

Основы механики разрушения, Л. М. Качанов,  
Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974, стр. 312.

В последние два десятилетия происходит бурный рост исследований по проблеме разрушения, что объясняется ее громадным практическим значением в связи с появлением новой техники и новых конструктивных материалов.

На базе исследований, выполненных в последние годы, в книге изложены основы механики разрушения и ее применения к расчетам прочности. Рассмотрены критерии разрушения изотропных и анизотропных материалов, различные типы деформационных разрушений конструкций, накопление повреждений при хрупком разрушении, различные аспекты механики трещин (равновесные и неравновесные трещины в упругих телах, упруго-пластические задачи о трещинах, медленный рост трещин, динамика трещин).

Книга будет полезна широкому кругу читателей: студентам, аспирантам, инженерам, научным работникам и преподавателям, сталкивающимся с вопросами прочности и разрушения материалов и конструкций.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1.1. Механика разрушения . . . . .	7
§ 1.2. Статистический аспект проблемы разрушения . . . . .	10
§ 1.3. Краткие сведения о напряжении и деформации . . . . .	14
<b>Глава 2. Критерии разрушения материалов . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 2.1. О прочности материалов . . . . .	21
§ 2.2. Критерии разрушения изотропных материалов . . . . .	27
§ 2.3. Критерии разрушения анизотропных материалов . . . . .	37
§ 2.4. О критериях длительной и усталостной прочности . . . . .	47
<b>Глава 3. Идеально пластическое разрушение, предельная нагрузка . . . . .</b>	<b>53</b>
§ 3.1. Идеально пластическое тело . . . . .	53
§ 3.2. Теоремы о пластическом разрушении . . . . .	56
§ 3.3. Примеры . . . . .	63
<b>Глава 4. Приспособляемость упруго-пластических тел при переменных нагрузках . . . . .</b>	<b>67</b>
§ 4.1. О приспособляемости упруго-пластических тел . . . . .	67
§ 4.2. Теоремы об условиях приспособляемости . . . . .	72
<b>Глава 5. Неустойчивость деформирования упрочняющихся тел . . . . .</b>	<b>78</b>
§ 5.1. О максимальных нагрузках для упрочняющихся тел и неустойчивости деформирования . . . . .	78
§ 5.2. Уравнения упрочняющейся среды . . . . .	83
§ 5.3. Тонкостенная сферическая оболочка под действием внутреннего давления . . . . .	86
§ 5.4. Длинная тонкостенная труба под действием внутреннего давления и осевой силы . . . . .	88
§ 5.5. Максимальное давление для тонкостенной цилиндрической оболочки с жесткими днищами . . . . .	91
<b>Глава 6. Время вязкого разрушения в условиях ползучести . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 6.1. Время разрушения растягиваемых стержней . . . . .	96
§ 6.2. Сложное напряженное состояние. Уравнения и простейшие задачи . . . . .	110
§ 6.3. Время разрушения труб под действием внутреннего давления . . . . .	120
§ 6.4. Время разрушения вращающегося диска . . . . .	127
§ 6.5. Время разрушения длинной мембраны под действием равномерного давления . . . . .	130
§ 6.6. Время разрушения безмоментных осесимметричных оболочек . . . . .	133

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974 г.

К 20304 — 129  
053 (02)-74 155-74

Глава 7. Накопление повреждений при квазихрупком разрушении . . .	138
§ 7.1. О накоплении повреждений . . . . .	138
§ 7.2. Кинетическое уравнение поврежденности в условиях ползучести . . .	140
§ 7.3. Хрупко-вязкие разрушения . . . . .	154
§ 7.4. Хрупкое разрушение при изгибе . . . . .	163
§ 7.5. Время разрушения скручиваемого вала . . . . .	166
§ 7.6. Хрупкое разрушение растягиваемого диска с отверстием . . . . .	168
§ 7.7. Влияние перераспределения напряжений на время хрупкого разрушения . . . . .	173
§ 7.8. Разрушение неравномерно нагретых тел. Задача о плоской стенке . . . . .	175
§ 7.9. Разрушение трубы под действием внутреннего давления . . . . .	179
§ 7.10. Хрупкие разрушения при циклическом нагружении . . . . .	186
§ 7.11. Хрупкие разрушения при сложном нагружении . . . . .	193
§ 7.12. Влияние анизотропии . . . . .	198
§ 7.13. Влияние среды на время хрупкого разрушения . . . . .	200
§ 7.14. Накопление повреждений при усталостных разрушениях . . . . .	206
Глава 8. Механика трещин . . . . .	209
§ 8.1. Хрупкие разрушения и механика трещин . . . . .	209
§ 8.2. Простейшие задачи о напряженном состоянии упругого тела с щелями . . . . .	215
§ 8.3. Энергетическое уравнение для тела с распространяющейся трещиной . . . . .	228
§ 8.4. Теория Гриффитса и критерий Ирвина . . . . .	237
§ 8.5. Задачи о трещинах в упругом теле . . . . .	244
§ 8.6. Трещины с немалой концевой зоной — пластической и на пределе прочности . . . . .	252
§ 8.7. Упруго-пластические задачи о трещинах . . . . .	256
§ 8.8. О практическом применении механики трещин . . . . .	266
§ 8.9. Вариационные уравнения в теории трещин . . . . .	273
§ 8.10. Медленный рост трещин . . . . .	276
§ 8.11. Динамика трещин . . . . .	287
Литература . . . . .	297
Именной указатель . . . . .	306
Предметный указатель . . . . .	309

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на основе лекций по механике разрушения, читанных автором для студентов, специализирующихся по кафедре теории упругости Ленинградского университета. По существу, книга является введением в механику разрушения. Решение сложных вопросов прочности машин и сооружений, разнообразных задач технологии, горной механики, геофизики невозможно без знания закономерностей процесса разрушения.

В последние два десятилетия происходит бурный рост исследований по проблеме разрушения. В различных журналах — физических, механических, технических — публикуется огромное число работ по прочности. Интерес к проблеме разрушения стимулируется ее громадным практическим значением. Имеются попытки систематизации научных результатов в обзорах и сборниках. Отметим здесь семитомное издание «Fracture», недавно осуществленное в США Либовидем.

Разрушение — комплексная проблема, лежащая на стыке физики твердого тела, механики сплошных сред и материаловедения. Для технических и геофизических приложений, расчетов прочности машин и сооружений важное значение имеют концепции разрушения, формулируемые в терминах механики сплошных сред. В этом — причина быстрого развития механики разрушения.

В механике разрушения рассматриваются различные модели деформационных (вязких) разрушений и малодеформационных (хрупких) разрушений, а также теория трещин. Механика разрушения объясняет многие эффекты, позволяет правильно ставить и интерпретировать инженерные эксперименты, прогнозировать разрушение тел сложной формы,

Контуры механики разрушения, как раздела механики сплошных сред, только намечаются. Механика разрушения связана с большим кругом теоретических и экспериментальных исследований. В этой книге рассматриваются различные механические модели вязкого и хрупкого разрушений и их приложения к расчетам прочности элементов конструкций.

В книге не затрагиваются сколько-нибудь заметно физические аспекты прочности, экспериментальные методы, а также статистические оценки прочности и долговечности конструкций; изложение этих вопросов можно найти в других работах. В книге лишь намечены некоторые механические подходы к проблеме усталостных разрушений, для которой характерен громадный объем разрозненных опытных данных.

Автор стремился к достаточно простому изложению, доступному широкому кругу студентов, инженеров и научных работников, сталкивающихся с вопросами прочности. Отдельные главы (например, теория трещин, накопление повреждений и др.) можно изучать независимо от предыдущих глав.

Автор выражает благодарность И. А. Биргеру, А. А. Вакуленко, А. М. Линькову и Н. Н. Малинину, сделавшим много ценных замечаний по рукописи и корректуре.

## ГЛАВА I

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1.1. Механика разрушения

**1. Напряжение, деформация и прочность.** В последние десятилетия решено много конкретных задач классической теории упругости, поставлены и существенно продвинуты нелинейная теория упругости, теория пластичности, теория ползучести. На основе этих теорий, а также различных экспериментальных методов, можно найти поля напряжений и смещений в телах сложной формы при заданных внешних воздействиях. Необходимо, далее, ответить на вопрос — будет ли тело прочным в рассматриваемых условиях?

Хорошо известно, что здесь возникают большие трудности. Имеется разительное несоответствие между, в общем, точными методами определения полей напряжений и смещений и последующими, часто весьма грубыми, оценками прочности.

Легко указать причины такого положения. Проблема прочности очень сложна. Разрушение тела зависит от многих факторов, не всегда изученных хотя бы качественно и не всегда даже известных. Большое значение имеет структура материала, которая может быть сложной и нестабильной. Существенно влияние внешних условий — характера нагрузок, теплового режима, агрессивности среды, поверхностных эффектов и т. д. Реальные материалы содержат многочисленные повреждения различных размеров — начиная от субмикроскопических и микроскопических дефектов и кончая крупными порами и магистральными трещинами. Лишь сравнительно недавно стали успешно развиваться основы физических теорий течения и разрушения твердых тел, и сейчас не всегда достижимо даже качественное объяснение ряда особенностей процесса разрушения. Поэтому использование физических теорий для количественной оценки прочности технических материалов представляется малоперспективным.

Естественно, что громадное практическое значение проблемы прочности стимулировало также интенсивные исследования инженерного направления. Объем этих работ резко возрос в связи

с развитием новой техники и появлением новых материалов. В основном это экспериментальные работы по изучению механических свойств материалов («прочность материалов») и прочности элементов конструкций («конструктивная прочность»).

**2. Прочность материалов.** Современные технические материалы имеют, как правило, сложное и неоднородное строение. Так, стали представляют собой многокомпонентные сплавы, поликристаллические агрегаты с межкристаллическими прослойками и различными включениями. Структура сплавов, определяемая технологией и термической обработкой, не всегда стабильна. Еще более сложны современные композитные материалы, армированные волокнами, «усами», или жесткими включениями. Естественно, что прочность материалов, весьма неоднородных в малом, неизбежно носит статистический характер, будучи связана с разнообразными случайными факторами.

Дефекты решетки, трещины и поры различного происхождения и различных размеров, локальные особенности структуры и армирования настолько осложняют картину, что определение количественных характеристик прочности конструкционных материалов на атомном уровне представляется нереальным. Несравненно проще и реалистичней можно подойти к установлению прочностных характеристик материалов, прочностных прогнозов на основе понятий механики сплошных сред при учете особенностей структуры материалов и некоторых общих физических аспектов. Подобные схемы пригодны, как правило, лишь в ограниченных условиях (в сравнительно узком интервале температуры, при определенных внешних воздействиях и т. д.). Следует, впрочем, иметь в виду, что довольно узкие условия эксплуатации типичны для большинства технических проблем. Отмеченные особенности делают понятным громадный объем исследований механических свойств, осуществляемых методами сопротивления материалов.

Материалы обычно разделяются на вязкие (или пластичные) и хрупкие. Вязкие разрушения происходят при больших, а хрупкие — при сравнительно малых деформациях. Такое деление, разумеется, условно и имеет смысл лишь в определенных границах.

Существенную роль играет время испытаний. Прежние представления о разрушении как мгновенном акте оказались наименее ясными. Теперь ясно, что разрушение является процессом, развертывающимся во времени, и может произойти при разных уровнях напряжения. Так, в условиях ползучести следует говорить о времени разрушения; вместо предела прочности вводится предел длительной прочности — напряжение, приводящее к разрушению через определенный срок. В известной мере условным является и представление о пределе усталости. Заметим, наконец,

что данные по прочности материалов обнаруживают некоторую зависимость от формы и размеров образцов, т. е. мы располагаем, строго говоря, данными по прочности образцов, а не материалов. Для уменьшения этого расхождения и получения устойчивых сравнительных характеристик используются специальные стандартные образцы.

**3. Конструктивная прочность.** Под конструктивной прочностью инженеры понимают прочность элементов конструкций в заданных условиях нагружения, т. е. прочность тел определенной формы (например, балок, труб, дисков и т. д.). При этом поле напряжений, как правило, неравномерное. В частности, важную роль играет концентрация напряжений, вызываемая малыми надрезами (или отверстиями) или резкими изменениями очертаний тела. Концентрация напряжений оказывает большое влияние на прочность тела. Возникает необходимость в оценке прочности данного тела с учетом как механических свойств материала и особенностей напряженно-деформированного состояния, так и внешних условий (температура, среда, облучение и т. д.). Решение вопроса может потребовать анализа накопления повреждений и развития трещин, а также использования статистических методов.

В дальнейшем вместо термина конструктивная прочность будем применять термин прочность тела (соответственно — разрушение тела, в противовес разрушению материала). В литературе можно встретить иногда другие термины (например, глобальная прочность, прочность элементов конструкций и т. п.).

**4. Механика разрушения.** Целью механики разрушения является выяснение условий разрушения тел различной формы, работающих под действием заданных нагрузок в определенных внешних условиях. Подобная постановка, включающая анализ напряженно-деформированного состояния тела при заданных граничных и начальных условиях с учетом развивающегося разрушения той или иной природы, примыкает к обычным задачам механики сплошных сред. Естественно попытаться сформулировать условия разрушения также в терминах механики сплошной среды.

Механика разрушения содержит, таким образом, два направления:

1. Построение континуальных моделей разрушения на основе экспериментальных данных и общих теоретических соображений.
2. Решение с помощью этих моделей соответствующих задач.

В механике разрушения используются, в общем, обычные приемы построения основных уравнений, аналогичные методам, применяемым в других разделах механики сплошных сред — гидромеханике, теории пластичности, ползучести и т. д.

Проблема прочности очень сложна, и мало надежды на построение «единой» теории прочности. Однако возможно развить частные модели разрушения, справедливые в тех или иных условиях. Это приводит к типичной для механики разрушения блочности ее строения.

Уточним теперь смысл, придаваемый в дальнейшем понятию разрушения тела. Под разрушением тела условимся понимать истощение несущей способности тела, происшедшее или вследствие наступления беспрепятственного пластического течения (неограниченного изменения формы) или вследствие накопления повреждений и развития трещин; возможны, конечно, и смешанные картины разрушения.

Подобно различию вязких и хрупких разрушений *материалов* естественно рассматривать вязкие и хрупкие разрушения *тел* данной формы.

Вязкое разрушение связано с теми или иными моделями течения деформируемой среды (идеальная пластичность, пластичность с упрочнением, ползучесть и т. д.).

При хрупком разрушении рассматриваются механизмы накопления рассеянных повреждений и распространение изолированных трещин.

Механика разрушения использует упрощенные, идеализированные модели; не следует ожидать от нее ответов на все вопросы. Проблема разрушения — комплексная проблема, имеющая самые разнообразные стороны — физическую, химическую, механическую, технологическую и т. д. Механическая сторона этой проблемы играет существенную роль. Механика разрушений часто дает весьма ценную информацию, объясняет многие эффекты, позволяет правильно ставить и интерпретировать инженерные эксперименты, прогнозировать разрушение тел сложной формы, работающих в различных условиях. Именно это объясняет большой интерес к механике разрушения и ее интенсивное развитие в последние годы.

## § 1.2. Статистический аспект проблемы разрушения

1. **Статистическая природа разрушения.** Технические материалы, на первый взгляд кажущиеся однородными, всегда содержат большое число дефектов различного происхождения и самых различных размеров. На субмикроскопическом уровне это вакансии, включения в почти правильной структуре матрицы, дислокации, поры. На микроскопическом уровне наблюдается разброс в ориентации, размерах и свойствах частиц, образующих материал. Наконец, на макроскопическом уровне различны уже свойства образцов ввиду неоднородности большого мас-

штаба. Распределение всех этих дефектов по объему тела является, как правило, случайным.

Здесь уместно упомянуть о концепции разрушения как процесса, развивающегося в результате тепловых флуктуаций (см. обзор В. Р. Регеля, А. И. Слуцкера и Э. Е. Томашевского [1] и книгу Т. Екобори [1]). Напряженное состояние, изменяя межатомные расстояния, способствует направленному преодолению потенциальных барьеров и возникновению направленных разрывов. Поскольку время ожидания тепловой флуктуации — случайная величина, статистическая природа разрушения уже на ранних его этапах очевидна. На более поздних этапах разрушения существенно влияние расширившихся и вновь образовавшихся трещин, пор, а также различных неоднородностей структуры материала; все эти факторы имеют случайный характер.

Разброс экспериментальных данных при испытаниях «одинаковых» образцов подтверждает статистическую природу разрушения. О том же свидетельствует так называемый масштабный эффект (большие образцы имеют меньшую прочность, чем малые образцы той же формы; это можно объяснить большей вероятностью появления опасного дефекта в большем объеме материала).

Упомянутый разброс экспериментальных данных зависит, конечно, от характера разрушения. Для вязких (деформационных) разрушений разброс обычно меньше, чем для хрупких, так как источником хрупкого разрушения может быть весьма локализованный дефект (трещина, опасный концентратор напряжения и т. д.).

На рис. 1.2.1 приведены опытные данные Н. С. Стрелецкого по распределению предела текучести  $\sigma_T$  для низкоуглеродистой стали. Подавляющая часть образцов имеет пределы текучести, группирующиеся около значения  $26 \text{ кг/мм}^2$ . Но для отдельных образцов предел текучести снижался до  $20 \text{ кг/мм}^2$  и поднимался до  $34 \text{ кг/мм}^2$ .

Данные по длительной прочности (времени до разрушения в условиях ползучести) и усталости характеризуются значительно большим разбросом.

Так, время до разрушения для отдельных образцов даже при тщательном их изготовлении из одной достаточно однородной стальной заготовки может в два-три раза превышать среднее значение. Если же образцы сделаны из стали одной марки, но

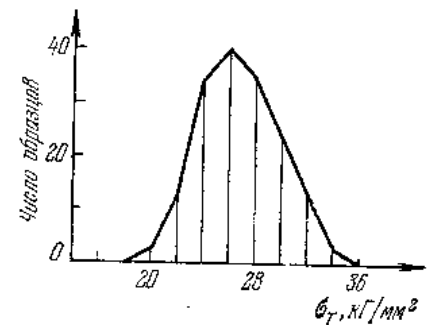


Рис. 1.2.1.

различных плавок, разброс существенно больше. На рис. 1.2.2 приведены на логарифмической сетке опытные точки Глена [1] по длительной прочности низколегированной стали (0,1% С; 0,5% Mn) при температуре 455°C; образцы изготовлены из 15

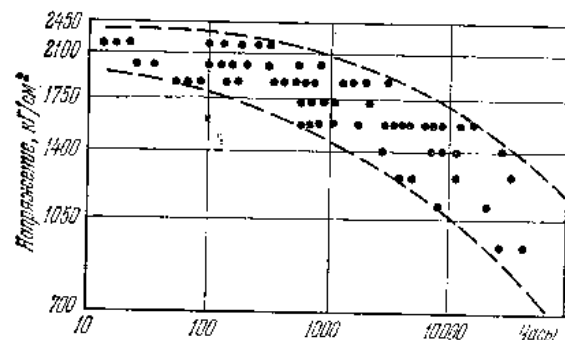


Рис. 1.2.2.

плавов указанной марки стали. Полоса разброса ограничена пунктиром. Разброс по напряжениям составляет  $\pm 10\%$  для малых времен разрушения, и  $\pm 30\%$  для времени 100 000 часов. Разброс же по времени для одного и того же напряжения весьма велик. Интересно отметить, что для некоторых сплавов, обладающих в среднем высокой длительной прочностью, дисперсия столь значительна, что их невозможно использовать в ответственных конструкциях.

При усталостных испытаниях также имеет место сильное рассеяние долговечности, в связи с чем необходима реализация большой программы испытаний. С целью получения надежной информации при наименьших затратах серия опытов обычно планируется и обрабатывается с помощью статистических методов (см. Вейбулл [1]).

Таким образом, анализ экспериментальных данных показывает, что ширина полосы разброса иногда превышает среднее значение наблюдаемой величины. Разумеется, при этом вряд ли можно оперировать средними значениями. Необходимо сам разброс рассматривать как существенную особенность процесса разрушения.

**2. Статистические теории разрушения.** Наиболее естественный, в принципе, путь описания разброса заключается в построении физически адекватной вероятностной модели (или — моделей) разрушения и использовании методов статистической физики. Этот путь, в применении к рассматриваемой проблеме, связан с большими трудностями, вследствие сложности и разномасштабной неоднородности твердых тел (по сравнению со структурой, например, газов). Работы этого направления важны для

понимания тонких деталей процесса разрушения и качественного объяснения наблюдаемых явлений. Возможности же получения таким путем количественных характеристик прочности современных технических материалов в общем весьма ограничены.

С прикладной точки зрения более эффективны статистические методы, опирающиеся на прямые экспериментальные данные о разбросе и простейшие формальные вероятностные модели (например, модель тела, содержащего случайные дефекты). Использование теории вероятности позволяет при этом установить закономерности влияния размеров тела, характера нагружения (например, цикличности нагрузок) и других факторов. Работы этого направления ведут начало от исследований Вейбулла (1939 г.), Н. Н. Афанасьева (1940 г.), Т. А. Конторовой и Я. И. Френкеля (1941 г.). В книгах В. В. Болотина [1, 2], Вейбулла [1], С. Д. Волкова [1], в обзоре Фрейденгала [1] читатель найдет подробный анализ относящихся сюда вопросов и надлежащую библиографию.

**3. Случайные внешние воздействия.** При оценке прочности тела необходимо учитывать не только разброс механических свойств материала, но и случайные отклонения в нагрузках (например, случайные перегрузки, случайные колебания температуры и т. д.). Некоторые типы нагружения неизбежно случайны. Так, сейсмическое воздействие является случайным процессом. Конструкции, испытывающие аэродинамическую нагрузку, находясь под воздействием турбулентного потока, обладающего ярко выраженной статистической природой.

Ползучесть тел в условиях высокой температуры и значительной длительности протекает при случайных изменениях теплового поля. В связи с этим вероятностный анализ имеет значение и при вязких разрушениях.

Иногда оценка прочности тела требует учета случайных отклонений в его конфигурации (например, случайной неровности, шероховатости поверхности тела), случайных колебаний агрессивности среды и других факторов.

**4. Оценка надежности конструкции.** По существу, статистический характер разрушения учитывается в инженерной практике назначением того или иного запаса прочности, грубо гарантирующего безопасность при ожидаемом уровне отклонений в свойствах материала и условиях работы. Для однотипных конструкций этот запас время от времени корректируется по мере накопления лабораторных данных и сведений об авариях. Однако правильная оценка опасности разрушения, особенно необходимая для оптимального проектирования новых конструкций, требует объективного анализа надежности последних в зависимости от особенностей разброса свойств материала, случайных

отклонений нагрузок, температуры и других факторов. При этом необходимо иметь в виду, что инженер располагает ограниченной информацией об указанных случайных величинах. Так, число данных по прочности материалов, а тем более — по прочности самой конструкции (или ее элементов) обычно невелико. Например, весьма затруднительно получить сколько-нибудь большой объем экспериментальных данных по длительной прочности стали. В такой ситуации естественно использование различных методов расчета надежности конструкции, в частности, кибернетических методов распознавания образов и теории игр (см. И. А. Биргер [1]).

Статистические методы в проблеме разрушения составляют важное направление с характерным математическим аппаратом и специфическими трудностями. В настоящей книге не представляется возможным сколько-нибудь полно остановиться на этих вопросах. Мы отсылаем читателя к цитированным выше книгам и работам.

### § 1.3. Краткие сведения о напряжении и деформации

Ниже приводятся (без вывода) основные формулы теории напряжений и деформаций, используемые в последующих главах книги.

**1. Напряженное состояние.** Напряженное состояние в данной точке среды характеризуется симметричным тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad (1)$$

отнесенным к ортогональной системе координат  $x, y, z$ . Здесь использована система обозначений, обычно принимаемая в литературе технического направления.

При обсуждении общих вопросов более удобны тензорные обозначения. Пусть  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты. Через  $n_i$  обозначим проекции единичного вектора нормали  $n$  к произвольной площадке в данной точке; очевидно, что  $n_i$  равны направляющим косинусам нормали.

Компоненты тензора напряжения теперь запишутся как

$$\sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Формулы Коши для составляющих вектора напряжений  $p$  на площадке (рис. 1.3.1) с единичной нормалью  $n$  имеют вид

$$p_j = \sigma_{ij} n_i. \quad (2)$$

Здесь использовано правило суммирования А. Эйнштейна: по всякому дважды повторяющемуся в одночлене латинскому индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3.

Нормальное напряжение на произвольно ориентированной площадке равно

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j. \quad (3)$$

Касательная составляющая определяется по формуле

$$\tau_n = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - \sigma_n^2}. \quad (4)$$

Символ Кронекера задан соотношениями

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

Тензор с такими составляющими в системе координат  $x_i$  называется единичным тензором  $T_1$ .

Средним или гидростатическим давлением называется сумма

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}.$$

Девiator напряжений  $D_{\sigma}$  имеет составляющие

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}.$$

Главные значения тензора и девиатора напряжений будем обозначать соответственно через  $\sigma_i$  и  $s_i$ . Иногда удобно нумеровать оси так, чтобы

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (6)$$

В сечениях, делящих пополам углы между главными плоскостями и проходящих соответственно через главные оси 1, 2, 3, касательные напряжения достигают экстремальных значений и называются *главными касательными напряжениями*; определим их формулами

$$\tau_1 = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1), \quad \tau_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Наибольшее значение касательного напряжения  $\tau_n$  называется *максимальным касательным напряжением*  $\tau_{max}$ . Если условие (6) выполняется, то

$$\tau_{max} = -\tau_2.$$

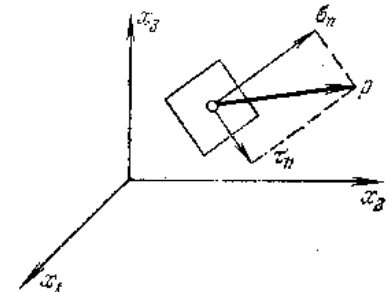


Рис. 1.3.1.

Линейный, квадратичный и кубический инварианты (основные инварианты) тензора напряжений равны (в главных осях)

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma, \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Соответствующие инварианты девиатора напряжений будут

$$\left. \begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= 0, \\ I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \\ I_3(D_\sigma) &= s_1 s_2 s_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Неотрицательную величину

$$T = +\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (9)$$

называют *интенсивностью касательных напряжений*. Иногда рассматривают *приведенное напряжение* (или интенсивность напряжений), равное  $\sqrt{3}T$ . В случае одноосного растяжения (сжатия) приведенное напряжение равно  $|\sigma_1|$ , а  $T = \frac{1}{\sqrt{3}}|\sigma_1|$ .

Для чистого сдвига  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ , где  $\tau$  — напряжение сдвига; тогда  $T = \tau$ .

Интенсивность касательных напряжений может быть также записана в форме

$$T = \left( \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}.$$

Нетрудно показать, что интенсивность касательных напряжений  $T$  и максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  существенно отличаются друг от друга, именно

$$T \approx 1,08\tau_{\max}$$

с наибольшей погрешностью около 7%.

Наглядное представление о напряжениях на различных площадках, проходящих через данную точку, дает диаграмма Мора (рис. 1.3.2). Взаимо-

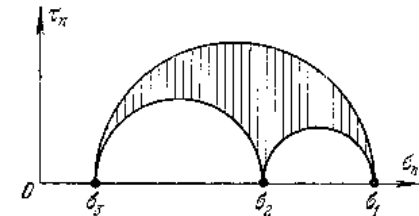


Рис. 1.3.2.

отношение главных значений тензора напряжений («форма» диаграммы Мора, «вид напряженного состояния») характеризуется коэффициентом Лодэ — Надаи

$$\mu_0 = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1. \quad (10)$$

**2. Деформация.** Деформация среды характеризуется симметричным тензором деформации

$$T_\epsilon = \| \epsilon_{ij} \|,$$

составляющие которого равны

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (11)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$ .

Главные значения тензора деформации обозначим через  $\epsilon_i$  ( $\epsilon_i$  — *главные удлинения*). Разности

$$\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \quad \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1, \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

называются *главными сдвигами*. Наибольший по величине сдвиг в данной точке называется *максимальным сдвигом*  $\gamma_{\max}$ .

Инварианты тензора деформации в главных осях равны

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\epsilon) &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ I_2(T_\epsilon) &= -(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1), \\ I_3(T_\epsilon) &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Составляющие девиатора деформации  $D_\epsilon$  равны

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \delta_{ij}.$$

Главные значения девиатора  $D_\epsilon$  обозначим через  $\epsilon_i$ . Инварианты девиатора деформации будут

$$\left. \begin{aligned} I_1(D_\epsilon) &= 0, \\ I_2(D_\epsilon) &= \frac{1}{6}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2], \\ I_3(D_\epsilon) &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В случае малой деформации компоненты  $\epsilon_{ij}$  по величине малы по сравнению с единицей; если, кроме того, достаточно малы углы поворота, то в формулах (11) можно отбросить квадратичные члены; тогда

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Составляющие  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$  являются относительными удлинениями соответственно в направлениях осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ;  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{23}$ ,  $\epsilon_{13}$  — половинами относительных сдвигов. В литературе,



связанной с приложениями, часто используются обозначения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned} \right\} (14)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты. Здесь  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  — относительные сдвиги (составляющими тензора деформации будут  $\frac{1}{2} \gamma_{xy}, \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \frac{1}{2} \gamma_{xz}$ ).

Относительное изменение объема равно

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

При анализе пластического деформирования важную роль играет квадратичный инвариант  $I_2(D_\varepsilon)$ , являющийся суммарной характеристикой искажения формы элемента среды. Неотрицательная величина

$$\Gamma = 2 \sqrt{I_2(D_\varepsilon)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (15)$$

называется *интенсивностью деформаций* сдвига. В случае чистого сдвига ( $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \gamma$ ) имеем

$$\Gamma = \gamma \quad (\gamma > 0).$$

Иногда рассматривают приведенную деформацию (или интенсивность деформаций), равную  $\frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma$ . При простом растяжении (сжатии) стержня из несжимаемого материала приведенная деформация равна  $|\varepsilon_1|$ .

Через составляющие девиатора деформации интенсивность деформаций сдвига может быть представлена так:

$$\Gamma = (2e_{ij}e_{ij})^{1/2}. \quad (16)$$

Вид деформированного состояния характеризуется параметром

$$\mu_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3, \quad (17)$$

определяющим взаимное расположение кругов в соответствующей диаграмме Мора для тензора  $T_\varepsilon$ .

**3. Логарифмические удлинения.** Анализ больших деформаций при некоторых ограничениях (при фиксированных главных направлениях) удобно проводить, используя величины так называемых *логарифмических* (или *натуральных*) удлинений.

Сообщим вектору смещения  $u$  бесконечно малое приращение  $du$ . Компоненты соответствующей бесконечно малой деформации равны

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} du_i + \frac{\partial}{\partial x_i} du_j \right) \quad (18)$$

Эти величины образуют тензор бесконечно малой деформации  $T_{d\varepsilon}$ . Суммирование малых изменений (18) позволяет описывать большие деформации.

Рассмотрим, например, однородное растяжение цилиндрического стержня вдоль его оси, совпадающей с осью  $x_1$ ; тогда

$$de_1 = \frac{dl}{l},$$

где  $l$  — текущая длина стержня,  $dl$  — бесконечно малое ее приращение. Суммирование приводит к логарифмическому удлинению

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \equiv \bar{\varepsilon}_1, \quad (19)$$

где  $l_0$  — начальная длина; черточкой сверху отличаем логарифмические удлинения.

Если главные оси при деформации не поворачиваются, интегралы  $\int d\bar{\varepsilon}_i$  имеют простой смысл, равняясь соответствующим

логарифмическим удлинениям  $\ln \frac{l_i}{l_{i0}} \equiv \bar{\varepsilon}_i$ . Удобство логарифмических удлинений заключается в сохранении группового характера меры деформации и в области больших деформаций. Действительно, справедлив простой закон сложения деформаций: сумма последовательных логарифмических удлинений равна суммарному логарифмическому удлинению.

Пусть фиксированные главные направления суть направления  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда будут только составляющие  $d\bar{\varepsilon}_1, d\bar{\varepsilon}_2, d\bar{\varepsilon}_3$ . Условие несжимаемости имеет вид

$$d\bar{\varepsilon}_1 + d\bar{\varepsilon}_2 + d\bar{\varepsilon}_3 = 0. \quad (20)$$

Выполняя интегрирование, находим

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь интенсивность приращений логарифмических деформаций сдвига  $d\bar{\Gamma}$ :

$$d\bar{\Gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\bar{\varepsilon}_1 - d\bar{\varepsilon}_2)^2 + (d\bar{\varepsilon}_2 - d\bar{\varepsilon}_3)^2 + (d\bar{\varepsilon}_3 - d\bar{\varepsilon}_1)^2}. \quad (22)$$

Если логарифмические деформации изменяются пропорционально одному параметру  $\lambda$ , т. е.  $\bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}_{i0}\lambda$ , то последнее соотношение может быть проинтегрировано; тогда интенсивность логарифмических деформаций сдвига равна

$$\bar{\Gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2)^2 + (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_3)^2 + (\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1)^2}. \quad (23)$$

Если материал несжимаем, то в формулах (22), (23) можно исключить соответственно  $d\bar{\epsilon}_3$ ,  $\bar{\epsilon}_3$ , и названные формулы примут вид

$$d\bar{\Gamma} = 2 \sqrt{d\bar{\epsilon}_1^2 + d\bar{\epsilon}_1 d\bar{\epsilon}_2 + d\bar{\epsilon}_2^2}, \quad (24)$$

$$\bar{\Gamma} = 2 \sqrt{\bar{\epsilon}_1^2 + \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_2^2}. \quad (25)$$

**4. Скорость деформации.** Обозначим через  $v_i$  составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$  частиц среды. Тензор скорости деформаций

$$T_{\xi} = \|\xi_{ij}\|$$

имеет составляющие

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Скорость относительного объемного расширения равна

$$\xi = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (26)$$

Интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$H = 2 \sqrt{I_2(D_{\xi})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2}. \quad (27)$$

Для несжимаемой среды  $\xi = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

При этом условии тензор скорости деформации будет девиа-  
тором и тогда

$$H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}.$$

## ГЛАВА 2

### КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

#### § 2.1. О прочности материалов

**1. О характеристиках прочности материалов.** Прочность материалов зависит от многих факторов — от структуры материалов, условий нагружения, внешней среды, размеров и формы образцов, длительности опытов и т. д. Затруднительно поэтому указать какие-либо исчерпывающие характеристики прочности материала. Проводятся обширные исследования механических свойств материалов в различных условиях. По результатам опытов оценивается сопротивление материалов разрушению в зависимости от внешних факторов и структуры самих материалов. Вопросы эти весьма сложные и имеют огромную литературу, касающуюся различных сторон (физических, химико-технологических, механических и т. д.) этой проблемы.

Следует заметить, что обнаруживаемая в опытах зависимость характеристик прочности от размеров образцов (так называемый масштабный эффект) приводит к известной условности экспериментальных данных о прочности материалов. Однако масштабный эффект не столь значителен, имеет определенную направленность, что позволяет надежно опираться на обычные опытные данные, учитывая лишь иногда надлежащие поправки.

В настоящей главе рассматриваются, в основном, критерии кратковременной прочности некоторых важнейших материалов (металлов, в меньшей степени — бетона, камня и полимеров) в обычных температурных условиях при достаточно простых, мало изменяющихся во времени («постоянных») нагрузках.

В конце главы очень кратко обсуждаются критерии длительной и усталостной прочности.

Прежде всего нас будут интересовать механические аспекты вопроса, в частности — зависимость условий прочности от вида напряженного состояния. В связи с этим остановимся очень кратко на основных опытных данных; более подробные сведения и литературные указания можно найти в книгах

А. Надаи [1], Я. Б. Фридмана [1], Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [1], Ю. Н. Работнова [1, 2], Ф. Макклинтока и А. Аргона [1] и др.

2. **Опыты на растяжение.** Наиболее распространенным типом испытаний является растяжение достаточно длинных цилиндрических (реже — плоских) образцов. Из опытов получают кривые деформации (диаграммы растяжения) или только максимальные, разрушающие нагрузки. На рис. 2.1.1 приведено несколько типичных кривых деформации. По вертикальной оси

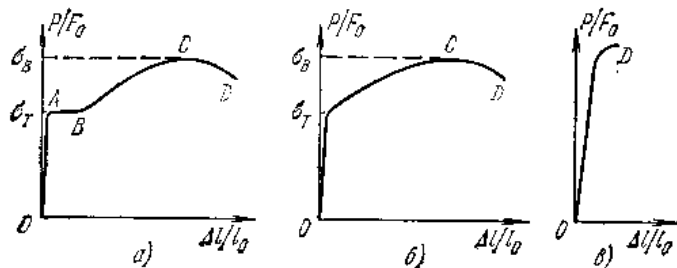


Рис. 2.1.1.

отложено условное напряжение  $P/F_0$ , по горизонтальной — относительное удлинение  $\Delta l/l_0$ . Кривая *a* типична для мягкой углеродистой стали; точка *A* соответствует пределу текучести  $\sigma_T$ , точка *C* — пределу прочности (или временному сопротивлению)  $\sigma_B$ . Далее нагрузка падает вследствие образования шейки, и в точке *D* происходит разрушение образца.

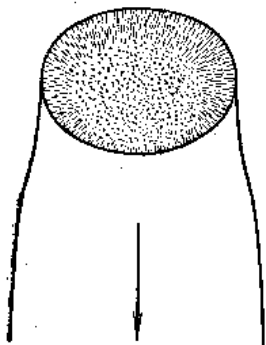


Рис. 2.1.2.

При отсутствии площадки текучести кривые деформации пластичного металла имеют вид кривой *б*. Предел текучести  $\sigma_T$  определяется обычно величиной остаточной деформации 0,2% (технический предел текучести). Как и в первом случае, имеется максимальная нагрузка и участок спада нагрузки *CD*.

Хрупкие материалы разрушаются при малых удлинениях, причем иногда разрушению предшествует некоторая пластическая деформация (кривая *в*); иногда же пластическая деформация ничтожна. После образования шейки деформации развиваются в основном в районе шейки. Внутри шейки возникает сложное (объемное) напряженное состояние с высокими нормальными напряжениями. При разрушении образуется так называемая

«чашечка» (рис. 2.1.2); на дне ее происходит разрушение путем отрыва, края же разрушаются из-за сдвига (среза).

Хрупкие разрушения реализуются без образования шейки (рис. 2.1.3).

На рис. 2.1.1 приведены кривые растяжения в условных напряжениях и удлинениях. При значительных деформациях истинные напряжения в образце  $P/F$ , где  $F$  — текущая площадь, будут существенно больше условных  $P/F_0$ . Далее, целесообразно рассматривать логарифмические удлинения  $\ln l/l_0$ . На рис. 2.1.4



Рис. 2.1.3

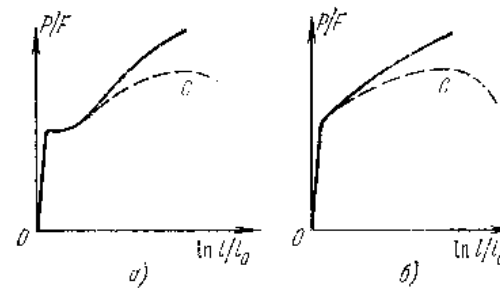


Рис. 2.1.4.

сплошными линиями показаны кривые растяжения в истинных напряжениях и удлинениях, пунктиром — в условных напряжениях. Отметим, что истинное напряжение не спадает; разумеется, истинное напряжение достоверно вычисляется лишь до начала образования шейки.

Простые опыты (например, опыты на растяжение) можно интерпретировать как в истинных, так и в условных величинах. Для выяснения действительных закономерностей между деформациями, напряжениями и критериями разрушения целесообразно оперировать с истинными напряжениями и надлежащими характеристиками деформированного состояния.

Основными механическими характеристиками металлов в инженерных вопросах обычно считаются предел текучести  $\sigma_T$ , временное сопротивление  $\sigma_B$  и «удлинение» (относительное удлинение в процентах, отвечающее моменту разрушения). Высокий уровень удлинения («пластичность») при прочих равных условиях гарантирует хорошую работоспособность материала.

3. **Опыты на сжатие.** Значительно реже проводятся опыты на сжатие. Это объясняется трудностями получения в образце однородного напряженного состояния сжатия. Испытания на сжатие реализуются для изучения прочности хрупких материалов, работающих на сжатие (бетон, естественные и искусственные камни и т. д.). На рис. 2.1.5 показана одна из картин разрушения таких образцов. Здесь интересно, что разрушения

происходят по плоскостям, на которых напряжения принято считать равными нулю.

**4. Влияние гидростатического давления.** Однородные материалы под действием гидростатического давления не разрушаются

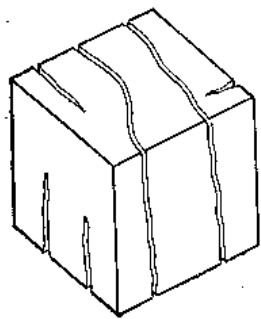


Рис. 2.1.5.

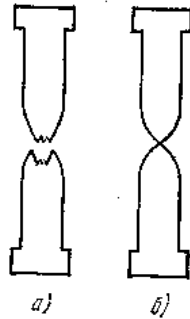


Рис. 2.1.6.

и не получают остаточных деформаций (разумеется, речь идет об обычных, а не сверхвысоких давлениях). Однако гидростатическое давление, накладываемое на другое напряженное состояние (например, на растяжение или сжатие), может оказать значительное влияние на картину разрушения. На рис. 2.1.6 показаны схемы разрушения

круглых металлических образцов при растяжении; образец *a* испытан в обычных условиях, образец *б* — при действии гидростатического давления.

Гидростатический фон иногда существенно увеличивает пластичность материалов, даже в обычных условиях хрупких, как, например, мрамор (см. А. Надаи [1]).

**5. О других испытаниях.** Прежде всего здесь следует упомянуть об опытах кручения круглых стержней и трубчатых образцов. При изучении влияния сложного напряженного состояния большое значение приобретают опыты одновременного нагружения трубчатого образца осевым усилием  $P$ , скручивающим моментом  $M$  и внутренним давлением  $p$  в различных их

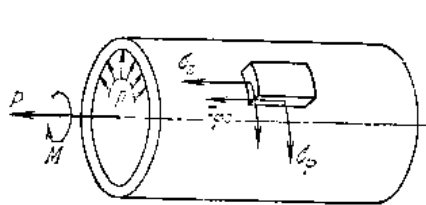


Рис. 2.1.7.

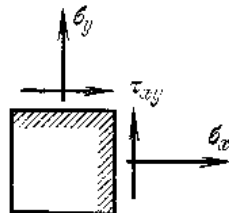


Рис. 2.1.8.

комбинациях (рис. 2.1.7). Так можно моделировать произвольное плоское напряженное состояние (рис. 2.1.8).

Меньшее значение имеют опыты на срез, изгиб, контактное давление, а также так называемые технологические испытания,

Разнообразные опытные данные позволяют составить более или менее полное представление о характере разрушения материалов в зависимости от вида напряженного состояния.

Способ нагружения	Вид разрушения	
	Отрыв	Срез
Растяжение		
Сжатие		
Кручение		
Изгиб		

Рис. 2.1.9.

На рис. 2.1.9 приведена наглядная схема хрупких и пластических разрушений для типичных испытаний (см. Я. Б. Фридман [1]).

**6. Влияние температуры.** Изменения температуры существенно сказываются на характеристиках пластичности и прочности. Поведение различных металлов имеет приблизительно одинаковый характер, если рассматривать сходственные (гомологические) температуры (т. е. температуры, занимающие одинаковое относительное положение между абсолютным нулем и температурой плавления).

С понижением температуры пластичность падает, а склонность к хрупкости обычно растет. Это позволяет иногда определять сопротивление отрыву пластичных металлов, испытывая их при очень низких температурах (например, при температуре жидкого азота).

