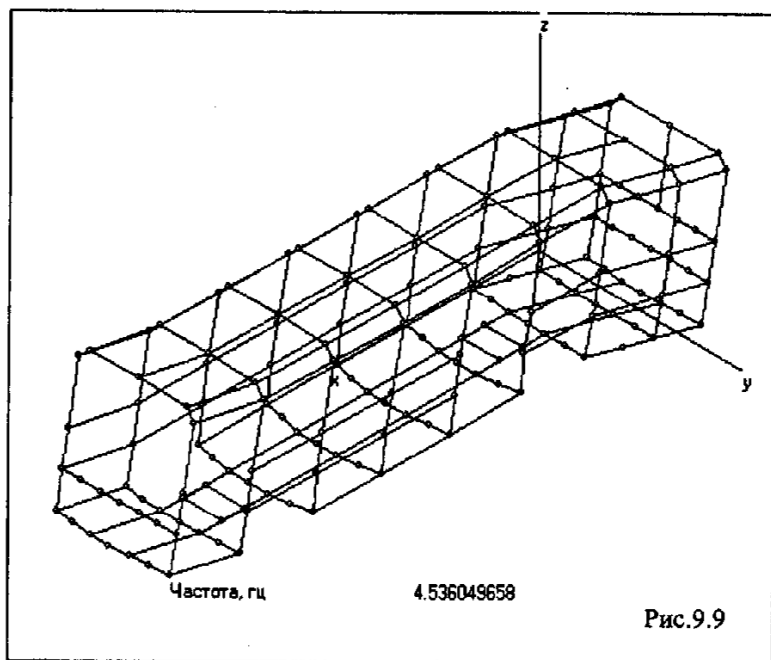


Рис.9.9

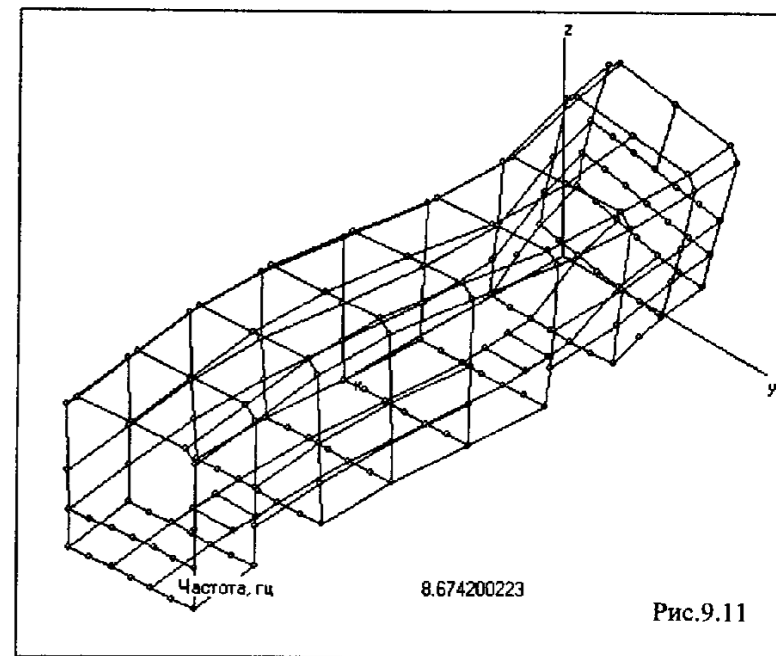


Рис.9.11

## П 1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

В данном разделе приложения представлены краткие сведения о свойствах векторов и матриц, необходимые для понимания материала, изложенного в книге.

### Понятие матрицы

Матрицей называется упорядоченное по строкам и столбцам множество чисел. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 20,5 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1.1 & 8 \end{bmatrix}$$

Размером матрицы, или ее порядком, называется число строк и столбцов в ней. Из приведенных выше примеров матрица  $A$  имеет порядок  $2 \times 3$ , а матрица  $B - 3 \times 3$ .

Частными случаями матриц является матрица-столбец и матрица-строка. Например:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad D = [1 \ 0 \ 7 \ 20]$$

Матрицей-столбцом или просто столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца или матрица порядка  $n \times 1$ . Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки, или матрица порядка  $1 \times n$ .

Примем следующую систему обозначений. Матрицу будем обозначать квадратными, столбец – фигурными, а строку – угловыми скобками.