Нужно иметь в виду, что приведенные данные схематичны; для некоторых металлических сплавов возможны аномальные отклонения, вызываемые физико-химическими процессами, сопутствующими изменениям температуры (см. Я. Б. Фридман [1]).

Изложенные выше результаты отнесли к испытаниям при таких температурах, когда ползучесть практически не проявляется. В условиях ползучести характеристики прочности будут другими. Так, разрушение наступает при всяком напряжении через определенный промежуток времени (время разрушения), зависящий от температуры и уровня напряжения. Этот вопрос подробно обсуждается в гл. 6 и 7.

**7. Влияние скорости деформации.** Скорость деформирования оказывает заметное влияние на свойства пластичности и прочности.

С увеличением скорости деформации растет сопротивление материала пластической деформации; кривая деформирования при высоких скоростях испытаний проходит выше, чем при низких, предел текучести растет. Для различных металлов этот рост различен и может изменяться в довольно широких пределах.

Уровень пластического удлинения зависит главным образом от картины разрушения. Для металлов, склонных к хрупким разрушениям при высоких скоростях испытания, пластическое удлинение падает, сопротивление же разрушению практически неизменно (на рис. 2.1.10, а сплошными линиями показаны кривые медленных (статических) испытаний, пунктирными — кривые быстрых (ударных) испытаний). Если же металлы и при

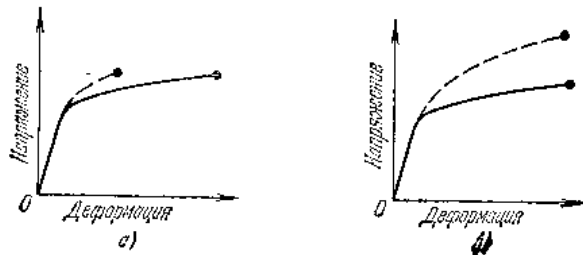


Рис. 2.1.10.

высоких скоростях деформации разрушаются путем скольжения (среза), то уровень пластического удлинения изменяется незначительно, а прочностные характеристики растут (рис. 2.1.10, б). Для диагностики металлов со сниженной пластичностью при быстром нагружении широко применяются испытания «на ударную вязкость».

**8. Цикличность нагружения.** Циклический характер нагрузок существенно влияет на картину разрушения: на первый план

выступает явление усталости. При переменных, циклических нагрузках в материале постепенно накапливаются повреждения и в некоторый момент происходит хрупкое разрушение. При сравнительно небольших напряжениях (но больших пределах усталости) разрушение наступает при большом числе циклов ( $10^5$ — $10^6$  циклов).

При высоких напряжениях разрушение происходит при небольшом числе циклов. Проблема малоциклового усталости в последнее время привлекает внимание в связи с необходимостью допускать высокие напряжения в ряде ответственных конструкций.

**9. Влияние запаса энергии на кинетику разрушения.** Во всяком материале всегда имеются те или иные дефекты (субмикроскопические трещины, поры и т. д.). В напряженном состоянии, в зависимости от условий опыта (температура, среда и т. д.), деформации и поврежденность материала растут с большей или меньшей скоростью. Иногда этот рост практически отсутствует, иногда же он происходит весьма интенсивно.

При некотором уровне деформаций или поврежденности тело достигает опасного, критического состояния, предшествующего переходу к полному (глобальному) разрушению тела.

Характер протекания этой последней стадии разрушения сильно зависит от запаса энергии в системе. Если запас этой энергии велик, то к месту разрушения «стекает» энергия, что приводит иногда к взрывообразному развитию деформаций или трещин. Если же запас энергии мал, разрушение происходит вяло (например, развитие трещины может приостановиться).

## § 2.2. Критерии разрушения изотропных материалов

**1. О критериях разрушения.** В этой главе рассматриваются разрушения при относительно медленных монотонных нагружениях и обычной температуре, когда можно пренебрегать ползучестью.

Нас будет интересовать переход от характеристик прочности при одноосном напряженном состоянии к характеристикам прочности при сложном напряженном состоянии. Этот переход осуществляется введением критериев разрушения (иногда их называют критериями прочности, теориями прочности, гипотезами прочности), обобщающих в том или ином направлении экспериментальные данные на сложное напряженное состояние. При большом многообразии материалов естественно и большое число критериев разрушения. Мы не ставим здесь цели дать полный их обзор, отсылая читателя к соответствующей литературе (см. И. И. Гольденблат, В. А. Колнов [1]).

Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев [1], Пауль [1] и др.). Останова-  
вимся лишь на нескольких наиболее важных критериях.

Вопрос о том, что понимать под опасным состоянием, ре-  
шается по-разному в зависимости от материала и предъявляе-  
мых к нему требований. Это может быть состояние на грани  
разрушения («на пределе прочности»); подобное состояние есте-  
ственно учитывать для хрупкого материала.

Иногда опасным считается переход к пластическим деформа-  
циям (состояние «на пределе текучести»); тогда пластичные ма-  
териалы в известной мере исчерпывают несущую способность.  
При таком подходе критерии разрушения аналогичны условиям  
пластичности.

Условимся отличать звездочкой постоянные, характеризую-  
щие опасное состояние, например,  $\sigma_*$ ,  $\tau_*$  и т. д.

**2. Предельная поверхность.** При одноосном напряженном со-  
стоянии граница прочности оценивается предельным («опас-  
ным») значением напряжения. При переходе к сложному напря-  
женному состоянию естественно ввести простейшее обобщение  
этой картины — предельную поверхность  $\Sigma$  в пространстве на-  
пряжений. Для изотропного тела все направления эквивалент-  
ны, поэтому уравнение этой поверхности должно быть инвариант-  
ным по отношению к ориентации координатной системы,  
следовательно, оно должно содержать лишь инварианты напряженного состояния, т. е.  
должно иметь вид

$$F(I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = K_*. \quad (1)$$

Можно рассматривать поверхность  $\Sigma$   
в пространстве главных напряжений  
(рис. 2.2.1)

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K_*, \quad (2)$$

причем ввиду эквивалентности всех направ-  
лений  $F$  должна быть симметрической функ-  
цией главных напряжений. Так как основными симметрическими  
функциями тензора напряжения являются приведенные выше его  
инварианты, то уравнение (2) может быть также представлено  
в форме (1).

Вместо выписанных в (1) инвариантов можно рассматривать  
любые три независимые их комбинации. Как уже отмечалось,  
при гидростатическом сжатии однородный материал не разру-  
шается. В то же время добавление гидростатического давления  
может оказывать известное влияние на условия разрушения  
(для пластичных материалов это влияние меньше, чем для хруп-  
ких). В связи с этим удобно выделить среднее давление

$$3\sigma = I_1(T_\sigma)$$

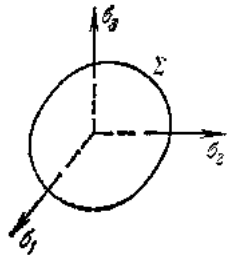


Рис. 2.2.1.

и интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2},$$

не зависящую от среднего давления.

Наконец, вместо третьего инварианта целесообразно использо-  
вать параметр Лоде  $\mu_\sigma$ , характеризующий «вид напряженного  
состояния» (см. § 1, 2) и также не зависящий от среднего дав-  
ления.

Теперь уравнение предельной поверхности может быть пред-  
ставлено в виде

$$F(\sigma, T, \mu_\sigma) = K_*. \quad (3)$$

Конкретизация этой зависимости приводит к тем или иным  
критериям разрушения.

Гораздо реже в качестве критерия разрушения используются  
ограничения, накладываемые на деформации; в этом случае в  
пространстве главных деформаций имеется некоторая поверх-  
ность, ограничивающая область безопасных состояний.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные критерии разру-  
шения, получившие распространение в инженерной практике.

**3. Критерий наибольших нормальных напряжений.** В опасном  
состоянии наибольшее главное напряжение достигает предель-  
ного значения

$$|\sigma_i| = \sigma_*, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Предельная поверхность ограничивает  
куб со стороной  $2\sigma_*$  (рис. 2.2.2).

В простейшей форме изложенный кри-  
терий восходит еще к Галилею; позднее он  
получил развитие в работах Ренкина.

Критерий (4) не всегда согласуется с  
основными экспериментальными фактами.  
Так, при одноосном сжатии и равномерном  
всестороннем сжатии граница прочности  
согласно этому критерию будет одна и та же. Между тем  
хорошо известно, что гидростатическое давление не приводит к  
разрушению.

Для хрупких материалов при напряженных состояниях,  
близких к одноосным, критерий  $\sigma_{\max}$  дает более или менее пра-  
вильные результаты. Переход в пластическое состояние рас-  
сматриваемым критерием описывается плохо.

**4. Критерий наибольших удлинений.** Некоторые опыты пока-  
зывают, что разрушение путем отрыва может происходить по  
сечениям, в которых нет напряжений. На рис. 2.1.9 показана  
подобная картина разрушения образца при сжатии. В то же

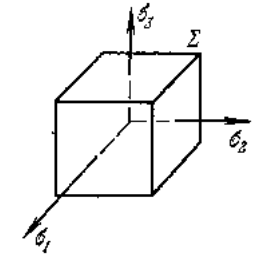


Рис. 2.2.2.

время удлинения по направлениям, нормальным к указанным сечениям, имеются. В связи с этим приобретает значение критерий наибольшего *положительного удлинения* (критерий Мариотта). При упругих деформациях можно при этом получить условие, накладываемое на напряженное состояние, если перейти к последнему по закону Гука.

**5. Критерий наибольших касательных напряжений.** В опасном состоянии максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, т. е.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_* \quad (5)$$

или, учитывая формулу для  $\tau_{\max}$ ,

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_* \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_*$  — предельное напряжение при растяжении.

Это условие в пространстве главных напряжений определяет область, ограниченную поверхностью правильной шестигранной призмы с осью

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

называемой гидростатической осью, поскольку точкам этой прямой отвечают гидростатические напряженные состояния. В нормальном сечении призмы имеем правильный шестиугольник (рис. 2.2.3); оси  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  — проекции осей  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Очевидно, что всестороннее равномерное давление (или растяжение) не приводит (согласно (5)) к разрушению и не изменяет условий разрушения.

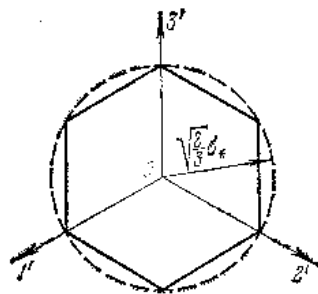


Рис. 2.2.3.

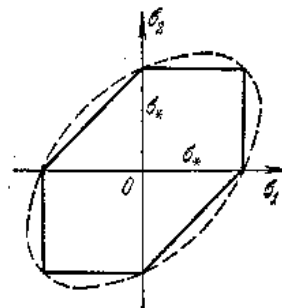


Рис. 2.2.4.

В плоском напряженном состоянии  $(\sigma_1; \sigma_2; 0)$  предельное условие определяется сечением призмы плоскостью  $\sigma_3 = 0$  (шестиугольник на рис. 2.2.4).

По условию (5) предельное напряжение при сдвиге  $\tau_* = \frac{1}{2} \sigma_*$ .

Критерий наибольших касательных напряжений в общем правильно характеризует переход к пластическому деформированию металлов, хотя и отмечаются некоторые систематические отклонения. Так, согласно (5), промежуточное главное напряжение не оказывает никакого влияния. В опытах, однако, такое влияние (хотя и небольшое) наблюдается. Разрушения пластичных металлов, происходящие путем среза, также удовлетворительно описываются критерием  $\tau_{\max}$ . Критерий наибольшего касательного напряжения предложен Кулоном в 1773 г.

Условие (5), как условие наступления пластического состояния (условие пластичности, а не условие разрушения), позднее было выдвинуто Треска и Сен-Венаном.

Поведение хрупких материалов описывается критерием  $\tau_{\max}$  значительно хуже.

Заметим в заключение, что условие  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_*$  является частным случаем уравнения  $F(T, \mu_\sigma) = K_*$ , не содержащего среднего давления.

**6. Критерий наибольшей интенсивности касательных напряжений.** В опасном состоянии интенсивность касательных напряжений достигает предельного значения, т. е.

$$T = \frac{\sigma_*}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

или в развернутой форме

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_*^2 \quad (8)$$

Это условие близко к критерию наибольшего касательного напряжения. В пространстве главных напряжений условие (8) соответствует поверхности кругового цилиндра с той же гидростатической осью  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . При этом, как нетрудно видеть, поверхность кругового цилиндра описана вокруг шестигранной призмы Кулона. На рис. 2.2.3 пунктиром показано нормальное сечение цилиндра, а на рис. 2.2.4 — сечение цилиндра плоскостью  $\sigma_3 = 0$  (плоское напряженное состояние).

Условие (8) было предложено Хубером в 1904 г. в качестве критерия прочности при  $\sigma < 0$ . Несколько позднее (1913 г.) из других соображений условие (8) было выдвинуто Р. Мизесом как условие пластичности. Как выяснилось впоследствии (см. А. Надаи [2], стр. 65), условие (8) было сформулировано Максвеллом в письме Кельвину еще в 1856 г.

Величине интенсивности касательных напряжений можно дать различную интерпретацию (октаэдрическое напряжение; среднее по малой сфере, окружающей данную точку, и т. д.). Поэтому критерий разрушения (8) можно по-разному истолковывать.

При чистом сдвиге интенсивность  $T$  равна напряжению сдвига, поэтому предельное напряжение при сдвиге  $\tau_* = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_*$ .

Разрушения пластичных металлов, происходящие путем сдвига (среза), удовлетворительно описываются критерием (7). Вместе с тем этот критерий, как и предыдущий, в общем хорошо фиксирует переход к пластической деформации в металлах; при этом соотношение между пределами текучести ( $\tau_* = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_*$ ) подтверждается экспериментами.

Разрушение хрупких материалов критерий наибольшей интенсивности касательных напряжений описывает плохо.

**7. Критерий Мора.** Как уже отмечалось, ряд материалов (прежде всего сюда относятся хрупкие материалы — камни, бетон и т. д.) различным образом сопротивляются сжатию и растяжению; именно, прочность на сжатие выше прочности на растяжение. Это влияние можно учесть, например, если принять, что величина касательного напряжения  $\tau_n$ , действующего на «площадке разрушения», зависит от величины нормального давления  $\sigma_n$  на той же площадке, т. е.

$$\tau_n = f(\sigma_n). \quad (9)$$

Условие (9) предложил О. Мор в 1900 г.

На плоскости  $\sigma_n, \tau_n$  соотношение (9) представляет предельную кривую, ограничивающую область безопасных состояний. Напряженное состояние на той же плоскости характеризуется системой кругов Мора. Нетрудно видеть, что наибольший круг напряжений должен касаться предельной кривой. Действительно, если бы он пересекал ее, то для данного  $\sigma_n$  можно было бы указать касательное напряжение, превышающее величину, вызывающую разрушение. Таким образом, предельная кривая (9) является огибающей наибольших кругов напряжений (рис. 2.2.5).

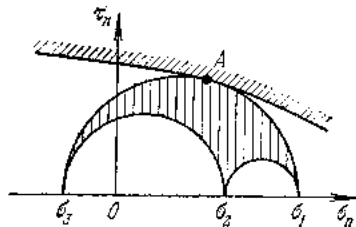


Рис. 2.2.5.

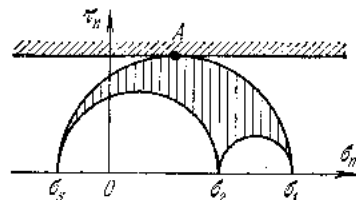


Рис. 2.2.6.

Критерий максимального касательного напряжения является частным случаем критерия Мора: предельная кривая тогда выродается в прямую линию, параллельную оси абсцисс

(рис. 2.2.6). При этом площадка, на которой достигается опасное состояние, совпадает с площадкой, на которой действует  $\tau_{\max}$ . Следовательно, площадка разрушения наклонена под углом  $45^\circ$  к площадке наибольшего и наименьшего главных напряжений.

В общем же случае, показанном на рис. 2.2.5, опасное состояние достигается на площадке, образующей с названными главными площадками другие углы.

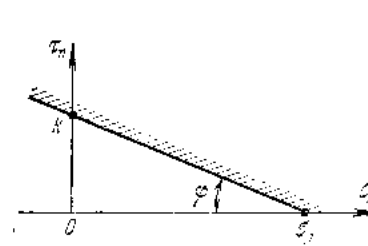


Рис. 2.2.7.

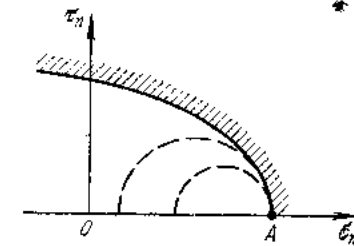


Рис. 2.2.8.

Предельная кривая обычно поднимается в сторону меньших нормальных напряжений (рис. 2.2.5), что соответствует меньшему сопротивлению материалов при растяжении, чем при сжатии. На рис. 2.2.7 показан случай прямолинейной огибающей, когда

$$\tau_n = k \left( 1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_0} \right). \quad (10)$$

На рис. 2.2.8 изображен частный вид предельной кривой, пересекающей ось  $\sigma_n$ ; при этом имеется наибольшее значение нормального растягивающего напряжения, отвечающее разрушению путем сдвига или отрыва. Все большие круги напряжений, касающиеся предельной кривой в точке A и меньшие соприкасающегося круга, соответствуют возможным напряженным состояниям, при которых происходит разрушение путем отрыва или сдвига (см. А. Надаи [1], с. 249).

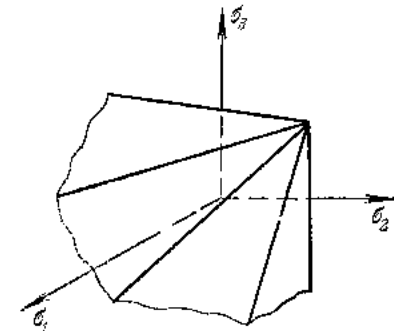


Рис. 2.2.9.

Критерий Мора может быть, разумеется, представлен некоторой поверхностью в пространстве главных напряжений. Так, при рассмотрении возможных шести случаев разных знаков и соотношений между главными напряжениями, нетрудно установить, что условие (10) с прямолинейной огибающей приводит



к шести уравнениям плоскостей. Последние при  $\varphi = 30^\circ$  образуют поверхность правильной шестигранной пирамиды (рис. 2.2.9). Эта пирамида вырождается в шестигранную призму при переходе к критерию  $\tau_{\max}$  (см. рис. 2.2.6).

По критерию Мора промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$  не влияет на разрушение.

Форма предельной кривой должна быть построена по экспериментальным данным для каждого материала. Накопленные данные недостаточны для формулировки общих закономерностей. Все же можно считать, что промежуточное напряжение  $\sigma_2$  оказывает некоторое влияние на наступление опасного состояния.

**8. Критерий Шлейхера — Надаи.** В известном смысле критерий Шлейхера — Надаи аналогичен критерию Мора, но формулируется в терминах интенсивности касательных напряжений  $T$  и гидростатического давления  $\sigma$ . В опасном состоянии интенсивность касательных напряжений является функцией гидростатического давления, характерной для данного материала:

$$T = f(\sigma). \quad (11)$$

При  $f(\sigma) = \text{const} = K_*$  приходим к условию Мизеса. Заметим, что первоначальная формулировка Шлейхера несколько отличалась от приведенной. В пространстве главных напряжений уравнение (11) определяет поверхность вращения относительно гидростатической оси (рис. 2.2.10).

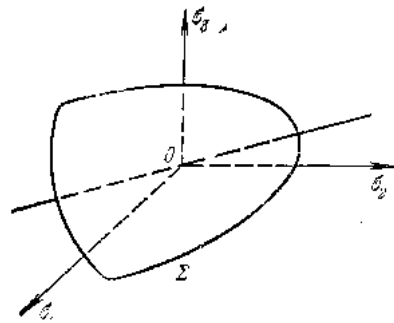


Рис. 2.2.10.

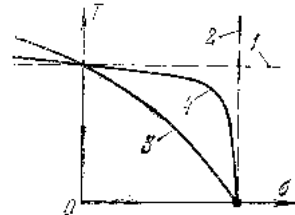


Рис. 2.2.11.

В зависимости от вида функции  $f(\sigma)$  можно получить различные формы предельных поверхностей (см. И. И. Гольденблат и В. А. Копнов [1], Г. С. Писаренко и А. А. Лебедев [1] и др.).

На плоскости  $T, \sigma$  уравнение (11) определяет некоторую предельную кривую — границу разрушения (рис. 2.2.11). Пунктирная прямая 1 соответствует условию наибольшей интенсивности касательных напряжений («пластическое разрушение»), прямая 2 — условию наибольшего объемного растяжения

(«хрупкое разрушение»). Общий случай характеризуется некоторыми кривыми 3 и 4. Кривая 3 не имеет резкого перехода от пластических разрушений к хрупким. Наоборот, кривая 4 достаточно резко разграничивает два типа разрушения. Заметим, что в формуле (11) вместо среднего напряжения  $\sigma$  иногда целесообразно взять наибольшее значение  $\sigma_{\max}$ , т. е.

$$T = f(\sigma_{\max}). \quad (12)$$

Заметим также, что для изотропного материала с различными сопротивлениями на растяжение и сжатие критерий разрушения должен в той или иной форме содержать инварианты  $\mu_0$  и  $\sigma$  (см. обзор Пауля [1]).

**9. Критерий Давиденкова — Фридмана.** Выше неоднократно отмечались два типа разрушения — путем отрыва и путем сдвига (среза). В зависимости от условий опыта один и тот же материал может разрушаться хрупко или вязко. При фиксированных температуре и скорости нагружения имеет значение вид напряженного состояния («жесткость» напряженного состояния). Хорошей иллюстрацией может служить образование чашечки при разрыве шейки (см. рис. 2.1.2).

На дне чашечки происходит разрушение путем отрыва, поскольку в центральной части шейки возникает объемное напряженное состояние, близкое к равномерному всестороннему растяжению. Края чашечки разрушаются из-за сдвига (среза), ибо после разрыва дна напряженное состояние в периферийной части шейки будет типа одноосного растяжения. Поэтому разбиение материалов на хрупкие и пластичные является достаточно грубой схематизацией.

Простейший способ учета двойственного характера разрушения заключается в одновременном рассмотрении касательных и нормальных напряжений. Примерами такого подхода являются критерии Мора и Шлейхера — Надаи. При этом, однако, не учитываются деформационные характеристики материала.

Предпринимались неоднократные попытки продвинуться в этом направлении. В частности, еще П. Людвик связывал условие прочности с кривыми пластической деформации и пределов прочности.

Остановимся здесь на получившей известное развитие схеме Давиденкова — Фридмана.

Исходным является предположение о наличии у материала двух характеристик предельной прочности — сопротивления отрыву  $\sigma_{от}$  и сопротивления сдвигу (или срезу)  $\tau_{ср}$ .

Сопротивление отрыву  $\sigma_{от}$  для хрупких в обычных условиях материалов может быть найдено как предел прочности при растяжении. Значительно труднее определить эту характеристику для пластичного материала. Иногда это удается сделать.

испытывая тот же материал при очень низкой температуре (когда наступает охрупчивание) или же испытывая образцы специального вида (например, с тонкой прослойкой (см. Л. М. Качанов [1]). При хрупких разрушениях в опытах сжатия обобщенное сопротивление отрыву подсчитывается по критерию наибольшего удлинения на основе закона Гука.

Сопротивление срезу  $\tau_{ср}$  можно найти, например, из опытов скручивания полых трубок.

Учет «жесткости» напряженного состояния осуществляется посредством введения коэффициента

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{прив}}}, \quad (13)$$

где  $\tau_{\max}$  — максимальное касательное напряжение, а  $\sigma_{\text{прив}}$  — приведенное растягивающее напряжение, подсчитываемое по закону Гука для наибольшего положительного удлинения  $\varepsilon_+$ :

$$\sigma_{\text{прив}} = E\varepsilon_+.$$

Если  $\alpha \gg 1$ , т. е. имеются значительные касательные напряжения при малых удлинениях (например, осевое сжатие и гидростатическое давление), нагружение является мягким.

Если  $\alpha \ll 1$ , т. е. имеются значительные упругие удлинения при малых касательных напряжениях (например, трехосное растяжение, близкое к равномерному), нагружение является жестким.

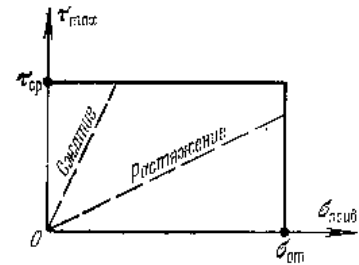


Рис. 2.2.12.

На плоскости переменных  $\sigma_{\text{прив}}$ ,  $\tau_{\max}$  проведем «линию отрыва»  $\sigma_{\text{прив}} = \sigma_{от}$  и «линию среза»  $\tau_{\max} = \tau_{ср}$  (рис. 2.2.12). При пропорциональном нагружении напряженное состояние на приведенной диаграмме характеризуется лучом. Так, при равномерном всестороннем растяжении луч проходит по оси абсцисс ( $\tau_{\max} = 0$ ). На рис. 2.2.12 пунктиром показаны лучи, отвечающие одноосному растяжению ( $\alpha = 1/2$ ) и одноосному сжатию ( $\alpha = 1/2\nu$ ).

На рис. 2.2.12 луч растяжения пересекает линию отрыва, и разрушение произойдет путем отрыва. Однако если сопротивление отрыву для данного материала сравнительно велико, тот же луч пересечет линию среза, и разрушение будет вязким.

Уязвимым местом схемы Давиденкова — Фридмана является использование далеко не универсального критерия наибольшего удлинения и условного параметра жесткости нагружения  $\alpha$ .

**10. Заключительные замечания.** Ранее уже подчеркивалось, что имеются десятки критериев разрушения, предложенных различными авторами. Условия их применимости изучены, в общем, слабо. Обычно эти критерии содержат ряд характеристик напряженного состояния и дополнительные константы.

Приведем здесь, например, критерий, рекомендуемый Г. С. Писаренко и А. А. Лебедевым [1]:

$$3q^2T^3 + (1 - q^2)\sigma_{\max}^2 = \sigma^2, \quad (14)$$

где дополнительная константа  $0 \leq q \leq 1$ . В зависимости от значения  $q$  из (14) вытекает условие наибольшей интенсивности касательных напряжений (8) при  $q = 1$ , или условие наибольшего нормального напряжения (4) при  $q = 0$ . Критерий (14) — частный случай (12).

В рассмотренных выше критериях подразумевалось, по существу, простое (т. е. пропорциональное) нагружение. Опытные данные о зависимости условий разрушения от пути нагружения скудны, хотя этот вопрос имеет, вероятно, значение для пластичных металлов. Сравнительно небольшие предварительные пластические деформации не должны заметно влиять на границу разрушения. Этого, в общем, нельзя утверждать в случае больших пластических деформаций.

Формулировка критерия разрушения при сложном нагружении требует, вообще говоря, использования функционалов (по времени или параметру нагружения), отражающих историю деформирования материала. При этом, разумеется, фиксированной предельной поверхности не будет. Конкретизация критерия разрушения возможна при наличии каких-либо концепций, касающихся механизма разрушения и основанных, в частности, на анализе экспериментальных данных. Заметим, что простейший вариант критерия разрушения можно задать в форме

$$F(\sigma_{ij}, \mu_1, \mu_2, \dots) = 1,$$

где  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — некоторые параметры, характеризующие накопление пластических деформаций и повреждений.

### § 2.3. Критерии разрушения анизотропных материалов

**1. Анизотропные материалы.** По тем или иным причинам многие материалы обладают анизотропией прочностных свойств. Так, физические свойства монокристаллов в различных направлениях различны.

Прочность многих поликристаллических металлов и сплавов также зависит от ориентации вследствие некоторой текстуры, возникшей при изготовлении (при прокатке, ковке и т. п.).

Здесь большей частью имеет место деформационная анизотропия; последняя слабо влияет на упругие свойства, но может заметно изменить сопротивление пластическому деформированию и разрушению.

Существенно анизотропны волокнистые материалы, например, дерево.

Важные современные конструкционные материалы характеризуются наличием прочной «арматуры». Таковы композитные материалы, в том числе армированные пластики. Укажем, например, на высокопрочные пластики, армированные стекловолокном СВМ (стекловолокнистый анизотропный материал); в известном смысле сюда же можно отнести и железобетон.

Подобные композитные материалы могут иметь существенно различающиеся (в десятки раз) сопротивления в различных направлениях. При достаточно мелкой структуре композитные материалы можно рассматривать как однородные материалы и оценивать их прочность в обычных осредненных величинах механики сплошной среды.

Конструкционные материалы характеризуются, как правило, анизотропией частного вида. Более того, обычно можно ограничиться рассмотрением случая ортотропного материала (т. е. материала, обладающего тремя ортогональными плоскостями симметрии). Оси симметрии свойств материала образуют основную систему координат; для ортотропного материала это будет ортогональная система координат.

Если оси симметрии имеют одни и те же направления в каждой точке тела, мы имеем случай однородно-ортотропного

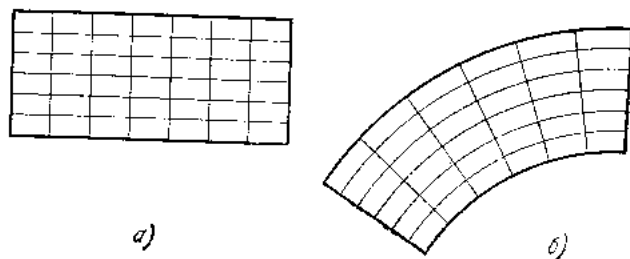


Рис. 2.3.1.

тела; такими будут, например, ортотропные армированные пластики (рис. 2.3.1, а). В случае криволинейной анизотропии направления осей меняются от точки к точке; в качестве примера укажем на цилиндрическую ортотропию (рис. 2.3.1, б).

Распространен частный вид ортотропии — трансверсальная изотропия (круговая симметрия); таковы материалы слоистого строения.

Анизотропные композитные материалы иногда характеризуются, кроме того, различными сопротивлениями растяжению и сжатию. Наконец, отметим, что не всегда прочность композитных материалов возможно рассматривать в терминах механики сплошных сред. Иногда целесообразно решать эти вопросы на основе детального рассмотрения механизма сопротивления элементов структуры.

**2. О критериях разрушения анизотропных материалов.** Как и ранее, удобно считать, что область безопасных состояний ограничивается в пространстве напряжений некоторой предельной поверхностью. Для изотропного материала уравнение предельной поверхности в пространстве главных напряжений имело вид (§ 2.2)

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K_*$$

Для анизотропного материала уравнение предельной поверхности существенно сложнее; оно должно учитывать ориентацию напряженного состояния относительно основной системы координат, а также характеристики механических свойств (прочности или пластичности)  $c_1, c_2, c_3, \dots$  в различных направлениях. Это уравнение можно записать так:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \alpha, \beta, \gamma; c_1, c_2, c_3, \dots) = 1, \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, характеризующие положение главных осей напряжения относительно основной системы координат; для анизотропных материалов выделение постоянной в правой части не связано с каким-либо преимуществом, удобнее привести правую часть к единице. Положение основной системы координат и главных осей напряжения определяется относительно произвольной декартовой системы  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В зависимости от типа анизотропии материала выполняются те или иные условия симметрии прочностных свойств, приводящие к определенным соотношениям между упомянутыми константами. Эти соотношения не должны изменяться при переходе к другой декартовой системе. Для этого необходимо, чтобы критерий разрушения имел структуру

$$F(J_1, J_2, J_3, \dots) = 1, \quad (2)$$

где  $J_1, J_2, J_3, \dots$  — инварианты, содержащие компоненты напряжения и достаточное число констант прочности (хотя деформационные характеристики изредка включаются в критерий разрушения, условимся ниже учитывать лишь характеристики напряженного состояния).

Образует линейную, квадратичную, кубичную, ... \*) формы напряжений:

$$J_1 = c_{ij}\sigma_{ij}, \quad J_2 = c_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \quad J_3 = c_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}, \dots,$$

где  $c_{ij}$ ,  $c_{ijkl}$ ,  $c_{ijklmn}$ , ... — некоторые постоянные. Так как условие (2) не зависит от ориентации декартовой системы  $x_i$ , эти постоянные должны быть компонентами тензоров, характеризующих анизотропию механических свойств материала (тензоры коэффициентов прочности или пластичности). Тогда  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ , ... будут совместными инвариантами тензора напряжений и указанных тензоров коэффициентов прочности. Вследствие симметрии тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  можно считать, без ограничения общности, что имеется лишь шесть различных постоянных  $c_{ij}$ , т. е.

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

Из подобных же соображений вытекает, что тензор  $c_{ijkl}$  удовлетворяет условиям симметрии

$$c_{ijkl} = c_{jilk}; \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}; \quad c_{ijkl} = c_{klij},$$

снижающим число различных констант  $c_{ijkl}$  до 21.

Аналогичные условия симметрии можно выписать и для тензоров  $c_{ijklmn}$ , ...

Конкретизация зависимости (2) связана с известными трудностями. Обычно останавливаются на простейших формах зависимости (2) и пытаются согласовать их с экспериментальными данными. Следует заметить, что первые формулировки критерия разрушения для анизотропного материала имели частный вид.

А. К. Малмейстер (см. А. К. Малмейстер и др. [1]) предложил рассматривать линейную функцию инвариантов

$$J_1 + J_2 = 1. \quad (3)$$

Инварианты  $J_3$ ,  $J_4$ , ... опущены по причине значительной их сложности.

Несколько иной вариант сформулирован в работах И. И. Гольденבלата и В. А. Кошнова [1]

$$J_1 + \sqrt{J_2} = 1. \quad (4)$$

При этом критерий разрушения является однородной функцией напряжений.

\*) По теореме Гильберта достаточно рассмотреть конечное число этих инвариантов.

Полезна, вероятно, и следующая форма:

$$J_2 = f(J_1), \quad (5)$$

которую в некотором смысле можно рассматривать как расширение критерия Шлейхера — Надаи.

Число различных констант определяется типом анизотропии (т. е. данными условиями симметрии).

В зависимости от конкретных предположений о характере анизотропии и напряженном состоянии из приведенных выше формулировок можно получить большинство предложенных ранее критериев разрушения (Марин [1], Фишер [1], К. В. Захаров [1] и др.). Мы не останавливаемся здесь на их обсуждении, отсылая читателя к упомянутым книгам и оригинальным статьям.

**3. Случай ортотропного тела.** В каждой точке ортотропного тела имеются три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии; тогда остаются лишь 3 постоянные в инварианте  $J_1$  и 9 постоянных в инварианте  $J_2$ .

Действительно, пусть имеется одна плоскость симметрии  $Ox_1x_2$ ; изменим направление оси  $x_3$  на обратное, тогда изменятся знаки напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ , коэффициенты же останутся прежними. Но тогда, вследствие инвариантности  $J_1$ ,  $J_2$ , должны обратиться в нуль следующие коэффициенты:

$$c_{13}, \quad c_{23}, \\ c_{1311}, \quad c_{1312}, \quad c_{1322}, \quad c_{1333}, \quad c_{2311}, \quad c_{2312}, \quad c_{2322}, \quad c_{2333}.$$

Пусть, далее, есть еще одна плоскость симметрии  $Ox_2x_3$ , перпендикулярная к первой плоскости  $Ox_1x_2$ . Изменяя направление оси  $x_1$ , найдем аналогично предыдущему, что равны нулю также коэффициенты

$$c_{12}, \\ c_{1211}, \quad c_{1222}, \quad c_{1233}, \quad c_{1323}.$$

При этом третья, ортогональная к первым двум, плоскость  $Ox_1x_3$  также будет плоскостью симметрии. Таким образом, для ортотропного материала отличны от нуля лишь коэффициенты

$$c_{11}, \quad c_{22}, \quad c_{33}, \\ c_{1111}, \quad c_{2222}, \quad c_{3333}, \quad c_{1212}, \quad c_{1313}, \quad c_{2323}, \quad c_{1122}, \quad c_{1133}, \quad c_{2233}.$$

Оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  образуют основную координатную систему.

**4. Плоское напряженное состояние ортотропного тела.** Значительный интерес представляет случай плоского напряженного состояния, реализующийся в тонких пластинках и оболочках. Пусть ось  $x_3$  направлена по нормали к пластинке (или

оболочке); тогда

$$\sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

При этом получим

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= c_{11}\sigma_{11} + c_{22}\sigma_{22}, \\ J_2 &= c_{1111}\sigma_{11}^2 + c_{2222}\sigma_{22}^2 + 4c_{1212}\sigma_{12}^2 + 2c_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В этих выражениях имеется лишь 6 констант материала. Их можно определить из опытов при различных напряженных состояниях.

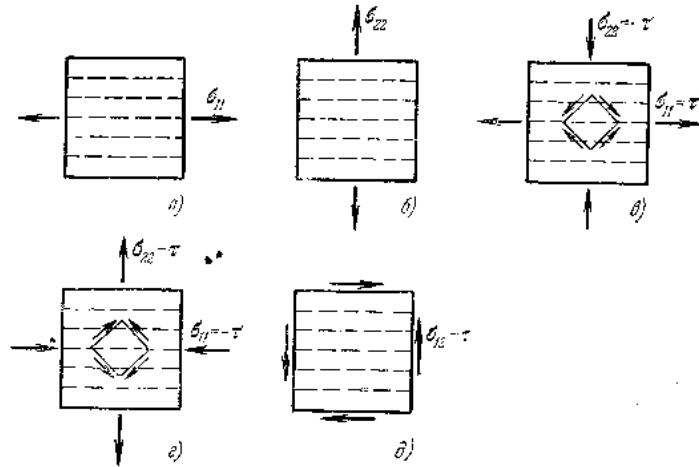


Рис. 2.3.2.

Например, при одноосном растяжении (рис. 2.3.2, а) и сжатии в направлении  $x_1$  соответственно имеем

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{11} = \sigma_{1p} \quad \text{и} \quad \sigma_{11} = -\sigma_{1c},$$

где  $\sigma_{1p}$ ,  $\sigma_{1c}$  — пределы прочности на растяжение и сжатие в первом направлении.

В направлении  $x_2$  аналогично имеем (рис. 2.3.2, б)

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{2p} \quad \text{и} \quad \sigma_{22} = -\sigma_{2c}.$$

где  $\sigma_{2p}$ ,  $\sigma_{2c}$  — пределы прочности на растяжение и сжатие во втором направлении.

Пусть выбран критерий (3). Подставляя в него последовательно выписанные значения напряжений, получим четыре уравнения

$$\left. \begin{aligned} c_{11}\sigma_{1p} + c_{1111}\sigma_{1p}^2 &= 1, & -c_{11}\sigma_{1c} + c_{1111}\sigma_{1c}^2 &= 1, \\ c_{22}\sigma_{2p} + c_{2222}\sigma_{2p}^2 &= 1, & -c_{22}\sigma_{2c} + c_{2222}\sigma_{2c}^2 &= 1, \end{aligned} \right\}$$

из которых легко находим коэффициенты прочности

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \frac{\sigma_{1c} - \sigma_{1p}}{\sigma_{1c}\sigma_{1p}}, & c_{1111} &= \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}, \\ c_{22} &= \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{2p}}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}, & c_{2222} &= \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если пределы прочности на растяжение и сжатие равны, то  $c_{11} = c_{22} = 0$ . Для нахождения оставшихся постоянных  $c_{1212}$ ,  $c_{1122}$  рассмотрим опыты чистого сдвига с напряжением  $\tau$ . Для анизотропного материала (на рис. 2.3.2 пунктиром условно показано «армирование») имеет, вообще говоря, значение направление сдвига.

В случае нагружения по схеме рис. 2.3.2, в имеем

$$\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{11} = \tau'_1; \quad \sigma_{22} = -\tau'_1.$$

В случае нагружения по схеме рис. 2.3.2, г имеем

$$\sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{11} = -\tau'_2; \quad \sigma_{22} = \tau'_2,$$

где  $\tau'_1$ ,  $\tau'_2$  — пределы прочности для соответствующих сдвигов. Теперь из (3) получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} (c_{11} - c_{22})\tau'_1 + (c_{1111} + c_{2222} - 2c_{1122})\tau'^2_1 &= 1, \\ -(c_{11} - c_{22})\tau'_2 + (c_{1111} + c_{2222} - 2c_{1122})\tau'^2_2 &= 1. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, находим

$$c_{1111} + c_{2222} - 2c_{1122} = (\tau'_1\tau'_2)^{-1}. \quad (8)$$

Используя это соотношение, получаем из предыдущих уравнений, что

$$\tau'_1 = \tau'_2.$$

Таким образом, по выбранному критерию (3) пределы прочности на сдвиги по схемам рис. 2.3.2, в и г должны быть равны. Если для данного материала это не так, необходимо исходить из другой формулировки (например, из уравнения (4)).

Рассмотрим, наконец, еще один опыт сдвига (рис. 2.3.2, д); здесь

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = \tau''.$$

где  $\tau''$  — соответствующий предел прочности (очевидно, что сдвигу  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ;  $\sigma_{12} = -\tau''$  материал оказывает такое же сопротивление). Тогда из (3) вытекает, что

$$c_{1212} = (4\tau''^2)^{-1}. \quad (9)$$

**5. Трансверсально-изотропное тело.** В этом частном случае ортотропии имеется круговая симметрия относительно одной из основных осей; пусть это будет ось  $x_3$ . Тогда направления  $x_1$ ,  $x_2$  эквивалентны, следовательно,

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22}, \\ c_{1111} &= c_{2222}, \quad c_{1313} = c_{2323}, \quad c_{1133} = c_{2233}. \end{aligned}$$

Более того, коэффициенты прочности должны быть теми же самыми в системе координат  $x'_1, x'_2$ , повернутой вокруг оси  $x_3$  на произвольный угол. Выполнив вычисления (это можно сделать по формулам, излагаемым ниже в разделе 7), получим соотношение

$$c_{2222} = c_{1122} + 2c_{1212}.$$

Таким образом, инвариант  $J_2$  содержит лишь пять различных коэффициентов.

**6. Изотропное тело.** Для изотропного тела все направления эквивалентны и любая плоскость есть плоскость симметрии. Из условия эквивалентности направлений 1, 2, 3 вытекает, что  $c_{11} = c_{22} = c_{33}$  (т. е. инвариант  $J_1$  содержит лишь одну постоянную), а

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333}; \quad c_{1212} = c_{1313} = c_{2323}; \quad c_{1122} = c_{1133} = c_{2233}.$$

При этом инвариант  $J_2$  содержит лишь два различных коэффициента.

**7. Зависимость коэффициентов прочности от направления.** Хорошо известно, что прочность образцов, вырезанных из анизотропного листа в различных направлениях (рис. 2.3.3), будет различной. Зависимость коэффициентов прочности от ориентации легко вычисляется, поскольку величины  $c_{ij}, c_{ijkl}$  образуют тензоры.

Пусть  $c_{ij}, c_{ijkl}$  — коэффициенты прочности в основной системе координат  $x_i$ . Перейдем к новой системе координат  $x'_i$ . Обозначим через

$$\alpha_{ij} = \cos(x_i, x'_j)$$

направляющие косинусы углов между основными осями  $x_i$  и новыми осями  $x'_i$ . Тогда компоненты тензоров коэффициентов прочности в новых осях будут

$$\left. \begin{aligned} c'_{ij} &= \alpha_{mi} \alpha_{nj} c_{mn}, \\ c'_{ijkl} &= \alpha_{mi} \alpha_{nj} \alpha_{pk} \alpha_{ql} c_{mnpq}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вследствие инвариантности форм  $J_1, J_2$  критерии разрушения в новых осях имеют прежний вид (но со штрихом). Так, условие (3) теперь таково:

$$c'_{ij} \sigma'_{ij} + c'_{ijkl} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} = 1, \quad (11)$$

где  $\sigma'_{ij}$  — компоненты напряжения в системе координат  $x'_i$ . На основе приведенных соотношений можно найти коэффициенты прочности в произвольном направлении.

Обратимся, например, к случаю плоского напряженного состояния ортотропной пластинки (рис. 2.3.3). Тогда

$$\alpha_{11} = \cos \varphi, \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = -\sin \varphi, \quad \alpha_{22} = \cos \varphi,$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} c'_{11} &= c_{11} \cos^2 \varphi + c_{22} \sin^2 \varphi, \\ c'_{22} &= c_{11} \sin^2 \varphi + c_{22} \cos^2 \varphi, \\ c'_{12} &= \frac{1}{2} (c_{22} - c_{11}) \sin 2\varphi, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c'_{1111} &= c_{1111} \cos^4 \varphi + c_{2222} \sin^4 \varphi + \left( c_{1212} + \frac{1}{2} c_{1122} \right) \sin^2 2\varphi, \\ c'_{2222} &= c_{1111} \sin^4 \varphi + c_{2222} \cos^4 \varphi + \left( c_{1212} + \frac{1}{2} c_{1122} \right) \sin^2 2\varphi \end{aligned} \right\}$$

и т. д.

Рассмотрим теперь растяжение образца, вырезанного под углом  $\varphi$  (см. рис. 2.3.3); тогда отлична от нуля только компонента  $\sigma'_{11}$ , причем  $\sigma'_{11} = \sigma'_{1p}$ , стало быть, из (11) получаем

$$c'_{11} \sigma'^2_{1p} + c'_{1111} \sigma'^4_{1p} = 1.$$

Отсюда можно найти предел прочности  $\sigma'_{1p}$  на растяжение в направлении  $x'_1$  через коэффициенты  $c'_{11}, c'_{1111}$ , следовательно, — через пределы прочности для основных осей  $x_i$ , входящие

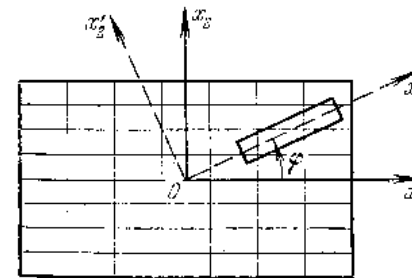


Рис. 2.3.3.

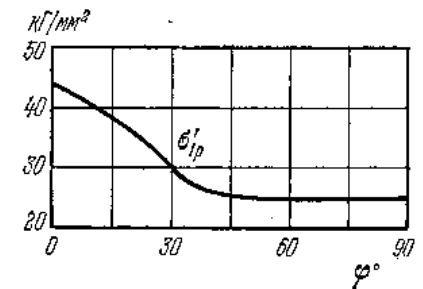


Рис. 2.3.4.

в  $c_{ij}, c_{ijkl}$ , и угол  $\varphi$ . Мы здесь не выписываем соответствующую формулу. На рис. 2.3.4 показана в качестве иллюстрации зависимость предела прочности  $\sigma'_{1p}$  от угла  $\varphi$  для стеклотекстолита (см. И. И. Гольделблат и В. А. Кошнов [1]).

**8. Условие анизотропной пластичности.** Если опасным считается развитие пластических деформаций, то критерий разрушения совпадает, по существу, с условием пластичности. Остановимся поэтому на условиях пластичности для анизотропного

тела. Возможны различные подходы к построению поверхности текучести в пространстве напряжений. Так, аналогично случаю изотропного тела, можно исходить из предельных значений касательных напряжений, считая, что в анизотропном теле эти значения различны для разных площадок: развиты и несколько иные схемы обобщения условия Треска — Сен-Венана (см., в частности, работы Д. Д. Ивлева [1] и М. С. Саркисяна [1]). Чаще, однако, используется схема гладкой поверхности текучести.

Располагая инвариантами  $J_1, J_2$ , нетрудно сформулировать условие

$$J_2 = f(J_1), \quad (12)$$

являющееся перефразировкой уравнения (5); условие (12) — обобщение условия Мизеса — Шлейхера.

Первое условие анизотропной пластичности, предложенное Мизесом в 1928 г., является частным случаем (12). Мизес принял, что пределы текучести на растяжение и сжатие равны, тогда следует отбросить линейную форму  $J_1$ , и (12) принимает вид

$$c_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1. \quad (13)$$

Далее Мизес полагал, что гидростатическое давление не влияет на текучесть материала; тогда в условии текучести должны входить только разности нормальных напряжений. Вместо 21 постоянной условие (13) теперь будет содержать 15 постоянных.

Для ортотропного тела это условие текучести принимает вид

$$A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ + A_{12}\sigma_{12}^2 + A_{23}\sigma_{23}^2 + A_{13}\sigma_{13}^2 = 1, \quad (14)$$

где  $A_{11}, \dots, A_{13}$  — коэффициенты анизотропии.

В такой форме условие пластичности написано Хиллом и использовано им для решения ряда задач. Таким образом, для ортотропного тела условие Мизеса — Хилла содержит лишь 6 коэффициентов анизотропии.

В плоском напряженном состоянии  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , и условие (14) содержит 4 коэффициента анизотропии:

$$A_{11}\sigma_{22}^2 + A_{22}\sigma_{11}^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + A_{12}\sigma_{12}^2 = 1. \quad (15)$$

Для изотропной пластинки все направления эквивалентны, следовательно,  $A_{11} = A_{22} = A_{33}$ . Кроме того, условие (15) должно сохранять свою форму в прямоугольной системе координат  $x'_1, x'_2$ , повернутой вокруг оси  $x_3$  на произвольный угол; это приводит к соотношению  $A_{12} = 6A_{11}$ .

**9. Заключительные замечания.** В предыдущем параграфе (§ 2.2) рассмотрены критерии разрушения изотропных материа-

лов; многочисленные варианты этих критериев учитывают те или иные особенности разрушения. Нельзя считать вполне удавшимся попытку синтеза этих особенностей в одном критерии, в «единой теории прочности».

Можно, разумеется, и для анизотропных материалов развить различные сложные варианты критериев разрушения. Однако реализация этой программы вряд ли целесообразна в связи с опытными данными для конкретных материалов. Дело не только в том, что накопленная информация, в общем, скудна. Нельзя забывать о существенном усложнении картины разрушения для анизотропных тел (особенно — композитных) и неизбежной в ряде случаев необходимости учета структуры материала.

## § 2.4. О критериях длительной и усталостной прочности

**1. Временная зависимость прочности.** Экспериментальные исследования, а также эксплуатация машин, работающих в условиях высокой температуры, показали, что прочность материалов, находящихся под нагрузкой, с течением времени падает.

При достаточно низких температурах (например, при комнатной температуре для обычных сталей) зависимость прочности от времени почти незаметна. С повышением температуры выявляется все более резкая зависимость прочности от времени. Это обстоятельство стало решающим для прочности многих современных конструкций, функционирующих при высоких температурах. В технической литературе уделяется большое внимание явлению длительной прочности. Этот термин, возможно, не вполне удачен, но широко используется.

Явление длительной прочности поставило ряд важных теоретических, экспериментальных и технических проблем. Стало ясным, что разрушение не является мгновенным актом, происходит постепенно, исподволь. Физическая картина длительного разрушения сложна и имеет много своеобразных ответвлений (см. книги В. Е. Гуля [1], В. М. Розенберга [1], Т. Екобори [1] и др.). Здесь мы коснемся лишь некоторых фактов, относящихся к длительной прочности; более детально механические аспекты вопроса обсуждаются в гл. 6 и 7.

**2. О критериях длительной прочности.** Наиболее прост механизм вязкого разрушения, реализующийся при быстром росте деформаций ползучести. Последние приводят к уменьшению поперечного сечения тела, что, в свою очередь, влечет за собой увеличение напряжения и скорости ползучести. Процесс ослабления сечения ускоряется, сечение становится исчезающе малым за конечный промежуток времени. Для деформационных разрушений материалов (например, стали), развивающихся при

достаточно высоких напряжениях, эта простая (по существу, геометрическая) схема приводит к удовлетворительным результатам.

Однако, если в процессе ползучести в материале происходят изменения его прочностных свойств, происходит повреждение его, необходимы иные концепции.

Материал всегда имеет дефекты в субмикро- и микроструктуре. В условиях ползучести эти дефекты растут, одновременно возникают новые дефекты. Материал постепенно разрушается, его несущая способность падает и в конце концов наступает полное разрушение.

Для разных материалов процессы накопления повреждений объясняются различными физическими механизмами.

Так, в полукристаллических металлах в зависимости от уровня напряжения и температуры преобладает внутривзеренное или межзеренное разрушение. При этом значительную роль в развитии повреждений играют дислокационные механизмы. Интересно отметить экспериментально обнаруженную зависимость вида

$$\xi t_* = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\xi$  — скорость установившейся ползучести, а  $t_*$  — время до разрушения.

Хрупкие аморфные тела разрушаются преимущественно из-за нарастания разного рода дефектов и микротрещин. Заметим, что развитие дефектов может быть объяснено тепловыми флуктуациями частиц (флуктуационная теория прочности хрупких тел, развиваемая С. Н. Журковым [1]; см. также обзор В. Р. Рогова, А. И. Слуцкера, Э. Е. Томашевского [1]). Напряжения снижают потенциальные барьеры и повышает вероятность разрыва связей между частицами вследствие тепловых флуктуаций. При этом время до разрушения может быть найдено по формуле

$$t_* = Ae^{-\alpha\sigma}, \quad (2)$$

где  $A$ ,  $\alpha$  — коэффициенты, зависящие от температуры.

Обратимся к более узкому вопросу о зависимости критерия длительной прочности для изотропных хрупких материалов (преимущественно металлов) от вида напряженного состояния. Можно полагать, что при фиксированных главных направлениях существует некоторое эквивалентное напряжение

$$\sigma_3 = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3)$$

( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения), определяющие время хрупкого разрушения  $t_*$ . Разным значениям эквивалентного напряжения  $\sigma_3$  отвечают различные времена разрушения  $t_*$ . Иными

словами, имеется некоторая зависимость вида

$$\sigma_3 = \varphi(t_*), \quad (4)$$

определяющая в пространстве напряжений вложенные друг в друга поверхности длительной прочности (рис. 2.4.1). Подробно упомянутые критерии рассматриваются в гл. 6; отметим здесь лишь простой критерий наибольшего растягивающего напряжения

$$\sigma_3 = \sigma_{\text{max}}, \quad (5)$$

обоснованный для плоского напряженного состояния опытами Джонсона (см. Джонсон и др. [1]).

Для анизотропных материалов эквивалентное напряжение может быть взято в форме

$$\sigma_3 = f(J_1, J_2, \dots), \quad (6)$$

где  $J_1, J_2, \dots$  — рассмотренные выше инварианты.

В первом приближении можно взять формы, использованные в предыдущем параграфе.

**3. Явление усталости.** При большом числе повторных нагружений и сравнительно низких напряжениях (часто значительно ниже предела текучести) наблюдаются хрупкие разрушения даже у весьма пластичных металлов. Поля напряжений могут вызываться переменными нагрузками или переменными тепловыми полями (термическая усталость). На рис. 2.4.2 показаны симметричный и асимметричный циклы нагружения.

Принято различать усталость при действии быстро меняющихся (вибрационных) нагрузок и так называемую малоцикловую (статическую) усталость, когда нагрузки меняются медленно, а напряжения сравнительно высоки.

Причина усталостных разрушений лежит в постепенном накоплении повреждений. В первой стадии (инкубационный период) повреждения носят рассеянный характер и не улавливаются обычными методами наблюдения. В конце первой стадии возникает трещина (или трещины) усталости, которая в последующем интенсивно развивается.

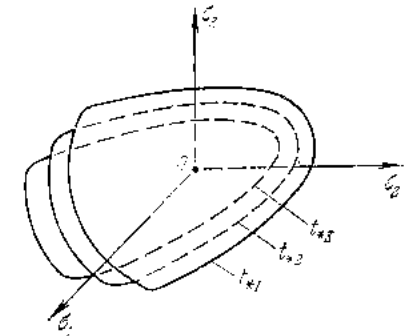


Рис. 2.4.1.

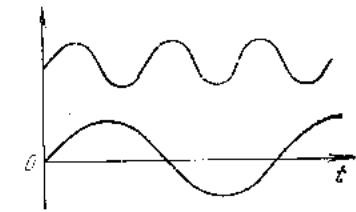


Рис. 2.4.2.



Продолжительность первого периода зависит от условий нагружения, конфигурации образца и других причин. Для гладких образцов продолжительность первого периода составляет 80—90% от общего числа циклов, для образцов с надрезами (т. е. с концентраторами) она заметно меньше.

Многие детали физического механизма усталостных разрушений остаются еще неизвестными.

В грубом приближении может быть дано следующее объяснение. Из-за наличия дефектов (пор, включений и т. д.), различной ориентации зерен в поликристаллическом материале напряженное состояние имеет значительные местные отклонения («выбросы»). Вследствие этого при нагружении возникают локальные пластические деформации. При переменных нагрузках происходят пластические деформации разных знаков, приводящие к возникновению и развитию микротрещин; в результате укрупнения и слияния последних появляются макротрещины. Концентрация напряжений играет весьма важную роль в склонности к усталостному разрушению. В частности, повреждения поверхностного слоя снижают усталостную прочность.

Данные усталостных испытаний характеризуются большим разбросом. Причина этого лежит в статистическом характере усталостных разрушений, в индивидуальных особенностях каждого образца. При испытаниях большого числа «одинаковых» образцов данные серии испытаний обычно удовлетворительно описываются нормальной кривой распределения (рис. 2.4.3). Сравнительно небольшое число образцов разрушается при малом и большом числе циклов. Основная масса разрушений группируется в средней части.



Рис. 2.4.3.

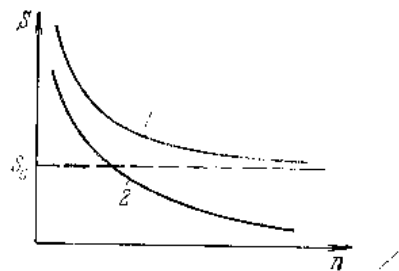


Рис. 2.4.4.

Типичные кривые усталостных испытаний показаны на рис. 2.4.4. По оси ординат отложена амплитуда цикла  $S$  (разность между наибольшим и наименьшим напряжениями цикла), по оси абсцисс — число циклов  $n$  до разрушения. У многих материалов имеется выраженный горизонтальный участок, соответствующий пределу усталости  $S_0$ . При амплитуде  $S < S_0$  раз-

рушение практически не происходит (кривая 1). Для других материалов кривая усталости все время снижается (кривая 2).

Характер кривой усталости зависит от условий испытания (температуры, среды, размеров образца и т. д.) и может изменяться для данного материала в широких пределах.

Если данный образец испытывает переменные нагрузки при разных напряжениях в разных интервалах времени, то его «выносливость» может быть описана *линейным законом суммирования повреждений*

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1, \quad (7)$$

где  $n_i$  — число циклов в  $i$ -м интервале, а  $N_i$  — число циклов до разрушения при соответствующем уровне напряжения.

Заметим, наконец, что при несимметричных циклах лучшие результаты дает использование не амплитуды напряжения, а некоторого приведенного напряжения  $\bar{\sigma}$ , состоящего из амплитуды цикла и среднего напряжения с некоторым эмпирическим коэффициентом (см. И. А. Биргер [2]).

Критерий Мэнсона — Коффина. Этот критерий, относящийся, в основном, к малоцикловой усталости при симметричном цикле растяжения — сжатия, интересен тем, что он связывает число циклов до разрушения  $N'$  с размахом пластической деформации  $\Delta_p$  (шириной петли пластического гистерезиса). Обработка большого числа экспериментальных данных приводит к выводу, что

$$N' \Delta_p^2 = \text{const} = C. \quad (8)$$

Отметим, что эта формула дает удовлетворительные результаты даже в применении к обычным испытаниям на разрыв (когда  $N' = 1/4$ ). Основываясь на этом обстоятельстве, В. В. Новожилов и О. Г. Рыбакина [1] предприняли интересную попытку построения критерия прочности, охватывающего как усталостные, так и статические разрушения.

**4. О критериях усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии.** Этот вопрос в общей постановке очень сложен. Так, главные оси напряженного состояния и главные напряжения могут изменяться, и необходимо учитывать историю нагружения; большие трудности вносит анизотропия и т. д.

Обычно принимают, что главные направления фиксированы, а главные напряжения изменяются пропорционально периодической функции времени, т. е.

$$\sigma_i = \sigma_{i0} \omega(t). \quad (9)$$

Ограничимся также рассмотрением случая изотропного материала.

Как и при статическом нагружении (§ 2.2), принимается то или иное допущение относительно эквивалентного напряжения  $\sigma_3$ , определяющего наступление разрушения.

Критерий наибольшего приведенного напряжения. Пусть  $\bar{\sigma}_i$  — значения приведенных напряжений в главных направлениях. Разрушение определяется максимальным приведенным напряжением

$$\sigma_3 = \max(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3). \quad (10)$$

Критерий наибольшего приведенного касательного напряжения. В этой схеме вычисляются наибольшие и средние значения главных касательных напряжений и определяется наибольшее приведенное касательное напряжение  $\bar{\tau}_{\max}$  (аналогично случаю одноосного растяжения).

Критерий приведенной интенсивности касательных напряжений. Вычисляются приведенные значения главных касательных напряжений и по ним составляется приведенная интенсивность  $\bar{T}$ .

### ГЛАВА 3

## ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА

### § 3.1. Идеально пластическое тело

1. Пластическое течение, понятие предельной нагрузки. При низкой температуре механические свойства многих конструкционных металлов практически не зависят от скорости деформации при статическом нагружении. Можно считать, другими словами, что имеет место равновесный процесс пластической деформации, не связанный с временными факторами (атермическая пластичность). Кроме того, нередко пластическая деформация приводит к сравнительно слабому упрочнению. На рис. 3.1.1, а

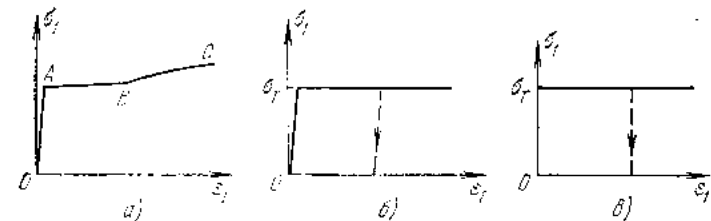


Рис. 3.1.1.

приведена типичная кривая растяжения низкоуглеродистой стали;  $OA$  — участок линейной упругости,  $AB$  — площадка текучести,  $BC$  — участок упрочнения. Естественно, что для решения многих механических задач можно исходить из схемы идеального упруго-пластического тела (без упрочнения), показанной на рис. 3.1.1, б. При этом за пределом упругости напряжение постоянно и равно пределу текучести

$$\sigma_1 = \text{const} = \sigma_T. \quad (1)$$

Ограниченность напряжения означает, вместе с тем, что тело может выдерживать нагрузки также ограниченной величины.

Рассмотрим картину деформации идеального упруго-пластического тела на примере простейшей решетки, состоящей из трех стержней одинаковой длины  $l$  и одинаковой площади поперечного сечения  $F$  (рис. 3.1.2). Условимся считать вертикальный стержень «лишним», пусть  $s_2 = x$  — напряжение в нем. Из условий равновесия находим, что напряжения в стержнях равны

$$s_1 = s_3 = p - x, \quad s_2 = x, \quad \text{где } p = \frac{P}{F}.$$

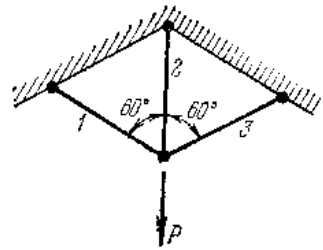


Рис. 3.1.2.

При достаточно малой нагрузке  $P$  решетка деформируется упруго; используя условия совместности деформаций стержней 1, 2 и закон Гука, находим напряжения в упругом состоянии:

$$s_1 = s_3 = \frac{1}{3} p, \quad s_2 = \frac{2}{3} p.$$

При  $s_2 = \sigma_T$  стержень 2 переходит в пластическое состояние; при этом  $P = \frac{3}{2} \sigma_T F \equiv P_0$ . В упругом состоянии (при  $P < P_0$ )

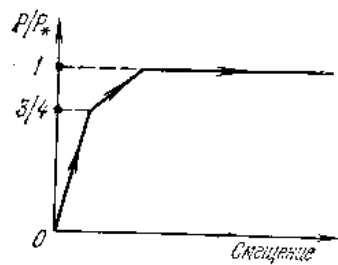


Рис. 3.1.3.

смещение узла прямо пропорционально нагрузке (рис. 3.1.3).

С возрастанием нагрузки, при  $P \geq P_0$ , вертикальный стержень испытывает пластическое течение при постоянном напряжении  $s_2 = \sigma_T$ ; решетка находится в упруго-пластическом состоянии и напряжения в стержнях равны

$$s_1 = s_3 = p - \sigma_T, \quad s_2 = \sigma_T.$$

Стержни 1, 3 продолжают деформироваться упруго; смещение узла будет линейной функцией нагрузки  $P$  (см. рис. 3.1.3). Это решение верно до тех пор, пока напряжения в стержнях 1, 3 ниже предела текучести, т. е. при

$$P < 2\sigma_T F \equiv P_*$$

Наконец, при  $P = P_*$  в боковых стержнях также достигается пластическое состояние, решетка полностью переходит в состояние текучести, дальнейший рост нагрузки невозможен. Говорят, что *несущая способность* решетки исчерпана, достигнута *предельная нагрузка*  $P_*$ .

Это состояние можно интерпретировать как *пластическое разрушение* конструкции.

Вернемся теперь к схеме идеального упруго-пластического тела, изображенной на рис. 3.1.1. При рассмотрении задач, в которых главное значение имеют пластические деформации, можно сделать дальнейший шаг и вообще пренебречь упругими деформациями. Так возникает схема жестко-пластического тела, показанная на рис. 3.1.1, в. Жестко-пластическое тело не деформируется до тех пор, пока нагрузка не достигнет предельного значения.

Если рассмотреть решетку (рис. 3.1.2) по схеме жестко-пластического тела, то промежуточные состояния — упругое и упруго-пластическое — выпадают. Решетка не испытывает никаких деформаций, пока  $P < P_*$ ; при  $P = P_*$  решетка сразу переходит в пластическое состояние.

Таким образом, если тело изготовлено из сравнительно слабо упрочняющегося материала и подвержено действию статической нагрузки и по условиям эксплуатации допустимы пластические деформации, то предельная нагрузка дает хорошее представление о несущей способности конструкции. Конструкция при этом будет достаточно прочной, если нагрузка

$$P < \frac{P_*}{n}, \quad (2)$$

где  $n > 1$  — коэффициент запаса.

В отмеченных условиях можно, как правило, считать, что локальные пластические деформации, возникающие в местах концентрации напряжений, безопасны. Очевидно, что расчет по предельным *нагрузкам* дает существенно более правильное представление о прочности конструкции, чем расчет по максимальным *напряжениям*, поскольку в первом случае в основе расчета лежит ясная модель пластического разрушения.

Нахождение предельных нагрузок является одной из основных задач теории пластичности.

**2. Условие текучести.** Как уже отмечалось, для рассмотрения предельных нагрузок необходимо исходить из теории идеальной пластичности. Более того, задачи пластического разрушения можно анализировать, опираясь на простейшую схему жестко-пластического тела. Остановимся в связи с этим на условии текучести при сложном напряженном состоянии.

При одноосном растяжении в состоянии пластичности напряжение постоянно. Сложное напряженное состояние  $\sigma_{ij}$  условимся изображать точкой в пространстве напряжений. В состоянии текучести напряженные состояния принадлежат точкам *поверхности текучести*  $\Sigma$

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (3)$$

показанной на рис. 3.1.4. Материал испытывает лишь упругие

деформации (а по схеме жестко-пластического тела — вовсе не деформируется), если напряженное состояние лежит внутри поверхности текучести, т. е. при  $f(\sigma_{ij}) < 0$ . Ненапряженное состояние  $\sigma_{ij} = 0$  лежит внутри поверхности  $\Sigma$ . Предполагается, что уравнение поверхности (3) содержит необходимое число констант пластичности и не зависит от среднего давления. Так, для изотропного тела с равными сопротивлениями на растяжении и сжатие это будет одна постоянная (см. § 2.2); для ортотропного тела по условию Мизеса — Хилла нужно включить 6 различных постоянных (§ 2.3).

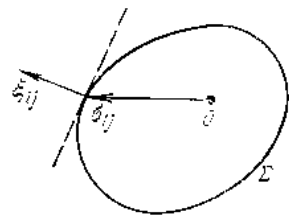


Рис. 3.1.4.

Поверхность текучести может быть регулярной или кусочногладкой (например, шестигранная призма текучести Треска — Сен-Венана). В теории пластичности доказывается (на основе квазитермодинамического постулата Друкера), что поверхность текучести — выпуклая, т. е. лежит по одну сторону касательной (или опорной — при наличии плоских участков) плоскости.

**3. Закон ассоциированного течения.** Скорость пластической деформации  $\xi_{ij}$  по умножении на постоянную надлежащей размерности также можно изобразить вектором в том же пространстве напряжений.

На основе того же квазитермодинамического постулата Друкера устанавливается, что *вектор скорости деформации  $\xi_{ij}$  нормален к поверхности текучести  $\Sigma$  в гладких ее точках*, т. е.

$$\xi_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

где  $\lambda \geq 0$  — неопределенный скалярный множитель. Вдоль ребер (если они имеются на поверхности текучести) закон течения имеет несколько иную форму.

### § 3.2. Теоремы о пластическом разрушении

Предельные (разрушающие) нагрузки характеризуются простыми экстремальными свойствами, которые позволяют сформулировать ряд качественных заключений и указать эффективные способы прямого нахождения предельной нагрузки.

**1. Основное энергетическое уравнение.** Рассмотрим некоторое тело, занимающее объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S = S_F + S_v$  (рис. 3.2.1). На части поверхности тела  $S_F$  задано усилие  $F_n = X_{ni}n_i$ . На части поверхности тела  $S_v$  задана скорость  $v_0 = v_{0i}i_i$ . Объемные силы не учитываются.

Пусть  $\sigma_{ij}$  — некоторое равновесное поле напряжений, т. е. внутри тела

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

а на границе тела  $S_F$

$$\sigma_{ij}n_j = X_{ni} \quad \text{на } S_F, \quad (2)$$

где  $n_i$  — направляющие косинусы нормали  $n$ .

Рассмотрим, далее, некоторое непрерывное поле скорости  $v_i$ , удовлетворяющее заданным условиям на  $S_v$ , т. е.

$$v_i = v_{0i} \quad \text{на } S_v. \quad (3)$$

Этому полю скоростей отвечают компоненты скорости деформации по известным формулам

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Поля напряжений  $\sigma_{ij}$  и скоростей  $v_i$  в остальном произвольны и, вообще говоря, не связаны между собой.

Для всякой сплошной среды, находящейся в равновесии, справедливо соотношение

$$\int \sigma_{ij}\xi_{ij} dV = \int X_{ni}v_i dS, \quad (5)$$

где первый интеграл распространяется по всему объему тела  $V$ , а второй — по всей поверхности тела  $S$ .

Для доказательства представим поверхностный интеграл с помощью соотношений Коши в виде

$$\int X_{ni}v_i dS = \int \sigma_{ij}v_in_j dS$$

и преобразуем его в объемный по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int \sigma_{ij}v_in_j dS = \int v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int \sigma_{ij}\xi_{ij} dV.$$

По первый интеграл в правой части равен нулю в силу дифференциальных уравнений равновесия (1).

В уравнении (5) справа стоит мощность поверхностных сил, слева — «рассеяние»; уравнение (5) можно написать сразу на основе принципа виртуальной работы.

В жестких (недеформируемых) частях тела следует полагать  $\xi_{ij} = 0$ , поскольку такие части испытывают лишь жесткое перемещение.

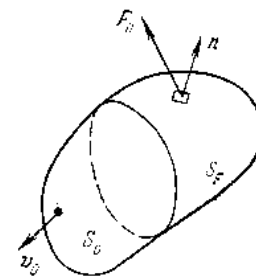


Рис. 3.2.1.

В жестко-пластических телах важное значение имеют разрывные поля напряжений и скоростей, так как редко удается построить непрерывное (точное или приближенное) решение задачи.

Если напряжения разрывны на некоторых поверхностях  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), то последние разбивают тело на конечное число частей, в каждой из которых напряжения изменяются непрерывно. Пусть с одной стороны  $S_k$  действуют поверхностные силы  $X_{ni}^+$ , с другой  $X_{ni}^-$ . Из условий равновесия элемента какой-либо поверхности разрыва вытекает, что

$$X_{ni}^+ + X_{ni}^- = 0. \quad (6)$$

Следовательно, при сложении уравнений (5), выписанных для каждой из выделенных частей тела, все интегралы по поверхностям разрыва сократятся. Таким образом, наличие разрывов в напряжениях не изменяет вида уравнения (5).

Рассмотрим теперь разрывы поля скоростей на некоторых поверхностях  $S_l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Вектор напряжения  $\sigma_n$ , действующий на  $S_l$ , разбивает на разрыве скорости  $[v] = v^+ - v^-$  мощность

$$W_p = \int (\sigma_n \cdot [v]) dS_p,$$

где интеграл распространяется на все поверхности разрыва  $S_p = S_1 + S_2 + \dots$ .

Отметим, что разрыв возможен лишь в составляющей скорости, лежащей в касательной плоскости к  $S_l$ , иначе в теле образуются трещины. Исключение составляет случай тонкой пластины (или оболочки), когда вдоль некоторых линий может возникнуть резкое утонение («шейка») или утолщение («валик»). Ограничимся здесь рассмотрением случая непрерывной нормальной составляющей скорости. Тогда предыдущее выражение можно представить в виде

$$W_p = \int \tau [v] dS_p, \quad (7)$$

где через  $[v] = |v^+ - v^-|$  обозначена величина разрыва касательной составляющей скорости, а через  $\tau$  — касательная составляющая напряжения в направлении вектора разрыва  $v^+ - v^-$ . В случае плоского напряженного состояния  $W_p$  имеет другой вид (см., например, Л. М. Качанов [1]).

Включая мощность  $W_p$  в основное энергетическое уравнение (5), получаем его общую формулировку, справедливую и для разрывных полей:

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = \int X_{ni} v_i dS. \quad (8)$$

Как уже отмечалось, скорости и напряжения здесь, вообще говоря, не связаны между собой.

Если же скорости деформации связаны с напряжениями ассоциированным законом (4) § 3.2, то поверхность разрыва является поверхностью скольжения. Действительно, пусть  $x, y, z$  — локальная система координат в рассматриваемой точке поверхности разрыва, причем ось  $z$  направлена по нормали, а ось  $x$  — по вектору разрыва скорости. Тогда на поверхности разрыва составляющая скорости сдвига в направлении разрыва  $\eta_{xz} \rightarrow \infty$ , а остальные составляющие скорости сдвига  $\eta_{yz}, \eta_{xy}$  остаются ограниченными. При этом касательное напряжение  $\tau_{xz} = \tau$  достигает наибольшего значения, определяемого условием текучести. Поскольку сдвиг происходит в направлении действующего касательного напряжения, то

$$\tau [v] > 0. \quad (9)$$

**2. Пропорциональное нагружение, коэффициент предельной нагрузки.** Ограничимся рассмотрением простого, но важного случая поверхностных сил, возрастающих пропорционально одному параметру  $m > 0$ , именно

$$X_{ni} = m X_{ni}^0 \text{ на } S_F, \quad (10)$$

где  $X_{ni}^0$  — некоторое фиксированное распределение нагрузки на  $S_F$ . Кроме того, примем, что на части поверхности  $S_p$  скорости равны нулю:

$$v_{0i} = 0 \text{ на } S_p. \quad (11)$$

Предельное состояние тела достигается при некотором значении  $m = m_*$ . Соответствующее значение  $m_*$  называется *коэффициентом предельной нагрузки*.

При пропорциональном нагружении основное энергетическое уравнение принимает вид

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = m \int X_{ni}^0 v_i dS_F. \quad (12)$$

**3. Верхняя оценка предельной нагрузки, кинематический коэффициент.** Условимся под  $\sigma_{ij}, \xi_{ij}, v_i$  понимать *действительное решение задачи*; при этом напряжения и скорости деформации связаны ассоциированным законом (4) и удовлетворяют всем условиям равновесия и сплошности. По отношению к действительному решению основное энергетическое уравнение, очевидно, справедливо.

Рассмотрим также другое, *кинематически возможное поле*  $v'_i$ , удовлетворяющее условию несжимаемости и нулевым граничным условиям (11) на  $S_p$ . Поле  $v'_i$  можно интерпретировать как *возможный механизм разрушения*. Скоростям  $v'_i$  отвечают согласно (4) скорости деформации  $\xi'_{ij}$ ; последним же по закону

ассоциированного течения соответствует девиатор напряжений  $S'_{ij}$ , удовлетворяющий условию текучести. Конечно, эти напряжения не удовлетворяют, вообще говоря, уравнениям равновесия. Кинематически возможное поле  $v'_i$  разрывно на некоторых поверхностях  $S'_l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ . Обозначим через  $\tau^*$  соответствующее значение касательного напряжения на  $S'_l$ .

Определим кинематический коэффициент  $m_k$  из энергетического уравнения

$$m_k \int X_{ni}^0 v'_i dS_F = \int \sigma'_{ij} \xi'_{ij} dV + \int \tau^* [v'] dS'_p, \quad (13)$$

т. е. коэффициент  $m_k$  определяется сопоставлением мощности заданных внешних сил на кинематически возможных скоростях с кинематически возможным рассеянием.

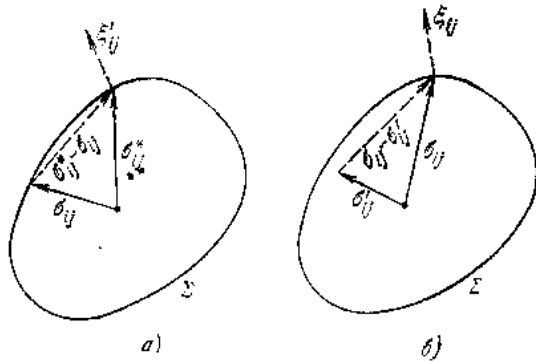


Рис. 3.2.2.

С другой стороны, по отношению к действительному распределению напряжений  $\sigma_{ij}$  и кинематически возможному полю  $v'_i$  основное энергетическое уравнение (12) переписывается в форме

$$m_* \int X_{ni}^0 v'_i dS_F = \int \sigma_{ij} \xi'_{ij} dV + \int \tau [v'] dS'_p. \quad (14)$$

Предполагается, что кинематически возможное поле скорости  $v'_i$  выбрано таким, что

$$\int X_{ni}^0 v'_i dS_F > 0. \quad (15)$$

Вычитая из уравнения (13) уравнение (14), находим

$$(m_k - m_*) \int X_{ni}^0 v'_i dS_F = \int (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \xi'_{ij} dV + \int (\tau^* - \tau) [v'] dS'_p.$$

Так как поверхность текучести — выпуклая (рис. 3.2.2, а), то  $(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) \xi'_{ij} \geq 0$ ; это верно и в сингулярных точках поверхно-

сти. Далее, касательное напряжение  $\tau^*$ , ассоциированное с полем  $\xi'_{ij}$ , достигает на  $S'_p$ , как отмечалось выше, наибольшего значения; поэтому  $(\tau^* - \tau)[v] \geq 0$ . Таким образом, правая часть неотрицательна. Следовательно,

$$m_k \geq m_*, \quad (16)$$

т. е. коэффициент предельной нагрузки  $m_*$  не может быть больше кинематически возможного коэффициента  $m_k$ .

**4. Нижняя оценка предельной нагрузки, статический коэффициент.** Введем представление о статически возможных напряженных состояниях текучести  $\sigma'_{ij}$ . Условимся так называть любое напряженное состояние  $\sigma'_{ij}$ , удовлетворяющее внутри тела дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} = 0,$$

не превосходящее предела текучести, т. е.

$$f(\sigma'_{ij}) \leq 0,$$

а на  $S_F$  согласующееся с несколько измененными граничными условиями:

$$X_{ni} = m_s X_{ni}^0 \quad \text{на } S_F, \quad (17)$$

где  $m_s$  — некоторое значение параметра нагрузки. Если во всем теле удалось построить поле напряжений  $\sigma'_{ij}$  (оно может быть разрывным), удовлетворяющее сформулированным условиям, то множитель  $m_s$  называется статическим коэффициентом предельной нагрузки.

Для статически возможного напряженного состояния текучести  $\sigma'_{ij}$  и действительного поля скоростей  $v_i$  уравнение (12) переписывается в форме

$$\int \sigma'_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = m_s \int X_{ni}^0 v_i dS_F.$$

Вычитая отсюда уравнение

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = m_* \int X_{ni}^0 v_i dS_F,$$

вытекающее из (12) для действительных напряжений  $\sigma_{ij}$  и скоростей  $v_i$ , находим

$$(m_* - m_s) \int X_{ni}^0 v_i dS_F = \int (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \xi_{ij} dV + \int (\tau - \tau') [v] dS_p. \quad (18)$$

Так как поверхность текучести  $\Sigma$  — выпуклая, скорость деформации  $\xi_{ij}$  нормальна к  $\Sigma$  (см. рис. 3.2.2, б), то

$$(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) \xi_{ij} \geq 0.$$

Далее, касательное напряжение  $\tau$  ассоциировано с полем  $\xi_{ij}$  и на  $S_p$  достигает наибольшего значения, причем  $\tau[v] > 0$ ; таким образом,  $(\tau - \tau')[v] \geq 0$ . Следовательно, правая часть соотношения (18) неотрицательна, стало быть,

$$m_* \geq m_s \quad (19)$$

т. е. коэффициент предельной нагрузки  $m_*$  не может быть меньше статического коэффициента  $m_s$ .

**5. Следствия.** Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из доказанных неравенств.

**1. Коэффициент предельной нагрузки единствен.** Действительно, согласно неравенству (16) коэффициент предельной нагрузки  $m_*$  для действительного поля скоростей достигает абсолютного минимума. Этому результату противоречит предположение о возможности двух различных значений коэффициента  $m_{*1}, m_{*2}$ .

**2. Добавление к телу материала не может понизить предельную нагрузку.** Пусть к телу, занимающему объем  $V_0$  (рис. 3.2.3), вдоль свободной части границы присоединен объем  $V_1$ . Предельная нагрузка для первоначального тела равна  $m_*^0$ . Для нового тела можно задать следующее статически возможное напряженное состояние текучести: в объеме  $V_0$  пусть будут напряжения предельного состояния для первоначального тела, в дополнительном же объеме  $V_1$  напряжения положим равными нулю. Но тогда, по теореме (19), предельная нагрузка  $m_*$  для нового тела не меньше предельной нагрузки  $m_*^0$ .

Аналогично можно показать, что

**3. Удаление материала не может повысить предельную нагрузку.**

**4. Увеличение предела текучести в некоторых частях тела не может понизить предельную нагрузку.**

**6. Полное решение.** Выше было показано, что  $m_h \geq m_* \geq m_s$ .

При удачном выборе механизма разрушения  $v'_i$  и статически возможного напряженного состояния текучести  $\sigma'_{ij}$  можно получить достаточно узкие границы для коэффициента предельной нагрузки. В простых задачах иногда удается построить такие поля, что  $m_h = m_s$ , т. е. удается получить точное значение предельной нагрузки. В принципе, на основе методов математиче-



Рис. 3.2.3.

ского программирования, можно строить процессы последовательного сближения значений коэффициентов  $m_h$  и  $m_s$ . Для простых тел (балки, рамы) условия текучести представляются линейными соотношениями и задача решается хорошо разработанными методами линейного программирования. Для тел же сложной формы использование указанных общих математических методов наталкивается на трудности.

Ограничимся изложением одного полезного приема, позволяющего в некоторых случаях получить точное решение. Пусть построено кинематически возможное решение, по которому в теле имеются пластические и жесткие зоны. Можно попытаться продолжить напряженное состояние в пластических зонах в жесткие области, причем так, чтобы условие текучести нигде не превышалось, а напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия. Тогда построенное во всем теле поле напряжений будет статически возможным пластическим состоянием. При этом верхняя граница  $m_h$  и нижняя граница  $m_s$  предельной нагрузки будут совпадать. Подобные решения называются *полными*, ибо они приводят к точному значению предельной нагрузки. Вопрос о том — как продолжить напряженное состояние в жесткие зоны — остается, вообще говоря, открытым.

### § 3.3. Примеры

Рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих применение теорем о пластическом разрушении. Методы расчета различных конструкций на основе указанных теорем излагаются в ряде книг (см. Прагер, Ходж [1], Прагер [2], Хилл [1], А. А. Ильюшин [1], Л. М. Качанов [1] и др.).

**1. Балка с защемленными концами под действием равномерной нагрузки.** Жестко-пластическая балка с защемленными концами нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.3.1, а). Если некоторое сечение балки находится в состоянии текучести, то распределение напряжений в этом сечении (при условии его симметрии) имеет вид, показанный на рис. 3.3.2. В сечении образуется пластический шарнир, изгибающий момент достигает предельного значения  $M_T$ , зависящего от формы поперечного сечения. Так, для балки прямоугольного поперечного сечения (ширина  $b$ , высота  $h$ ) будет

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \quad (1)$$

Рассмотрим механизм разрушения, изображенный на рис. 3.3.1, б: на опорах и в середине балки имеются пластические шарниры, жесткие участки  $AO$ ,  $OB$  поворачиваются относительно опор  $A$ ,  $B$  с угловой скоростью  $\omega$ .

Сопоставим, согласно уравнению (13) предыдущего параграфа, мощность нагрузки  $q$  на кинематически возможных скоростях с рассеянием в шарнирах:

$$2 \frac{ql}{2} \frac{1}{4} \omega = M_T \omega + 2M_T \omega + M_T \omega.$$

Отсюда получаем значение кинематической нагрузки

$$q_k = \frac{16M_T}{l^2}.$$

Найдем теперь статическую нагрузку  $q_s$ . Для этого нужно построить эпюру изгибающих моментов, уравновешивающихся с внешними силами и не превосходящих  $M_T$ . Но для «надломленной балки» (рис. 3.3.1, б) эпюра изгибающих моментов  $M$

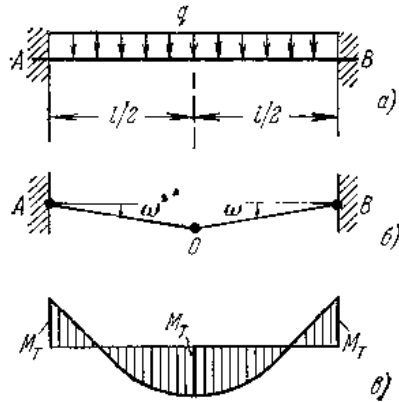


Рис. 3.3.1.

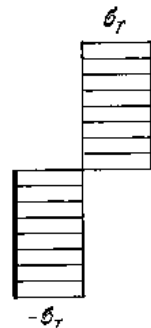


Рис. 3.3.2.

имеет вид, показанный на рис. 3.3.1, в. Очевидно, что  $M \leq M_T$ , но тогда  $q_s = q_k$ , следовательно выше найдено точное значение предельной нагрузки  $q_* = q_k$ .

Расчет балок и рам по схеме пластического разрушения излагается в ряде книг (см., например, Нил [1]) и широко используется в приложениях. Для расчета сложных балок и рам (а также — стержневых решеток) применяются методы линейного<sup>1)</sup> программирования.

**2. Растяжение полосы с отверстием.** Рассмотрим задачу о растяжении полосы с достаточно большим круговым отверстием (рис. 3.3.3). При плоской деформации условие текучести Мизеса имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3} \sigma_T^2. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Для стержней граница текучести определяется линейными соотношениями (например,  $M \leq M_T$ ).