Элементы матриц обозначаются буквами с двумя индексами. Например,  $a_{ij}$  есть элемент матрицы  $A$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

### Операции над матрицами

#### Транспонирование матриц

Транспонированием матриц называется операция перестановки строк и столбцов. Операция транспонирования матриц обозначается буквой  $T$ . Так, например, если  $[A]$  – исходная матрица, то  $[A]^T$  – ее транспонированная

матрица. Для матриц  $A$  и  $B$ , приведенных выше, их транспонированные матрицы имеют следующий вид:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 20,5 \\ 2 & 4 \\ 17 & 8 \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Порядок матриц при транспонировании в общем случае изменяется.

#### Сложение и вычитание матриц

К матрицам одного и того же порядка применимы операции сложения и вычитания. Результатом сложения (вычитания) двух матриц  $A$  и  $B$  порядка  $n \times m$  является новая матрица  $C$  того же порядка, каждый элемент которой  $c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}$ , где  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца. Пусть, например, матрица  $A$  определена выше, а матрица  $F$  определяется так:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Найдем сумму матриц  $A$  и  $F$ . Получим:

$$A+F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 20,5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+0 & 17+8 \\ 20,5+(-2) & 4+1 & 8+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 25 \\ 18,5 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

#### Умножение матриц

Результатом умножения матрицы  $A$  порядка  $n \times m$  на матрицу  $B$  порядка  $m \times k$  является новая матрица  $C$  порядка  $n \times k$ , каждый элемент которой  $c_{ij}$  находится как сумма произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$ , т.е.

$$c_{i,j} = \sum a_{il} b_{lj}, \quad \text{где } l = 1, 2, \dots, k.$$

Число столбцов матрицы  $A$  должно быть равно числу строк матрицы  $B$ .

Таким образом, произведение матриц не коммутативно. Например, если матрицы  $A$  и  $B$  определены как

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 20,5 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1.1 & 8 \end{bmatrix}$$

то матрицу  $A$  можно умножить на матрицу  $B$  справа, но нельзя умножить на ту же матрицу слева.

Если матрицы  $A$  и  $B$  квадратные, то их можно перемножать в любом порядке, но и в этом случае  $A \times B \neq B \times A$ .

Пусть, например,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 48 \end{bmatrix}$$

а

$$B \times A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}.$$

Результаты, как видим, разные.

### Обращение матриц

Матрицей, обратной к некоторой квадратной матрице  $A$  порядка  $n \times n$ , является новая матрица  $A^{-1}$  того же порядка, такая, что  $A \times A^{-1} = E$ , где  $E$  — единичная матрица. Единичной матрицей, в свою очередь, называется матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Нетрудно убедиться, что  $A \times E = A$ , также как и  $E \times A = A$ . Таким образом, единичная матрица играет в теории матриц такую же роль, как и единица в обычной алгебре.

Пусть, например, матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда обратная к ней} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad \text{Найдем произведе-$$

дение двух матриц:

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \times \frac{2}{3} + 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) & 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \times \frac{2}{3} \\ 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Симметричные матрицы

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $a_{ij} = a_{ji}$ , т.е. элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой. Например, приведенная ниже матрица  $A$ , является симметричной:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

### Блочные матрицы

Матрица, элементами которой, в свою очередь, являются матрицы, называется блочной. Пусть, например, матрица  $A$  задана следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

В блочном виде матрицу  $A$  можно записать так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad a_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad a_{2,1} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}, \quad a_{2,2} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

## П2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в развернутой форме имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (\text{п.1})$$



В матричном виде СЛАУ может быть представлена как:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (\text{п.2})$$

здесь  $[A] = [a_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  — матрица коэффициентов;  $\{X\}$  — вектор-столбец, элементами которого являются неизвестные;  $\{B\}$  — вектор-столбец, элементы которого составляют заданную правую часть системы уравнений.

Предполагается, что матрица не является вырожденной, т.е.

$$\Delta = \det[A] \neq 0 \quad (\text{п.3})$$

В этом случае решение (п.1) существует и единственно.