Рассмотрим следующий кинематически возможный механизм пластического разрушения (рис. 3.3.3, а). В состоянии текучести находятся области  $ABC$ , в которых реализуется одноосное растяжение  $\sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T$ ,  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Верхняя и нижняя части полосы остаются жесткими и движутся со скоростями  $v$ . Вдоль линий  $AB$ ,  $BC$ , являющихся характеристиками, разрывная касательная составляющая скорости, нормальная же составляющая непрерывна и по величине равна  $v/\sqrt{2}$ . По этим данным на характеристиках  $AB$  и  $AC$  определяется единственным образом поле скоростей в областях текучести (см., например, Л. М. Качанов [1]). Этому механизму пластического разрушения отвечает кинематическая нагрузка

$$P_k = 2(h - a) \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T.$$

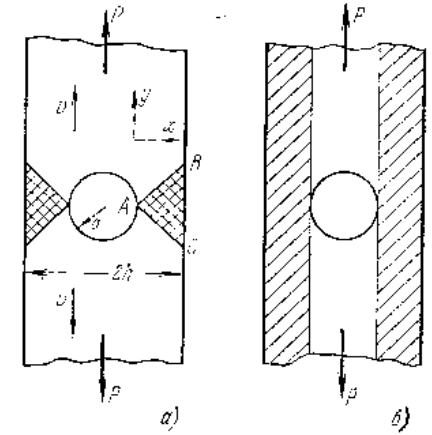


Рис. 3.3.3

Для нахождения статической нагрузки  $P_s$  нужно построить во всей полосе равновесное поле напряжений, удовлетворяющее граничным условиям и не выходящее за границы текучести. Возьмем разрывное поле напряжений, показанное на рис. 3.3.3, б: в заштрихованных зонах — одноосное растяжение  $\sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T$ ,

$\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , в средней зоне напряжения равны нулю. Очевидно, что при этом граничные условия на контуре отверстия и боковых сторонах полосы выполнены. Ясно, что  $P_s = P_k$ , т. е. найдено точное значение предельной нагрузки.

**3. Изгиб квадратной пластины сосредоточенной силой.** Найдем верхнюю границу предельной нагрузки для квадратной пластины, опертая по контуру и изгибаемой сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре (рис. 3.3.4). Рассмотрим следующий механизм разрушения: диагонали  $AC$ ,  $BD$  являются линиями пластических шарниров, в предельном состоянии пластина принимает форму поверхности правильной четырехгранной пирамиды с вершиной  $O$  в точке приложения нагрузки; треугольные

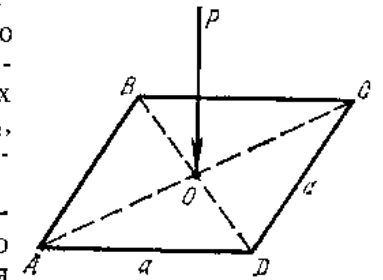


Рис. 3.3.4.



части  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  остаются жесткими. Пусть  $a$  — длина стороны пластины,  $h$  — толщина пластины. Обозначим через  $M_T = \sigma_T \frac{h^2}{4}$  предельный изгибающий момент на единицу длины сечения пластины, через  $\omega_0$  — скорость прогиба под силой, через  $\omega$  — скорость изменения двугранного угла (вдоль диагонали). Очевидно, что  $\omega = 2 \frac{\omega_0}{a\sqrt{2}}$ . Сопоставляя мощность силы  $P$  с рассеянием в шарнирах, получаем

$$P\omega_0 = M_T \cdot 4\omega a \sqrt{2}.$$

Внося сюда  $\omega$ , находим верхнюю (кинематическую) границу предельной нагрузки

$$P_k = 8M_T.$$

## ГЛАВА 4

### ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

#### § 4.1. О приспособляемости упруго-пластических тел

**1. Переменные нагрузки.** Выше неоднократно подчеркивалось, что переменность (цикличность) нагрузок снижает прочность материала. Это влияние зависит, прежде всего, от уровня напряжений. Так, при упругих деформациях разрушение может наступить лишь после весьма большого числа циклов. При переменных пластических деформациях тело разрушается при сравнительно малом числе циклов (даже если нагрузка ниже предельной).

В дальнейшем принимается, что при циклических нагрузках справедлива схема идеального упруго-пластического тела, показанная на рис. 4.1.1. Упрочнение и эффект Баушингера не учитываются.

При переменных нагрузках (ниже предельных) могут возникнуть опасные состояния двух типов.

Знакопеременная пластичность (пластическая или малоцикловая усталость). Здесь переменные нагрузки вызывают чередование пластических деформаций разного знака, что приводит к быстрому разрушению материала.

Прогрессирующая деформация (или прогрессирующее разрушение). Здесь переменные нагрузки вызывают постепенное нарастание пластических деформаций, что может привести к опасному их накоплению.

Возникновение того или иного опасного состояния зависит от характера внешних воздействий и конфигурации тела.

**2. Пример знакопеременной пластичности. Труба при циклическом давлении.** Рассмотрим упруго-пластическую деформацию цилиндрической трубы под действием переменного давления,

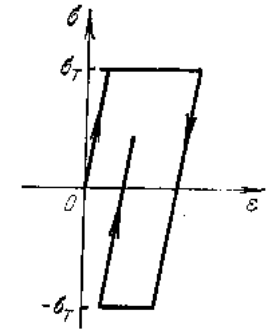


Рис. 4.1.1.

изменяющегося по схеме  $0 \rightarrow p \rightarrow 0 \rightarrow p \rightarrow \dots$ . Эта важная для приложений (толстостенные сосуды, артиллерийские стволы и т. д.) задача подробно изучена в технической литературе. Мы рассмотрим эту задачу в простейшей постановке — в предположении несжимаемости материала и отсутствия осевого перемещения (т. е. для трубы с доньями).

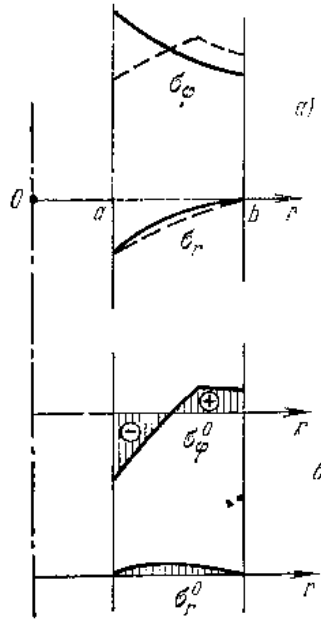


Рис. 4.1.2.

Распределение напряжений в упругой трубе описывается известными формулами Ламе

$$\sigma_r = -\bar{p} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad \sigma_\phi = \bar{p} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right),$$

$$\bar{p} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}, \quad (1)$$

где  $a, b$  — внутренний и наружный радиусы трубы (рис. 4.1.2). Осевое напряжение

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\phi) = \bar{p}.$$

Графики напряжений  $\sigma_r, \sigma_\phi$  показаны на рис. 4.1.2, а сплошными линиями. По приведенному решению интенсивность касательных напряжений равна

$$T^v = \frac{1}{2} (\sigma_\phi - \sigma_r) = \bar{p} \frac{b^2}{r^2}.$$

т. е. убывает с удалением от внутренней поверхности трубы. Пластическая деформация впервые возникает при  $r = a$ , когда, по условию текучести Мизеса,  $T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_t = \tau_t$ , т. е. при давлении

$$p_0 = \tau_t \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (2)$$

При  $p > p_0$  образуется пластическая зона  $a \leq r \leq c$ ; в ней

$$\sigma_\phi - \sigma_r = 2\tau_t. \quad (3)$$

Внося это условие в дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (4)$$

и выполняя интегрирование при граничном условии  $\sigma_r = -p$  при  $r = a$ , находим распределение напряжений в пластической зоне

$$\sigma_r = -p + 2\tau_t \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\phi = \sigma_r + 2\tau_t. \quad (5)$$

Напряжения в упругой зоне  $c \leq r \leq b$  находятся по формулам (1), если  $a$  заменить на  $c$  и вместо  $\bar{p}$  внести

$$\bar{q} = -\frac{qc^2}{b^2 - c^2},$$

где  $q$  — радиальное напряжение на границе раздела  $r = c$ . На последней напряжения  $\sigma_r, \sigma_\phi$  непрерывны; эти условия приводят к уравнению

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) = \frac{p}{2\tau_t}, \quad (6)$$

определяющему радиус границы раздела. Напряжение  $q = (\sigma_r)_{r=c}$ .

Графики напряжений  $\sigma_r, \sigma_\phi$  при упруго-пластической деформации трубы нанесены на рис. 4.1.2, а пунктиром. Заметим, что предельное давление получается из (5) при  $r = b$

$$p_* = 2\tau_t \ln \frac{b}{a}. \quad (7)$$

При первом нагружении  $0 \rightarrow p$  в трубе возникает пластическая зона. После разгрузки  $p \rightarrow 0$  образуются остаточные напряжения. Если при разгрузке не происходят вторичные пластические деформации (т. е. если разгрузка — упругая), то остаточные напряжения равны разности напряжений упруго-пластического состояния и упругого (1). На рис. 4.1.2, б нанесены соответствующие графики остаточных напряжений  $\sigma_r^0, \sigma_\phi^0$ . Наибольшее окружное остаточное напряжение  $\sigma_\phi^0$  будет на внутренней поверхности трубы.

Интенсивность остаточных касательных напряжений  $T^0$  в зоне  $a \leq r \leq c$  равна

$$T^0 = \frac{1}{2} \left| 2\tau_t - \bar{p} \frac{b^2}{r^2} \right|.$$

Наибольшее значение  $T^0$  достигается при  $r = a$ , именно,

$$T_{\max}^0 = \frac{1}{2} \left| 2\tau_t - \frac{pb^2}{b^2 - a^2} \right|, \quad p < p_*.$$

Вторичные пластические деформации не возникнут, если  $T_{\max}^0 < \tau_t$ . Нетрудно видеть, что для появления вторичных пластических деформаций необходимо, чтобы давление  $p$  было большим, именно

$$p > \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) 3\tau_t \equiv p \quad (8)$$

Так как  $p < p_*$ , т. е.

$$p < 2\tau_t \ln \frac{b}{a}, \quad (9)$$

то вторичные пластические деформации могут возникнуть лишь в достаточно толстостенной трубе.

Если  $p < p_1$ , то при повторном нагружении будут происходить лишь упругие деформации. Это объясняется тем, что в трубе имеются остаточные напряжения обратного знака, которые как бы повышают предел упругости. Произошло упрочнение (самоупрочнение, автофретаж) трубы. Следуя Прагеру, говорят, что конструкция *приспособилась* к циклам нагрузки благодаря возникновению благоприятного поля остаточных напряжений. Неравенство  $p < p_1$  определяет *область приспособляемости* (область допустимых изменений давления).

Если же  $p > p_1$ , то при циклическом нагружении в некоторой зоне, примыкающей к отверстию, будут происходить пластические деформации разного знака, что вскоре приведет к разрушению из-за «пластической усталости».

Петрудно теперь сформулировать достаточное условие возникновения знакопеременной пластичности: знакопеременная пластичность возникает, если интервал изменения интенсивности  $T'$  (если исходить из условия текучести Мизеса) по упругому решению превосходит удвоенный предел текучести  $2\tau_r$ . Отсюда, однако, не следует, что для неравномерно напряженного тела граница приспособляемости не может быть достигнута при меньших напряжениях.

**3. Пример прогрессирующей деформации.** Рассмотрим систему, показанную на рис. 4.1.3. Круглый стержень 1 и охватывающая его труба 2 соединены жесткой плитой 3, к которой приложено постоянное усилие  $2P$ . Площади сечения стержня и трубы одинаковы и равны  $F$ . Стержень сохраняет постоянную температуру, равную нулю, а температура трубы периодически изменяется от  $0$  до  $\theta$  ( $0 \rightarrow \theta \rightarrow 0 \rightarrow \theta \rightarrow \dots$ ). Модуль упругости считается неизменным, а предел текучести равен  $\sigma_{T0}$  при  $0^\circ$  и снижается до  $\sigma_{T\theta}$  при  $\theta^\circ$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения. Введем обозначения  $p = P/F$ ,  $q = \frac{1}{2} E\alpha\theta$ .

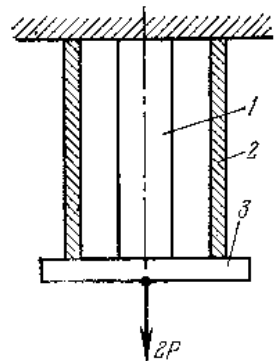


Рис. 4.1.3.

По условию равновесия имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2p, \quad (10)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — напряжения соответственно в стержне и трубе. В зависимости от соотношений между величинами  $p$ ,  $q$  и пределами текучести  $\sigma_{T0}$  и  $\sigma_{T\theta}$  система может проходить разнообразные состояния. Остановимся здесь лишь на некоторых из них.

**Упругое состояние.** При нулевой температуре напряжения в стержне и трубе равны  $\sigma_1 = p$ ,  $\sigma_2 = p$ , после нагревания  $\sigma_1 = p + q$ ,  $\sigma_2 = p - q$ . Для отсутствия пластических

деформаций необходимо, чтобы при  $\sigma_2 < 0$

$$p + q < \sigma_{T0}, \quad p - q > -\sigma_{T\theta}.$$

Легко видеть, что при этом должно быть

$$q < \frac{1}{2}(\sigma_{T0} + \sigma_{T\theta}), \quad p < \frac{1}{2}(\sigma_{T0} + \sigma_{T\theta}). \quad (11)$$

**Приспособляемость.** Стержень остается все время упругим, а труба испытывает при нагревании пластическую деформацию сжатия. Тогда при температуре  $\theta$  напряжение в трубе равно  $\sigma'_2 = -\sigma_{T\theta}$ ; напряжение в стержне ниже предела текучести, т. е.

$$\sigma'_1 = 2p + \sigma_{T\theta} < \sigma_{T0}.$$

После охлаждения будет  $\sigma'_2 = -\sigma_{T0} + q$ ,  $\sigma'_1 = 2p + \sigma_{T\theta} - q$ . Для приспособляемости необходимо, чтобы эти напряжения не превосходили предел текучести  $\sigma_{T0}$ , т. е.

$$-\sigma_{T0} + q < \sigma_{T0}, \quad |2p + \sigma_{T\theta} - q| < \sigma_{T0}.$$

Легко видеть, что условия приспособляемости будут

$$q < \sigma_{T0} + \sigma_{T\theta}, \quad p < \frac{1}{2}(\sigma_{T0} + \sigma_{T\theta}). \quad (12)$$

**Прогрессирующая деформация.** Рассмотрим теперь другое возможное состояние. Пусть в каждом цикле стержень испытывает пластическую деформацию растяжения при нагревании, а труба — пластическую деформацию при охлаждении. Другими словами, стержень течет при продолжающемся тепловом расширении трубы (т. е. стержень «набирает» пластическую деформацию); труба же при охлаждении течет при напряжении  $\sigma_{T0}$ , сохраняя постоянную длину (из-за неизменности длины стержня при охлаждении). Эта картина повторяется в каждом цикле и общее пластическое удлинение системы нарастает.

При нагревании напряжение в стержне равно  $\sigma_{T\theta}$ , а в трубе  $2p - \sigma_{T0}$ , причем

$$|2p - \sigma_{T0}| < \sigma_{T\theta}.$$

При охлаждении, наоборот, напряжение в трубе равно  $\sigma_{T0}$ , а в стержне  $2p - \sigma_{T0}$ . Выясним условия реализуемости этого режима. Если бы труба при охлаждении деформировалась упруго, то напряжение в трубе было бы равно  $2p - \sigma_{T0} + q$  и не превышало  $\sigma_{T0}$ ; но это ограничение не выполняется, поэтому

$$q > 2\sigma_{T0} - 2p. \quad (13)$$

Общее удлинение системы за каждый цикл нарастает на величину

$$e = \epsilon_0 + \frac{4p}{E} - \frac{2\sigma_{T0}}{E}$$

и с увеличением числа циклов может достигнуть недопустимых значений.

Изменения температуры (теплосмены) могут существенно усложнить картину упруго-пластических деформаций тела. Вопросы приспособляемости конструкций при теплосменах рассмотрены в книге Д. А. Гохфельда [1]; там же приведены многочисленные примеры.

**4. Заключительные замечания.** Границы приспособляемости зависят от возникающего в теле поля остаточных напряжений, которое зависит, очевидно, от пределов упругости. Поэтому для реальных тел условия приспособляемости зависят от упрочнения материала при нагружении и разупрочнения при пластическом деформировании в обратном направлении (эффект Баушингера). Учет этих влияний возможен, хотя и существенно усложняет анализ. Рассмотрение отдельных простых задач показывает, что учет упрочнения не влечет значительных количественных поправок.

В принципе можно учесть также и изменения механических характеристик (модулей упругости, пределов текучести) при температурных циклах.

Далее, если цикл длится достаточно долго, то приспособляемость заметно зависит от ползучести. Тогда поле остаточных напряжений с течением времени релаксирует, что приводит к сужению области приспособляемости.

Наконец, отметим, что в инженерных конструкциях обычно принимают некоторый «запас по приспособляемости» и допускают изменения нагрузок и температур в области меньшей, чем вычисленная область приспособляемости.

## § 4.2. Теоремы об условиях приспособляемости

**1. Общие замечания.** Изложенные выше примеры показывают, что выяснение условий приспособляемости опирается на анализ упруго-пластического равновесия тела. Такой анализ связан, однако, с большими математическими трудностями и осуществим лишь в простейших задачах.

Теоремы приспособляемости устраняют эту трудность, позволяя находить нижнюю и верхнюю границы для области приспособляемости на основе использования надлежащих решений *упругой задачи*, что, разумеется, несравненно проще.

Нижняя граница приспособляемости определяется так называемой статической теоремой приспособляемости, доказанной Меланом в 1938 г.

Верхняя граница приспособляемости может быть найдена на основе кинематической теоремы приспособляемости, принадле-

жащей Койтеру [1], 1956 г. Эта теорема значительно сложнее и здесь не рассматривается.

Заметим, что из теорем приспособляемости, если заданные пределы изменения нагрузок совпадают, вытекают теоремы о предельной нагрузке.

**2. Статическая теорема приспособляемости.** Рассмотрим идеальное упруго-пластическое тело, находящееся под действием системы нагрузок, медленно изменяющихся с течением времени в заданных пределах. Обозначим через  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\epsilon_{ij}^*$  мгновенные значения напряжений и деформаций в соответствующем *идеально упругом теле*, через  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  — мгновенные значения напряжений и деформаций в *действительном упруго-пластическом состоянии тела*. Введем, далее, напряжения и деформации, определяемые разностями

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*; \quad \epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^*. \quad (1)$$

Условимся называть  $\sigma_{ij}^0$ ,  $\epsilon_{ij}^0$  остаточными напряжениями и деформациями.

Обозначим через  $\epsilon_{ij}^{0e}$  упругие деформации, отвечающие по закону Гука остаточным напряжениям  $\sigma_{ij}^0$ .

Деформации  $\epsilon_{ij}^*$ ,  $\epsilon_{ij}$  кинематически возможны, т. е. удовлетворяют условиям совместности, а соответствующие смещения удовлетворяют заданным кинематическим граничным условиям. Отметим также, что рассмотренные напряжения и деформации медленно изменяются во времени, так как нагрузки переменны.

Действительные деформации  $\epsilon_{ij}$  складываются из упругих и пластических составляющих

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{0e}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^{0e} + \epsilon_{ij}^*. \quad (4)$$

Пусть  $\bar{\sigma}_{ij}$  — некоторое *не зависящее от времени*, статически возможное поле собственных (или фиктивных остаточных) напряжений, т. е.  $\bar{\sigma}_{ij}$  — любое, отличное от нуля, поле напряжений, удовлетворяющее однородным дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

и нулевым граничным условиям

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = 0$$

на части поверхности тела  $S_F$ .

Обозначим, далее, через  $\bar{\epsilon}_{ij}$  компоненты деформации, отвечающие по закону Гука напряжениям  $\bar{\sigma}_{ij}$ . Разумеется,  $\bar{\epsilon}_{ij}$  не удовлетворяют, вообще говоря, условиям сплошности деформации.

Поле напряжений

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^* + \bar{\sigma}_{ij} \quad (5)$$

будем называть *безопасным*, если при любых изменениях нагрузок в заданных пределах граница текучести не достигается, т. е. если

$$f(\sigma_{ij}^s) < 0. \quad (6)$$

Поле напряжений

$$\sigma_{ij}^a = \sigma_{ij}^* + \bar{\sigma}_{ij} \quad (7)$$

будем называть *допустимым*, если напряженное состояние может достигать поверхности текучести, т. е. если

$$f(\sigma_{ij}^a) \leq 0. \quad (8)$$

**Теорема Мелана.** Приспособляемость наступит, если можно найти такое не зависящее от времени поле собственных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ , что при любых изменениях нагрузки в заданных пределах сумма этого поля с полем напряжений  $\sigma_{ij}^*$  в идеально упругом теле безопасна (достаточное условие).

Приспособляемость невозможна, если не существует никакого не зависящего от времени поля собственных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ , так что сумма  $\bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^*$  допустима (необходимое условие).

Необходимое условие очевидно: если нет никакого распределения собственных напряжений, для которого  $f(\sigma_{ij}^a) \leq 0$ , то приспособляемость по существу не может возникнуть.

Допустим теперь, что надлежащее поле собственных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  существует. Покажем, что тогда приспособляемость наступает.

Рассмотрим фиктивную упругую энергию  $\tilde{\Pi}$  разностей напряжений  $\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}$ :

$$\tilde{\Pi} = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij})(\epsilon_{ij}^{0e} - \bar{\epsilon}_{ij}) dV.$$

Разности напряжений  $\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}$  связаны с разностями деформаций  $\epsilon_{ij}^{0e} - \bar{\epsilon}_{ij}$  линейными однородными зависимостями закона

Гука, поэтому производная энергии  $\tilde{\Pi}$  по времени равна

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}) \frac{d}{dt} (\epsilon_{ij}^{0e} - \bar{\epsilon}_{ij}) dV.$$

Но напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$  и деформации  $\bar{\epsilon}_{ij}$  по условию не зависят от времени, следовательно,

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}) \frac{d}{dt} \epsilon_{ij}^{0e} dV.$$

Заменяя здесь скорости деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^{0e}$  согласно (4), получаем

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = \int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij})(\xi_{ij} - \xi_{ij}^p - \xi_{ij}^*) dV.$$

Заметим теперь, что разности напряжений  $\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}$  удовлетворяют условиям равновесия при нулевых внешних силах, а скорости деформации  $\xi_{ij} - \xi_{ij}^*$  кинематически возможны. Мощность внутренних сил равна мощности соответствующих внешних сил, а так как последние для рассматриваемых разностей равны нулю на  $S_F$ , а на  $S_u$  разность  $v_i - v_i^* = 0$ , то

$$\int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij})(\xi_{ij} - \xi_{ij}^*) dV = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = - \int (\sigma_{ij}^0 - \bar{\sigma}_{ij}) \xi_{ij}^p dV.$$

Это соотношение с помощью зависимостей (1), (5) можно переписать в другой форме:

$$\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = - \int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \xi_{ij}^p dV.$$

Поскольку вектор скорости пластической деформации  $\xi_{ij}^p$  направлен по нормали к выпуклой поверхности текучести  $\Sigma$ , вектор  $\sigma_{ij}$  достигает поверхности текучести, а вектор  $\sigma_{ij}^s$ , будучи безопасным, лежит внутри  $\Sigma$  (см. рис. 3.2.2, б, вместо  $\sigma_{ij}'$  будет  $\sigma_{ij}^s$ ), то

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \xi_{ij}^p > 0. \quad (9)$$

Таким образом,  $\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} < 0$ , пока  $\xi_{ij}^p \neq 0$ . Так как упругая энергия  $\tilde{\Pi}$  неотрицательна, то наступит момент, когда пластическое течение прекратится (т. е.  $\xi_{ij}^p = 0$ ,  $\frac{d\tilde{\Pi}}{dt} = 0$ ). Далее тело будет испытывать при изменениях нагрузок только упругие деформации.

Поле собственных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  целесообразно выбирать таким, чтобы область допустимых изменений нагрузок была наибольшей. В этом смысле применение теоремы Мелана приводит к нижним границам для пределов изменения нагрузок.

Заметим, что теорема Мелана легко обобщается на случай неравномерно нагреваемых тел (см. Д. А. Гохфельд [1], В. Прагер [3], В. И. Розенблюм [1]).

**3. Пример. Совместное кручение и растяжение стержня.** Рассмотрим в качестве простого примера использования теоремы Мелана задачу определения области приспособляемости для круглого стержня радиуса  $a$ , растягиваемого силой  $P$  и скручиваемого моментом  $M$ .

В этой задаче отличны от нуля растягивающее напряжение  $\sigma_z$  и касательное напряжение  $\tau_{\varphi z}$  (в системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$ ). Введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_T}, \quad \sigma = \frac{\sigma_z}{\sigma_T}, \quad p = \frac{P}{\pi a^2 \sigma_T}, \quad q = \frac{2M}{\pi a^3 \tau_T}.$$

Принимается условие текучести Мизеса, так что  $\sigma_T = \sqrt{3}\tau_T$ ; в пластическом состоянии

$$\sigma^2 + \tau^2 = 1.$$

Очевидно, что  $\rho \leq 1$ ; при чистом кручении ( $p = 0$ ) первые пластические деформации в наружном слое стержня появляются при  $q = \pm 1$ . Отметим также, что предельный крутящий момент достигается при  $q = \pm 4/3$ , следовательно,  $|q| \leq 4/3$ .

В безразмерных величинах решение упругой задачи имеет вид

$$\sigma^* = p; \quad \tau^* = q\rho.$$

Возьмем следующее простейшее поле собственных напряжений:

$$\bar{\sigma} = 0; \quad \bar{\tau} = \lambda \left(1 - \frac{4}{3}\rho\right),$$

где  $\lambda$  — произвольный множитель, которым можно распорядиться так, чтобы область приспособляемости была наибольшей. Нетрудно убедиться в том, что момент касательных напряжений равен нулю (т. е. поле  $\bar{\tau}$  самоуравновешено).

Суммарное поле напряжений

$$\sigma^s = p, \quad \tau^s = q\rho + \lambda \left(1 - \frac{4}{3}\rho\right)$$

должно быть безопасным, т. е.

$$(\sigma^s)^2 + (\tau^s)^2 < 1.$$

Отсюда при знаке равенства получаем

$$q\rho + \lambda \left(1 - \frac{4}{3}\rho\right) = \pm \sqrt{1 - p^2}. \quad (10)$$

Рассмотрим плоскость переменных  $q, \lambda$ . На этой плоскости уравнение (10) определяет два пучка прямых с центрами  $A \left(q = \frac{4}{3}\sqrt{1-p^2}, \lambda = \sqrt{1-p^2}\right)$  и  $A' \left(q = -\frac{4}{3}\sqrt{1-p^2}, \lambda = -\sqrt{1-p^2}\right)$ . Так как  $p$  изменяется в пределах от нуля до единицы, то эти пучки ограничивают параллелограмм допустимых значений  $ABA'B'$  (рис. 4.2.1). Стороны последнего получаются из (10) при  $p = 0$  и  $p = 1$ . При этом на осях  $q, \lambda$  отсекаются равные отрезки длиной  $\sqrt{1-p^2}$ .

Если крутящий момент не меняет знака (т. е.  $q \geq 0$ ), то наибольший допустимый интервал изменения  $q$  характеризуется абсциссой точки  $A$ , т. е. соответствует предельному крутящему моменту при значении осевого усилия  $p$ . Итак, в этом случае интервал допустимых изменений крутящего момента равен

$$q_{\max} - q_{\min} = \frac{4}{3}\sqrt{1-p^2}.$$

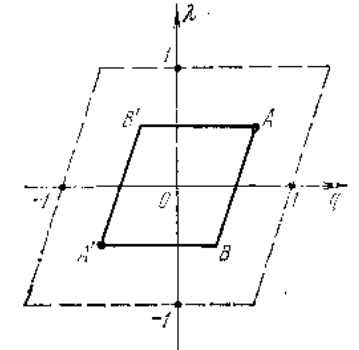


Рис. 4.2.1.

Заметим, что первые пластические деформации в наружном слое стержня возникают при  $q = \sqrt{1-p^2}$ .

Если же момент — знакопеременный, то наибольший интервал изменения  $q$  определяется длиной отрезка горизонтали между сторонами  $AB$  и  $A'B'$ , т. е.

$$q_{\max} - q_{\min} = 2\sqrt{1-p^2}.$$

Осевое усилие может произвольно изменяться в пределах  $(-p, +p)$ .

С уменьшением осевой нагрузки параллелограмм испытывает подобное расширение. Наибольшие его размеры будут при отсутствии осевой силы ( $p = 0$ ); соответствующий параллелограмм показан на рис. 4.2.1 пунктиром. Легко видеть, что при знакопеременном чистом кручении возникающее поле остаточных напряжений всегда будет неблагоприятным, следовательно, в этом случае пластические деформации недопустимы, т. е. должно быть  $|q| < 1$ .

ГЛАВА 5  
**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
 УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ**

**§ 5.1. О максимальных нагрузках для упрочняющихся тел и неустойчивости деформирования**

**1. Деформационные разрушения упрочняющихся тел.** В гл. 3 был рассмотрен механизм деформационного разрушения, в основе которого лежала модель идеально пластического тела. Эта схема, как уже отмечалось, имеет важное практическое значение при сравнительно слабом упрочнении материала.

При значительном упрочнении (характерном для легких сплавов, легированных сталей, меди и т. д.) механизм деформационного разрушения определяется потерей устойчивости процесса деформирования из-за нарушения баланса между скоростью роста напряженного состояния тела и упрочнения материала.

Практическое использование результатов в этой области для расчета конкретных конструкций связано (так же, как и в теории предельного равновесия) с рядом инженерных приемов (введение коэффициентов запаса, приближенных способов идеализации реальных свойств материала и т. д.), опирающихся на экспериментальные данные, а также на наблюдения за работой рассматриваемых конструкций.

**2. Растяжение стержня.** Рассмотрим деформацию упрочняющегося тела при условии, что ползучесть не играет заметной роли. Это условие выполняется при достаточно низких температурах, когда фактор времени не является существенным. С другой стороны, полезно отметить, что при относительно быстро происходящих испытаниях деформация ползучести обычно не успевает развиться; высокоскоростные (динамические) нагружения здесь не рассматриваются.

Если тело испытывает конечные деформации, то заметно изменяются его поперечные сечения и может наступить такое состояние, когда дальнейшее деформирование будет происходить

при *снижающейся* нагрузке (вследствие продолжающегося уменьшения площади сечения). Ниже детально рассматривается эта картина на примере стержня, растягиваемого силой  $P$ . Задачи этого типа требуют анализа больших пластических деформаций тела. Между тем уравнения деформирования упрочняющейся среды установлены более или менее надежно в условиях достаточно простого нагружения и не слишком больших деформаций. Это необходимо учитывать при решении конкретных задач; по той же причине целесообразно исходить из простейших вариантов уравнений пластичности. Наконец, отметим, что при конечных деформациях материал можно считать несжимаемым.

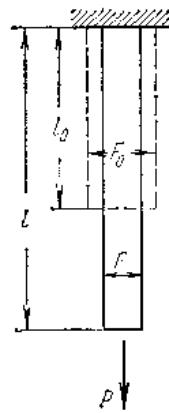


Рис. 5.1.1.

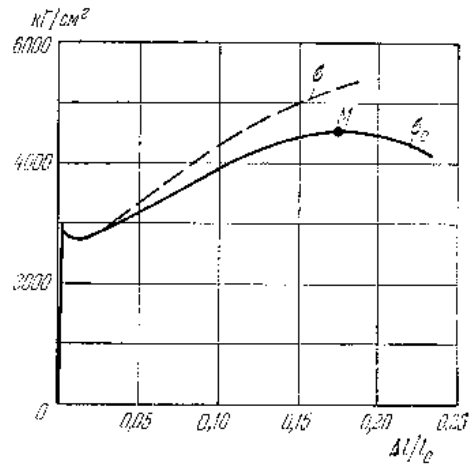


Рис. 5.1.2.

Итак, рассмотрим стержень, растягиваемый силой  $P$  (рис. 5.1.1). Пусть  $l, F; l_0, F_0$  — текущие и начальные длина и площадь поперечного сечения. По условию несжимаемости

$$lF = l_0F_0. \tag{1}$$

Логарифмическая деформация (вместо  $\bar{\epsilon}$  ниже используется обозначение  $\epsilon$ )

$$\epsilon = \ln \frac{l}{l_0} \tag{2}$$

и истинное напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} \tag{3}$$

связаны зависимостью

$$\sigma = f(\epsilon). \tag{4}$$

Обратимся теперь к диаграмме растяжения. На рис. 5.1.2 показана такая диаграмма для мягкой стали; по оси абсцисс

отложено относительно удлинение  $\Delta l/l_0$ , по оси ординат — напряжение. Сплошной линией нанесена диаграмма растяжения в условных напряжениях  $\sigma_0 = P/F_0$ , пунктирной линией — в истинных напряжениях  $\sigma = P/F$ . В точке  $M$  условное напряжение достигает максимума, нагрузка  $P$  начинает снижаться, начинается образование шейки. Дальнейшее вычисление истинного напряжения по формуле (3) теряет смысл.

Кривая  $\sigma = f(\epsilon)$  имеет примерно такой же вид, что и пунктирная кривая. При этом материал *упрочняется*, т. е.

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = f'(\epsilon) > K > 0, \quad (5)$$

где  $K$  — некоторая положительная постоянная.

При малых упругих деформациях  $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E > \sigma$ . При больших деформациях функция  $f(\epsilon)$  возрастает медленнее, чем  $\exp \epsilon$ , поэтому можно считать, что тогда

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} \leq \sigma.$$

Вычислим производную  $d\sigma/d\epsilon$ , перейдя от напряжения к силе  $P$ :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{P}{F} \right) = \frac{1}{F} \frac{dP}{d\epsilon} - \frac{P}{F^2} \frac{dF}{d\epsilon}.$$

Но в силу (1) и (2) имеем

$$F = F_0 \exp(-\epsilon), \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{d\epsilon} = -1.$$

Следовательно,

$$\frac{dP}{d\epsilon} = F_0 \left( \frac{d\sigma}{d\epsilon} - \sigma \right) \exp(-\epsilon). \quad (6)$$

При относительно малых деформациях напряжение также относительно мало и  $\frac{dP}{d\epsilon} > 0$ . В последующем, из-за убывания наклона кривой деформации, найдется такое значение деформации  $\epsilon > \epsilon_*$ , когда будет  $\frac{dP}{d\epsilon} < 0$  (рис. 5.1.3). Имеется, стало быть, максимальная нагрузка  $P_*$ . Ее величина отвечает значению  $\epsilon_*$ , определяемому из отношения

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} - \sigma = 0. \quad (7)$$

При достижении  $P_{\max}$  ничто не мешает спонтанному изменению длины стержня. Несущая способность стержня исчерпана, можно считать, что за достигнутым состоянием происходит «разрушение» стержня. Вблизи  $P_{\max}$  малым изменениям силы отвечают большие изменения деформации (т. е. формы

стержня). Так как  $P = \sigma F$ , то в окрестности точки  $\epsilon_*$

$$dP = F d\sigma + \sigma dF = 0,$$

т. е. в точке  $P_{\max}$  возможны различные близкие состояния, для которых уменьшение сечения (т. е. увеличение деформации) компенсируется надлежащим ростом напряжения из-за упрочнения. Так как неизбежны различные локальные отклонения от правильности формы образца и от условия однородности его механических свойств, то это означает, что процесс равномерного деформирования образца становится практически неосуществимым; в слабом месте образца быстро развивается шейка. В этом смысле говорят о наступлении *неустойчивости*.

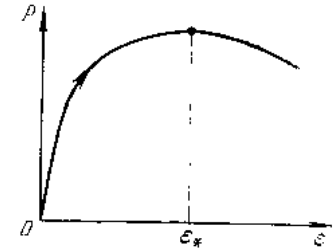


Рис. 5.1.3.

Как видно из соотношения (7), образование шейки связано с характером упрочнения. Неустойчивость достигается при снижении наклона кривой деформации (т. е. при падении упрочнения). В связи с этим интересно отметить, что в сталях с большим упрочнением (например, аустенитных) развиваются малые шейки при значительной общей деформации образца.

Из приведенного решения, строго говоря, следует лишь наличие максимальной нагрузки. Полный анализ явлений неустойчивости (см. работы Хилла [3]) требует рассмотрения различных форм равновесия тела и в ряде задач подтверждает изложенную интерпретацию.

**3. Общий случай.** Вопрос об устойчивости деформации тела в общем случае сложнее, естественно, чем в предыдущем примере. Здесь, в отличие от задачи монотонного растяжения, конечная конфигурация тела зависит от истории нагружения. Пусть в данном состоянии тела его деформация характеризуется некоторыми обобщенными перемещениями  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и надлежащими обобщенными силами  $Q_i$ . Будем считать деформацию тела в данном состоянии *устойчивой в малом*, если на любых бесконечно малых приращениях  $dq_i$  соответствующие приращения сил  $dQ_i$  производят положительную работу, т. е.

$$dQ_i dq_i > 0. \quad (8)$$

На рис. 5.1.4 символически показана связь между обобщенными силами и перемещениями. Условие (8) выполняется на восходящей части кривой  $Q(q)$  и нарушается на нисходящей части, показанной пунктиром. В окрестности максимума малым



изменениям сил отвечают значительные изменения перемещений, процесс деформирования становится неустойчивым.

Условие (8) повторяет, в сущности, в других терминах постулат Друкера, определяющий упрочняющийся материал; оно было использовано в приведенном выше смысле Сторакерсом [1].

Заметим, что в условии (8) можно исходить из произвольных приращений сил  $dQ_i$ , при соответствующих им приращениях перемещений  $dq_i$ .

Остановимся, в заключение, на *случае пропорционального нагружения*, когда силы  $Q_i$  растут пропорционально некоторому параметру  $\lambda$ , т. е.  $Q_i = Q_{i0}\lambda$ . Тогда по условию (8)

$$d\lambda (Q_{i0} dq_i) > 0.$$

Так как можно считать, что  $Q_{i0}dq_i > 0$ , то условием устойчивости деформации является возможность возрастания параметра нагрузки  $\lambda$  (т. е.  $d\lambda > 0$ ). Этот случай иллюстрируется примером растяжения стержня (см. рис. 5.1.3).

**З а м е ч а н и е 1.** При анализе устойчивости деформирования тел, испытывающих действие нескольких независимых нагрузок (например, труба под действием внутреннего давления  $p$  и осевого усилия  $P$ ), некоторые авторы (Дорн, Меллор и др.) принимают, что неустойчивое состояние достигается, если одна из нагрузок (например,  $p$  или  $P$ ) достигает максимума. Использование такого критерия в конкретных задачах при предписанном пути нагружения может привести к правильным результатам. При этом, по существу, определяется устойчивость по отношению к некоторой выделенной переменной. Однако обосновать такой выбор затруднительно. Поэтому целесообразно исходить из общего критерия (8). Разумеется, тогда неустойчивость может наступить и после того, как одна из нагрузок уже прошла максимальное значение.

**З а м е ч а н и е 2.** Неустойчивость деформирования тела может быть вызвана, вообще говоря, двумя причинами — неустойчивостью деформирования самого материала и ослаблением тела вследствие происшедших геометрических изменений; ниже рассматриваются лишь *упрочняющиеся материалы*, устойчивые в смысле постулата Друкера (см. Хилл [2]), т. е. удовлетворяющие условию

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} > 0. \quad (9)$$

Заметим также, что в более общей постановке вопросы бифуркации жестко-пластического и упруго-пластического течения рассматривали Хилл [2, 3], Майлз [1], Даби и Арьяратнам [1] и др.

## § 5.2. Уравнения упрочняющейся среды

**1. Уравнения теории пластического течения.** Решение задач устойчивости деформирования тела требует использования уравнений пластичности при упрочнении в условиях больших деформаций. Остановимся кратко на этом вопросе, причем ограничимся обсуждением простейшего варианта теории — теории изотропного упрочнения. Тем самым допустим анализ лишь достаточно простых вариантов нагружения. Нетрудно, разумеется, привести и более общие формулировки, однако значение таких уравнений в условиях больших деформаций оценить трудно, ввиду развития сложных эффектов деформационной анизотропии и недостаточности экспериментальных данных.

При больших деформациях металлов упругими деформациями можно пренебрегать. Материал, следовательно, можно считать несжимаемым. Далее, имея в виду указанные выше задачи о максимальных нагрузках, можно не останавливаться на обсуждении вопросов разгрузки.

Условие упрочнения задается уравнением выпуклой поверхности нагружения

$$f(\sigma_{ij}) = \Phi(q), \quad (1)$$

где  $q$  — параметр упрочнения. Приращения компонентов деформации по ассоциированному закону течения равны

$$d\epsilon_{ij} = g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (\text{при } df \geq 0). \quad (2)$$

Для гладкой поверхности нагружения скалярная функция упрочнения  $g$  определяется согласно условию упрочнения (1). Напряжения  $\sigma_{ij}$  и приращения деформаций  $d\epsilon_{ij}$  вычисляются относительно текущей конфигурации тела.

В соответствии со сделанным выше замечанием остановимся на простейшей (мизсовской) форме поверхности упрочнения

$$f(\sigma_{ij}) = s_{ij}s_{ij} = 2T^2,$$

где  $T$  — интенсивность касательных напряжений. Теперь уравнения (2) принимают вид

$$d\epsilon_{ij} = 2gs_{ij} df = 4gs_{ij} T dT \quad (\text{при } dT \geq 0). \quad (3)$$

В качестве характеристики упрочнения возьмем параметр Одквиста

$$q = \int \sqrt{2 d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}} \equiv \Gamma_0,$$

характеризующий испытанную материалом пластическую деформацию.

Вычисляя с помощью (3)  $dq$  и используя соотношение

$$df = \varphi'(q) dq,$$

вытекающее из условия упрочнения (1), получаем

$$g = (4T^2\varphi')^{-1}.$$

Условие упрочнения имеет, очевидно, вид

$$2T^2 = \varphi(\Gamma_0),$$

и обратно,  $\Gamma_0 = \varphi(T)$ . Следовательно, множитель  $g$  является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений. Стало быть, в рассматриваемом случае уравнения теории пластического течения могут быть записаны в форме

$$de_{ij} = F(T) dT s_{ij} \quad (\text{при } dT \geq 0), \quad (4)$$

где  $F(T) > 0$  — характерная для данного материала функция.

Функция  $F(T)$  определяется, например, из опытов простого растяжения. Тогда из (4) получаем

$$de_1 = F\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\right) d\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\right) \frac{2}{3} \sigma_1; \quad de_1 = \frac{dl}{l}.$$

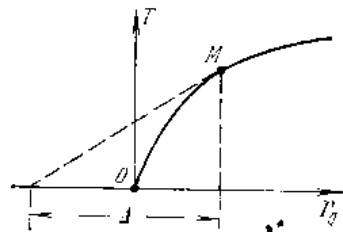


Рис. 5.2.1.

Имея опытную кривую зависимости истинного удлинения  $e_1 = \ln \frac{l}{l_0}$  от истинного напряжения  $\sigma_1$ , можно найти функцию  $F$ .

В соответствии с замечанием 2 в конце предыдущего параграфа условие упрочнения представляется монотонно возрастающей кривой на плоскости  $T, \Gamma_0$  (рис. 5.2.1).

**2. Уравнения деформационной теории.** В приложениях часто используются более простые конечные соотношения деформационной теории пластичности. Заметим, что к ним в условиях больших деформаций следует относиться с известной осторожностью и ограничиваться рассмотрением задач с простым нагружением.