В настоящее время с помощью ЭВМ решаются системы с числом неизвестных порядка  $10^5$ , и это не предел. Возможность решения систем алгебраических уравнений столь высокого порядка достигнута за счет использования специально разработанных методов, учитывающих специфические свойства этих систем. В основе специальных методов лежат хорошо разработанные численные методы линейной алгебры, которые принято разделять на две большие группы: *прямые* методы и *итерационные* методы. Иногда в отдельную группу выделяют так называемые *градиентные* методы, которые теоретически относятся к прямым методам, но при численной реализации на ЭВМ за счет ошибок округления ведут себя как итерационные.

Прямые методы позволяют теоретически (в предположении, что вычисления проводятся без ошибок округления) получить точное решение задачи (п.1) за конечное число арифметических операций. При численном счете прямыми методами присуща ошибка округления, вследствие ограниченности разрядной сетки машины. Итерационные методы (или методы последовательных приближений), позволяют уточнять решение за счет многократного использования однотипных рекуррентных или итерационных соотношений. Если итерационный метод сходится, то в пределе при  $k$  стремящемся к бесконечности последовательность приближенных решений  $\{X^{(0)}\}, \{X^{(1)}\}, \dots, \{X^{(k-1)}\}, \{X^{(k)}\}$  сходится к точному. На практике при использовании итерационных методов ограничиваются вычислением конечного числа приближений в зависимости от допустимого уровня погрешности. Говорят, что итерационным методам присуща ошибка усечения. К ошибкам округления итерационные методы малочувствительны.

Применение численных методов, основанных на дискретизации задачи, в том числе и метода конечных элементов, приводит к системам уравнений с редкозаполненными матрицами. Матрицы имеют особую структуру расположения ненулевых элементов, так называемую *ленточную* структуру. К ленточной матрице при соответствующей нумерации неизвестных приводит любая расчетная модель, в которой существует локальное взаимодействие ее составных частей. Ширина ленты  $L$  определяется максимальной разностью между максимальным и минимальным глобальными номерами неизвестных, принадлежащих одному элементу. Для каждой конструкции можно выбрать такую нумерацию узлов, чтобы ширина ленты была минимальной.

Количество операций при использовании для решения таких систем прямых методов можно приближенно оценить как  $L^2 \times n = n^2$ . Затраты итерационных методов оцениваются как  $2 \times L \times n \times k_{\max}$ , где  $k_{\max}$  — количество итераций, требуемых для достижения сходимости. Отсюда следует формальное условие, позволяющее оценить границу, начиная с которой итерационные методы оказываются эффективнее прямых

$$k_{\max} \leq \frac{n}{2L} \quad (\text{п.4})$$

Одним из важных условий, диктующих применение итерационных методов, оказываются ограничения, связанные с длиной разрядной сетки ЭВМ и размером требуемой памяти. В то время как прямые методы требуют для размещения в памяти массивов порядка  $L \times n$ , итерационные методы позволяют ограничиться сохранением массивов порядка  $n$ .

### Метод исключения Гаусса

Метод исключения Гаусса является одним из наиболее часто используемых прямых методов. Типичная схема реализации метода разделяется на два этапа: прямой ход — исключение неизвестных и приведение матрицы к треугольному виду и обратный ход — решение системы с треугольной матрицей.

Воспользуемся понятием *ведущий элемент*, под которым будем понимать диагональный коэффициент  $a_{kk}$  на  $k$ -том шаге исключения.

Предполагаем, что диагональный коэффициент в первой строке  $a_{11} \neq 0$ . В противном случае всегда можно переставить уравнения в (п.1), так, чтобы в позиции ведущего элемента оказался ненулевой коэффициент. Умножая первое уравнение (п.1) на  $m_i^{(1)} = -a_{i1}/a_{11}$  и складывая результат с  $i$ -ым уравнением, исключаем из  $i$ -го уравнения неизвестную  $x_1$ . Прделаем эту операцию со всеми уравнениями, начиная со второго ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), придем к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots & \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{п.5})$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + m_i^{(1)} a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i + m_i^{(1)} b_1 \quad (i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n)$$

Предполагая, что ведущий элемент второй строки  $a_{22}^{(1)} \neq 0$  (если это не так, то необходимо должным образом переставить уравнения для  $i=2,3,\dots,n$ ), и используя коэффициенты  $m_i^{(2)} = -a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ , исключаем  $x_2$  из всех уравнений для  $i=3,4,\dots,n$ . Аналогичным образом из остающихся уравнений исключаются  $x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$ . Очевидно, выполнив  $n-1$  шагов подобного рода, приходим к системе уравнений с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \quad (п.6)$$