Как и выше, материал считаем изотропным и несжимаемым. Пусть  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — логарифмические деформации,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — соответствующие истинные напряжения. Условие несжимаемости имеет вид

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0. \quad (5)$$

Между интенсивностью напряжений  $T$  и интенсивностью логарифмических деформаций

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]}$$

имеется зависимость вида («единая кривая»)

$$T = g(\Gamma) \Gamma, \quad (6)$$

причем функция  $g(\Gamma)$  удовлетворяет условиям

$$0 < g(\Gamma) \leq G; \quad g'(\Gamma) < 0. \quad (7)$$

Вид кривой (6) показан на рис. 5.2.2. В простейшем варианте может быть взят степенной закон

$$T = B\Gamma^\mu, \quad (8)$$

где  $B > 0, 0 < \mu \leq 1$  — постоянные.

Дополнительными соотношениями являются условия пропорциональности главных касательных напряжений главным сдвигам. Наибольший практический интерес представляют задачи расчета оболочек и мембран. В этом случае третьим главным напряжением  $\sigma_3$  (индекс 3 характеризует направление нормали к срединной поверхности оболочки) можно пренебрегать по сравнению с двумя другими  $\sigma_1, \sigma_2$ . Тогда, с учетом зависимости (6) и уравнения несжимаемости (5), из упомянутых условий пропорциональности вытекают соотношения

$$\left. \begin{aligned} 3g(\Gamma) \epsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2, \\ 3g(\Gamma) \epsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1, \\ 3g(\Gamma) \epsilon_3 &= -\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

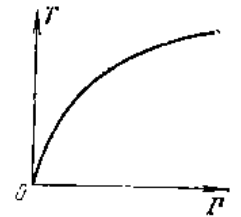


Рис. 5.2.2.

Опыты над тонкостенными трубками подтверждают эти уравнения в условиях больших деформаций при простом нагружении.

Рассмотренные зависимости между напряжениями и логарифмическими деформациями предложены Девисом и Надаи [1]. Эти зависимости, вследствие их сравнительной простоты, большей частью используются для решения прикладных задач. Заметим, что иногда удобно приближенно заменять интенсивности  $T, \Gamma$  максимальными касательным напряжением  $\tau_{\max}$  и сдвигом  $\gamma_{\max}$ .

**3. О больших упругих деформациях.** Выписанные выше соотношения характеризуют *пластические* деформации металлов. Иногда, однако, необходимо рассмотреть большие *упругие* деформации (например, деформации резиновых оболочек). Остановимся кратко на соответствующих уравнениях упругого деформирования.

В первом приближении можно воспользоваться приведенными выше уравнениями деформационной теории. В более строгой

постановке следует исходить из уравнений нелинейной теории упругости, рассматривающей большие упругие деформации. Так как изложение этого вопроса требует значительного отвлечения в сторону, мы отсылаем читателя к соответствующей литературе (в частности, к книгам А. Грина и Дж. Адкинса [1], А. И. Лурье [1] и А. Н. Гузя [1]).

§ 5.3. Тонкостенная сферическая оболочка под действием внутреннего давления

Рассмотрим простую задачу о пластическом течении тонкостенной упрочняющейся сферической оболочки под действием внутреннего давления  $p$ .

В сферической системе координат  $r, \varphi, \chi$  истинные напряжения и их девиаторные составляющие равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &\approx 0, & s_r &= -\frac{pa}{3h}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\chi = \frac{pa}{2h}, & s_\varphi &= s_\chi = \frac{pa}{6h}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $2a$  — диаметр оболочки,  $h$  — ее толщина,  $h \ll a$ . Приращения деформаций равны

$$de_r = \frac{dh}{h}; \quad de_\varphi = de_\chi = \frac{da}{a}. \quad (2)$$

Вследствие несжимаемости материала имеем

$$\frac{dh}{h} + 2 \frac{da}{a} = 0. \quad (3)$$

Нетрудно теперь найти, что интенсивность касательных напряжений равна

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{pa}{2h}. \quad (4)$$

а приращение параметра Одквиста будет

$$d\Gamma_0 = 2\sqrt{3} \frac{da}{a}. \quad (5)$$

Процесс устойчивого деформирования нарушится, если давление перестанет возрастать при продолжающемся увеличении диаметра, т. е.  $dp = 0$ .

Тогда из (4) получаем

$$\frac{h}{a} dT + Td \frac{h}{a} = 0. \quad (6)$$

По условию несжимаемости

$$a^2 h = a_0^2 h_0.$$

Используя это условие и формулу (5), легко находим из (6), что

$$\frac{T d\Gamma_0}{dT} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (7)$$

Отношение  $\frac{T d\Gamma_0}{dT} \equiv \Delta$  представляет собой длину подкаса- тельной (см. рис. 5.2.1); эта длина может рассматриваться как величина, характеризующая достигнутое упрочнение. Таким образом, устойчивость деформирования сферической оболочки те- ряется при  $\Delta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154$ .

Имяя для данного материала кривую  $T, \Gamma_0$  (см. рис. 5.2.1), находим по величине  $\Delta$  координаты  $T_1, \Gamma_{01}$  точки  $M$ . Но согласно (5)

$$\Gamma_0 = 2\sqrt{3} \int_a^a \frac{da}{a} = 2\sqrt{3} \ln \frac{a}{a_0} = \Gamma_{01}, \quad (8)$$

откуда определяется радиус  $a$  в момент наибольшего нагружения. Далее, из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{pa}{2h} = T_1$$

после исключения величин  $a, h$  с помощью условия несжимаемости и соотношения (8) находится наи- большее давление

$$p_{max} = 2\sqrt{3} T_1 \frac{h_0}{a_0} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma_{01}\right). \quad (9)$$

В заключение заметим, что в рассматриваемой задаче реали- зуется простое нагружение и  $\Gamma_0 = \Gamma$ ; кривая  $T, \Gamma_0$  совпадает с «единой» кривой  $T, \Gamma$ . Если исходить из степенной зависимо- сти (8) § 5.2, то нетрудно найти из соотношений (6), (3) и (5), что неустойчивое состояние достигается при  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \mu$ , а наи- большее давление равно

$$p_{max} = \frac{Bh_0}{a_0} (2\sqrt{3})^{1+\mu} e^{-\mu\left(\frac{\mu}{3}\right)}$$

или

$$p_* = 4e^{-\mu} \mu^\mu \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1-\mu}, \quad \text{где } p_* = \frac{p_{max} a_0}{Bh_0}. \quad (10)$$

Эта зависимость показана на рис. 5.3.1 пунктиром

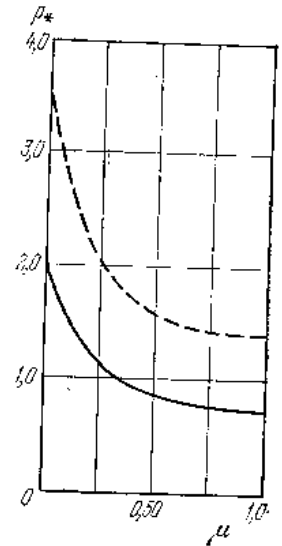


Рис. 5.3.1.

### § 5.4. Длинная тонкостенная труба под действием внутреннего давления и осевой силы

Задача о пластическом течении длинной тонкостенной упрочняющейся трубы, деформируемой под действием внутреннего давления  $p$  и осевого усилия  $P$ , рассмотрена в работах ряда авторов. Укажем здесь на статьи Свифта [1], Марциняка [1] и Хиллера [1, 2]. Более общую задачу для трубы, испытывающей еще и скручивание, изучил недавно Сторкерс [1].

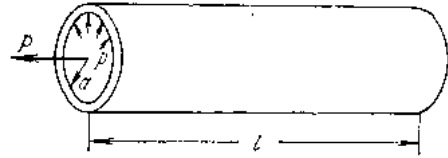


Рис. 5.4.1.

Остановимся здесь на случае нагружения трубы внутренним давлением и осевым усилием; труба с донышками, поэтому по оси действует сила  $P + \pi a^2 p$ , где  $2a$  — внутренний диаметр трубы. Обозначим через  $l$ ,  $h$  текущие длину трубы (рис. 5.4.1) и толщину ее стенки, а через  $a_0$ ,  $l_0$ ,  $h_0$  — начальные размеры трубы. Заметим, что  $h \ll a$ .

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  истинные напряжения и их девиаторные составляющие будут:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &\approx 0, & s_r &= -\frac{pa}{2h} - \frac{P}{6\pi ah}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{pa}{h}, & s_\varphi &= \frac{pa}{2h} - \frac{P}{6\pi ah}, \\ \sigma_z &= \frac{P + \pi a^2 p}{2\pi ah}, & s_z &= \frac{P}{3\pi ah}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Приращения деформаций определяются формулами

$$d\varepsilon_r = \frac{dh}{h}, \quad d\varepsilon_\varphi = \frac{da}{a}, \quad d\varepsilon_z = \frac{dl}{l}, \quad (2)$$

причем вследствие несжимаемости материала

$$\frac{dh}{h} + \frac{da}{a} + \frac{dl}{l} = 0. \quad (3)$$

По уравнениям теории пластического течения (3) § 5.2 имеем

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_r &= F(T) dTs_r, \\ d\varepsilon_\varphi &= F(T) dTs_\varphi, \\ d\varepsilon_z &= F(T) dTs_z, \end{aligned} \right\} (4)$$

причем  $F(T) dT = \frac{1}{2T} d\Gamma_0$ .

Для устойчивости согласно условию (8) § 5.1 необходимо, чтобы

$$(dP + \pi a^2 dp) dl + 2\pi a l dp da > 0. \quad (5)$$

Выражая здесь приращения  $dl$ ,  $da$  через  $d\varepsilon_\varphi$ ,  $d\varepsilon_z$ , а последние — с помощью уравнений теории течения (4), получим, что устойчивость теряется, если

$$\left[ dP + 3\pi^2 a^4 \frac{p}{P} dp \right] F(T) dT = 0.$$

Так как  $F(T) > 0$ , при упрочнении  $dT > 0$ , то

$$dP + 3\pi^2 a^4 \frac{p}{P} dp = 0. \quad (6)$$

Отсюда видно, что при действии независимых нагрузок  $p$ ,  $P$  неустойчивость может наступить и после того, как одна из нагрузок прошла максимальное значение (это будет при  $P > 0$ ).

Преобразуем условие (6). Так как

$$T^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{pa}{h} \right)^2 + \frac{P^2}{12\pi^2 a^2 h^2},$$

то отсюда, используя условие неустойчивости (6) и условие несжимаемости (3), получаем

$$2T dT = \left( \frac{pa}{h} \right)^2 \frac{da}{a} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{pa}{h} \right)^2 + \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{P}{ah} \right)^2 \right] \frac{dl}{l}.$$

Внося сюда напряжения согласно (1) и выражая приращения деформаций  $\frac{da}{a} = d\varepsilon_\varphi$ ,  $\frac{dl}{l} = d\varepsilon_z$  через напряжения по уравнениям теории течения (4), находим

$$2T dT = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma_0}{T} \left[ \sigma_\varphi^2 \left( s_\varphi + \frac{1}{2} s_z \right) + \frac{3}{2} s_z^2 \right].$$

Полагая здесь  $\sigma_\varphi = \alpha \sigma_z$ , где величина  $\alpha$  может изменяться в процессе нагружения, получаем после некоторых преобразований следующую формулировку условия неустойчивости:

$$\frac{T d\Gamma_0}{dT} = \frac{4\sqrt{3}(1 - \alpha + \alpha^2)^{1/2}}{4\alpha^2 + 3\alpha^2 - 6\alpha + 4}. \quad (7)$$

Отношение  $\frac{T d\Gamma_0}{dT} \equiv \Delta$  представляет собой длину подкасательной (см. рис. 5.2.1), характеризующей положение текущей точки  $M$  на кривой упрочнения. Таким образом, каждому значению  $\alpha$  соответствует определенное максимальное упрочнение, при котором происходит потеря устойчивости деформирования.

Напряженное состояние в (7) относится к моменту достижения неустойчивости. Нетрудно видеть, что

$$\alpha = \frac{2}{1 + \frac{P}{\pi a^2 p}}$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{a} = \xi \leq 1; \quad P = \pi a_0^2 q; \quad q = \lambda p,$$

тогда

$$\alpha = \frac{2}{1 + \lambda \xi^2},$$

т. е. величина  $\alpha$  зависит от относительного «раздутия» трубы  $\xi$  и параметра нагружения  $\lambda$ .

На рис. 5.4.2 приведен график зависимости  $\Delta$  от параметра  $\alpha$ . Максимум упрочнения  $\Delta = 2$  имеет место при  $\alpha = 1/2$ , минимум  $\Delta = 1$  — при  $\alpha = 2$  (труба под действием одного внутреннего давления). В первом случае  $P = 3\pi a^2 p$  и  $s_z =$

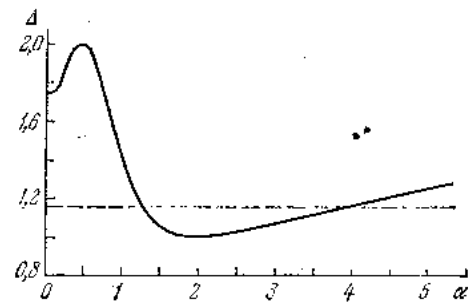


Рис. 5.4.2.

равно  $-s_r = \frac{pa}{h}$ ,  $s_\varphi = 0$ , следовательно,  $d\varepsilon_\varphi = 0$ , т. е. диаметр трубы не изменяется. Во втором случае ( $\alpha = 2$ )  $P = 0$  и  $s_z = 0$ , следовательно,  $d\varepsilon_z = 0$ , т. е. длина трубы не изменяется. При  $\alpha = 0$  имеем  $p = 0$ , т. е.

одноосное растяжение; при этом  $\Delta = \sqrt{3}$ . При  $\alpha \rightarrow \infty$  также будет одноосное растяжение, причем  $\Delta \rightarrow \sqrt{3}$ .

Степень упрочнения материала, достигаемая к моменту наступления неустойчивости, зависит от влияния изменений геометрии трубы на ее напряженное состояние.

При действии одного лишь внутреннего давления ( $\alpha = 2$ ) нагружение — простое,  $d\varepsilon_z = 0$  и  $\Gamma_0 = \Gamma$ . Кривая  $T$ ,  $\Gamma_0$  совпадает с единой кривой  $T$ ,  $\Gamma$ . При степенной зависимости (8) § 5.2 неустойчивость достигается при  $\Gamma = 2\varepsilon_\varphi = \mu$ . Наибольшее давление равно

$$p_* = 2e^{-\mu^2}, \quad \text{где } p_* = \frac{p_{\max} a_0}{B h_0}. \quad (8)$$

Эта зависимость показана на рис. 5.3.1 сплошной линией. Наибольшее давление для трубы меньше, чем для соответствующего сферического сосуда.

Напомним, что для сферической оболочки (см. предыдущий параграф) в момент потери устойчивости  $\Delta = 1,154$  (пунктирная

прямая на рис. 5.4.2). Таким образом, сферическая оболочка под внутренним давлением более устойчива в отношении деформирования, чем труба под давлением, так как позволяет достигнуть несколько большего упрочнения материала. Заметим, что вследствие монотонно уменьшающейся степени упрочнения точка  $M$  на кривой  $T, \Gamma_0$  (см. рис. 5.2.1) испытывает, в общем, незначительные смещения.

Условия прочности материалов при сложном напряженном состоянии обычно изучаются на трубчатых образцах. При разрушениях деформационного типа экспериментальные данные могут искажаться из-за описанного выше явления неустойчивости деформирования (см. Максак В. И. и Черноморченко В. И. [1]).

Выше предполагалось, что состояние неустойчивости деформирования достигается во всех точках трубы. Однако, неустойчивость может возникнуть из-за образования «шейки» (желобка); этот случай изучен в работе Данкомби [1].

### § 5.5. Максимальное давление для тонкостенной цилиндрической оболочки с жесткими днищами

1. Основные соотношения. Задачи, рассмотренные выше, носили элементарный характер. Если форма оболочки в процессе деформации не известна, возникают значительные математические трудности; необходимо, как правило, применение численных методов интегрирования.

Задачам расчета безмоментных оболочек вращения при больших деформациях посвящен ряд работ А. С. Григорьева [1, 2, 3], Вейля [1], Сэлмона [1], Ю. И. Солодилова [1] и других авторов.

Рассмотрим в качестве примера тонкостенную цилиндрическую оболочку с жесткими днищами под действием внутреннего давления. В исходном состоянии оболочка имеет длину  $2l_0$ , радиус  $a$ , толщину  $h_0$ . Начало координат расположим в среднем сечении (рис. 5.5.1). Пусть  $2l$ ,  $h$ ,  $r$  — соответственно текущие длина, толщина и радиус оболочки,  $R_1$ ,  $R_2$  — главные радиусы кривизны,  $2r^0$  — наибольший диаметр оболочки. Обозначим через  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  меридиональное и окружное напряжения и выпишем

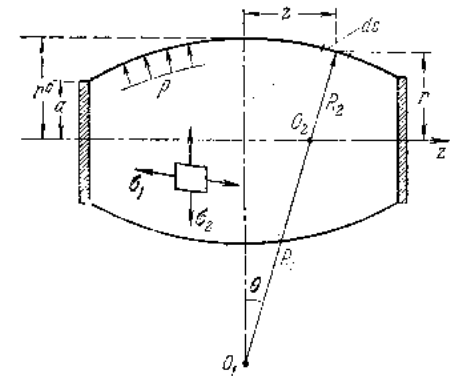


Рис 5.5.1.

известные уравнения равновесия безмоментной оболочки вращения

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{h}, \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{\rho R_2}{2h}. \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что

$$\sigma_2 = \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \sigma_1. \quad (3)$$

Третьим главным напряжением (по нормали) можно пренебрегать, т. е.  $\sigma_3 \approx 0$  в сравнении с двумя другими.

Логарифмические деформации в тех же направлениях равны

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \ln \frac{ds}{dl_0}, \\ \epsilon_2 &= \ln \frac{r}{a}, \\ \epsilon_3 &= \ln \frac{h}{h_0} = -(\epsilon_1 + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**2. Приближенное решение.** Рассмотрим приближенное решение, предложенное Вейлем [1]. Пусть бочкообразная форма оболочки в деформированном состоянии аппроксимируется дугой окружности; ее радиус равен

$$R_1 = \frac{(r^0 - r)^2 + z^2}{2(r^0 - r)}. \quad (5)$$

У дна  $z = l$ ,  $r = a$ , следовательно,

$$R_1 = \frac{(r^0 - a)^2 + l^2}{2(r^0 - a)}. \quad (6)$$

Заметим, что  $R_1 \geq r^0$ ; при  $R_1 = r^0$  поверхность оболочки становится сферической.

Так как  $R_1 = \text{const}$ , то из (5) находим, что

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{z}{\sqrt{R_1^2 - z^2}}. \quad (7)$$

Второй главный радиус кривизны равен

$$R_2 = r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}. \quad (8)$$

Внося значения  $R_1$ ,  $R_2$  в формулы (2), (3), найдем напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в деформированной оболочке в зависимости от координаты  $z$ . Рассмотрим напряжения и деформации в наиболее ослабленном сечении — в вершине  $z = 0$ . Условимся соответствующие значения переменных отличать верхним индексом 0.

При  $z = 0$  компоненты напряжения равны

$$\sigma_1^0 = \frac{\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2}{\lambda^2 - \rho^0 + 1} \cdot \frac{\sigma_2^0}{2}; \quad \sigma_2^0 = \frac{\lambda^2 - \rho^0 + 1}{\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2} \cdot \frac{\rho r^0}{h^0}, \quad (9)$$

где введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \rho^0 = \frac{r^0}{a}, \quad \lambda = \frac{l}{a}.$$

Используя уравнения деформационной теории пластичности (9) § 5.2, находим компоненты деформации при  $z = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1^0 &= \frac{2\rho^0(\rho^0 - 1)}{3\lambda^2 - (\rho^0 - 1)(\rho^0 + 3)} \epsilon_2^0, \\ \epsilon_2^0 &= \frac{1}{12} \frac{\Gamma^0}{T^0} \frac{3\lambda^2 - (\rho^0 - 1)(\rho^0 + 3)}{\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2} \frac{\rho r^0}{h^0}, \\ \epsilon_3^0 &= -(\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0) = \ln \frac{h^0}{h_0}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Определяя давление  $p$  из второго соотношения (9) и исключая затем  $h^0/r^0$  с помощью (10), получаем

$$p = \frac{h_2}{a} \sigma_2^0 F_1, \quad (11)$$

где положено

$$F_1 = F_1(\rho^0, \lambda) = \frac{\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2}{\lambda^2 - \rho^0 + 1} \exp \left[ -\frac{6(\lambda^2 - \rho^0 + 1)}{3\lambda^2 - (\rho^0 - 1)(\rho^0 + 3)} \ln \rho^0 \right]. \quad (12)$$

Далее на основании формул (9) и (10) вычисляем интенсивности напряжений и деформаций

$$T^0 = \sigma_2^0 \frac{1}{F_2}; \quad \Gamma^0 = \epsilon_2^0 \frac{1}{F_3}, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$F_2 = F_2(\rho^0, \lambda) = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\lambda^2 - \rho^0 + 1}{[3\lambda^4 - 6(\rho^0 - 1)\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2(\rho^0 + 3)]^{3/2}},$$

$$F_3 = F_3(\rho^0, \lambda) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{3\lambda^2 - (\rho^0 - 1)(\rho^0 + 3)}{[3\lambda^4 - 6(\rho^0 - 1)\lambda^2 + (\rho^0 - 1)^2(\rho^0 + 3)]^{3/2}}.$$

Давление  $p$  зависит от двух параметров — радиуса бочки  $\rho^0$  и длины  $\lambda$ . Вычисления показали (см. ниже), что длина оболочки изменяется незначительно. Поэтому параметр  $\lambda$  можно считать неизменным и равным начальному значению  $l_0/a$ .

В состоянии неустойчивости  $\frac{dp}{d\rho^0} \equiv p' = 0$ , т. е.

$$\sigma_2^0 F_1 + \sigma_2^0 F_1' = 0. \quad (14)$$

Но из (13) следует, что

$$\sigma_2^0 = F_2' T^0 + T^0 F_2, \quad (15)$$

$$d\epsilon_2^0 = F_3' \Gamma^0 d\rho^0 + F_3 d\Gamma^0. \quad (16)$$

Из (13), (14), (15) вытекает соотношение

$$(\ln T^0)' + (\ln F_1)' + (\ln F_2)' = 0. \quad (17)$$

Учитывая, что

$$\rho^0 = \exp \epsilon_2^0, \quad d\rho^0 = \rho^0 d\epsilon_2^0,$$

получаем

$$(\ln T^0)' = \frac{1}{T^0} \frac{dT^0}{\rho^0 d\epsilon_2^0}.$$

Внося в (16)  $d\rho^0$ , находим  $d\epsilon_2^0$ . Тогда соотношение (17) принимает вид

$$(\ln F_1)' + (\ln F_2)' + \left[ \frac{1}{\rho^0 \ln \rho^0} - (\ln F_3)' \right] \frac{\Gamma^0}{T^0} \frac{dT^0}{d\Gamma^0} = 0. \quad (18)$$

Если зависимость  $T, \Gamma$  известна, из (18) можно найти наибольшее давление  $p_{\max}$ . При значительных деформациях приемлема степенная зависимость (8) § 5.2; тогда  $\frac{\Gamma}{T} \frac{dT}{d\Gamma} = \mu, 0 < \mu \leq 1$ , и уравнение (18) принимает вид

$$\frac{(\ln F_1)' + (\ln F_2)'}{(\ln F_3)' - (\rho^0 \ln \rho^0)^{-1}} = \mu. \quad (19)$$

Отсюда находится радиус бочки  $\rho_*^0 = \rho_*^0(\mu, \lambda)$ , отвечающий максимальному давлению  $p_{\max}$ . Соответствующая окружная деформация равна  $\epsilon_2^0 = \ln \rho_*^0$ . Согласно (13) определяется значение  $\Gamma^0$ , далее находятся  $T^0, \sigma_2^0$  и, наконец, само наибольшее давление  $p_{\max}$ .

На рис. 5.5.2 сплошными линиями нанесены вычисленные кривые зависимости наибольшего безразмерного давления

$$p_* = \frac{p_{\max} a}{B h_0}$$

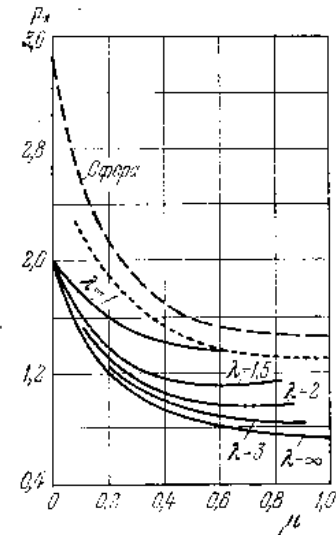


Рис. 5.5.2.

от показателя упрочнения  $\mu$  для разных значений параметра длины  $\lambda$ . Пунктирная кривая отвечает максимальному давлению для сферической оболочки согласно формуле (10) § 5.3. Очевидно, что сферическая оболочка с теми же параметрами  $a, h_0$  характеризуется оптимальной несущей способностью. Нижняя

сплошная линия относится к длинной трубе ( $\lambda = \infty$ , см. § 5.4). Точками обозначена кривая, соответствующая образованию сферической поверхности (т. е.  $R_1 = r^0$ ) и ограничивающая область пригодности изложенного решения. С увеличением длины  $\lambda$  наибольшее давление уменьшается, стремясь к значению для бесконечного цилиндра.

Рассмотрим теперь изменение длины оболочки  $2\delta = 2(l - l_0)$ . Согласно первой формуле (4)  $dl_0 = \exp(-\epsilon_1) ds$ . Так как  $ds = \sec \theta dz$ , то

$$d\delta = dz - dl_0 = [1 - \exp(-\epsilon_1) \sec \theta] dz.$$

Отсюда, полагая  $z = l\zeta$ , получаем

$$\frac{\delta}{l} = \int_0^1 [1 - \exp(-\epsilon_1) \sec \theta] d\zeta.$$

Так как  $\epsilon_1$  выражается через напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$ , а  $\sec \theta = \left[ 1 - \left( \frac{l\zeta}{R_1} \right)^2 \right]^{1/2}$ , причем радиус кривизны  $R_1$  определен формулой (6), то подынтегральная функция  $\zeta$  известна. Она содержит в качестве параметров  $\rho^0, \lambda, \mu$ . Вычисления для  $\rho^0 = \rho_*^0$  и соответствующих значений  $\lambda, \mu$  показали, что  $\delta/l$  не превосходит, как правило, 0,5%. Для длинной трубы ( $\lambda = \infty$ )  $\delta = 0$ .

В заключение отметим, что численное решение задачи, полученное недавно в работе Фушизавы и Такеямы [1], в общем удовлетворительно согласуется с приближенным решением Вейля для не слишком коротких оболочек.

## ГЛАВА 6

ВРЕМЯ ВЯЗКОГО РАЗРУШЕНИЯ  
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

## § 6.1. Время разрушения растягиваемых стержней

**1. Введение.** Многие материалы под действием постоянной нагрузки обнаруживают заметную ползучесть, т. е. медленно текут подобно очень вязкой жидкости. При достаточно высоких температурах таким свойством обладают тугоплавкие конструкционные металлы (углеродистые стали при температурах выше 350—400 °С, легированные жаропрочные стали при температурах выше 500 °С и т. д.). При сравнительно невысоких температурах 150—200 °С ползут легкие алюминиевые и магниевые сплавы, широко используемые в авиации. Деформации ползучести многих металлов и сплавов могут достигать десятков процентов.

Свойством ползучести обладают полимеры и многие другие материалы, применяемые в технике (дерево, бетон и т. д.). В горной механике и геофизике большое значение имеет ползучесть горных пород и льда.

В условиях ползучести схема деформационных разрушений существенно отличается от схемы, рассмотренной в предыдущей главе. Представление о максимальной нагрузке, при которой утрачивается устойчивое деформирование, здесь отпадает. При ползучести размеры тела изменяются, напряжения постепенно возрастают и при постоянной нагрузке; одновременно скорость ползучести растет и в некоторый момент времени может стать бесконечной. Следовательно, в ряде случаев имеется *время вязкого разрушения*, зависящее от нагрузки и конфигурации тела. В технической литературе часто используется термин *предел длительной прочности*; им обозначается напряжение, приводящее к разрушению через заданное время при определенной температуре.

Важно подчеркнуть, что схема вязкого разрушения может быть реализована, если при ползучести происходят изменения геометрии тела. Так, кручение вязкого стержня не приводит к разрушению в рассмотренном выше смысле (для устранения

этого противоречия с опытом можно ввести предельную деформацию, см. § 6.2).

Определение времени разрушения стержня, испытывающего ползучесть под действием постоянной нагрузки, является наиболее простой задачей в этой области. Впервые, по-видимому, анализ подобной задачи был проведен Генки [1] в 1925 г. для частного случая вязко-пластического стержня. Одквист в 1933 г. распространил результаты Генки на случай линейно-упрочняющегося вязко-пластического стержня. Значительно позднее (1953 г.) Хофф [1] рассмотрел нелинейно-вязкое течение стержня и, что существенно, обратил внимание на хорошее согласование теоретических предсказаний и опытных данных.

Как уже говорилось, задачи определения времени разрушения требуют анализа ползучести тела при больших деформациях. В связи с этим ниже рассматриваются соответствующие уравнения ползучести. Однако подробно уравнения ползучести здесь не обсуждаются; мы отсылаем читателя к литературе по теории ползучести. Подчеркнем, наконец, что ниже рассматриваются уравнения ползучести применительно к металлам. Анализ времени разрушения при ползучести полимеров и других материалов также может быть проведен, но требует специального рассмотрения.

**2. Уравнения ползучести при одноосном растяжении.** На рис. 6.1.1 приведена типичная кривая ползучести металлов при постоянной нагрузке. При нагружении стержень получает мгновенную упругую или упруго-пластическую деформацию  $\epsilon^0$ . В первом, относительно кратковременном, периоде ползучести  $AB$  скорость деформации убывает. На участке  $BC$ , обычно достаточно длительном, скорость ползучести постоянна. Этот период называется *периодом установившейся ползучести*.

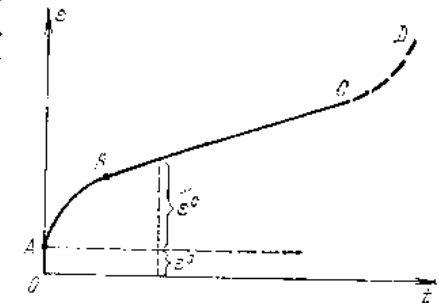


Рис. 6.1.1.

Если разрушение образца — «вязкое», то за точкой  $C$  следует участок возрастающей скорости деформации  $CD$ , связанный с значительным уменьшением поперечного сечения и последующим образованием шейки.

В известных опытах Андраде поддерживалось *постоянство напряжения*. При этом участок ускоренной ползучести не наблюдался вплоть до момента разрушения.

В дальнейшем нас будет интересовать анализ больших деформаций ползучести. Поэтому, так же как и в предыдущей



главе, можно пренебрегать упругими деформациями и считать, следовательно, материал несжимаемым. Обозначим через  $\xi$  скорость деформации, через  $\varepsilon$  — логарифмическое удлинение, через  $\sigma$  — истинное напряжение.

Теория установившегося течения. На участке  $BC$  ползучесть аналогична течению вязкой жидкости. Если пренебречь относительно кратковременным первым периодом  $AB$ , то мы приходим к простейшему уравнению ползучести

$$\xi = f(\sigma). \quad (1)$$

В случае  $f(\sigma) = k\sigma$ , где  $k = \text{const}$ , имеем линейно-вязкую среду (ньютонова жидкость). Для металлов скорость ползучести является существенно нелинейной функцией напряжения, показанной на рис. 6.1.2. Как правило, кривая  $f(\sigma)$  обращена вогнутостью вверх. Часто используется одночленная степенная аппроксимация (степенной закон)

$$\xi = B_1 \sigma^m, \quad (2)$$

где  $B_1 > 0$ ,  $m \geq 1$  — постоянные для данной температуры. Показатель  $m$  обычно значительно больше единицы и достигает иногда значений  $10 \div 12$ . Первый период ползучести можно приближенно учесть, если считать  $B_1$  функцией времени, равной  $B_1 \beta(t)$ ; здесь под  $B_1$  по-прежнему понимается постоянное значение, отвечающее стадии установившегося течения. Вид функции  $\beta(t)$  показан на рис. 6.1.3. С возрастанием времени  $\beta(t) \rightarrow 1$ .

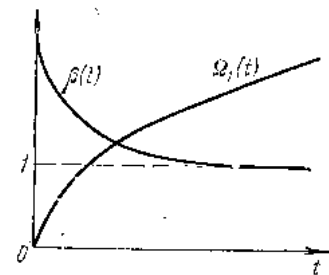


Рис. 6.1.3.

Теория упрочнения позволяет описать всю кривую ползучести (включая первый период); вместе с тем теория упрочнения более правильно описывает ползучесть при переменном напряжении.

В теории упрочнения принимается, что с развитием деформаций ползучести скорость течения замедляется, металл как бы упрочняется. Следовательно,

$$\xi = f(\sigma, \varepsilon). \quad (3)$$

Иногда эту зависимость задают в форме

$$\xi = \frac{f_1(\sigma)}{f_2(\varepsilon)}$$

где  $f_1(\sigma) \geq 0$  и  $f_2(\varepsilon) \geq 0$  — монотонно возрастающие функции. При  $f_2 = \text{const}$  приходим к уравнению теории течения. Уравнение теории упрочнения значительно сложнее уравнения теории течения.

3. Учет мгновенной пластической деформации (ползуче-пластическая среда). При высоком уровне напряжений ползучесть сопровождается мгновенной пластической деформацией. Учет последней представляет интерес в связи с тем, что при анализе вязких разрушений напряжения могут резко возрастать.

Скорость полной деформации  $\xi$  складывается из скорости деформации ползучести  $\xi^c$  и скорости пластической деформации  $\xi^p$ :

$$\xi = \xi^c + \xi^p. \quad (4)$$

Скорость деформации ползучести описывается либо по теории течения

$$\xi^c = f(\sigma),$$

либо по теории упрочнения

$$\xi^c = f(\sigma, \varepsilon^c).$$

Скорость мгновенной пластической деформации равна (см. § 5.1)

$$\xi^p = \varphi(\sigma) \frac{d\sigma}{dt}, \quad (5)$$

причем

$$\varepsilon^p = \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma$$

есть уравнение кривой мгновенного пластического деформирования (с упрочнением). Функция  $\varphi(\sigma)$  — неотрицательная монотонно возрастающая функция.

Схему ползуче-пластической среды широко использовал Олквист [1].

Если пластическая деформация протекает с малым упрочнением, то целесообразно исходить из схемы идеально пластического тела. Тогда при достижении предела текучести

$$\sigma = \text{const} = \sigma_T, \quad (6)$$

развивается беспрепятственное пластическое течение, причем напряжение не может превосходить  $\sigma_T$ .

4. Время разрушения стержня в условиях ползучести. Рассмотрим теперь детально задачу о ползучести цилиндрического стержня, растягиваемого заданной силой  $P$ . Пусть  $l, F$  — текущие, а  $l_0, F_0$  — начальные длина и площадь сечения. Далее,  $\sigma = P/F$  — текущее, а  $\sigma_0 = P/F_0$  — начальное напряжения. Скорость

деформации и сама деформация равны

$$\xi = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}, \quad \varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}.$$

Рассмотрим сначала решение задачи по теории течения, тогда

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = f(\sigma). \quad (7)$$

Полагая

$$\frac{l}{l_0} = \lambda$$

и используя условие несжимаемости

$$Fl = F_0 l_0, \quad (8)$$

находим, что

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} \frac{l}{l_0} = \sigma_0 \lambda.$$

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = f(\sigma_0 \lambda). \quad (9)$$

Начальное условие имеет вид

$$\text{при } t=0 \quad \lambda = 1.$$

Введем функцию

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{dx}{x f(x)}.$$

Тогда решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$t = \Phi(\sigma_0 \lambda) - \Phi(\sigma_0). \quad (10)$$

Поскольку при  $\lambda \rightarrow \infty$  функция  $f(\sigma_0 \lambda)$  растет не медленнее, чем  $\lambda^k$ , где  $k > 0$  — некоторое число, интеграл сходится; обозначим его предельное значение через  $\Phi(\infty)$ . Следовательно, имеется *конечное время*  $t = t_1$ , для которого стержень вытягивается в бесконечно тонкую пилу. Из (9) видно, что при  $t \rightarrow t_1$   $\frac{d\lambda}{dt} \rightarrow \infty$ . Итак,

$$t_1 = \Phi(\infty) - \Phi(\sigma_0). \quad (11)$$

Это время можно рассматривать как время разрушения стержня, так как при  $t \rightarrow t_1$  стержень утрачивает несущую способность. Фактически процесс равномерного вытягивания стержня по разным причинам прерывается образованием шейки.

Остановимся на частном случае степенного закона; тогда

$$f(x) = B_1 x^m$$

и

$$t = \frac{1}{m \xi_0} (1 - \lambda^{-m}), \quad (12)$$

где через  $\xi_0 = B_1 \sigma_0^m$  обозначена начальная скорость ползучести стержня. При  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем время разрушения

$$t_1 = \frac{1}{m \xi_0}. \quad (13)$$

Из решения (12) и условия несжимаемости вытекает, что

$$\frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{1/m}. \quad (14)$$

Для  $m > 1$  имеем  $\frac{d}{dt} \left(\frac{F}{F_0}\right) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_1$ . Зависимость (14) показана на рис. 6.1.4 для разных значений показателя  $m$ . Если  $m$  значительно больше единицы, резкое уменьшение площади сечения происходит лишь в последнем периоде «жизни» образца.

Логарифмируя соотношение (13) и формулу для  $\xi_0$ , находим

$$\lg \xi_0 = \lg B_1 + m \lg \sigma_0,$$

$$\lg t_1 = -\lg B_1 - m \lg \sigma_0 - \lg m.$$

В логарифмических координатах эти прямые являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой

$$\lg \xi_0 = -\frac{1}{2} \lg m.$$

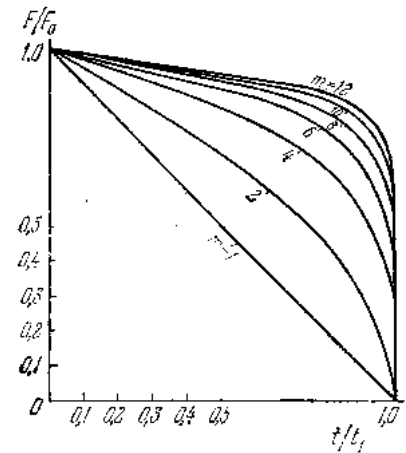


Рис. 6.1.4.

При этом по оси абсцисс откладываются логарифмы численных значений скорости деформации  $\xi_0$  и времени разрушения  $t_1$ , а по оси ординат — логарифм численного значения напряжения. Таким образом, по известному закону ползучести можно сразу указать время разрушения. Обработка экспериментальных данных во многих случаях подтверждает этот вывод. В качестве примера на рис. 6.1.5 показано сопоставление полученной

прямой с опытными данными Ш. Н. Каца. Опытные точки удовлетворительно согласуются с зависимостью (13), хотя и располагаются в общем несколько ниже теоретических. Качественно это можно объяснить тем, что разрушение образцов происходит при удлинениях, обычно не превышающих нескольких десятков процентов.

Согласно формуле (12) имеем

$$\frac{t}{t_1} = 1 - \lambda^{-m}.$$

Если  $m$  значительно больше единицы, то уже при сравнительно небольших удлинениях правая часть этого соотношения мало отличается от единицы, т. е. надлежащие времена  $t$  близки к временам вязкого разрушения  $t_1$ . Поэтому практически условие разрушения  $\lambda \rightarrow \infty$  можно заменить условием  $\lambda \rightarrow \lambda_*$ , где предельное удлинение  $\lambda_*$  можно рассматривать как константу материала. Новое условие приводит к несколько лучшему согласию

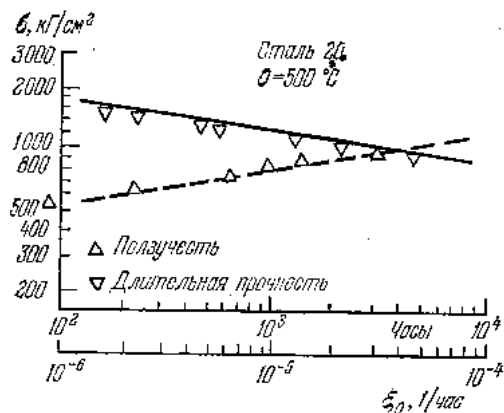


Рис. 6.1.5.

с экспериментальными данными. Вычислим плотность работы рассеяния  $A_p = \int_0^t \sigma \dot{\xi} dt$ . Так как  $\sigma \dot{\xi} = \sigma_0 \frac{d\lambda}{dt}$ , то  $A_p = \sigma_0 (\lambda - 1)$ . Остановимся еще на одном замечании. Согласно (11) время разрушения зависит от выбранного закона ползучести.

цесса, протекающая при существенной нелинейности закона весьма быстро, будет, конечно, зависеть от выбранного закона. Но заключительная стадия относительно кратковременна, поэтому полное время разрушения в общем будет мало зависеть от типа аппроксимации.

Для приближенного учета первого периода ползучести можно, как отмечено выше, считать  $B$  функцией времени  $B, \beta(t)$ . Если ввести приведенное время

$$\tau(t) = \int_0^t \beta(x) dx,$$

то легко видеть, что формулы (12), (13) и (14) примут соответственно вид

$$\tau = \frac{1}{m \xi_0} (1 - \lambda^{-m}), \quad (12')$$

$$\tau_1 = \frac{1}{m \xi_0}, \quad (13')$$

$$\frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right)^{1/m}. \quad (14')$$

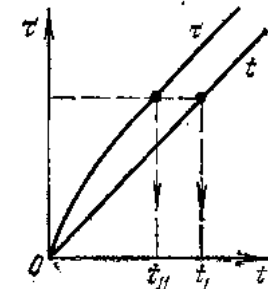


Рис. 6.1.6.

Переход к физическому времени  $t$  несложен. На рис. 6.1.6 показан график функции  $\tau(t)$ ; очевидно, что при больших временах  $\tau \approx t$ . При учете первого периода ползучести время разрушения  $t_{11}$  меньше времени разрушения  $t_1$ , полученного согласно уравнению установившегося течения.

Обратимся теперь к задаче растяжения стержня по теории упрочнения, более полно описывающей кривую ползучести. Здесь

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{f_1(\sigma_0 \lambda)}{f_2(\ln \lambda)} = \frac{f_1(\sigma_0 \lambda)}{f_2(\lambda)}.$$

Отсюда при прежнем начальном условии

$$t = \int_0^\lambda \frac{f_2^*(x) dx}{x f_1(\sigma_0 x)}. \quad (15)$$

Вводя функцию

$$\Psi(z, \sigma_0) = \int_1^z \frac{f_2^*(x) dx}{x f_1(\sigma_0 x)},$$

запишем предыдущее соотношение в форме

$$t = \Psi(\lambda, \sigma_0) - \Psi(1, \sigma_0).$$

Время разрушения равно

$$t_1 = \Psi(\infty, \sigma_0) - \Psi(1, \sigma_0). \quad (16)$$

**5. Время разрушения растягиваемого стержня при деформациях ползучести и пластичности.** Рассмотрим стержень, следующий уравнениям (4), (5):

$$\xi = f(\sigma) + \varphi(\sigma) \frac{d\sigma}{dt}. \quad (17)$$

Внесем сюда значения

$$\lambda = \frac{l}{l_0}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad \sigma = \frac{P}{F_0} \lambda$$

и рассмотрим частный случай постоянной нагрузки  $\frac{P}{F_0} = \text{const} = \sigma_0$ . Тогда из (17) получаем

$$[1 - \varphi(\sigma_0 \lambda) \sigma_0 \lambda] \frac{d\lambda}{dt} = f(\sigma_0 \lambda) \lambda. \quad (18)$$

Так как  $\varphi \geq 0, f \geq 0, \frac{d\lambda}{dt} > 0$ , то должно быть

$$1 - \varphi(\sigma_0 \lambda) \sigma_0 \lambda \geq 0.$$

Условие

$$1 - \varphi(\sigma_0 \lambda) \sigma_0 \lambda = 0 \quad (19)$$

определяет единственный корень  $\lambda^*$  (рис. 6.1.7). С приближением к  $\lambda^*$  скорость удлинения  $\frac{d\lambda}{dt} \rightarrow \infty$ . Следовательно, в момент времени  $t_1$ , соответствующий достижению критической длины  $\lambda^*$ , теряется устойчивость деформации ( $t_1$  — время разрушения).