Выпишем формулы, по которым осуществляется прямой ход исключения Гаусса. На  $k$ -том шаге ( $k=1,2,\dots,n-1$ ), номер которого соответствует номеру ведущего элемента и номеру неизвестного, которое исключается из оставшихся  $n-k$  уравнений, происходит пересчет всех коэффициентов матрицы с номерами  $i=k+1, n$  и  $j=k, n$  и элементов вектора-столбца свободных членов  $i=\overline{k+1, n}$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \end{aligned} \quad (п.7)$$

Отметим, что коэффициенты  $a_{ik}^{(k)}$ ,  $i=\overline{k+1, n}$ , расположенные в столбце ниже ведущего элемента обращаются в нуль автоматически.

Структура формул (п.7) показывает, что в позициях ведущих элементов, на которые производится деление, желательно помещать коэффициенты, максимальные по абсолютной величине. Этого можно достичь посредством соответствующих перестановок строк и столбцов. Известны варианты метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцам, по строке и полного выбора главных элементов.

Следует отметить, что при решении линейных задач строительной механики, как правило, получаются симметричные положительно-определенные матрицы  $[A]$ , для которых выполняется условие диагонального преобладания

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (п.8)$$

Для таких матриц процедуру выбора главных элементов можно не использовать.

Обратная подстановка, позволяющая найти значения неизвестных, начинается с последнего уравнения (п.6), из которого определяется  $x_n$ , и заканчивается первым уравнением, из которого находится значение  $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}, \\ \dots & \\ x_j &= \frac{b_j^{(j-1)} - a_{jn}^{(j-1)} \cdot x_n - \dots - a_{j,j+1}^{(j-1)} x_{j+1}}{a_{jj}^{(n-2)}}, \quad j = n-2, n-3, \dots, 1 \end{aligned} \quad (п.9)$$

## Метод Холецкого

Метод Холецкого, называемый также методом квадратного корня, применим только к симметричным положительно определенным матрицам. При этом условии матрица может быть разложена в произведение нижней треугольной матрицы  $[L]$  с положительными диагональными элементами на матрицу, получаемую посредством ее же транспонирования.

$$[A] = [L][L]^T \quad (п.10)$$

Подстановка выражения (п.10) в исходное соотношение (п.2) дает уравнение

$$[L][L]^T \{X\} = \{B\}, \quad (п.11)$$

которое может быть записано в виде последовательности двух уравнений

$$\begin{aligned} [L]\{C\} &= \{B\} \\ [L]^T \{X\} &= \{C\} \end{aligned} \quad (п.12)$$

Искомое решение  $\{X\}$  определяется в два приема посредством решения уравнений (п.11) с благоприятными треугольными матрицами. Трудоемкость этой процедуры составляет менее 5% от суммарной трудоемкости, основной вклад в которую вносит нахождение матрицы  $[L]$ . Нижняя треугольная матрица  $[L] = [l_{ij}]$  определяется явно через элементы матрицы  $[A]$  с помощью следующих операций:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm} l_{im} \right), \quad i = \overline{i+1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i > j \quad (\text{п.13})$$

при  $i < j$   $l_{ij} = 0$

Как показывают численные исследования, метод Холецкого требует значительно меньше времени вычислений по сравнению с простым методом исключения Гаусса. Это объясняется тем, что каждый из коэффициентов матрицы  $[L]$ - $l_{ij}$  определяется один раз, в то время как коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  в методе исключения Гаусса пересчитываются многократно. По объему занимаемой памяти метод Холецкого преимуществ не имеет.

### Метод простых итераций

Рассмотрение итерационных методов целесообразно начать с метода простых итераций, или метода Якоби, который состоит в задании некоторым образом начального приближения к решению  $\{X^{(0)}\}$  и в многократном последовательном уточнении решения, согласно рекуррентной формуле

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \quad (\text{п.14})$$

Каждый последующий переход от  $k$  к  $k+1$  называется *итерацией*. Итерационный процесс продолжается до достижения условия окончания процесса или выполнения критерия сходимости. При построении критерия сходимости используются норма вектор невязки или норма вектора ошибки. Процесс завершается, когда выбранная норма станет меньше некоторого заданного малого числа  $\varepsilon$ . В первом случае полученное приближенное решение подставляется непосредственно в исходные уравнения

$$\|r\| = \|[A]\{X^{(k)}\} - \{B\}\| \leq \varepsilon \quad (\text{п.15})$$

Во втором случае по некоторой норме сравнивают между собой два последовательных приближения к решению

$$\|Z\| = \|\{X^{(k+1)}\} - \{X^{(k)}\}\| \leq \varepsilon. \quad (\text{п.16})$$

Отметим, что новые значения  $x_i^{(k+1)}$ , полученные по формуле (п.14), в методе Якоби не используются вплоть до следующей итерации.