При  $\varphi \neq 0$  длина стержня не может возрасти неограниченно. Итак, картина течения такова. При загрузке постоянной силой происходит некоторая мгновенная деформация  $\lambda_0$ . Далее стержень с течением времени удлиняется прежде всего за счет ползучести. Однако одновременно происходит и некоторое удлинение стержня за счет мгновенного пластического течения, так как поперечное сечение уменьшается и, следовательно, растет напряжение. Когда в момент  $t_1$  достигается критическая длина  $\lambda^*$ , устойчивость деформирования нарушается.

Пусть, например,  $\varphi(\sigma) = A\sigma^n$ , где  $A, n$  — положительные постоянные. По условию (19) имеем

$$1 - A\sigma_0^{n+1} \lambda^{n+1} = 0,$$

откуда

$$\lambda^{*n+1} = (A\sigma_0^{n+1})^{-1}. \quad (20)$$

При загрузке (при  $t = 0$ ) мгновенная пластическая деформация равна

$$\ln \lambda_0 = \int_0^{\sigma_0 \lambda_0} \varphi(x) dx = \frac{A}{n+1} \sigma_0^{n+1} \lambda_0^{n+1},$$

т. е.

$$\lambda_0^{n+1} = \frac{(n+1) \ln \lambda_0}{A\sigma_0^{n+1}}.$$

Так как  $\lambda^* \gg \lambda_0$ , то  $(n+1) \ln \lambda_0 \ll 1$  и критическая длина  $\lambda^* \gg \exp\left(\frac{1}{n+1}\right)$ .

Если пластическая деформация не развивается (т. е.  $\varphi = 0$ ), приходим к рассмотренной выше задаче о времени разрушения стержня в условиях ползучести; при этом в момент  $t_1$  величина  $\lambda = \infty$ .

Если же не происходит деформация ползучести (т. е.  $f = 0$ ), то при  $d\lambda > 0$

$$1 - \varphi(\sigma_0 \lambda) \sigma_0 \lambda = 0.$$

Это условие определяет на кривой упрочнения максимальное истинное напряжение  $\sigma^* = \sigma_0 \lambda^*$  или соответствующее максимальное удлинение  $\lambda^*$ . Через эти значения легко определяется максимальная нагрузка

$$P_* = \frac{\sigma^* F_0}{\lambda^*},$$

уже полученная ранее (§ 5.1).

Рассмотрим, наконец, случай идеальной пластичности. Здесь пластическая деформация не происходит при  $\sigma < \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  — предел текучести. При достижении предела текучести наступает свободное пластическое течение, характеризующее пластическое разрушение (см. гл. 3). При  $\sigma < \sigma_T$  стержень ползет и напряжение равно  $\sigma = \sigma_0 \lambda$ . Так как  $\sigma < \sigma_T$ , то здесь  $\sigma_0 \lambda < \sigma_T$ . Состояние пластического разрушения достигается при

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} > 1,$$

и время разрушения равно

$$\bar{t}_1 = \Phi(\sigma_T) - \Phi(\sigma_0). \quad (21)$$

Если  $\sigma_0 = \sigma_T$ , стержень разрушается мгновенно.

Для степенного закона ползучести

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{m\xi_0} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right)^m \right] = t_1 \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_T} \right)^m \right], \quad (22)$$

где  $t_1$  берется согласно формуле (13). Для больших значений показателя  $m$  поправка мала. Это объясняется тем, что быстрое возрастание напряжения происходит лишь в заключительной

стадии течения (см. рис. 6.1.4). Поправка будет также мала при относительно малых начальных напряжениях; в этом случае при всех  $m > 1$  предел текучести достигается в конечной стадии течения.

Формула (22) получена В. И. Розенблюмом.

**6. Случай переменной нагрузки.** Вопрос о вычислении времени разрушения при действии переменной нагрузки  $P(t)$  тесно связан с вопросом описания ползучести при изменяющихся напряжениях. Известно, что описание ползучести при произвольной программе нагружения затрудняется необходимостью учета различных вторичных эффектов (прежде всего — эффекта обратной ползучести). В тех случаях (например, при достаточно плавных периодических изменениях напряжения), когда такое описание ползучести оказывается возможным, вычисление времени разрушения может быть проведено с надлежащей точностью. Если нагрузка изменяется медленно и монотонно, можно исходить из уравнения теории упрочнения (3) или даже из уравнения установившейся ползучести (1).

Пусть, например, сила растет пропорционально времени  $P = kt$ , тогда  $\sigma = \lambda \lambda t$ , где  $\lambda = k/F_0$ . При степенном законе имеем

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = B_1 \lambda^m t^m \lambda^m.$$

Выполняя интегрирование и устремляя  $\lambda \rightarrow \infty$ , находим время разрушения

$$t_1 = \left( \frac{m+1}{B_1 \lambda^m} \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Рассмотрим, далее, случай вязкого разрушения при ступенчатом изменении нагрузки  $P$ , именно, пусть в течение каждого промежутка времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) действует постоянная нагрузка  $P_k$ . Промежутки  $\Delta t_k$  предполагаются достаточно длительными, так что влиянием переходов от одного режима к другому можно пренебречь.

Интегрируя уравнение (9) для случая степенного закона в промежутке  $\Delta t_k$ , полагая  $t = t_k$  и суммируя по  $k$ , находим

$$1 - \lambda_s^{-m} = m B_1 \sum_{k=1}^s \sigma_{0k}^m \Delta t_k \quad (\sigma_{0k} = P_k/F_0).$$

Если бы напряжение  $\sigma_{0k}$  не изменялось в течение всего процесса, время вязкого разрушения было бы равно

$$t_{1k} = (m B_1 \sigma_{0k}^m)^{-1}.$$

Следовательно,

$$1 - \lambda_s^{-m} = \sum_{k=1}^s \frac{\Delta t_k}{t_{1k}}.$$

Устремляя  $\lambda_s \rightarrow \infty$ , получаем

$$\sum_{k=1}^s \frac{\Delta t_k}{t_{1k}} = 1. \tag{23}$$

Это соотношение выражает так называемый принцип линейного суммирования повреждений, сформулированный (применительно к разрушениям в условиях ползучести) Робинсоном [1].

**7. Время разрушения стержневых решеток.** Нетрудно рассмотреть задачи о времени разрушения стержневых систем с растянутыми стержнями. При этом необходим анализ больших деформаций стержневых систем. Этот анализ легко проводится для простых симметричных решеток. Если в системе имеются сжатые стержни, необходимо учитывать их выпучивание, что заметно усложняет решение.

На рис. 6.1.8 показаны примеры решеток, время вязкого разрушения которых нетрудно вычислить, используя условие симметрии. Сплошными линиями показаны начальные конфигурации решеток, пунктиром — конфигурации в текущий момент  $t$ .

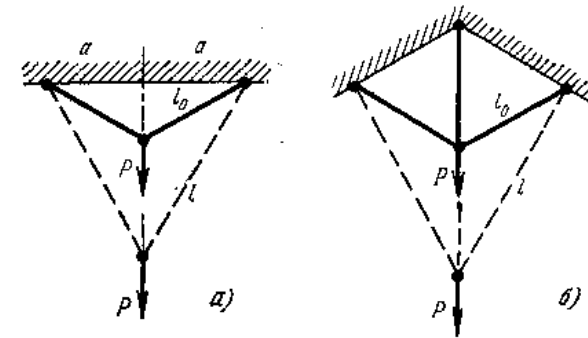


Рис. 6.1.8.

Рассмотрим детально первую решетку (рис. 6.1.8, а), являющуюся статически определимой системой, образованной двумя одинаковыми стержнями. Начальные размеры стержней обозначим через  $l_0, F_0$ , текущие значения — через  $l, F$ . По условию несжимаемости имеем

$$Fl = F_0 l_0.$$

Напряжение в стержнях равно

$$s = \frac{P}{2F \sqrt{l - \left(\frac{a}{l}\right)^2}}, \quad s_0 = \frac{P}{2F_0 \sqrt{l_0 - \left(\frac{a}{l_0}\right)^2}}.$$

Уравнение ползучести стержня имеет вид

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = B_1 \sigma_0^m \left[ \frac{l}{l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2}} \right]^m,$$

где через  $\sigma_0 = \frac{P}{2F_0}$  обозначено напряжение в стержне при  $a=0$ .

Выполняя интегрирование и полагая

$$\frac{l}{a} = \lambda; \quad \frac{l_0}{a} = \lambda_0; \quad J(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda^2 - 1)^{m/2} \lambda^{-2m-1} d\lambda,$$

находим

$$J(\lambda) = \frac{\lambda_0^{-m}}{m} \frac{t}{t_0},$$

где через  $t_0 = [mB_1\sigma_0^m]^{-1}$  обозначено время вязкого разрушения вырожденной решетки при  $a=0$ .

Пусть  $m=4$ . Тогда нетрудно найти, что

$$\frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \left( -1 + \frac{4}{3\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^4} \right) + \left( 1 - \frac{4}{3\lambda_0^2} + \frac{1}{2\lambda_0^4} \right) = \frac{t}{t_0}. \quad (24)$$

Разрушению соответствует неограниченное возрастание длины, т. е.  $\lambda \rightarrow \infty$ . Следовательно, время вязкого разрушения решетки равно

$$t_{11} = t_0 \left( 1 - \frac{4}{3\lambda_0^2} + \frac{1}{2\lambda_0^4} \right). \quad (25)$$

Эта зависимость показана на рис. 6.1.9. Очевидно, что время разрушения решетки меньше времени разрушения стержня под действием силы  $P/2$ . Это объясняется большим значением усилия в стержне решетки при  $a > 0$ .

С уменьшением  $a$  отношение  $t_{11}/t_0$  стремится к единице.

Если учесть, что напряжение  $\sigma$  ограничено величиной предела текучести  $\sigma_T$ , то наибольшее значение параметра длины  $\lambda_*$  определяется из соотношения

$$\lambda_0 \frac{\sigma_T}{\sigma_0} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (26)$$

Это значение следует затем внести в уравнение (24), откуда находится соответствующее время разрушения.

Заметим, что  $\lambda \geq \lambda_0 > 1$ . Полученная зависимость (26) показана на рис. 6.1.10 сплошной линией. Если  $\lambda_0 \frac{\sigma_T}{\sigma_0} < 2$ , равно-

весие невозможно, происходит ускоренное пластическое течение. Если  $\lambda_0 \frac{\sigma_T}{\sigma_0} > 2$ , причем  $\lambda_0 > \sqrt{2}$ , то решетка испытывает ползучесть до тех пор, пока  $\lambda < \lambda_*$ ; при  $\lambda = \lambda_*$  несущая способность решетки исчерпывается. Наконец, если  $\lambda_0 \frac{\sigma_T}{\sigma_0} > 2$ , но  $\lambda_0 < \sqrt{2}$ ,

то при достаточно большом начальном напряжении решетка может испытать первоначальную пластическую деформацию, затем развернется процесс ползучести до значения  $\lambda = \lambda_*$ .

**8. Влияние изменяющейся температуры.** Скорость ползучести резко возрастает с повышением температуры, поэтому необходимо учитывать даже сравнительно небольшие колебания температуры. В случае степенного закона (2) от температуры  $\theta$  зависят, вообще говоря, и коэффициент  $B_1$ , и показатель  $m$ . Однако в ограниченном диапазоне изменения температуры показатель  $m$  обычно можно считать приближенно постоянным; значительные изменения претерпевает лишь коэффициент  $B_1 = B_1(\theta)$ . В этом случае *простой зависимости от температуры* имеем:

$$\xi = B_1(\theta) \sigma^m, \quad (27)$$

причем часто полагают, что

$$B_1(\theta) = B_{10} e^{c\theta},$$

где  $B_{10}, c$  — постоянные.

В рассматриваемых нами задачах определения времени разрушения можно не учитывать скорости упругой деформации  $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$  (об этом уже говорилось выше) и скорости теплового удлинения  $\alpha \frac{d\theta}{dt}$ , где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Рассмотрим пример растяжения стержня, температура которого растет пропорционально времени

$$\theta = \theta_0 (1 + \nu t),$$

где  $\theta_0, \nu$  — постоянные. Тогда

$$B_1(\theta) = \bar{B}_{10} e^{\beta t},$$

где  $\bar{B}_{10}, \beta$  — известные коэффициенты. При  $P = \text{const}$  уравнение ползучести имеет вид

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \bar{\xi}_0 e^{\beta t} \lambda^m \quad (\bar{\xi}_0 = \bar{B}_{10} \sigma_0^m).$$

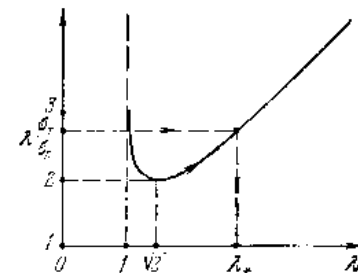


Рис. 6.1.10.

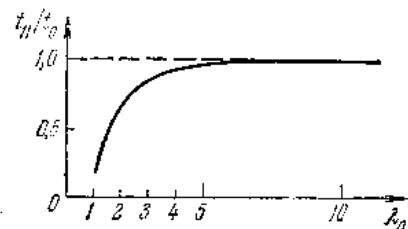


Рис. 6.1.9.

Отсюда при прежнем начальном условии вытекает, что

$$1 - \lambda^{-m} = \frac{m}{\beta} \xi_0 e^{\beta t}, \quad \beta \neq 0.$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем время вязкого разрушения

$$t_1 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\beta}{m \xi_0}.$$

## § 6.2. Сложное напряженное состояние. Уравнения и простейшие задачи

**1. Общие замечания.** Определение времени разрушения различных элементов конструкций, работающих в условиях сложного напряженного состояния, основывается на общих уравнениях ползучести. Как известно, имеется много моделей ползучего тела; в зависимости от характера нагружения можно исходить из более или менее сложных уравнений ползучести. Здесь мы кратко рассмотрим наиболее распространенные и простые варианты — теорию установившегося течения и теорию упрочнения. Для учета пластической составляющей используется схема ползуче-пластического тела. Разумеется, анализ больших деформаций ползучести может быть проведен и на основе иных теорий ползучести (более простой, но не лишенной противоречий, теории старения и более сложных, чем теория упрочнения), однако изложение различных вариантов решений здесь не представляет, как нам кажется, большого интереса.

Время разрушения определяется условием неограниченного изменения размеров тела. Можно, однако, аналогично случаю растяжения стержня (§ 6.1) перейти к условию *предельной деформации*. При скручивании трубки (в той же области *деформационных разрушений*) происходит срез поперечного сечения при некотором уровне пластичности. Предельная деформация зависит, вообще говоря, от напряженного состояния, от его жесткости. Учитывая, что при сильной нелинейности поправка к схеме Хоффа не является существенной (за исключением состояний типа чистого сдвига), можно поставить более простое ограничение

$$\Gamma_0 = \int_0^t \sqrt{2 \xi_{ij} \dot{\xi}_{ij}} dt = \int_0^t H dt < \gamma_*,$$

где  $\Gamma_0$  — параметр Одквиста, характеризующий испытанную металлом необратимую деформацию. Значение  $\gamma_*$  можно брать из опытов на кручение. Разумеется, приведенное условие применимо лишь в некотором интервале изменения вида напряженного состояния и при достаточно простом нагружении.

**2. Уравнения теории течения.** В простейшем варианте теории течения, используемом в последующем, рассматривается ползучесть во втором периоде. Упругими деформациями, как и прежде, можно пренебрегать и считать, следовательно, материал несжимаемым, т. е.

$$\xi_{ij} \delta_{ij} = 0. \quad (1)$$

Далее принимается, что главные направления тензоров напряжения и скорости деформации совпадают, а соответствующие диаграммы Мора подобны. Тогда

$$\xi_{ij} = \psi s_{ij}, \quad (2)$$

где  $\psi$  — скалярный множитель, зависящий, вообще говоря, от инвариантов тензоров напряжения и скорости деформации и некоторого числа параметров, характеризующих процесс деформирования (например, рассеяния, работы и т. д.). Из (2), выполняя свертку, получаем

$$H = 2\psi T, \quad (3)$$

где  $H$  — интенсивность скоростей деформации сдвига, а  $T$  — интенсивность касательных напряжений.

В теории течения принимается, что ползучесть не зависит от гидростатического давления и что интенсивность скоростей деформаций сдвига является функцией интенсивности касательных напряжений, т. е.

$$H = f(T) T, \quad (4)$$

или, обратно,

$$T = g(H) H. \quad (5)$$

Таким образом, множитель  $\psi$  здесь равен

$$\psi = \frac{H}{2T} = \frac{1}{2} f(T) = \frac{1}{2} \frac{1}{g(H)}$$

Итак, уравнения теории течения имеют вид

$$2 \dot{\xi}_{ij} = f(T) s_{ij}, \quad (6)$$

или

$$s_{ij} = 2g(H) \dot{\xi}_{ij}. \quad (7)$$

В случае степенной зависимости

$$H = BT^m \quad \text{или} \quad T = \bar{B}H^{\frac{1}{m}}, \quad (8)$$

где показатель  $m = 1/\mu$  имеет то же значение, что и при одноосном растяжении, а коэффициент  $B$  связан с прежним коэффициентом  $B_1$  соотношением

$$B = 3^{\frac{m+1}{2}} B_1.$$

Заметим, что  $\bar{B} = B^{-\mu}$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , а

$$f(T) = BT^{m-1}, \quad g(H) = \bar{B}H^{\mu-1}. \quad (9)$$

При  $m = 1$  приходим к уравнениям ньютоновой жидкости. Уравнения (6) записываются в иной форме, если ввести так называемый потенциал течения.

Прежде всего заметим, что

$$s_{ij} = \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial T^2}{\partial s_{ij}}. \quad (10)$$

Следовательно, уравнения (6) можно записать в форме

$$2\xi_{ij} = f(T) \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Отсюда вытекает, что вектор течения  $\xi_{ij}$  нормален к поверхности течения  $T^2 = \text{const}$ .

Вводя новые поверхности течения

$$F(\sigma_{ij}) = \text{const},$$

можно легко строить обобщенные варианты теории течения

$$2\xi_{ij} = f \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11)$$

где  $f$  — некоторая скалярная функция. В главных осях эти соотношения запишутся в виде

$$2\xi_i = f \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}. \quad (12)$$

В пространстве главных напряжений поверхность течения  $T^2 = \text{const}$  является поверхностью кругового цилиндра. Используя представление (12), можно перейти к критерию Сен-Венана  $\tau_{\max} = \text{const}$ , соответствующему поверхности правильной шестигранной призмы, вписанной в упомянутую цилиндрическую поверхность Мизеса.

Другой важный случай относится к учету анизотропии. Здесь за потенциал течения можно взять, например, квадратичную форму

$$F = c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \quad (13)$$

где  $c_{ijkl}$  — некоторые постоянные.

Остановимся, наконец, на влиянии температуры. Рассмотрим сначала случай степенного закона ползучести. Если в данном интервале температуры имеет место простая зависимость от температуры (см. § 6.1), то показатель  $m$  можно считать постоянным, а коэффициент

$$B = B(\theta).$$

В общем случае в уравнениях (6) следует полагать, что  $f = f(T, \theta)$ .

**3. Уравнения теории упрочнения.** Здесь сохраняются предположения о несжимаемости среды и пропорциональности девиаторов напряжения и скорости деформации, приведенные в предыдущем разделе; поэтому соотношения (2) и (3) остаются. Необходимо лишь иначе определить множитель  $\psi$ . Соотношение (3) должно теперь обобщать зависимость § 6.1 для одноосного растяжения. Стало быть, множитель  $\psi$  должен зависеть не только от интенсивности касательных напряжений  $T$ , но и от величины, характеризующей испытанную металлом пластическую деформацию. В качестве такой величины обычно используют параметр Одквиста  $\Gamma_0$ ; тогда

$$\psi = \psi(T, \Gamma_0). \quad (14)$$

Конкретный вид зависимости устанавливается по опытным данным (например, при одноосном растяжении или кручении). Уравнения теории упрочнения приводят к значительно более трудным математическим задачам, чем уравнения теории течения.

**4. Уравнения ползуче-пластической среды.** Как уже отмечалось, иногда важно учесть мгновенную пластическую деформацию. Значение этой составляющей деформации возрастает с ростом интенсивности напряженного состояния.

Скорости полной деформации равны

$$\xi_{ij} = \xi_{ij}^c + \xi_{ij}^p, \quad (15)$$

где  $\xi_{ij}^c$  — скорости деформаций ползучести, а  $\xi_{ij}^p$  — скорости мгновенной пластической деформации. Первые составляющие ( $\xi_{ij}^c$ ) описываются либо уравнениями теории течения (6), либо уравнениями теории упрочнения с условием (14). При рассмотрении вторых слагаемых ( $\xi_{ij}^p$ ) необходимо различать случаи упрочнения и идеальной пластичности.

Случай пластичности с упрочнением. Уравнения, описывающие пластическую деформацию с упрочнением, рассматривались в гл. 5. Для соотношения (4) § 5.2 на  $dt$ , перепишем их в форме

$$\xi_{ij}^p = F(T) \frac{dT}{dt} s_{ij}. \quad (16)$$

Случай идеальной пластичности. Здесь, в простейшем варианте (теория пластичности Сен-Венана — Мизеса), имеем

$$\xi_{ij}^p = \lambda' s_{ij}, \quad (17)$$



где  $\lambda' \geq 0$  — произвольный скалярный множитель. К уравнениям (17) следует присоединить условие пластичности Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2, \quad (18)$$

где  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге.

В более общем случае условие пластичности записывается в форме

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (19)$$

причем скорости пластической деформации определяются по закону ассоциированного течения (см. § 3.1).

В случае переменной температуры уравнения пластического течения усложняются (см., например, обзор А. А. Вакуленко и Л. М. Качанова [1]).

**5. Время разрушения тонкостенной сферической оболочки под действием постоянного внутреннего давления.** В сферической системе координат  $r, \varphi, \chi$  напряжения в рассматриваемой оболочке равны

$$\sigma_r \approx 0; \quad \sigma_\varphi = \sigma_\chi = \frac{pa}{2h}, \quad (20)$$

где  $p$  — давление,  $a, h$  — соответственно текущие радиус и толщина оболочки. Интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_\varphi. \quad (21)$$

По условию несжимаемости

$$a^2 h = a_0^2 h_0. \quad (22)$$

Скорость деформации  $\xi_\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ ; согласно уравнениям ползучести (6), (8) имеем

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{3}{2} B_1 \left( \frac{pa}{2h} \right)^m. \quad (23)$$

Исключая здесь  $h$ , разделяя переменные и выполняя интегрирование при начальном условии  $a|_{t=0} = a_0$ , получаем

$$3m \xi_{\varphi 0} t = 1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3m}, \quad (24)$$

где  $\xi_{\varphi 0} = \frac{3}{2} B_1 \left( \frac{pa_0}{2h_0} \right)^m$  — скорость относительного изменения диаметра при  $t = 0$ . При  $a \rightarrow \infty$  получаем время разрушения

$$t_1 = \frac{1}{3m \xi_{\varphi 0}}. \quad (25)$$

Эта формула отличается по структуре от соответствующей формулы (13) § 6.1 для растягиваемого стержня множителем  $1/3$ .

Рассмотрим теперь время разрушения с учетом идеальной пластичности. С помощью условия несжимаемости находим, что

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \sigma_{\varphi 0},$$

где  $\sigma_{\varphi 0} = \frac{pa_0}{2h_0}$  — начальное напряжение. По условию текучести Мизеса  $T = \sigma_T / \sqrt{3}$ , следовательно пластическое течение возникает при

$$\left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \frac{\sigma_{\varphi 0}}{\sigma_T}. \quad (26)$$

Внося это значение в решение (24), получаем время разрушения  $\bar{t}_1$ , соответствующее достижению предельного состояния:

$$\bar{t}_1 = t_1 \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{\varphi 0}}{\sigma_T} \right)^m \right]. \quad (27)$$

Эта формула аналогична формуле (22) § 6.1 для растягиваемого стержня.

Задачу о времени вязкого разрушения толстостенного сферического сосуда под действием постоянного внутреннего давления рассмотрел Римрот [1].

**6. Раздувание сферической оболочки при изотермическом расширении газа.** Рассмотрим в качестве примера задачу о ползучести тонкостенной сферической оболочки, наполненной газом, расширяющимся при постоянной температуре. В начальный момент времени  $t = 0$  давление  $p = p_0$ .

По закону Бойля — Мариотта

$$pa^3 = p_0 a_0^3.$$

Используя это соотношение и условие несжимаемости, исключаем из уравнения ползучести оболочки (23) величины  $p, h$ ; тогда

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \xi_{\varphi 0} = \text{const},$$

откуда вытекает, что

$$a = a_0 \exp(\xi_{\varphi 0} t), \quad (28)$$

т. е. оболочка за конечный промежуток времени не может разрушиться.

Легко видеть, что в рассматриваемом примере

$$\frac{pa}{2h} = \frac{p_0 a_0}{2h_0},$$

т. е. напряжения не изменяются. Следовательно, с течением времени интенсивность касательных напряжений также не изменяется и пластическое состояние не наступает.

**7. Двухосное растяжение тонкой пластинки.** Для выяснения зависимости картины разрушения от истории нагружения рассмотрим ползучесть тонкой пластинки, растягиваемой силами  $P$ ,  $Q$ , действующими в перпендикулярных направлениях — по осям 1, 2 (рис. 6.2.1). Обозначим соответственно через  $a$ ,  $b$ ,  $h$  — текущие, через  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $h_0$  — начальные размеры пластинки. По условию несжимаемости

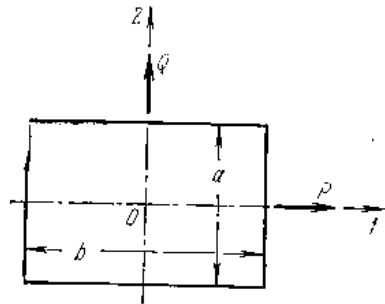


Рис. 6.2.1.

$$abh = a_0 b_0 h_0 = V. \quad (29)$$

Истинные напряжения равны

$$\sigma_1 = P/ah, \quad \sigma_2 = Q/bh.$$

Интенсивность касательных напряжений

$$T = \left[ \frac{1}{3} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \right]^{1/2}.$$

По уравнениям теории течения (6) при степенной зависимости имеем

$$\xi_1 = \frac{B}{3} T^{m-1} (2\sigma_1 - \sigma_2), \quad \xi_2 = \frac{B}{3} T^{m-1} (2\sigma_2 - \sigma_1), \quad (30)$$

причем

$$\xi_1 = \frac{1}{b} \frac{db}{dt}, \quad \xi_2 = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}.$$

Переходя от напряжений к силам, получаем

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dt} = \frac{B}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3} ah} \right)^m D \left( 2P - Q \frac{a}{b} \right), \quad (31)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{B}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3} ah} \right)^m D \left( 2Q \frac{a}{b} - P \right), \quad (32)$$

где введено обозначение

$$D = \left( P^2 - PQ \frac{a}{b} + Q^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Из (31), (32) вытекает, что при  $2Q \frac{a}{b} - P \neq 0$

$$\frac{db}{da} = \frac{b}{a} \frac{2P \frac{b}{a} - Q}{2Q - P \frac{b}{a}}. \quad (33)$$

Это однородное дифференциальное уравнение; характер зависимости нагрузок от времени здесь не имеет значения (время входит параметрически).

Если же  $2Q \frac{a}{b} - P = 0$ , то  $a = \text{const}$ ; уравнение (31) принимает вид

$$b^{m-1} db = K_1 P^m dt, \quad \left( K_1 = \frac{2B}{3} \left( \frac{1}{2V} \right)^m \right).$$

Если  $P = \text{const}$ , то при начальном условии  $b = b_0$  при  $t = 0$  имеем

$$1 - \left( \frac{b_0}{b} \right)^m = m b_0^m K_1 P^m t.$$

При  $b \rightarrow \infty$  получим время разрушения

$$t_{10} = \frac{1}{m \xi_{10}}, \quad (\xi_{10} = K_1 b_0^m P^m). \quad (34)$$

Эта формула аналогична формуле (13) § 6.1 при одноосном растяжении, но начальная скорость деформации  $\xi_{10} < \xi_0$  при  $m > 1$  (т. е. согласно (34) время разрушения больше).

Вернемся к общему случаю  $a \neq \text{const}$ . Положим  $\frac{b}{a} = \beta$ , тогда  $db = a d\beta + \beta da$  и из (33) находим

$$\frac{da}{a} = \frac{2Q - P\beta}{P\beta - Q} \frac{d\beta}{3\beta}$$

при условии, что  $P\beta - Q \neq 0$ . Интегрируя последнее уравнение при начальном условии  $\beta = \beta_0$ ,  $P = P_0$ ,  $Q = Q_0$  при  $a = a_0$ , получаем следующее соотношение между  $a$ ,  $b$ :

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)^3 = \frac{\beta^{-2} (P\beta - Q)}{\beta_0^{-2} (P_0\beta_0 - Q_0)}. \quad (35)$$

Отсюда видно, что при  $a \rightarrow 0$  имеем  $\beta \rightarrow \infty$ ; обратно, если  $a \rightarrow \infty$ , то будет  $\beta \rightarrow 0$ . Возвращаясь к переменным  $a$ ,  $b$ , находим, что при  $a \rightarrow 0$  имеем  $b \rightarrow \infty$ , при  $a \rightarrow \infty$  будет  $b \rightarrow 0$ .

Если в уравнении (32) исключить с помощью (35) и условия несжимаемости переменные  $\beta$ ,  $h$ , то придем к уравнению вида

$$\frac{da}{dt} = f(a, P, Q) \quad (36)$$

с начальным условием  $a = a_0$  при  $t = 0$ . Это уравнение интегрируется численными методами. Усилия  $P$ ,  $Q$  — заданные функции времени. При разрушении либо  $a \rightarrow \infty$ , тогда  $\beta \rightarrow 0$  и  $\frac{da}{dt} \rightarrow \infty$ , либо  $a \rightarrow 0$ , тогда  $\beta \rightarrow \infty$  и  $\frac{da}{dt} \rightarrow -\infty$ .

Остановимся теперь на случае  $P\beta - Q = 0$ , или

$$\frac{P}{a} = \frac{Q}{b},$$

следовательно, напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  равны. Но тогда  $d\beta = 0$ , и  $\beta = \text{const} = \beta_0$ ,

т. е. пластинка сохраняет геометрическое подобие. При этом условии из уравнения несжимаемости имеем

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{h_2}{h}.$$

Теперь соотношение (32) можно привести к виду

$$a^{-m-1} da = K_2 P^m dt, \quad K_2 = \frac{B}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3} h_0 a_0^2} \right)^m. \quad (37)$$

Если  $P = \text{const}$ , то при начальном условии  $a = a_0$  при  $t = 0$  получаем

$$1 - \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^m = m a_0^m K_2 P^m t.$$

Время разрушения равно

$$t_{1*} = \frac{1}{m \xi_{20}}, \quad (\xi_{20} = K_2 a_0^m P^m). \quad (38)$$

Рассмотрим, далее, случай *пропорционального возрастания нагрузок* ( $Q = \lambda P$ , где  $\lambda$  — фиксированный коэффициент). Из (35) следует, что

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{P}{P_0} \frac{\beta^{-2}(\beta - \lambda)}{\beta_0^{-2}(\beta_0 - \lambda)}, \quad (39)$$

а из (32) получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{B}{\sqrt{3}} \left(\frac{V}{\sqrt{3}}\right)^m a^{m+1} (\beta^2 - \lambda\beta + \lambda^2)^{\frac{m-1}{2}} (2\lambda - \beta) P^m.$$

Выражая здесь  $\beta$  через  $a$  согласно формуле (39), получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{da}{dt} = f(a, P),$$

легко интегрируемое численными методами.

Если  $P = \text{const}$ , переменные разделяются.

Обратимся, наконец, к случаю *последовательного нагружения*. Рассмотрим, для простоты, частный случай первоначально квадратной пластинки  $\beta_0 = 1$ . Пусть при  $0 \leq t \leq \tau$   $Q = 0$ ,  $P = P_0$ , а при  $t > \tau$   $P = 0$ ,  $Q = P_0$ . Ограничения на величину  $\tau$  устанавливаются ниже.

В первом периоде  $0 \leq t \leq \tau$  пластинка испытывает одноосную ползучесть. Из уравнения течения (32) получаем

$$1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2m} = m \xi_1^0 t,$$

где  $\xi_1^0 = \frac{2B}{\sqrt{3}} \left(\frac{P_0}{\sqrt{3} a_0 h_1}\right)^m$  — начальная скорость деформации.

С другой стороны, по уравнению (35) имеем  $\beta = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$ .

При разрушении  $a \rightarrow 0$ , соответствующее время равно

$$t_1 = \frac{1}{m \xi_1^0}.$$

Пусть  $\tau < t_1$ ; к моменту  $t = \tau$  размеры пластинки будут  $a_1, b_1$ , причем

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{2m} = 1 - \frac{\tau}{t_1}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^3.$$

Во втором периоде  $t > \tau$  пластинка испытывает одноосную ползучесть при действии усилия  $P_0$  в направлении 2; «начальные» размеры при  $t = \tau$  равны  $a_1, b_1$ .

Используя уравнение (33), находим

$$\left(\frac{b}{b_1}\right)^2 = \frac{a_1}{a}.$$

Из уравнения течения (32) теперь получаем

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\tau}{t_1} + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^m - \left(\frac{a_0}{a}\right)^m.$$

Разрушение произойдет при  $a \rightarrow \infty$  для  $t = t_2$ . Легко находим, что

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\tau}{t_1} + \sqrt{\frac{t_1}{t_1 - \tau}}.$$

Если  $\tau = 0$ , то  $t_2 = t_1$ ; если же  $\tau > 0$ , то  $t_2 > t_1$ . При  $\tau$ , близких к  $t_1$ , время разрушения  $t_2$  может быть очень большим:

$$\frac{t_2}{t_1} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow t_1,$$

что объясняется предшествовавшим нарастанием размера  $a$ .

Для нелинейно-вязкого тела влияние истории нагружения сказывается во влиянии изменений конфигурации тела, т. е. простейшим образом — через геометрические факторы. Этот результат объясняется простотой теории течения (6). При законе упрочнения, например, этого уже не будет.

**8. Растяжение стержня под давлением.** Рассмотрим задачу о растяжении стержня силой  $P$  при одновременном действии

внешнего давления  $p$ . Обозначим через  $l$ ,  $F$  текущие, через  $l_0$ ,  $F_0$  — начальные длину и площадь сечения.

По уравнениям ползучести (6) скорость осевой деформации при степенном законе (8) равна

$$\dot{\xi}_z = \xi_0 (\lambda + q)^m \quad (40)$$

где положено

$$\xi_0 = B_1 \sigma_0^m, \quad \sigma_0 = \frac{P}{F_0}, \quad \lambda = \frac{l}{l_0}, \quad q = \frac{p}{\sigma_0}.$$

При выводе формулы (40) принято, что  $\sigma_x = \sigma_y = -p$ , и использовано условие несжимаемости. Предполагается, что  $\lambda + q > 0$ . Внося в (40) значение скорости деформации  $\dot{\xi}_z = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}$ , получим дифференциальное уравнение течения стержня. В начальный момент времени  $t = 0$   $\lambda = 1$ . Решение имеет вид

$$\xi_0 t = \Phi(\lambda) - \Phi(1), \quad (41)$$

где положено ( $m$  — целое,  $q \neq 0$ )

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{q^m} \left[ \ln \frac{\lambda + q}{\lambda} + (m-1)! \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + q} \right)^k \frac{(-1)^k}{k! (m-k-1)! k} \right].$$

Случай  $q = 0$  был рассмотрен в § 6.1.

Устремляя  $\lambda \rightarrow \infty$ , находим время вязкого разрушения  $t_1$  из соотношения

$$\xi_0 t_1 = \Phi(\infty) - \Phi(1). \quad (42)$$

Из уравнения (40) вытекает, что при действии давления ( $q > 0$ ) время вязкого разрушения меньше, чем при простом растяжении, когда  $q = 0$  и скорость ползучести ниже.

### § 6.3. Время разрушения труб под действием внутреннего давления

**1. Общие замечания.** Задача об определении времени вязкого разрушения труб, испытывающих действие внутреннего давления, имеет большое прикладное значение. В связи с этим остановимся на указанной задаче более подробно с целью выяснить влияние различных факторов (например, толщины стенки трубы, дополнительной осевой пригрузки, температуры, пластических свойств металла и т. д.). Нужно в то же время подчеркнуть, что ряд важных для приложений конкретных особенностей работы труб (например, тепловой режим, геометрические неправильности, изгибающие нагрузки, анизотропия металла и т. д.) требует специального обсуждения и здесь не рассматривается.

**2. Тонкостенная труба под действием внутреннего давления.** Задача о ползучести длинной тонкостенной трубки под действием внутреннего давления имеет элементарное решение. Обозначим через  $a$ ,  $b$  соответственно внутренний и наружный радиусы трубы (рис. 6.3.1), через  $h = b - a$  — толщину трубы. Считаем, что по оси трубы действует усилие  $p \cdot \pi a^2$  от действия внутреннего давления на доннышке. Для тонкостенной трубы  $\frac{h}{a} \ll 1$  и напряжения по толщине стенки распределены почти равномерно, причем

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{h}, \quad \sigma_z = \frac{pa}{2h}. \quad (1)$$

Интенсивность касательных напряжений равна

$$T = \frac{pa}{2h}. \quad (2)$$

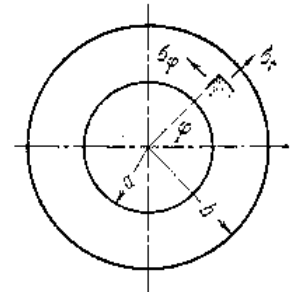


Рис. 6.3.1.

С точностью до  $\frac{h}{a} \ll 1$  условие несжимаемости может быть представлено в форме

$$ah = a_0 h_0, \quad (3)$$

где  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $h_0$  — начальные размеры трубы (при  $t = 0$ ).

По уравнениям установившейся ползучести находим скорость деформации

$$\dot{\xi}_\varphi = -\dot{\xi}_r = \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_\varphi}{2} \right)^m, \quad \dot{\xi}_z = 0. \quad (4)$$

Ползучесть в осевом направлении отсутствует.

Скорость окружной деформации равна  $\dot{\xi}_\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ , следовательно,

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{B}{2} \left( \frac{pa}{2h} \right)^m.$$

Исключая толщину  $h$ , получаем

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)^{-1-2m} d \left( \frac{a}{a_0} \right) = \xi_{\varphi 0} dt,$$

где

$$\xi_{\varphi 0} = \frac{B}{2} \left( \frac{pa_0}{2h_0} \right)^m \quad (5)$$

есть начальная скорость деформации. Интегрируя приведенное уравнение при начальном условии  $a = a_0$  при  $t = 0$ , находим

$$1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{2m} = 2m \xi_{\varphi 0} t. \quad (6)$$

При  $a \rightarrow \infty$  получим время вязкого разрушения

$$t_1 = \frac{1}{2m\xi_{\text{ф}0}}. \quad (7)$$

Согласно соотношениям (6), (7) имеем

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{2m}} = \frac{h}{h_0}. \quad (8)$$

Таким образом, зависимость утонения стенки трубы от времени определяется графиком, приведенным на рис. 6.1.4 для случая одноосного растяжения стержня. Нужно лишь для показателя  $m$  брать кривую, соответствующую  $2m$  (например, случайно  $m = 6$  отвечает на рис. 6.1.4 кривая  $m = 12$ ). Отсюда вытекает, что для трубы последний период «жизни», характеризующий быстрым убыванием толщины стенки, является еще более кратким, чем для стержня. Это объясняется ростом усилия в стенке трубы при ее раздувании.

Учтем теперь влияние пластических свойств на время разрушения. Необходимо установить момент  $t_{11}$ , когда исчерпывается несущая способность, т. е. когда  $T = \tau_T$ , где  $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге.

Из соотношений (8), (3) легко находим, что

$$1 - \frac{t}{t_1} \geq \left(\frac{T_0}{\tau_T}\right)^m,$$

где  $T_0 = \frac{pa_0}{2h_0}$  — начальное значение интенсивности касательных напряжений. Очевидно, что

$$\frac{t_{11}}{t_1} = 1 - \left(\frac{T_0}{\tau_T}\right)^m. \quad (9)$$

т. е.  $t_{11} < t_1$ .

Полученные результаты в общем удовлетворительно согласуются с данными испытаний при деформационных разрушениях.

На рис. 6.3.2 сопоставлены теоретическая кривая 1 (без учета пластичности) деформации  $\xi_{\text{ф}}$  тонкостенной трубы ( $\frac{b_0}{a_0} = 1,156$ , хромомолибденовая сталь 2,25 Ст, 1 Мо, температура 550 °С,  $p = 266 \text{ кг/см}^2$ ) и экспериментальные данные Таира и Отани [1]. Несмотря на сравнительно небольшую деформацию при разрушении (меньше 20%) величины  $t/t_1$  близки к единице. Это пол-

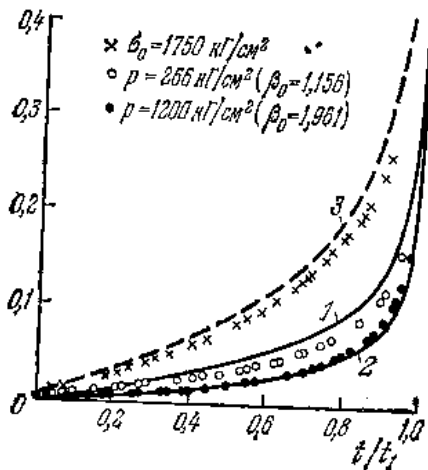


Рис. 6.3.2.

тверждает значение схемы вязкого разрушения. Пунктиром показана теоретическая кривая 3 зависимости удлинения  $\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)$  растягиваемого при той же температуре образца из упомянутой стали от отношения  $t/t_1$ ; крестиками нанесены экспериментальные точки ( $\sigma_0 = 1750 \text{ кг/см}^2$ ).

**3. Время разрушения толстостенной трубы.** Время вязкого разрушения толстостенной трубы под давлением определено в работах Ш. Н. Каца [1] и Римрота [1].