### Метод Гаусса-Зейделя

Если новые значения использовать сразу по мере их получения, то мы приходим к рекуррентной формуле метода Гаусса-Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \quad (\text{п.17})$$

### Метод сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов (МСГ) был создан и впервые применен для решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно определенными симметричными матрицами. Как показывает практика, при численном счете на ЭВМ за счет ошибок округления число итераций, необходимое для получения решения, оказывается значительно меньше теоретического значения. Алгоритм решения системы с помощью МСГ имеет следующий вид:

До начала итерационного процесса приравняются нулю значения вспомогательных скалярных коэффициентов  $\alpha^{(0)}$  и  $\beta^{(0)}$ . Начальное значение вспомогательного вектора, определяющего направление спуска, также принимается нулевым:  $\{q^{(0)}\} = \{0\}$ . Задаваясь некоторым приближенным решением  $\{x^{(0)}\}$ , вычисляется невязка для нулевого номера итерации ( $k=0$ )

$$\{r^{(0)}\} = [A]\{x^{(0)}\} - \{B\} \quad (\text{п.18})$$

Вектор невязки может быть вычислен посредством подстановки приближенного решения в исходное соотношение (п.2)

1. Итерационный процесс ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) начинается с уточнения направления спуска

$$\{q^{(k)}\} = -\{r^{(k-1)}\} + \alpha^{(k-1)} \{q^{(k-1)}\} \quad (\text{п.19})$$

2. Вычисляется коэффициент  $\alpha^{(k)}$ , имеющий смысл расстояния (шага) вдоль этого направления до предполагаемого положения условного минимума квадратичного функционала

$$\alpha^{(k)} = \frac{\{r^{(k)}\}^T \{r^{(k)}\}}{\{q^{(k)}\}^T [A] \{q^{(k)}\}} \quad (\text{п.20})$$

3. Уточненное значение вектора неизвестных вычисляется по рекуррентной формуле:

$$\{x^{(k+1)}\} = \{x^{(k)}\} + \alpha^{(k)} \{q^{(k)}\} \quad (\text{п.21})$$

4. Вычисляется новое значение вектора невязки

$$\{r^{(k+1)}\} = \{r^{(k)}\} + \alpha^{(k)} [A] \{g^{(k)}\} \quad (\text{п.22})$$

5. Проверяется выполнение критерия сходимости

$$\|\{r^{(k+1)}\}\| \leq \varepsilon \quad (\text{п.23})$$

и, если он выполнен, итерационный процесс завершается. В качестве решения принимается приближенное решение  $\{x^{(k+1)}\}$ .

6. Если критерий не выполняется, вычисляется новый коэффициент отклонения направления спуска

$$\beta^{(k)} = \frac{\{r^{(k+1)}\}^T \{r^{(k+1)}\}}{\{r^{(k)}\}^T \{r^{(k)}\}}, \quad (\text{п.24})$$

номер итерации увеличивается на единицу и осуществляется возврат к пункту 1 алгоритма.

### ПЗ. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

При решении задач строительной механике возникает необходимость нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

Рассмотрим квадратную матрицу  $n$ -го порядка

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{п.25})$$

Характеристической матрицей  $[C]$  данной матрицы  $[A]$  называется матрица вида

$$[C] = [A] - \lambda[E] = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{п.26})$$

где  $\lambda$  — собственное значение,  $[E]$  — единичная матрица. Определитель матрицы  $[C]$  является многочленом  $n$ -ной степени относительно  $\lambda$ :

$$\det[C] = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n, \quad (\text{п.27})$$

называемый *характеристическим многочленом*. Корни этого многочлена являются собственными значениями матрицы  $[A]$ .

Вектор  $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ , соответствующий некоторому собственному значению  $\lambda$  и удовлетворяющий системе уравнений

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\}, \quad (\text{п.28})$$

называется *собственным вектором* матрицы  $[A]$ .

Задача нахождения всех собственных значений и собственных векторов, называется *полной проблемой собственных значений*. Часто в практических вычислениях бывает достаточно ограничиться нахождением только части собственных значений и собственных векторов. В этом случае решается *частичная проблема собственных значений*.

Отметим некоторые важные свойства собственных значений для частных типов исходной матрицы.

1. Все собственные значения симметричной матрицы действительны.
2. Если собственные значения матрицы действительны и различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны и образуют базис рассматриваемого пространства. То есть, любой вектор в данном пространстве можно выразить через совокупность линейно независимых собственных векторов.
3. Матрицы называются подобными, если они связаны соотношением

$$[\tilde{A}] = [P]^{-1} [A] [P] \quad (\text{п.29})$$

(здесь  $[P]$  — некоторая матрица). Собственные значения подобных матриц совпадают.

Преобразование подобия (п.29) можно использовать для упрощения исходной матрицы. Очевидно, что ненулевые элементы диагональной матрицы являются ее собственными значениями.

4. Удобным способом обращения матрицы (п.1) является ее приведение к треугольному виду

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{п.30})$$

В этом случае

$$\det[C] = (\tilde{a}_{11} - \lambda) \cdot (\tilde{a}_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (\tilde{a}_{nn} - \lambda) \quad (\text{п.31})$$

Собственные значения матрицы  $[A]$  совпадают с собственными значениями матрицы  $[\tilde{A}]$  и равны ее диагональным элементам:  $\lambda_1 = \tilde{a}_{11}, \lambda_2 = \tilde{a}_{22}, \dots, \lambda_n = \tilde{a}_{nn}$

## Метод вращений

Одним из эффективных методов решения полной проблемы собственных значений является метод вращений или метод Якоби. Он основан на специально подбираемом вращении системы координат в  $n$ -мерном пространстве, которое приводит к диагонализации исходной матрицы. Решение разбивается на последовательность элементарных (плоских) вращений - шагов.

$$\begin{aligned} [A^{(1)}] &= [P^{(1)}]^T [A] [P^{(1)}] \\ [A^{(2)}] &= [P^{(2)}]^T [A^{(1)}] [P^{(2)}] \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{п.32})$$

$$[A^{(k)}] = [P^{(k)}]^T [A^{(k-1)}] [P^{(k)}]$$

Для текущего шага с номером  $k$  выбираются две оси -  $i$ -я и  $j$ -я и осуществляется поворот в плоскости этих осей; остальные оси координат на данном шаге неподвижны. Матрица вращения на  $k$ -том шаге имеет вид:

$$[P^{(k)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ii} & \dots & 0 & 0 & p_{ij} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ji} & \dots & 0 & 0 & p_{jj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{п.33})$$

где

$$p_{ii} = \cos \theta, \quad p_{ij} = -\sin \theta, \quad p_{ji} = \sin \theta, \quad p_{jj} = \cos \theta \quad (\text{п.34})$$

Поскольку матрица вращения ортогональная, выполняется равенство

$$[P_{ij}]^{-1} = [P_{ij}]^T. \quad (\text{п.35})$$

Угол поворота  $\theta$  выбирается таким, чтобы в преобразованной матрице  $[A^{(k)}]$  элемент, расположенный в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце оказался равным нулю. Для симметрической матрицы в нуль обращаются два элемента  $a_{ij}^{(k)}$  и  $a_{ji}^{(k)}$ . Это достигается, если значение  $\theta$  выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2a_{ij}^{(k-1)}}{a_{ii}^{(k-1)} - a_{jj}^{(k-1)}} \quad \text{для } a_{ii}^{(k-1)} \neq a_{jj}^{(k-1)} \\ \text{и } \theta &= \frac{\pi}{4} \quad \text{для } a_{ii}^{(k-1)} = a_{jj}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (\text{п.36})$$

Важно отметить, что при численных вычислениях для нахождения очередного уточнения используются только две строки и два столбца матрицы  $[A^{(k-1)}]$ . Для симметричной матрицы симметрия не нарушается и можно ограничиться преобразованием только верхней (или нижней) треугольной части матрицы, включая диагональные элементы.