Напряженное состояние трубы с размерами  $a, b$  при установившейся ползучести описывается известными формулами (см. например, Л. М. Качанов [2])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s \left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu}\right], \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_r + 2\mu s \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu}, \\ \sigma_z &= \sigma_r + \mu s \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\mu = \frac{1}{m}$ , а  $s = p(\beta^{2\mu} - 1)^{-1}$ . Заметим, что  $\beta = b/a$ , причем  $\beta_0 = b_0/a_0$ . Легко видеть, что интенсивности касательных напряжений и скоростей деформаций сдвига соответственно равны

$$T = \mu s \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu}, \quad H = 2\xi_{\text{ф}}. \quad (11)$$

Далее,  $\xi_r = v/r$ , где  $v$  — радиальная скорость рассматриваемой частицы трубы. По закону степенной ползучести

$$\xi_{\text{ф}} = \frac{B}{2} T^m. \quad (12)$$

Для точек, лежащих соответственно на наружной и внутренней границах, имеем:

$$v|_{r=b} = \frac{db}{dt}, \quad v|_{r=a} = \frac{da}{dt}. \quad (13)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{a} \left(\frac{db}{dt} - \frac{b}{a} \frac{da}{dt}\right). \quad (14)$$

Внося сюда  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{db}{dt}$  согласно (12) и выполняя несложные преобразования, находим

$$\left(1 - \beta^{-\frac{2}{m}}\right)^m \frac{\beta d\beta}{\beta^2 - 1} = -Cp^m dt,$$

где положено  $C = \frac{B}{2} \mu^m$ . Введем функцию

$$\Phi(\beta) = \int_1^{\beta} \left(1 - \beta^{-\frac{2}{m}}\right)^m \frac{\beta d\beta}{\beta^2 - 1}, \quad \Phi'(\beta) > 0. \quad (15)$$

Тогда решение задачи о больших деформациях ползучести трубы записывается в форме

$$C p^m t = \Phi(\beta_0) - \Phi(\beta). \quad (16)$$

При неограниченном расширении трубы толщина ее уменьшается, т. е.  $\beta \rightarrow 1$ ; так как  $\Phi(1) = 0$ , то время вязкого разрушения  $t_1$  определяется уравнением

$$t_1 = \frac{\Phi(\beta_0)}{C p^m}. \quad (17)$$

Для удобства сравнения с экспериментальными данными запишем этот результат в форме

$$t_1 = (B_1 m \sigma_{\text{экив}}^n)^{-1},$$

введя «эквивалентное напряжение»

$$\sigma_{\text{экив}} = \left[ \frac{C}{B_1 m \Phi(\beta_0)} \right]^\mu p \equiv k_1 p.$$

Для коэффициента  $k_1$  нетрудно также получить формулу

$$k_1 = \frac{\sigma_0}{p} \left( \frac{t_{10}}{t_1} \right)^\mu, \quad (18)$$

где через  $t_{10}$  обозначено время вязкого разрушения растягиваемого стержня при начальном напряжении  $\sigma_0$ .

На рис. 6.3.3 показана теоретическая кривая зависимости коэффициента  $k_1$  от  $\beta_0$ , построенная по формуле (18) для стали 20 при температуре 500°C. Точками нанесены экспериментальные значения  $k_1$ . Опытные данные удовлетворительно согласуются с теоретическими значениями. Испытания на других сталях приводят, в общем, к такому же заключению.

На рис. 6.3.2 приведена теоретическая кривая 2 зависимости окружной деформации  $\varepsilon_{\varphi}$  на наружной поверхности трубы из хромомолибденовой стали от отношения  $t/t_1$  (при этом  $\beta_0 = 1,961$ ,  $p = 1200 \text{ кг/см}^2$ ,  $\theta = 550^\circ\text{C}$ ); экспериментальные точки, полученные Таира и Отани [1], хорошо согласуются с вычисленной кривой.

Опытные данные Хестерманса и Деффета [1] (толстостенные трубы из хромомолибденовых сталей при температурах 575°C

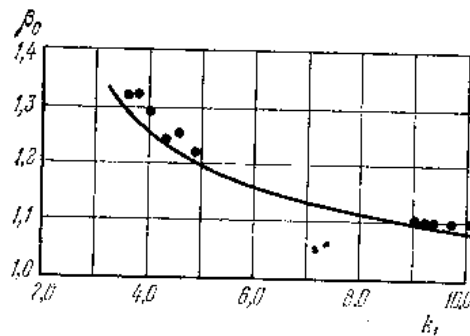


Рис. 6.3.3.

и 625°C) также согласуются с теоретическими предсказаниями.

Выясним теперь влияние способности металла к мгновенной пластической деформации, причем ограничимся случаем идеальной пластичности. Предельное давление для трубы равно

$$p = 2\tau_r \ln \beta.$$

Отсюда находим критический размер трубы

$$\beta_* = \exp\left(\frac{p}{2\tau_r}\right). \quad (19)$$

Время  $t_{11}$ , для которого исчерпывается несущая способность трубы, определяется из решения (16)

$$t_{11} = t_1 \left[ 1 - \frac{\Phi(\beta_*)}{\Phi(\beta_0)} \right]. \quad (20)$$

Второй член внутри квадратных скобок меньше единицы, так как  $\beta_* < \beta_0$ .

В заключение заметим, что время разрушения толстостенных труб под действием внутреннего давления и осевой силы определено в работе Е. М. Левитаса [1].

**4. Время разрушения неравномерно нагретой толстостенной трубы.** Неравномерно нагретая толстостенная труба находится под действием внутреннего давления. Температурное поле предполагается стационарным, осесимметричным и не зависящим от  $z$ , т. е.

$$\theta = \theta(a) + \theta_* \ln \frac{r}{a}, \quad (21)$$

где  $\theta(a)$  — температура внутренней поверхности трубы, а  $\theta_*$  — постоянная.

Примем, что имеет место простая зависимость от температуры, т. е. интенсивности  $H$  и  $T$  связаны уравнением

$$H = B(\theta) T^m, \quad (22)$$

причем в данном интервале температуры  $m = \text{const}$ , а

$$B(\theta) = B_0 e^{c\theta}, \quad (23)$$

где  $B_0, c$  — постоянные. Тогда распределение напряжений в трубе описывается формулами (см., например, Л. М. Качанов [2])

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s_* \left[ 1 - \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu_*} \right], \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_r + 2\mu_* s_* \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu_*}, \\ \sigma_z &= \sigma_r + \mu_* s_* \left(\frac{b}{r}\right)^{2\mu_*}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

в которых использованы обозначения

$$\mu_* = \mu \left( 1 + \frac{1}{2} c \theta_* \right), \quad s_* = p (\beta^{2\mu_*} - 1)^{-1}.$$

При этом осевая деформация отсутствует. Интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации соответственно равны

$$T = \mu_* s_* \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu_*}, \quad H = 2\xi_{\varphi}. \quad (25)$$

В приведенных формулах под  $a, b$  можно понимать текущие размеры трубы в момент  $t$ . Однако, в отличие от случая равномерно нагретой трубы, здесь возникают некоторые трудности, связанные с тепловым полем. Поскольку эти трудности типичны при рассмотрении больших деформаций и в других задачах, остановимся на них несколько подробнее. Так как изменения размеров трубы происходят медленно, тепловое поле можно считать стационарным; но оно зависит от размеров трубы и, следовательно, изменяется со временем. Можно, например, считать, что температура внутренней и наружной поверхностей трубы  $\theta(a)$  и  $\theta(b)$  постоянна; тогда градиент теплового поля по радиусу будет возрастать. Можно поступать и иначе — задавать на поверхностях трубы условия теплопередачи. Но все эти схемы при предельном переходе носят, конечно, условный характер. Поэтому при анализе времени разрушения неравномерно нагретых тел целесообразно учитывать пластичность. Тогда упомянутые затруднения практически не возникают.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, примем для простоты, что при изменениях размеров трубы температура ее внутренней стенки  $\theta(a)$  и коэффициент  $\theta_*$  постоянны.

Внося в соотношение (14) скорости  $da/dt, db/dt$  согласно (25) и (22) и разделяя переменные (аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе), получаем

$$C_* p^m t = \Phi_*(\beta_0) - \Phi_*(\beta), \quad (26)$$

где положено

$$\Phi_*(\beta) = \int_1^{\beta} (1 - \beta^{-2\mu_*})^m \frac{\beta d\beta}{\beta^2 - 1}, \quad C_* = \frac{B_1}{2} e^{c\theta(a)} (\mu_*)^m.$$

При  $\beta \rightarrow 1$  получаем время вязкого разрушения

$$t_{1*} = \frac{\Phi_*(\beta_0)}{C_* p^m}. \quad (27)$$

При других условиях для теплового поля решение задачи более сложно.

## § 6.4. Время разрушения вращающегося диска

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим, следуя работе В. И. Розенблюма [2], время вязкого разрушения диска постоянной (в начальный момент времени) толщины. Обозначим через  $a_0, b_0, h_0$  начальные внутренний и наружный радиусы и толщину диска, а через  $a, b, h$  — текущие значения соответствующих размеров диска (рис. 6.4.1). Радиусы  $a, b$  являются функциями времени  $t$ , а толщина  $h = h(r, t)$ . Пусть  $v = v(r, t)$  — радиальная скорость движения элемента диска.

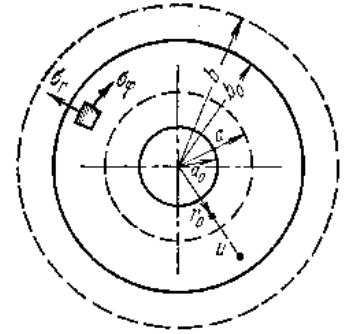


Рис. 6.4.1.

Компоненты скорости деформации

$$\xi_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \xi_{\varphi} = \frac{v}{r}, \quad \xi_z = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

удовлетворяют условию несжимаемости

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (2)$$

Рассматривая равновесие бесконечно малого элемента в текущем состоянии диска, нетрудно получить известное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} (hr\sigma_r) = h\sigma_{\varphi} - qh \frac{r^2}{b_0^2}. \quad (3)$$

Здесь положено  $q = \gamma \omega^2 b_0^2$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения диска,  $\gamma$  — плотность материала. Внутренний и наружный края диска свободны, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Используя уравнения ползучести (7) § 6.2, получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $v(r, t)$  и  $h(r, t)$ . Интегрирование этой системы может быть реализовано численными методами. Можно, однако, существенно упростить задачу, если перейти к обобщенному варианту теории течения при критерии максимального касательного напряжения (см. § 6.2). Тогда поверхность  $F = \text{const}$  в пространстве главных напряжений будет поверхностью правильной шестигранной призмы. В плоскости  $\sigma_z = 0$  имеем шестиугольник, показанный на рис. 6.4.2. По закону ассоциированного течения (12) § 6.2 вектор скорости деформации нормален к стороне шестиугольника. Пусть  $\sigma_{\varphi} > \sigma_r > 0$ ; тогда скорость

деформации  $\xi_\varphi > 0$ , а  $\xi_r = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

следовательно,  $v = v(t)$ ; точно так же перемещение  $u = u(t)$ . Текущая координата частицы  $r$  и начальная  $r_0$  связаны соотношением

$$r = r_0 + u(t). \quad (6)$$

Скорость деформации  $\dot{\xi}_\varphi$  будет зависеть лишь от напряжения  $\sigma_\varphi$ :

$$\dot{\xi}_\varphi = B_1(t) \sigma_\varphi^m. \quad (7)$$

Функция  $B_1(t)$  (вместо постоянной  $\bar{B}_1$ ) позволяет учесть влияние первого периода ползучести.

**2. Интегрирование.** Так как  $\xi_r = 0$ ,  $v = \frac{dr}{dt}$ , то условие несжимаемости (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(rh) = 0,$$

откуда следует, что

$$rh = \text{const} = r_0 h_0. \quad (8)$$

С помощью этого соотношения приведем уравнение равновесия к координатам начального состояния

$$\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 \sigma_r) = \frac{r_0}{r_0 + u} \sigma_\varphi - \frac{q}{b_0^2} r_0 (r_0 + u).$$

Внося сюда  $\sigma_\varphi$  согласно (7), находим:

$$\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 \sigma_r) = \frac{r_0}{r_0 + u} \bar{B}_1(t) \left( \frac{1}{r_0 + u} \frac{du}{dt} \right)^m - \frac{q}{b_0^2} r_0 (r_0 + u).$$

Интегрируя это уравнение по  $r_0$  от  $a_0$  до  $b_0$  и учитывая граничные условия (4), получаем

$$\bar{B}_1(t) \left( \frac{du}{dt} \right)^m \int_{a_0}^{b_0} \frac{r_0 dr_0}{(r_0 + u)^{1+m}} = \frac{q}{b_0^2} \int_{a_0}^{b_0} (r_0 + u) r_0 dr_0.$$

Вычисляя интегралы, находим

$$c X^m(x) \frac{dx}{dt} = B_1(t), \quad (9)$$

где введены обозначения

$$X(x) = \frac{\frac{\mu\beta + x}{(\beta + x)^\mu} - \frac{\mu + x}{(1 + x)^\mu}}{\frac{\beta^3 - 1}{3} - x \frac{\beta^2 - 1}{2}},$$

$$x = \frac{u}{a_0}, \quad \beta = \frac{b_0}{a_0}, \quad c = \left[ \frac{\beta^2}{\mu(1 - \mu)q} \right]^m.$$

Интегрирование уравнения (9) приводит к соотношению

$$\Omega_1(t) = c\Phi\left(\frac{u}{a_0}\right), \quad (10)$$

где положено

$$\Phi(x) = \int_0^x X^m(x) dx, \quad \Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t) dt.$$

График функции  $\Omega_1(t)$  показан на рис. 6.1.3. Интеграл  $\Phi(x)$  находится численными методами.

Соотношение (10) определяет зависимость радиального перемещения  $u$  от времени.

При  $u \rightarrow \infty$  получаем время разрушения диска  $t_*$  из уравнения

$$\Omega_1(t_*) = c\Phi(\infty). \quad (11)$$

При больших временах функция  $\Omega_1(t) \approx B_1 t$  и из (10), (11) вытекает, что

$$\frac{t}{t_*} = \frac{\Phi\left(\frac{u}{a_0}\right)}{\Phi(\infty)}. \quad (12)$$

На рис. 6.4.3 показана зависимость перемещения  $\frac{u}{a_0}$  от времени  $t/t_*$ , вычисленная для случая  $\beta = 8$  и нескольких значений показателя ползучести  $m$ . Легко видеть, что перемещение, как и в других рассмотренных выше задачах, резко возрастает лишь в последний период жизни диска.

**3. Сопоставление с временем разрушения при растяжении.** Время  $t_1$  вязкого разрушения растягиваемого стержня определяется формулой (13) § 6.1

$$mB_1 t_1 = \sigma_0^{-m}.$$

В аналогичном виде можно представить и формулу (11)

$$mB_1 t_* = (k_1 \bar{\sigma}^0)^{-m},$$

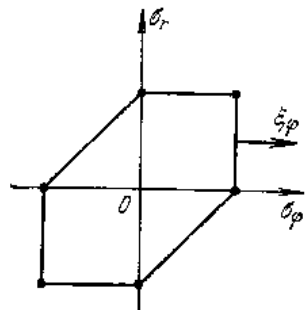


Рис. 6.4.2.

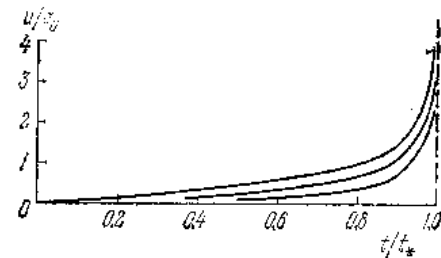


Рис. 6.4.3.



где через  $\bar{\sigma}^0$  обозначено начальное среднее окружное напряжение в диске:

$$\bar{\sigma}^0 = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} \sigma_{\varphi} dr_0 = \frac{q}{3} \left( 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right),$$

а коэффициент  $k_1$  равен

$$k_1 = \frac{3(1-\mu)}{1+\beta+\beta^2} \frac{1}{m^{1+\mu}} \frac{1}{\Phi(\infty)}.$$

Вычисления показывают, что коэффициент  $k_1$  практически не зависит от  $\beta$ ; график  $k_1$  приведен на рис. 6.4.4.

Итак, время разрушения вращающегося диска с отверстием совпадает с временем разрушения растягиваемого стержня при условии, что начальное напряжение в стержне  $\sigma_0$  и начальное среднее напряжение в диске  $\bar{\sigma}^0$  связаны соотношением

$$\sigma_0 = k_1 \bar{\sigma}^0.$$

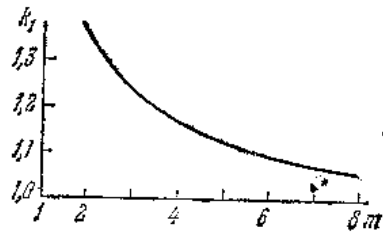


Рис. 6.4.4.

Анализ опытных данных по деформационным разрушениям дисков показывает, что время разрушения дисков может быть

определено по условию равенства среднего напряжения  $\bar{\sigma}^0$  напряжению  $\sigma_0$ . Следовательно, по экспериментальным данным имеем  $k_1 \approx 1$ , причем для испытанных марок стали показатель ползучести превышал 10. Теоретические значения  $k_1$  тогда также близки к единице.

Заметим в заключение, что учет мгновенной пластической деформации приводит к некоторому снижению времени разрушения  $t_*$ . Время вязкого разрушения вращающегося полого цилиндра определено в работе Римрота и Люка [1].

### § 6.5. Время разрушения длинной мембраны под действием равномерного давления

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим ползучесть первоначально плоской мембраны в форме бесконечной полосы  $|x| < b$ , нагруженной в момент  $t = 0$  равномерным давлением  $p$  (рис. 6.5.1). Можно считать, что реализуется случай плоской деформации, т. е.  $\varepsilon_z = 0$ . Эта задача изучена Одквистом [1] по следующей схеме: при нагружении происходит мгновенная пластическая деформация с упрочнением и мембрана принимает форму дуги круга с углом раствора  $2\varphi_0$ . Затем разворачивается ползучесть

мембраны. Напряжения изгиба предполагаются пренебрежимо малыми.

Следует, в общем, анализу Одквиста, рассмотрим эту задачу в несколько иной постановке. Именно, считаем, что нагружение происходит медленно, и будем пренебрегать упрочнением.

Время жизни мембраны найдем по условию достижения предельного пластического состояния.

Логарифмические деформации ( $\varepsilon_{\varphi}$  — окружное удлинение,  $\varepsilon_r$  — радиальное удлинение), равные

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{r\varphi}{b}, \\ \varepsilon_z &= 0, \quad \varepsilon_r = -\ln \frac{r\varphi}{b}, \end{aligned} \quad (1)$$

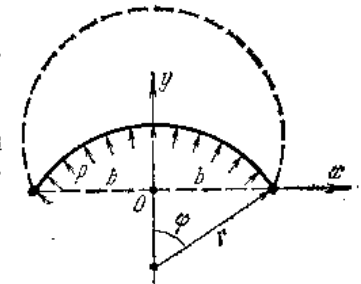


Рис. 6.5.1.

где  $r$ ,  $2\varphi$  — радиус и угол раствора круговой дуги, удовлетворяют условию несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_z = 0. \quad (2)$$

Условие несжимаемости может быть также представлено в форме

$$r\varphi h = bh_0, \quad (3)$$

где  $h_0$  — начальная толщина мембраны. Из приведенного рисунка ясно, что  $b = r \sin \varphi$ , следовательно,

$$\varepsilon_{\varphi} = \ln \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (4)$$

Компоненты напряжения — окружное, осевое и радиальное — соответственно равны

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{r}{h}, \quad \sigma_z = p \frac{r}{2h}, \quad \sigma_r \approx 0. \quad (5)$$

Вычисляя интенсивность касательных напряжений, получаем

$$T = \frac{pr}{2h}. \quad (6)$$

Заметим, наконец, что  $\frac{r}{h} = \frac{b}{h_0} \frac{\varphi}{\sin^2 \varphi}$ .

**2. Начальное пластическое состояние.** Согласно формуле (6) имеем

$$T = T_0 \frac{\varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad T_0 = \frac{pb}{2h_0}. \quad (7)$$

График функции  $T/T_0$  показан на рис. 6.5.2; при  $\varphi = \varphi_1 = 1,165$  функция имеет минимум, равный 1,38. Таким образом, в интер-

вале  $0 < \varphi < 1,165$  интенсивность напряжений убывает. Следовательно, при нагружении развивается пластическое течение мембраны; по мере ее выпучивания интенсивность напряжений спадает, и для конфигурации, характеризуемой углом  $\varphi_0$ , определяемым из соотношения

$$\frac{\tau_T}{T_0} = \frac{\varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad (8)$$

где  $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге, пластическое течение прекращается. Предполагается, что давление не слишком велико, именно

$$\frac{\tau_T}{T_0} > 1,38, \quad \text{т. е.} \quad p < 1,45 \frac{\tau_T h_0}{b} \equiv p_1. \quad (9)$$

В противном случае интенсивность касательных напряжений при любом  $\varphi$  превышает предел текучести и равновесие невозможно.

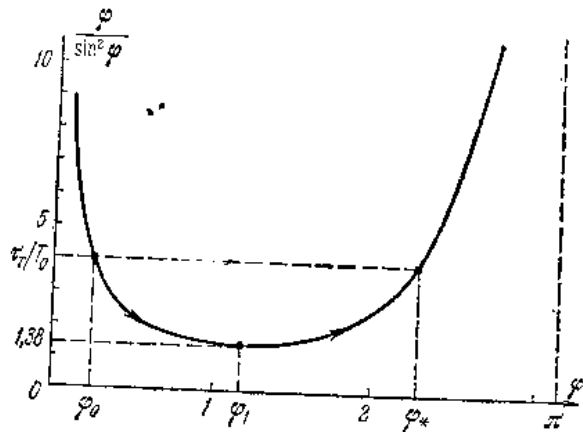


Рис. 6.5.2.

Если условие (9) выполнено, уравнение (8) имеет два корня  $\varphi_0$  и  $\varphi_*$  (см. рис. 6.5.2). При  $\varphi = \varphi_0$  пластическое деформирование приостанавливается и начинается ползучесть мембраны.

**3. Ползучесть.** По компонентам (1) находим скорости деформации

$$\dot{\xi}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \dot{\xi}_z = 0, \quad \dot{\xi}_r = -\dot{\xi}_\varphi \quad (10)$$

и интенсивность скоростей деформаций

$$H = 2\dot{\xi}_\varphi.$$

Используя степенную зависимость (8) § 6.2 между интенсивностями  $T, H$ , получаем

$$\frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi \sin^2 \varphi} \left( \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} \right)^m \frac{d\varphi}{dt} = K, \quad K = \frac{B}{2} T_0^m. \quad (11)$$

Выполняя интегрирование при начальном условии  $\varphi = \varphi_0$  для  $t = 0$ , находим

$$\Phi(\varphi) = Kt, \quad (12)$$

где положено

$$\Phi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( \frac{1}{\varphi} - \text{ctg} \varphi \right) \left( \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} \right)^m d\varphi.$$

Напряжение  $\sigma_\varphi$  и интенсивность  $T$  уменьшаются, пока угол  $\varphi$  не достигнет значения  $\varphi_1 = 1,165$ . Это произойдет в момент времени  $t_1$ , определяемый из соотношения

$$Kt_1 = \Phi(\varphi_1).$$

При  $t > t_1$  ползучесть развивается при возрастающих напряжениях. В момент  $t_*$  интенсивность касательных напряжений вновь достигнет предела текучести  $\tau_T$ , несущая способность мембраны теперь полностью исчерпывается.

Время разрушения  $t_*$  будет, очевидно, равно

$$Kt_* = \Phi(\varphi_*). \quad (13)$$

На рис. 6.5.1 пунктиром показана форма мембраны в заключительной стадии течения.

В заключение заметим, что подробное теоретическое и экспериментальное исследование больших деформаций ползучести круглой мембраны под действием равномерного давления недавно выполнено Сторакерсом [3].

## § 6.6. Время разрушения безмоментных осесимметричных оболочек

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим задачу о больших деформациях ползучести тонкой безмоментной оболочки вращения, испытывающей действие внутреннего давления  $p$  и осевого усилия  $P$ . Значения нагрузок могут, вообще говоря, зависеть от времени. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  срединная поверхность оболочки задана уравнением

$$r = r_0(z), \quad 0 \leq z \leq z_0, \quad (1)$$

где  $r, z$  — цилиндрические координаты; начальная толщина оболочки равна  $h_0 = h_0(z)$ .

В момент времени  $t$  срединная поверхность характеризуется уравнением

$$r = r(z, t), \quad (2)$$

причем  $z$  изменяется в пределах  $0 \leq z \leq z_1$ ; нижнее основание оболочки фиксировано на уровне  $z = 0$ . Верхний край оболочки может перемещаться в осевом направлении, т. е.  $z_1 = z_1(t)$ , причем  $z_1(0) = z_{10}$ . Толщину оболочки в момент  $t$  обозначим через  $h = h(z, t)$ , причем  $h(z, 0) = h_0(z)$ . Пусть  $\sigma_1, \sigma_2$  — меридиональное и кольцевое напряжения,  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизлы,  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и осью  $z$  (рис. 6.6.1). Тогда уравнения равновесия имеют вид

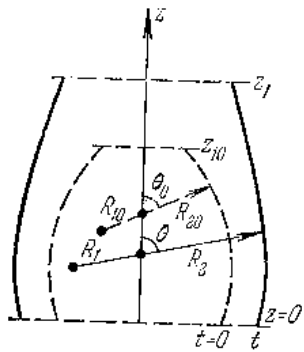


Рис. 6.6.1.

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{h}, \quad (3)$$

$$2\pi r h \sigma_1 \sin \theta = P. \quad (4)$$

По известным формулам дифференциальной геометрии имеем

$$R_1 = -\frac{1}{r''} (1 + r'^2)^{3/2}, \quad R_2 = r (1 + r'^2)^{1/2}, \quad (5)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}, \quad \text{ctg } \theta = r'. \quad (6)$$

Штрихами мы обозначаем частные производные  $r$  по  $z$  (например,  $r' = \frac{\partial r}{\partial z}$ ,  $r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$ ).

С помощью последних соотношений легко привести уравнения (3), (4) к виду

$$\sigma_1 = \frac{R_2 P}{2\pi h r^2}, \quad \sigma_2 = \frac{p R_2}{h} - \frac{R_2^2 P}{2\pi h r^2 R_1}. \quad (7)$$

Обозначим через  $v_n, v_t$  составляющие скорости по нормали к поверхности и по касательной к меридиану. Заменяя в известных формулах теории оболочек (см., например, В. В. Новожилов [4], стр. 125) составляющие перемещения составляющими скорости  $v_n, v_t$ , получаем компоненты скорости деформации

$$\xi_1 = \frac{1}{R_1} \left( v_n + \frac{\partial v_t}{\partial \theta} \right), \quad \xi_2 = \frac{v_r}{r}, \quad (8)$$

где  $v_r$  — радиальная скорость. Легко видеть, что

$$v_n = v_r \sin \theta + v_z \cos \theta,$$

$$v_t = v_r \cos \theta - v_z \sin \theta,$$

где  $v_z$  — составляющая скорости по оси  $z$ . Отсюда находим

$$\frac{\partial v_t}{\partial \theta} = -v_n + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \sin \theta.$$

Внося это значение в первую формулу (8), переходя к переменной  $z$  и используя зависимости (6), получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{1 + r'^2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - r' \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \quad \xi_2 = \frac{v_r}{r}. \quad (9)$$

Скорость деформации по нормали к оболочке  $\xi_3$  определяется из уравнения несжимаемости

$$\xi_3 = -\xi_1 - \xi_2. \quad (10)$$

Так как  $r = r(z, t)$ , то имеем

$$v_r = \frac{\partial r}{\partial t} + r' v_z. \quad (11)$$

Дифференцируя полным образом толщину оболочки  $h = h(z, t)$  по времени  $t$  и деля результат на текущее значение  $h$ , находим

$$\xi_3 = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} v_z \right). \quad (12)$$

Интенсивность касательных напряжений равна

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}. \quad (13)$$

Будем считать, что материал оболочки следует схеме ползуче-пластической среды без упрочнения. Тогда при  $T < \tau_T$  происходит ползучесть, при  $T = \tau_T$  в соответствующей зоне оболочки развивается пластическое течение.

В некоторых задачах (например, в задаче о деформации мембраны, § 6.5) при загрузке сразу возникают пластические деформации, а ползучесть проявляется позднее. Остановимся здесь на задачах, в которых пластические деформации становятся возможными после более или менее значительных деформаций ползучести.

Из соотношений установившейся ползучести для случая плоского напряженного состояния получаем

$$2\xi_1 = f(T) (\sigma_1 - \sigma), \quad 2\xi_2 = f(T) (\sigma_2 - \sigma), \quad (14)$$

где среднее давление  $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2)$ .

Внося в (14) напряжения согласно (7), скорости деформации — согласно (9), привлекая условие несжимаемости (10), получаем систему четырех уравнений относительно четырех

неизвестных функций  $r, h, v_r, v_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_r}{r} &= \frac{1}{6} f(T) (2\sigma_2 - \sigma_1), \\ v_r &= \frac{\partial r}{\partial t} + r' v_z, \\ \frac{1}{1+r'^2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + r' \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= \frac{1}{6} f(T) (2\sigma_1 - \sigma_2), \\ \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} v_z \right) &= -\frac{1}{6} f(T) (\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Интегрирование этой нелинейной системы в общем случае затруднительно. В случае малых перемещений напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  вычисляются по характеристикам начальной конфигурации оболочки, а скорости  $v_r, v_z$  сразу определяются из уравнений (15).

В рассматриваемых здесь задачах обычно можно считать, что интенсивность напряженного состояния  $T$  растет вместе с деформацией ползучести. В момент времени  $t_*$ , когда по некоторому кольцу возникает пластическое течение (т. е.  $T = \tau_r$ ), несящая способность оболочки, как правило, исчерпывается. При этом  $t_*$  — время разрушения.

В простых случаях, когда форма оболочки не изменяется, система (15) легко решается. Так, задача о времени вязкого разрушения длинной цилиндрической трубы под действием внутреннего давления  $p$  и осевого усилия  $P$  имеет замкнутое решение. Важный случай, когда по оси трубы действует сила внутреннего давления (труба с доньями), рассмотрен в § 6.3. Элементарное решение имеет также задача о времени вязкого разрушения сферической оболочки под действием внутреннего давления.

**2. Интегрирование.** Численное интегрирование системы (15) может быть реализовано по методу шагов. Пусть в некоторый момент  $t_1$  известны форма оболочки  $r = r(z)$  и толщина  $h = h(z)$ . Тогда известны  $\sigma_1, \sigma_2, R_1, R_2, r'$ . Из первого уравнения (15) сразу находим  $v_r$ . Из третьего уравнения получаем

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = A(z),$$

где  $A(z)$  — известная функция, так как  $\frac{\partial v_r}{\partial z}$  вычисляется. Следовательно,

$$v_z = \int_0^z A(z) dz.$$

Теперь из второго и четвертого уравнений системы (15) имеем

$$\frac{\partial r}{\partial t} = C(z), \quad \frac{\partial h}{\partial t} = D(z),$$

где  $C(z), D(z)$  — известные функции.

Рассмотрим близкий к  $t_1$  момент времени

$$t_2 = t_1 + \Delta t.$$

Обозначим значения функций  $r, h$  в моменты  $t_1, t_2$  соответственно через  $r_1, r_2; h_1, h_2$ . Заменяя производные разностными отношениями, находим

$$r_2 = r_1 + C(z) \Delta t, \quad h_2 = h_1 + D(z) \Delta t.$$

Этот процесс повторяется необходимое число раз (до достижения предельного состояния). При  $t = 0$  имеем  $r = r_0(z)$ . Отметим, наконец, что в ряде случаев приближенное решение задачи можно получить, исходя из вариационного уравнения ползучести оболочки.

## ГЛАВА 7

НАКОПЛЕНИЕ ПОВРЕЖДЕНИИ  
ПРИ КВАЗИХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

## § 7.1. О накоплении повреждений

1. «Внезапные разрушения». Хорошо известны многочисленные факты внезапного разрушения элементов конструкций при сравнительно малых деформациях после длительного времени нормальной работы.

Так, детали, испытывающие ползучесть под действием постоянной нагрузки, нередко разрушаются хрупко через определенный промежуток времени. Хрупкие разрушения (при деформациях порядка 1% и менее) характерны для специальных жаропрочных сплавов, хорошо сопротивляющихся ползучести. В большинстве современных машин, работающих при высоких напряжениях и температурах (паровые и газовые турбины, реактивные двигатели и т. д.), наблюдаются преимущественно хрупкие разрушения.

Другим классическим примером внезапного разрушения могут служить усталостные разрушения, возникающие при действии переменных (циклических) нагрузок. Здесь при данном уровне амплитуды напряжений после значительного числа циклов происходит хрупкий излом.

Отметим также и некоторые другие факторы, вызывающие со временем исчерпание ресурса прочности. В металлических сплавах с неравновесной структурой с течением времени происходят медленные изменения механических свойств (зависящие прежде всего от уровня температуры).

Далее, материалы, испытывающие облучение ядерными частицами, изменяют с увеличением дозы облучения механические свойства вследствие нарушений структуры из-за «выбивания» атомов и образования дефектов. Под влиянием облучения металлы, как правило, охрупчиваются. Это явление существенно, например, для оценки прочности атомных реакторов.

Внешняя среда может влиять на прочностные характеристики напряженного металла из-за явлений диффузии, химических процессов, поверхностных взаимодействий, развертывающихся

между средой и металлом. Наиболее существенны эффекты охрупчивания (например, коррозионно-механическое растрескивание, водородная хрупкость) и адсорбция поверхностно-активных веществ (эффект Рсбиндера).

Приведенные примеры изменения со временем механических свойств имеют различную природу. Важно, однако, отметить, что феноменологически эти процессы нередко можно интерпретировать в том или ином смысле как некоторые процессы накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение.

Накапливающиеся повреждения в большей или меньшей степени связаны с напряженно-деформированным состоянием материала. Так, накопление повреждений в условиях ползучести и усталости прежде всего зависит от уровня напряжений. Обратным примером может служить картина изменения механических свойств при радиационном облучении — здесь главное значение имеет интенсивность облучения. Примером смешанного типа будет явление коррозионно-механического растрескивания; процесс коррозионного поражения резко ускоряется в условиях напряженного состояния.

Ниже рассматривается, главным образом, накопление повреждений, определяемое механическими факторами и напряженно-деформированным состоянием тела. Наибольшее внимание будет уделено разрушениям в условиях ползучести.

2. Повреждения в условиях ползучести. Детали механизма развития повреждений в условиях ползучести (начиная с атомного уровня) еще во многом не ясны. Для технических материалов, сплавов с неправильностями структуры можно говорить о картине развития повреждений лишь в общих чертах.

Повреждения материалов сводятся к развитию трещинообразования, разрыхления. Трещинообразование начинается на самых ранних этапах деформации и связано с ростом имеющихся и возникновением новых суб- и микродефектов. Так, в металлах вследствие подвижности вакансий (пустых мест в узлах решетки, дырок) последние могут группироваться и образовывать щели, которые в поле напряжений превращаются в трещины. Подобные образования обычно примыкают к границам зерен. С другой стороны, известно, что скопление дислокаций приводит к высоким локальным растягивающим напряжениям, что может породить трещину отрыва. Заметим, что число упомянутых дефектов в единице объема весьма велико. Возникновению дефектов способствуют также тепловые флуктуации атомов, приводящие к накоплению разрывов атомных связей.

На более грубом уровне в технических металлах имеются микропоры, образовавшиеся из-за особенностей технологии, например, из-за выделения газов при остывании, из-за пластиче-

ской деформации, чужеродных включений и других причин. Эти поры под действием напряженного состояния также являются источником трещин.

Таким образом, в материале всегда имеется большое число различных дефектов, приводящих к высоким местным напряжениям. Развитие разрушений с течением времени можно считать результатом сложного взаимодействия ряда процессов, развивающихся во времени. Следует назвать различные механизмы скольжения, диффузионную ползучесть (связанную с направленным — из-за напряженного состояния — переносом атомов), постепенное накопление разрывов атомных связей вследствие тепловых флуктуаций. Для сложных металлических сплавов имеют также значение структурные изменения, происходящие с течением времени.

В поликристаллических металлах следует различать внутризеренные и межзеренные повреждения. Первые связаны со сдвигами, скольжениями внутри зерен; при этом повреждения (поры, трещины) имеют сравнительно малые размеры, в связи с чем изменение объема (разрыхление) также сравнительно мало. Внутризеренные повреждения преимущественно реализуются при относительно коротких временах разрушения, высоких напряжениях и низких температурах. При межзеренном разрушении поры, трещины значительно крупнее и локализируются на границах зерен. Разрушения имеют в основном межкристаллический характер при относительно больших длительностях, низких напряжениях и высоких температурах.

**3. Повреждения при циклических напряжениях.** При действии циклически изменяющихся напряжений наблюдается явление усталости материала, обнаруживающееся уже при сравнительно низких напряжениях и объясняемое постепенным накоплением повреждений. Вследствие дефектов и неоднородности материала отдельные частицы его испытывают высокие напряжения, превосходящие предел упругости. При переменных нагрузках происходят и пластические деформации переменного знака, что в конце концов приводит к развитию микротрещин и разрушению. Такова схематическая картина нарастания повреждений. Тонкие детали явления механической усталости во многом не ясны даже для металлов.

### § 7.2. Кинетическое уравнение поврежденности в условиях ползучести

**1. Поврежденность материала.** Повреждения можно разделить на рассеянные дефекты — малые по размерам и встречающиеся во множестве в единице объема, и крупные, магистральные трещины, появляющиеся обычно в финале процесса разру-

шения. Остановимся на рассмотрении процесса накопления рассеянных повреждений. Прежде всего необходимо отметить, что накопление повреждений является случайным процессом. В принципе можно было бы вычислить уровень поврежденности, зная условия возникновения и развития микродефектов и применяя статистические методы. Но, как уже отмечалось, элементарные механизмы возникновения дефектов и условия их развития известны нам лишь в самых грубых чертах. О формулировках количественных характеристик, функций распределения, зависимостей между случайными дефектами говорить трудно. Поэтому трудно провести и обоснованный статистический анализ, не говоря уже о том, что такой анализ связан с введением многих неизвестных параметров и функций.

Подобное положение побуждает, естественно, к поискам других путей, не столь «физичных», но допускающих простое сопоставление с опытными данными и рассмотрение различных прикладных задач. Этого можно достигнуть, если ввести некоторую априорную характеристику поврежденности, которая будет устанавливаться сравнением следствий теории с экспериментальными данными.

В простейшем варианте поврежденность можно описать некоторым скаляром  $1 \geq \psi \geq 0$  (Л. М. Качанов [3]). В начальном состоянии при отсутствии поврежденности  $\psi = 1$ ; с течением времени функция  $\psi$  убывает. Функцию  $\psi$ , по сути дела, можно интерпретировать как «сплошность».

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что повреждение материала носит направленный характер, определяемый, в частности, напряженным состоянием. Заметим, что можно ввести и более общую характеристику — тензор сплошности (Л. М. Качанов [3]). Сейчас, однако, мы не будем останавливаться на этом. Если нагружение простое, можно в известных условиях не учитывать направленность повреждений подобно тому, как при простом нагружении в теории пластичности хорошим приближением является схема изотропного упрочнения.

Заметим также, что Ю. Н. Работнов [3] ввел функцию  $\omega \geq 0$ , равную нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения. Функцию  $\omega$  естественно называть *поврежденностью* (в отличие от *сплошности*  $\psi$ ); можно считать, что  $\psi = 1 - \omega$ .

**2. Простое кинетическое уравнение поврежденности.** В процессе ползучести поврежденность с течением времени возрастает. В принципе функции  $\psi$  можно дать статистическое толкование. Поэтому изменение сплошности  $\psi$  можно описать некоторым кинетическим уравнением; последнее, согласно представлениям статистической физики, имеет структуру

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \dots), \quad (1)$$

где  $F$  зависит от  $\psi$  и некоторых других переменных, существенных для рассматриваемого процесса. В число этих переменных прежде всего следует включить тензор напряжений  $T_\sigma$ , температуру  $\theta$ , время  $t$ . Кроме того, могут иметь значение тензор деформации  $T_\epsilon$  и некоторые внутренние (структурные) параметры состояния  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , характеризующие необратимые изменения в теле (например, рассеянную энергию вследствие ползучести, ориентированность упрочнения и т. д.). Выбор переменных и самой зависимости требует рассмотрения экспериментальных данных и, быть может, привлечения некоторых теоретических соображений. Существенно, чтобы функции и параметры, входящие в уравнение (1), могли бы быть найдены из достаточно простых опытов.

Остановимся на простом варианте кинетического уравнения поврежденности. Условимся сначала считать температуру неизменной. Примем, кроме того, что структурные изменения (типа старения) в металле с течением времени не происходят; тогда время  $t$  в явном виде не войдет в правую часть (1). Процесс разрушения прежде всего зависит от уровня напряженного состояния, т. е. от  $T_\sigma$ . Необходимо выяснить, какая характеристика напряженного состояния существенно влияет на длительную прочность. В этом смысле обычно и говорят о критерии длительной прочности как о некотором эквивалентном напряжении  $\sigma_3$ .

Зависимость критерия длительной прочности от вида напряженного состояния изучалась в ряде экспериментальных работ. Приведем основные выводы из этих работ.

Прежде всего отметим, что приемлемым критерием является наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_1 > 0$  (предполагается, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения). Вместе с тем эксперименты свидетельствуют о некотором влиянии гидростатического давления  $\sigma$  и интенсивности касательных напряжений  $T$ . Так, согласно Зибелю, всестороннее равномерное растяжение  $\sigma > 0$  способствует хрупкому разрушению, всестороннее сжатие — вязкому разрушению. Критерий наибольшего растягивающего напряжения  $\sigma_1$ , изученный Джонсоном (см. Джонсон и др. [1]) в условиях плоского напряженного состояния, дает хороший прогноз при напряжениях одного знака  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ . Если же одно из главных напряжений — сжимающее, то могут встретиться заметные отклонения. В частности, подобные отклонения наблюдаются в опытах кручения тонкостенных трубок (когда  $\sigma_3 = -\sigma_1, \sigma_2 = 0$ ).

В последние годы предложен ряд уточнений. Вряд ли целесообразно здесь обсуждать различные их варианты. Укажем на критерий Сдобырева [1]

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3} T), \quad (2)$$

где под  $\sigma_1$  понимается наибольшее главное растягивающее напряжение.

К нескольким лучшим результатам приводит критерий Трунина [1]

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3} T) a^{1-2\eta}, \quad (3)$$

где положено

$$\eta = \frac{3\sigma}{\sigma_1 + \sqrt{3} T}.$$

Постоянная  $0 < a \leq 1$  определяется по опытными данным.

Критерий Трунина дает более кучное описание экспериментальных данных при нормальной температуре. При больших деформациях следует использовать истинные напряжения.

Для плоского напряженного состояния, изучаемого в опытах, величина  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{3} T)$  в значительном интервале напряжений близка к  $\sigma_1$ ; отклонения становятся заметными для напряженных состояний, приближающихся к чистому сдвигу. В то же время величина  $\eta$  претерпевает значительные изменения, что соответствует влиянию среднего давления.

В отношении длительной прочности многие металлические сплавы обнаруживают заметную анизотропию, обычно вызываемую текстурой, которая возникает при технологической обработке (прокатке, ковке и т. д.). Этот эффект особенно характерен для легких (алюминиевых, титановых) сплавов. Влияние анизотропии обсуждается ниже в § 7.12.

Итак, пусть имеется эквивалентное напряжение

$$\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1, \sigma, T, \dots),$$

определяющее при постоянных напряжениях время хрупкого разрушения  $t'$ , т. е.

$$t' = t'(\sigma_3).$$

В пространстве напряжений уравнение  $\sigma_3 = \text{const}$  описывает семейство подобных поверхностей разрушения (см. рис. 2.4.1).

Остановимся на наиболее простом и часто удовлетворительном критерии максимального растягивающего напряжения

$$\sigma_3 = \sigma_{\text{max}}. \quad (4)$$

Если имеются сжимающие напряжения, будем полагать, что  $\sigma_{\text{max}}$  значительно по сравнению с величинами сжимающих напряжений. Под  $\sigma_{\text{max}}$  будем понимать истинное максимальное растягивающее напряжение.

Функция  $\psi$  характеризует сплошность материала; отношение  $\sigma_{\text{max}}/\psi$  можно интерпретировать как некоторое приведенное (эффективное) напряжение.