Хотя преобразование поворота и обращает в нуль внедиагональные элементы, но они за счет погрешности вычислений снова могут стать отличными от нуля при следующих поворотах. Учитывая этот факт, рационально выбирать такую последовательность поворотов, при которой на каждом шаге в нуль обращается наибольший по абсолютной величине внедиагональный элемент матрицы  $[A^{(k)}]$ .

Однако поиск наибольшего по величине внедиагонального элемента оказывается достаточно трудоемкой операцией. Поэтому используется так называемая *циклическая процедура Якоби*, при которой последовательно строка за строкой обнуляются наибольшие по абсолютной величине наддиагональные элементы в текущей строке матрицы. Однократная обработка всех строк называется *зачисткой* или *выметанием*<sup>1</sup>.

Возможно улучшение *процедуры выметания*, при которой обнулению подвергаются только элементы, которые превышают по абсолютной величине заранее заданное малое число  $\epsilon$ , что позволяет исключить неэффективные промежуточные вращения.

Количество процедур выметания зависит от требуемой точности определения собственных чисел матрицы. При выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов внедиагональных элементов, которая используется для контроля сходимости итерационного процесса. В пределе, при  $k \rightarrow \infty$ , матрица превращается в диагональную матрицу. При этом элементы матрицы, расположенные на диагонали, стремятся к ее собственным значениям.

## Метод одновременных итераций для симметрических матриц

В практических приложениях часто возникает задача вычисления наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора матрицы. В этих случаях удобно использовать метод итерации применительно к решению системы уравнений

<sup>1</sup> В англоязычной литературе the sweeping

$$\lambda\{X\} = [A]\{X\}. \quad (\text{п.37})$$

Пусть  $\{X^{(0)}\}$  найденное некоторым образом начальное приближение собственного вектора  $\{X\}$ . Организуем процесс простой итерации в форме:

$$\lambda^{(k+1)}\{X^{(k+1)}\} = [A]\{X^{(k)}\} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{п.38})$$

Подставляя в правую часть (п.38) вектор  $\{X^{(0)}\}$ , получаем после его умножения слева на матрицу  $[A]$  некоторый вектор  $\{Y^{(1)}\}$ :

$$\{Y^{(1)}\} = \lambda^{(1)}\{X^{(1)}\} \quad (\text{п.39})$$

Вектор  $\{Y^{(1)}\}$  представлен в виде произведения уточненного значения собственного числа  $\lambda^{(1)}$  на соответствующий этому числу нормированный собственный вектор  $\{X^{(1)}\}$ . Напомним, что вектор называется нормированным, если

$$\{X\}^T \{X\} = 1. \quad (\text{п.40})$$

Итерационный процесс продолжается до выполнения условия сходимости

$$\left| \frac{\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}}{\lambda^{(k)}} \right| \leq \epsilon, \quad (\text{п.41})$$

где  $\epsilon$  - заданная точность.

Скорость сходимости итерационного процесса (п.38) зависит от удачного выбора начального приближения и при произвольном выборе начального вектора не гарантируется. Для улучшения сходимости используется прием одновременного итерирования двух векторов, соответствующих исходной и транспонированной матрицам, сохраняя в процессе вычисления свойство ортогональности векторов. За подробностями следует обратиться к специальной литературе [36, 38].

### Метод итераций в подпространстве

Метод итераций в подпространстве, называемый также методом Релля-Ритца, применяется для нахождения нескольких, как правило, минимальных собственных чисел и соответствующих им собственных векторов применительно к решению общей проблемы собственных значений

$$[A]\{X\} = \lambda[M]\{X\} \quad (\text{п.42})$$

Сущность метода заключается в следующем.

1. Решение начинается с задания начальных приближений собственных векторов  $\{X_1^{(0)}\}, \{X_2^{(0)}\}, \dots, \{X_m^{(0)}\}$ ,  $m < n$ , где  $m$  - число векторов, подлежащих определению. Номеру итерации  $k$  присваивается значение 0. С помощью начальных приближений векторов строится вспомогательная матрица

$$[X^{(0)}] = [\{X_1^{(0)}\}, \{X_2^{(0)}\}, \dots, \{X_m^{(0)}\}] \quad (\text{п.43})$$

2. Уточненное значение матрицы  $[\tilde{X}^{(k+1)}]$  определяется из соотношения

$$[A][\tilde{X}^{(k+1)}] = [M][X^{(k)}] \quad (\text{п.44})$$

3. Вычисляются вспомогательные матрицы (21)

$$\begin{aligned} [A^{(k+1)}] &= [\tilde{X}^{(k+1)}]^T [A][\tilde{X}^{(k+1)}] \\ [B^{(k+1)}] &= [\tilde{X}^{(k+1)}]^T [M][\tilde{X}^{(k+1)}] \end{aligned} \quad (\text{п.45})$$

4. Найденные матрицы позволяют определить собственные числа и собственные векторы для усеченной системы

$$[A^{(k+1)}][Q^{(k+1)}] = [B^{(k+1)}][Q^{(k+1)}][\Lambda^{(k+1)}]. \quad (\text{п.46})$$

Здесь  $[\Lambda^{(k+1)}] = \text{diag}(\lambda_i^{(k+1)})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $[Q^{(k+1)}]$  - матрица собственных векторов усеченной системы.

5. Вычисляется матрица уточненных собственных векторов

$$[X^{(k+1)}] = [\tilde{X}^{(k+1)}][Q^{(k+1)}] \quad (\text{п.47})$$

6. Проверяется условие сходимости итерационного процесса

$$\left| \frac{\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k+1)}} \right| \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, m}, \quad (\text{п.48})$$

где  $\epsilon$  - заданная точность. Если условие (п.48) выполнено, вычисления заканчиваются, если нет, возвращаемся к пункту 2 вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – М., Изд-во АСВ, 2000.
2. Агапов В.П. Итерационный метод расчета упругих систем на устойчивость // Ученые записки ЦАГИ. – 1983. – Т. XIV, № 6. – С. 66-75.
3. Агапов В.П. Основные соотношения МКЭ в статических и динамических расчетах геометрически нелинейных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 5. – С. 43-47.
4. Агапов В.П. Усовершенствованный плоский многослойный треугольный конечный элемент комбинированного типа // ИВУЗ. Строительство и архитектура. – Новосибирск: НИСИ, 1985. – № 10. – С. 31-34.
5. Агапов В.П. Четырехугольный многослойный конечный элемент для расчета пластинок и оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 74-76.
6. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978.
7. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. Школа, 1980.
9. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. – М.: Физматлит, 1992.
10. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник – М.: Машиностроение, 1979.
11. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов вузов, М.: Машиностроение, 1973.
12. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949.
13. Галлагер, Пэдлог. Исследование устойчивости конструкций на основе анализа дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1963. – Т. 1, № 6. – С. 194-196.
14. Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В. Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. – М.: Изд-во ВЗПИ, 1991.
15. Гофман Ш.М. Итерационные процессы в строительной механике // Вопросы математики и механики. – Ташкент: ТашНИИЖТ, 1959. – Вып. IV. – С. 17-59.
16. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978.
17. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
18. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики: Справ. пособие. – Минск: Высшая школа, 1990.
19. Киселев В.А. Строительная механика – Специальный курс. – М.: Изд-во литературы по строительству, 1964.
20. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949.
21. Лейдерман Ю.Р. Устойчивость и колебания рамных конструкций. – Ташкент, АН УзССР, 1955.
22. Ливсли Р. Матричные методы строительной механики: Пер. с англ. / Под ред А.М. Проценко. – М.: Стройиздат, 1980.
23. Машиностроение. Энциклопедия. Ред. Совет: К.В.Фролов (пред.) и др. – М.: Машиностроение. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. – Т.1-3. в 2-х кн. Кн.1/1994. – 534с. Кн. 2/1995. – 624с.
24. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975.
25. Малинин Н.Н. Кто есть кто в сопротивлении материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
26. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.: Гостехиздат, 1948.
27. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1951.
28. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. для вузов. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1987. – Ч. I. Статика. –1987; Динамика. –1987.
29. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989.
30. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: ГТЖИ, 1958.
31. Строительная механика летательных аппаратов/ И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др. – М.: Машиностроение, 1986.
32. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. – М.: Гостехиздат, 1954.
33. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М., Наука, 1966.
34. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970.
35. Уилкинсон, Райнт. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976.
36. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники: Учебник для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1988.
37. Фаддеев А.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: ГИФМЛ, 1960.
38. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979.
39. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1987.