Замечание. Важно отметить, что накапливаемые в процессе ползучести повреждения обычно не оказывают сколько-нибудь заметного влияния на кратковременные механические характеристики при той же температуре. В этом смысле выдержка под нагрузкой в условиях ползучести в общем аналогична влиянию старения (выдержке при той же температуре без нагрузки), что можно объяснить различными механизмами пластического течения и хрупкого разрушения. Таким образом, мгновенные характеристики (предел текучести  $\sigma_T$ , временное сопротивление  $\sigma_B$ ) не следует связывать с эффективным напряжением  $\sigma_{\max}/\psi$ .

Ниже всюду предполагается, что уровень напряженного состояния тела заметно меньше предела прочности. Если последний достигается, происходит мгновенное разрушение. При напряжениях, близких к пределу прочности, в рассматриваемую ниже схему нужно внести изменения.

Примем, что скорость роста поврежденности определяется эффективным напряжением, т. е.

$$\frac{d\psi}{dt} = F\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right). \quad (5)$$

Остановимся для простоты на случае степенной зависимости

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n, \quad (6)$$

где  $A > 0$ ,  $n \geq 0$  — постоянные ( $A$  — коэффициент,  $n$  — показатель трещинообразования).

Степенную зависимость следует интерпретировать не как физическую закономерность, а лишь как удобную во многих случаях аппроксимацию; возможно использование другой аналитической зависимости (например, показательной).

Интегрируя (6) при начальном условии  $\psi = 1$  при  $t = 0$ , получаем

$$1 - \psi^{n+1} = A(n+1) \int_0^t \sigma_{\max}^n(\tau) d\tau. \quad (7)$$



Рис. 7.2.1.

Рассмотрим задачу о растяжении стержня при постоянной нагрузке  $P = \text{const}$ . Пусть разрушение происходит при малых деформациях, тогда можно пренебречь изменением поперечного сечения стержня, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F_0} \equiv \sigma_0 = \text{const}.$$

Теперь из уравнения (7) следует

$$1 - \psi^{n+1} = A(n+1)\sigma_0^n t.$$

Будем считать, что в момент разрушения  $t'$  сплошность  $\psi = 0$ ; тогда

$$t' = \frac{1}{(n+1)A\sigma_0^n}. \quad (8)$$

На рис. 7.2.1 показана соответствующая кривая зависимости времени хрупкого разрушения от напряжения  $\sigma_0$ . Пунктиром нанесен действительный ход кривой вблизи временного сопротивления.

Сопоставляя время  $t'$  с экспериментальным временем разрушения, можно определить постоянные  $A$ ,  $n$  для данного материала при данной температуре.

На рис. 7.2.2 даны типичные кривые зависимости длительной прочности от напряжения, построенные по экспериментальным

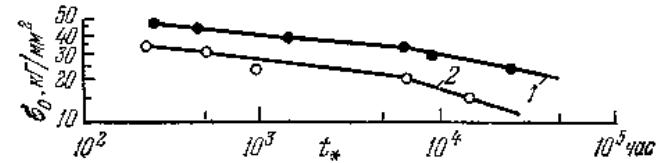


Рис. 7.2.2.

данным для двух марок низколегированных сталей при температуре 500°C (И. А. Одинг и др. [1]).

Для удобства рассмотрения большого диапазона времен  $t'$ , а также для сглаживания неизбежного разброса, экспериментальные данные обычно наносятся на логарифмическую сетку. При этом кривые длительной прочности имеют, как правило, излом. Левая часть кривой отвечает вязким разрушениям, правая часть — хрупким разрушениям, происходящим при относительно низких напряжениях. Постоянные  $A$ ,  $n$  следует определять по наклону и положению прямой линии, аппроксимирующей правую часть кривой. Из соотношения (8) следует, что

$$\ln t' = -\lg(n+1)A + n \lg \sigma_0.$$

По наклону прямой находится показатель  $n$ , после чего по положению некоторой точки  $(t', \sigma_0)$  находится коэффициент  $A$ . Для контроля целесообразно нанести вычисленную прямую на той же логарифмической сетке.

Замечание. В случае степенной зависимости кинетическое уравнение (6) может быть записано в форме

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A(n+1)\sigma_{\max}^n, \quad (9)$$

где положено  $\Psi = \psi^{n+1}$ . В начальный момент времени  $\Psi = 1$ , при разрушении  $\Psi = 0$ . Вследствие формулы (8) правая часть может быть записана в виде  $1/t'(t)$ , если под  $t'(t)$  понимать время разрушения при условии постоянства напряжения  $\sigma_{\max}(t)$ . Тогда уравнение (9) переписывается в форме

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{t'(t)}$$



и имеет решение

$$\int_0^{t'} \frac{d\tau}{t'(\tau)} = 1 - \Psi. \quad (10)$$

**3. Принцип линейного суммирования повреждений.** Уравнение (6) позволяет рассмотреть разрушения в различных условиях нагружения. Остановимся на случае хрупкого разрушения при ступенчатом изменении нагрузки (рис. 7.2.3). В течение промежутка времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  действует постоянное напряжение  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ). В момент  $t = 0$   $\Psi = 1$ , в момент  $t = t_s$  происходит разрушение, т. е.  $\Psi = 0$ . Для промежутка времени  $\Delta t_k$  из (6) находим

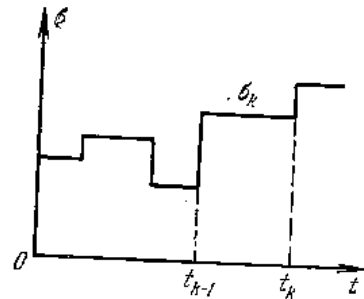


Рис. 7.2.3.

$$\begin{aligned} \Psi_{k-1}^{n+1} - \Psi_k^{n+1} &= \\ &= A(n+1)\sigma_k^n \Delta t_k = \frac{\Delta t_k}{t'_k}, \end{aligned}$$

где через  $t'_k = [A(n+1)\sigma_k^n]^{-1}$  обозначено время хрупкого разрушения при постоянном напряжении  $\sigma_k$ . Складывая последние соотношения для всех  $k$ , получаем

$$\sum_{k=1}^s \frac{\Delta t_k}{t'_k} = 1. \quad (11)$$

Если число ступенек неограниченно возрастает, формула (11) принимает вид

$$\int_0^{t'} \frac{d\tau}{t'(\tau)} = 1, \quad (12)$$

где  $t'(\tau)$  — время разрушения, отвечающее текущему значению напряжения  $\sigma(\tau)$ .

Заметим, что последняя формула непосредственно следует из решения, представленного в форме (10).

Принцип линейного суммирования повреждений применительно к разрушениям в условиях ползучести впервые, по-видимому, постулировал Робинсон [1]. Хотя в ряде опытов отмечались отклонения от этого закона, тем не менее соотношение (11) можно считать удовлетворительным приближением.

Одквист и Хальт [1] обратили внимание на эквивалентность кинетического уравнения (6) при степенной зависимости и принципа линейного суммирования повреждений. Действительно,

пусть  $t < t'$ , тогда уровень поврежденности можно охарактеризовать величиной  $1 - \Psi$ , где  $0 \leq \Psi \leq 1$  — некоторая функция времени. При этом соотношение (12) перейдет в уравнение (10). Дифференцируя последнее по времени, получим уравнение (9).

Рассмотрим в качестве примера хрупкое разрушение решетки, показанной на рис. 3.1.2. Наиболее напряженный вертикальный стержень разрушится в момент  $t'_{11} = [A(n+1)\sigma_1^n]^{-1}$ , где  $\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{P}{F}$ . После этого всю нагрузку будут нести боковые стержни, причем напряжение в них возрастет до значения  $\sigma_2'' = \frac{P}{F}$ .

Согласно (11) время разрушения решетки  $t'$  определится из соотношения

$$\frac{t'_{11}}{t'_1} + \frac{t' - t'_{11}}{t'_2} = 1,$$

где  $t'_1$  — время разрушения бокового стержня при напряжении  $\sigma_2' = \frac{1}{3} \frac{P}{F}$ , действовавшем в промежутке  $0 \leq t \leq t'_{11}$ , а  $t'_2$  — время разрушения при напряжении  $\sigma_2''$  (для  $t > t'_{11}$ ).

**4. Фронт разрушения.** Если поле напряжений — однородное (как, например, при растяжении стержня), то повреждения нарастают равномерно по объему тела и по достижении критического значения происходит мгновенное разрушение.

Если же напряженное состояние тела — неоднородное, то при анализе процесса разрушения тела необходимо различать две стадии. В первой стадии (*стадии скрытого разрушения*)  $0 \leq t < t_1$  в каждой точке тела сплошность  $\Psi > 0$ . В момент  $t = t_1$  в некоторой точке (или области) тела возникает местное разрушение; рассеянные микротрещины сливаются, возникают макротрещины; процесс накопления рассеянных повреждений становится неустойчивым. В дальнейшем разрушение протекает сравнительно быстро и идет преимущественно вследствие роста магистральных трещин.

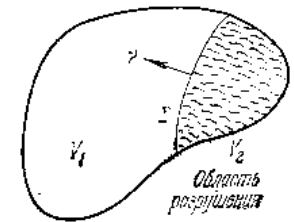


Рис. 7.2.4.

Строгий анализ развития магистральных трещин провести крайне трудно. Однако в первом приближении заключительную стадию разрушения тела можно описать, сохранив и при  $t > t_1$  схему рассеянного разрушения путем введения движущегося фронта разрушения.

Итак, пусть в момент  $t > t_1$  разрушение захватывает область  $V_2$  (рис. 7.2.4); последняя отделена от остальной области  $V_1$ , где  $\Psi > 0$ , поверхностью  $\Sigma$  — *фронтом разрушения*. На

поверхности  $\Sigma$  имеем  $\psi = 0$ , следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0, \quad (13)$$

где  $u$  — координата по нормали к фронту. Учитывая зависимости (6) и (7), получаем из (13) уравнение движения фронта разрушения:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{(\sigma_{\max}^n)_{\Sigma}}{\left( \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t \sigma_{\max}^n dt \right)_{\Sigma}}. \quad (14)$$

Индекс  $\Sigma$  означает, что необходимо брать значения соответствующих величин на фронте.

В случае однородного напряженного состояния знаменатель правой части уравнения (14) обращается в нуль и фронт разрушения распространяется мгновенно. Для неоднородного напряженного состояния скорости  $du/dt$  конечны.

Распространение фронта приводит к полному разрушению тела в момент  $t = t'$ . Интервал  $t_1 < t \leq t'$  условимся называть *стадией распространения разрушения*.

Уравнение фронта разрушения можно представить в несколько иной форме, иногда более удобной для применения. Напряжение  $\sigma_{\max}$  в некоторой фиксированной точке тела в момент времени  $\tau$  является функцией координат точки и времени  $\tau$ . В момент  $t$  фронт разрушения достигает рассматриваемой точки, при этом  $\psi = 0$  и из (7) получаем

$$A(n+1) \int_0^t \sigma_{\max}^n(\tau) d\tau = 1. \quad (15)$$

Отсюда, в частности, легко выводится уравнение (14).

**5. Приближенный анализ развития магистральных трещин.** Рассмотрение фронта разрушения дает представление о кинетике заключительной стадии разрушения. При этом, однако, утрачивается возможность анализа некоторых качественных особенностей картины разрушения. Остановимся на одном способе приближенного анализа развития магистральных трещин.

Пусть при некотором значении  $\psi = \psi_0$  процесс накопления рассеянных повреждений становится неустойчивым и возникает одна или несколько магистральных трещин; заметим, что иногда можно полагать  $\psi_0 = 0$ . Если напряженное состояние — однородное, то при достижении  $\psi_0$  разрушение происходит практически мгновенно, ибо возникшая в слабом месте магистральная

трещина распространяется с большой скоростью в поле рассеянных повреждений, находящемся на границе устойчивости.

В неоднородном поле критическое значение  $\psi_0$  достигается в момент  $t_1$  чаще всего на некотором участке границы тела. Здесь образуется одна или несколько изолированных трещин (очагов разрушения), которые в последующем распространяются в глубь тела.

В зависимости от способности металла к пластическим деформациям напряжения в вершине трещины могут быть «на пределе текучести»  $\sigma_T$  (пластичность сохранена) или могут быть оценены величиной  $k\sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  — номинальное растягивающее напряжение в районе вершины трещины, а  $k \geq 1$  — некоторый эффективный коэффициент концентрации напряжений (металл охрупчен).

Рассмотрим сначала первый случай. Здесь напряжение в вершине трещины  $\sigma_{\max} = \sigma_T$  независимо от уровня поврежденности (см. замечание в разделе 2). Разрушение в вершине трещины происходит при  $\psi = \text{const}$ , т. е. там имеет место соотношение (13), если под  $u$  понимать расстояние по линии распространения трещины. Тогда согласно кинетическому уравнению (6) можно полагать  $\partial \psi / \partial t = \text{const}$ . Так как время распространения трещины относительно мало, можно принимать, что в окрестности вершины трещины поле повреждений приближенно характеризуется полем  $\psi_1$ , соответствующим моменту времени  $t_1$ . В вершине же трещины происходит быстрое нарастание повреждений до критического значения  $\psi_0$ . Допустим, что градиент  $\partial \psi / \partial u$  пропорционален перепаду сплошности  $\psi_1 - \psi_0$ . Тогда из (13) получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{\psi_1 - \psi_0}, \quad (16)$$

где  $k$  — некоторая постоянная, подлежащая определению из опытов. Так как  $\psi_1$  известная функция  $u$ , то из (16) имеем

$$\int_0^u (\psi_1 - \psi_0) du = k(t - t_1). \quad (17)$$

Если разрушение тела происходит при некотором значении  $u = u_*$ , из (17) находится соответствующее время разрушения.

Заключительный этап разрушения протекает по-разному в зависимости от уровня пластичности металла и характера нагружения тела.

Так, развитие большой трещины при пластичном металле может привести к исчерпанию несущей способности тела. В качестве примера приведем случай чистого изгиба балки. На рис. 7.2.5, а показано распределение сплошности  $\psi_1$  в сжатой зоне  $\psi_1 = 1$ . Разрушение наступает при  $u = u_*$ , когда дости-

гается предельное состояние. На рис. 7.2.5, б изображена соответствующая схема пластического течения при плоском напряженном состоянии.

Возможны также случаи, когда трещина относительно невелика и мало изменяет несущую способность тела. Однако, пронизывая тело в некотором направлении, такая трещина может нарушить герметичность и тем самым исключить дальнейшую нормальную эксплуатацию детали (например, трещины в котельных трубах).

Обратимся теперь ко второму случаю. Здесь в вершине трещины напряжение равно  $k\sigma_{\max}$ , где характерный для данного материала при данной температуре эффективный коэффициент концентрации напряжений  $k$  определяется из опытов по разрушению образцов с острым надрезом. Согласно (6) в вершине трещины  $\partial\psi/\partial t$  пропорционально  $\sigma_{\max}^n$ . При прежних предположениях относительно  $\partial\psi/\partial u$  из (13) получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{k_1 \sigma_{\max}^n}{\psi_T - \psi_0}, \quad (18)$$

где  $k_1$  — некоторая постоянная. Отсюда вытекает, что

$$\int_0^u \frac{\psi_T - \psi_0}{\sigma_{\max}^n} du = k_1 (t - t_1). \quad (19)$$

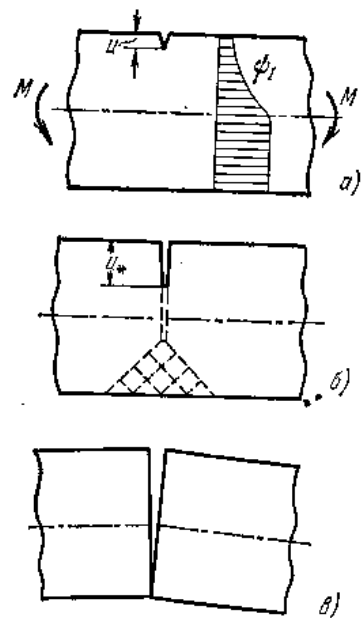


Рис. 7.2.5.

Во втором случае разрушение при изгибе характеризуется тем, что трещина, распространяясь ускоренно, рассекает балку (рис. 7.2.5, в).

**6. Более общие уравнения накопления поврежденности в условиях ползучести.** Ю. Н. Работнов [3] ввел кинетическое уравнение для поврежденности  $\omega$  в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma, \omega), \quad (20)$$

где под  $\sigma$  понимается истинное напряжение в растягиваемом стержне. Принимается степенная зависимость

$$\varphi(\sigma, \omega) = c\sigma^k (1 - \omega)^{-s}, \quad (21)$$

где  $c > 0$ ,  $k > 0$ ,  $s \geq 0$  — функции температуры.

Соотношение (20) является частным случаем рассмотренной Ю. Н. Работновым конструкции уравнений ползучести, содержащей некоторое число структурных параметров. Следуя этой идее, А. Г. Костюк [1] предложил кинетическое уравнение вида

$$d\omega = H dv. \quad (22)$$

Здесь  $H$  — функция напряжения  $\sigma$ , поврежденности  $\omega$ , времени  $t$  и структурного параметра — рассеянной работы ползучести

$$v = \int \sigma de, \quad (23)$$

где  $e$  — деформация ползучести. При степенном законе ползучести

$$de = B_1 \sigma^m dt,$$

где  $B_1$ ,  $m$  — соответственно коэффициент и показатель ползучести. Следовательно,  $dv = B_1 \sigma^{m+1} dt$  и уравнение (22) перепишется в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = B_1 H(\sigma, \omega, t, v) \sigma^{m+1}. \quad (24)$$

Уравнение (21) является частным случаем уравнения (24).

В недавно опубликованной работе Г. М. Хажинского [1] различаются внутризеренное и межзеренное типы разрушения. Внутризеренное повреждение связано с разрыхлением металла и характеризуется функцией  $\omega$ , подчиняющейся кинетическому уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma) H, \quad (25)$$

где  $H$  — интенсивность скоростей деформаций ползучести, а  $\sigma$  — среднее давление. Для описания межзеренных повреждений (на площадке с нормалью  $v$ ) предлагается уравнение вида

$$\frac{d\omega_v}{dt} = \Phi(\sigma_v, \dot{R}, \theta), \quad (26)$$

где  $\sigma_v$  — нормальная составляющая напряжения,  $\dot{R}$  — скорость возврата,  $\theta$  — температура.

**7. Влияние концентрации напряжений.** В зоне концентрации напряжений разрушения развиваются весьма интенсивно. Анализ этого процесса связан с известными трудностями. Во-первых, в условиях ползучести определение поля напряжений в рассматриваемой зоне наталкивается на большие математические трудности. Во-вторых, нет достаточно полной информации о влиянии поврежденности на концентрацию напряжений.

Приближенный способ анализа предложен недавно Ю. Н. Работновым [4]. Этот способ опирается на схему жестко-ползучего тела, являющуюся приемлемым приближением при больших значениях показателя ползучести  $m$ .

Для учета влияния поврежденности на напряженное состояние вводятся эффективные напряжения

$$\frac{\sigma_1}{1-\omega}, \quad \sigma_2 (\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_1 > 0).$$

Здесь принято, что повреждения ослабляют площадку  $\sigma_{\max}$ . Условие «пластичности» связывает эффективные напряжения, например,

$$2\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{1-\omega} - \sigma_2 = \sigma_0, \quad (27)$$

где  $\sigma_0$  зависит от времени и определяется из условий равновесия с внешними силами. Поврежденность описывается кинетическим уравнением

$$\frac{d\omega}{dt} = A \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n, \quad (28)$$

причем в данном случае  $\sigma_0 = \sigma_1$ .

Рассмотрим растяжение полосы с круговыми вырезами (рис. 7.2.6). В начальный момент времени  $t=0$  имеем  $\omega=0$ ; дифференциальные уравнения равновесия вместе с условием (27) образуют гиперболическую систему с ортогональными характеристиками. «Пластическая» зона ограничена логарифмическими спиралями  $OAB$ .

При  $t>0$  с ростом  $\omega$  угол между характеристиками уменьшается; при  $\omega=1$  характеристики сливаются. Область «пластичности» постепенно суживается (кривые  $OA_1B_1$  на рис. 7.2.6). Слияние характеристик можно интерпретировать как возникновение макротрещины.

Изложенная схема наглядна, но требует иногда довольно сложных численных расчетов, так как  $\omega$  зависит также и от координат.

Как показали С. Т. Милейко [1] и Ю. Н. Работнов [5], можно исходить из условия «пластичности» вида

$$\frac{\sigma_0}{1-\omega} = \sigma_0, \quad (29)$$

где  $\sigma_0$  берется согласно критерию Слобырева. При этом вычисления существенно упрощаются, так как поврежденность теперь является функцией только времени.

Ранее отмечалось, что нередко приемлемо допущение о независимости уравнений ползучести от поврежденности. Тогда условие «пластичности» не содержит  $\omega$  и анализ разрушений тел

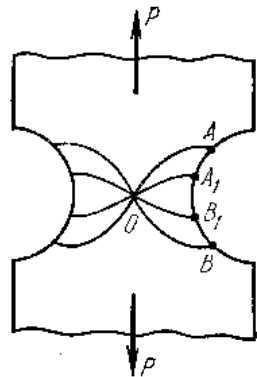


Рис. 7.2.6.

сложной формы (с вырезами, надрезами и т. д.) реализуется по простым схемам идеально пластических решетий. Заметим в заключение, что при переходе к идеально «пластической» модели (т. е. при  $m \rightarrow \infty$ ) пики напряжений сглаживаются.

**8. Схема А. А. Ильюшина [2].** А. А. Ильюшин рассмотрел общую схему построения теории длительной прочности.

Вводится повреждение  $\Pi$  (его компоненты  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ ), характеризующее накопление дефектов и зависящее от истории нагружения данного элемента среды. Предполагается, что существуют неотрицательные меры повреждений

$$M_j(\Pi), \quad j=1, 2, \dots, m; \quad m \leq n.$$

Разрушение происходит, если для какого-нибудь  $j=k$

$$M_k(\Pi) = c_k,$$

где  $c_k$  — константы материала. В простом варианте теории повреждение  $\Pi$  является симметричным тензором второго ранга.

**9. Замечания о других схемах.** В последнее время предпринимаются попытки развить иные подходы к построению континуальных моделей накопления повреждений.

В работах В. П. Тамужа и А. Ж. Лагздиньша [1] состояние поврежденности в окрестности точки характеризуется распределением дефектов — микротрещин на малой сфере, окружающей данную точку; вводится соответствующая функция на сфере. Для этой функции формулируется кинетическое уравнение.

В работе С. К. Капауна и А. И. Чудновского [1] накопление рассеянных микродефектов моделируется ростом в материале включений с другими упругими свойствами. Можно определить упругие характеристики такой композитной среды в зависимости от концентрации  $\rho$  включений и от упругих свойств основного материала и включений. Исходя из соотношений термодинамики необратимых процессов, выводится кинетическое уравнение для функции  $\rho$ . Эта схема позволяет рассмотреть разрушения в условиях ползучести, малоцикловую усталость, влияние сложного нагружения и другие задачи.

В качестве критерия разрушения А. И. Чудновский выдвинул концепцию критического значения энтропии, характерного для данного материала. Это предположение использовано в работе Д. А. Киялбаева и А. И. Чудновского [1]. Если не касаться здесь теплообмена с окружающей средой, то скорость возрастания энтропии связана прежде всего с мощностью деформаций ползучести (а через последние — с реологическими свойствами материала). Тем самым накопление повреждений связывается с деформационными характеристиками, т. е. носит «вязкий» характер. Эта схема позволяет вывести закон линейного суммирования повреждений и ряд найденных ранее эмпирических зависимостей,

### § 7.3. Хрупко-вязкие разрушения

**1. Хрупко-вязкие разрушения.** В гл. 6 рассмотрены вязкие (деформационные) разрушения в условиях ползучести. Подобные разрушения обычно реализуются при высоких напряжениях и характеризуются относительной кратковременностью. При низких напряжениях основную роль играет трещинообразование, разрушения носят хрупкий характер и происходят при небольших деформациях. В области средних напряжений наблюдаются разрушения смешанного типа. Эту картину легко проследить на типичных кривых длительной прочности, показанных на рис. 7.2.2. Левые ветви кривых описываются схемой вязкого разрушения (§ 6.1), правые — схемой хрупкого разрушения (§ 7.2).

Для описания всей кривой будем интерпретировать процесс разрушения как процесс трещинообразования (роста поврежденности), развертывающийся на фоне увеличивающихся деформаций ползучести.

**2. Растяжение стержня при постоянной нагрузке.** Рассмотрим сначала задачу о растяжении стержня под действием постоянной силы  $P$  (см. рис. 5.1.1).

Примем, что процесс развития трещин не влияет в среднем на деформацию ползучести. В пользу этого представления (если исключить из анализа заключительную стадию жизни образца, характеризующую заметным разрыхлением материала) можно привести некоторые соображения. Прежде всего нужно отметить в общем различный механизм рассматриваемых процессов (хрупкие разрушения развиваются по границам зерен, вязкое течение — по кристаллам). С другой стороны, если влияние трещин на ползучесть имеется, то экспериментальные кривые ползучести, по которым устанавливаются уравнения ползучести, отражают суммарный эффект; феноменологически отделить собственно вязкое течение не представляется возможным.

Обозначим через  $l$ ,  $F$  текущие значения длины и площади поперечного сечения стержня; в начальный момент  $t = 0$   $l = l_0$ ,  $F = F_0$ . По условию несжимаемости

$$lF = l_0F_0.$$

По закону ползучести скорость деформации  $\xi = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$  связана с напряжением  $\sigma = P/F$  уравнением

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = B_1 \sigma^m, \quad (1)$$

где  $B_1$ ,  $m$  — постоянные (для данной температуры). По приведенным уравнениям можно найти время вязкого разрушения (см. § 6.1)

$$t_1 = \frac{1}{m\xi_0}, \quad \xi_0 = B_1 \sigma_0^m, \quad (2)$$

для которого площадь сечения  $F$  обращается в нуль; согласно решению имеем

$$\frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad t \leq t_1. \quad (3)$$

Показатель  $m$  обычно значительно превышает единицу, поэтому резкое уменьшение площади поперечного сечения происходит лишь в последнем периоде жизни (см. рис. 6.1.4).

Пусть теперь ползучесть отсутствует, тогда  $F = F_0$ ; интегрируя кинетическое уравнение поврежденности (6) § 7.2 при начальном условии  $\psi = 1$ , получаем время чисто хрупкого разрушения (см. § 7.2)

$$t' = \frac{1}{(n+1)A\sigma_0^n}, \quad (4)$$

для которого обращается в нуль сплошность  $\psi$ . По экспериментальным данным с увеличением времени разрушения  $t_*$  наклон кривых в логарифмических координатах  $\lg \sigma_0$ ,  $\lg t_*$  сохраняется или возрастает. Вследствие этого следует считать  $m \geq n$ .

Обратимся теперь к общему случаю. Внося в кинетическое уравнение поврежденности

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n \quad (5)$$

площадь  $F$  согласно решению (3), получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Выполняя интегрирование и полагая  $\psi = 0$ , находим время разрушения  $t_*$ :

$$\frac{t_*}{t_1} = 1 - \left(1 - \frac{m-n}{m} \frac{t'}{t_1}\right)^{\frac{m}{m-n}} \quad \text{при } m \neq n. \quad (6)$$

Это решение имеет смысл, если вычисленное значение  $t_* \leq t_1$  (иначе хрупкое разрушение  $\psi = 0$  не произойдет), следовательно,

$$\sigma_0 \leq \left(\frac{1}{B_1(m-n)}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \bar{\sigma}_0, \quad \kappa = \frac{B_1}{A(n+1)}. \quad (7)$$

При больших напряжениях происходит чисто вязкое разрушение по решению Хоффа (2); при меньших напряжениях разрушение носит хрупкий характер, но реализуется при более или менее значительных деформациях, которые можно найти из (2) при  $t = t_*$ . Кривая длительной прочности, соответствующая приведенному решению, показана на рис. 7.3.1 сплошной линией. Прямые  $abc$  и  $de$  характеризуют чисто вязкое и чисто хрупкое разрушения по уравнениям (2) и (4). При напряжениях  $\sigma_0 > \bar{\sigma}_0$  кривая длительной прочности совпадает с прямым участком  $ab$ , при меньших напряжениях все большее значение приобретает

охрупчивающие и кривая приближается к прямой  $de$ . Постоянные  $A, n$ , как уже указывалось, можно определять по данным обычных испытаний на длительную прочность (при малых деформациях) по положению линии  $de$ .

В случае  $m = n$  решение имеет вид

$$\frac{t_*}{t_1} = q_1, \quad q_1 = 1 - \exp(-mx) \leq 1. \quad (8)$$

Здесь разрушение всегда хрупкое (т. е. определяется условием  $\psi = 0$ ) и происходит при одной и той же деформации

$$q_1 = 1 - \left(\frac{l_0}{l_*}\right)^m,$$

где  $l_*$  — длина стержня при разрушении.

В случае  $m = n$  металл стабилен в процессе разрушения. Тогда перелома экспериментальной кривой (см. рис. 7.3.1) нет. При этом подходящим выбором постоянной  $A$  можно добиться хорошей аппроксимации удлинений в момент разрушения.

В заключение отметим, что изложенное решение дает правильное качественное описание. Количественные результаты могут иногда отклоняться от опытных данных.

**3. Разрушение стержня при постоянной скорости удлинения.** В последнее время используется метод определения длительной прочности в условиях

постоянной скорости удлинения. В этом случае

$$\frac{dl}{dt} = \text{const} = v \quad \text{или} \quad l = l_0 + vt.$$

Определяя из уравнения ползучести (1) напряжение по известной скорости деформации  $\xi = v/l$ , используя условие нежимаемости и внося найденное значение в уравнение трещинообразования (5), находим, что момент разрушения  $t = t_*$  (при  $\psi = 0$ ) вычисляется из соотношения

$$t' = \int_0^{t_*} \frac{dt}{\left(1 + \frac{v}{l_0} t\right)^{n/m}}, \quad (9)$$

где  $t'$  — время хрупкого разрушения при постоянном напряжении  $\sigma_0$ , вычисляемое по формуле (4); при этом  $\sigma_0$  находится из закона ползучести (1) при  $t = 0$  и заданной скорости  $v$ .

В случае  $n < m$  из (9) получаем

$$t_* = \frac{l_0}{v} \left[ \left(1 + \kappa \frac{m-n}{m} \sigma_0^{m-n}\right)^{\frac{m}{m-n}} - 1 \right].$$

Деформация к моменту разрушения равна  $\epsilon_* = \frac{v}{l_0} t_*$  и достигает 30 ÷ 40%, хотя большей частью она значительно меньше. Второе слагаемое в круглой скобке положительно и мало сравнительно с единицей. Тогда в разложении указанной скобки можно ограничиться в первом приближении двумя членами, следовательно,

$$\epsilon_* \approx \kappa B_1 \frac{n-m}{m} \left(\frac{v}{l_0}\right)^{\frac{m-n}{m}}. \quad (10)$$

По опытам А. В. Станюковича [1] деформация к моменту разрушения равна

$$\epsilon_* = D \left(\frac{v}{l_0}\right)^k. \quad (11)$$

где  $D, k$  — постоянные, причем  $0 \leq k \leq 0,37$ . Выведенная формула (10) согласуется с эмпирической формулой (11), так как по данным А. В. Станюковича для ряда сплавов  $n \approx 0,7m$ . Из его же данных вытекает также, что нельзя принимать в качестве общего критерия разрушения некоторое предельное удлинение.

В случае  $m = n$  время разрушения равно

$$t_* = \frac{l_0}{v} (e^{\kappa} - 1).$$

При этом деформация к моменту разрушения равна  $e^{\kappa} - 1$  и не зависит от длительности опыта, т. е. от скорости  $v$ .

**4. Уточнение Одквиста.** В изложенной выше схеме учитывались лишь деформации ползучести, отвечающие участку II установившейся ползучести (рис. 7.3.2). Как показал Одквист [1], учет ползучести в первом периоде приводит к лучшему согласию с опытными данными. Этот учет осуществляется по способу Одквиста, изложенному ранее (§ 6.1). Деформация ползучести, накапливаемая в первом периоде, заменяется мгновенной пластической деформацией вида

$$\epsilon_0 = B_0 \sigma^{m_0},$$

где  $B_0 \geq 0, m_0 \geq 0$  — постоянные. Скорость установившейся ползучести определяется прежним соотношением

$$\xi^c = \frac{d\epsilon^c}{dt} = B_1 \sigma^m.$$

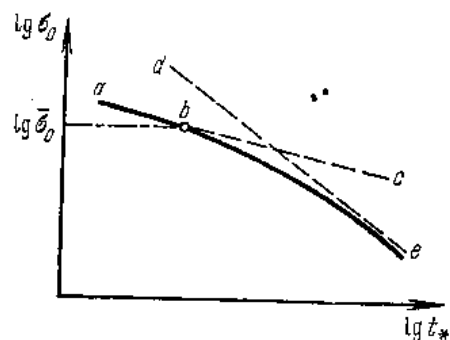


Рис. 7.3.1.

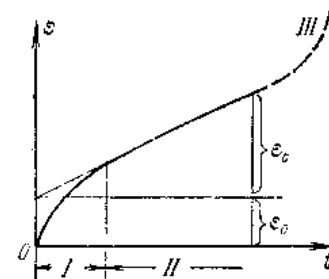


Рис. 7.3.2.

Таким образом, полная скорость деформации равна

$$\xi = \frac{d}{dt} B_0 \sigma^{m_0} + B_1 \sigma^m. \quad (12)$$

По экспериментальным данным можно, как правило, считать, что  $m > m_0$ . Переходя в (12) к переменной  $\lambda = l/l_0$ , после несложных преобразований получаем

$$(\lambda^{-m-1} - m_0 e_{00} \lambda^{-m-1+m_0}) d\lambda = \xi_0 dt \quad (e_{00} = B_0 \sigma_0^{m_0}). \quad (13)$$

Выполняя интегрирование при начальном условии  $\lambda = 1$  при  $t = 0$ , находим

$$(1 - \lambda^{-m}) - \beta(1 - \lambda^{-m+m_0}) = \frac{t}{t_1}, \quad (14)$$

где введено обозначение  $\beta = \frac{m m_0}{m - m_0} e_{00} \geq 0$ ; по-прежнему  $t_1 = 1/m \xi_0$ . Соотношение (14) следует, разумеется, из формул § 6.1. Полагая в (14)  $\lambda \rightarrow \infty$ , получаем время чисто вязкого разрушения

$$t_{11} = t_1 (1 - \beta). \quad (15)$$

Очевидно, что  $t_{11} < t_1$ ; это приводит к лучшему согласию с экспериментальными данными.

В случае хрупко-вязкого разрушения рассматриваем кинетическое уравнение поврежденности (5) совместно с законом течения (12). В момент разрушения  $t_*$  имеем  $\psi = 0$  и из соотношения (7) § 7.2 получаем

$$t' = \int_0^{t_*} \lambda^n dt, \quad t' = [(n+1) A \sigma_0^n]^{-1}.$$

Внося сюда  $dt$  из (13) и выполняя интегрирование по  $\lambda$  в пределах от  $\lambda = 1$  до значения  $\lambda = \lambda_*$  для момента разрушения, находим

$$\frac{t'}{t_1} = \frac{m}{m-n} (1 - \lambda_*^{n-m}) + \frac{(m-m_0)\beta}{n+m_0-n} (1 - \lambda_*^{n-m+m_0}). \quad (16)$$

Отсюда определяется значение  $\lambda_*$ ; подставляя его затем в (14), вычисляем время разрушения  $t_*$ .

При  $\beta = 0$  из (16) и (14) вытекает найденная выше формула (6).

На рис. 7.3.3 показаны кривая 1 длительной прочности по решению (6) и кривая 2 по уточненному решению Одквиста.

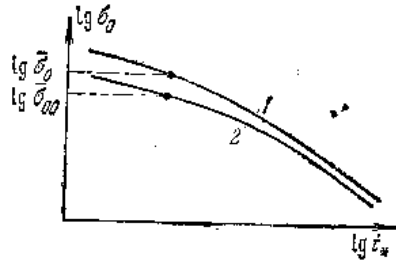


Рис. 7.3.3.

Кривая 2 лежит ниже кривой 1, причем переход к чисто вязкому разрушению происходит раньше (т. е.  $\bar{\sigma}_{00} < \bar{\sigma}_0$ ). Эти поправки к основному варианту теории приближают расчетные значения к экспериментальным данным.

В заключение заметим, что влияние первого периода ползучести можно приближенно учесть, если заменить в законе ползучести (6.1.2) постоянную  $B_1$  функцией времени  $B_1 \beta(t)$  аналогично тому, как это сделано в задаче вязкого разрушения (§ 6.1).

**5. Модель Ю. Н. Работнова.** Выше предполагалось, что уравнения ползучести не зависят от параметра поврежденности. Наблюдаемый передко третий период ползучести (с нарастающей скоростью, кривая III на рис. 7.3.2) не может быть полностью объяснен уменьшением сечения стержня; имеет значение также растрескивание, порообразование. Для описания этого эффекта Ю. Н. Работнов включил параметр поврежденности в уравнение ползучести, а именно

$$\xi = f(\sigma, \omega). \quad (17)$$

Кинетическое уравнение поврежденности имеет прежнюю структуру

$$\frac{d\omega}{dt} = \varphi(\sigma, \psi). \quad (18)$$

Для упрощения последующего анализа принимаются степенные зависимости

$$\xi = b \sigma^m (1 - \omega)^{-q}, \quad (19)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = c \sigma^n (1 - \omega)^{-r}, \quad (20)$$

где  $b, c, m, n, q, r$  — постоянные, причем  $m \geq n$ .

Рассмотрим сначала случай чисто хрупкого разрушения; здесь деформации малы,  $\sigma = \text{const} = \sigma_0$  и из (20) следует, что

$$(1 - \omega)^{r+1} = 1 - \frac{t}{t'}, \quad (21)$$

где  $t' = [c(1+r)\sigma_0^n]^{-1}$  означает время хрупкого разрушения, определяемое по условию  $\omega = 1$ .

Внесем теперь найденное значение параметра  $\omega$  в уравнение ползучести (19) и проинтегрируем его. Тогда деформация ползучести будет равна

$$\epsilon = \frac{\rho}{m} \frac{t'}{t_1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{t'} \right)^{1/r} \right], \quad (22)$$

где  $t_1 = [b m \sigma_0^m]^{-1}$  означает время чисто вязкого разрушения (т. е. при  $\omega = 0$ ), а

$$\rho = \frac{r+1}{r+1-q}.$$

На рис. 7.3.4 показана кривая ползучести, построенная по уравнению (22). Таким образом, третий участок кривой ползучести, предшествующий разрушению, можно описать, оставаясь в рамках малых деформаций. Заметим, что кривая, построенная по уравнению (22), не описывает первого периода ползучести, однако этот дефект можно устранить.

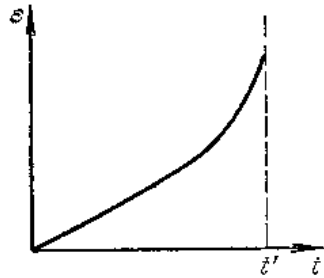


Рис. 7.3.4.

При разрушениях смешанного типа деформации не малы и необходимо совместное решение системы уравнений (19), (20). При больших удлинениях стержня напряжение, как известно, равно

$$\sigma = \sigma_0 \exp \varepsilon$$

и уравнения (19), (20) можно переписать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{mt_1} (1 - \omega)^{-q} \exp(m\varepsilon), \quad (23)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{(r+1)t_1^r} \sigma_0^n (1 - \omega)^{-r} \exp(n\varepsilon). \quad (24)$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{r+1}{m} \frac{t_1^r}{t_1} (1 - \omega)^{r-q} \exp[(m-n)\varepsilon].$$

Разделяя переменные и выполняя интегрирование при начальном условии  $\varepsilon = 0$  при  $\omega = 0$ , находим

$$\varepsilon = \frac{1}{m-n} \ln [1 - \nu + \nu(1 - \omega)^{r-q+1}], \quad m \neq n, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$\nu = \frac{m-n}{r-q+1} \frac{b}{\sigma_0} \sigma_0^{m-n}.$$

Случай  $\nu < 1$ . Условию разрушения  $\omega = 1$  отвечает конечное удлинение (т. е. разрушение хрупкое).

Случай  $\nu > 1$ . Разрушение происходит вязким путем (т. е.  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) и реализуется при значении поврежденности  $\omega < 1$ .

Время разрушения можно вычислить следующим образом: внесем решение (25) в уравнение (24) и выполним интегрирование. Тогда будет

$$\frac{t}{t_1^r} = \rho \int_{\zeta_0}^1 (1 - \nu + \nu\zeta)^{\frac{n}{m-n}} \zeta^{r-1} d\zeta, \quad (26)$$

где для случая  $\nu < 1$   $\zeta_0 = 0$ , для случая  $\nu > 1$   $\zeta_0 = \frac{\nu-1}{\nu}$ . Интеграл в правой части формулы (26) выражается через гипергеометрические функции.

Остановимся, наконец, на случае  $m = n$ ; тогда

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{1+m}{m} \frac{t_1^r}{t_1} (1 - \omega)^{r-q},$$

откуда следует, что

$$(1 - \omega)^{r-q+1} = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \quad \left( \varepsilon_* = \frac{b}{c} \frac{1}{r-q+1} \right).$$

Внося теперь  $(1 - \omega)$  в уравнение (23) и выполняя интегрирование, получим соотношение

$$\int_0^{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right)^{\frac{q}{r-q+1}} \exp(-m\varepsilon) d\varepsilon = \frac{t}{mt_1}, \quad (27)$$

являющееся, по существу, уравнением кривой ползучести.

Интересные соображения о влиянии ускоренной ползучести приводятся в недавно опубликованной статье Мартина и Леки [1].

**6. Некоторые замечания.** Рассмотренные выше модели могут быть дополнены и усложнены в различных направлениях.

Прежде всего можно исходить из более общих уравнений ползучести. Так, в работе В. С. Наместникова [1] время разрушения найдено, исходя из уравнений теории упрочнения. Выше было изложено решение Одквиста, учитывающее влияние первого периода ползучести. На основе уравнений Одквиста в статье Бонта [1] изучено разрушение стержня при постоянной скорости деформирования. Заметим, что приближенно влияние первого периода можно учесть для достаточно простых нагружений и при помощи уравнений теории течения, содержащих явную функцию времени.

При высоком уровне напряжений целесообразно учитывать мгновенные пластические деформации. Простые поправки по схеме идеальной пластичности и по схеме Одквиста рассмотрены выше. Однако к анализу этого вопроса можно привлечь, в случае необходимости, и более общие соотношения пластичности.

Далее, мы исходили из достаточно простого критерия длительной прочности — критерия максимального растягивающего напряжения; были лишь сформулированы некоторые более общие критерии, учитывающие влияние среднего давления и касательных напряжений. Мы не будем, однако, останавливаться на подробном анализе хрупких и смешанных разрушений при упругих или каких-либо иных условиях.



В § 6.2 обсуждался вопрос о времени вязкого разрушения при условии предельной деформации

$$\Gamma_0 \leq \gamma_*$$

При рассмотрении хрупко-вязких разрушений можно использовать приближенно это условие в деформационной области. При этом левая часть кривой длительной прочности на рис. 7.3.1 изменится. Именно, линия *abc* испытает некоторый параллельный перенос вниз. Уравнение остальной части упомянутой кривой сохраняет, в общем, прежний вид.

**7. Пример — растяжение стержня под давлением.** Рассмотрим хрупко-вязкое разрушение растягиваемого стержня при одновременном действии давления. Ползучесть стержня в этих условиях изучена в § 6.2 п. 8.

Уравнение поврежденности возьмем в форме

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{\text{э}}}{\psi} \right)^n. \quad (28)$$

Если эквивалентное напряжение постоянно, время хрупкого разрушения равно

$$t' = [(n+1) A \sigma_{\text{э}}^n]^{-1}. \quad (29)$$

Будем исходить из критерия Трунина (3) § 7.2, упрощенного в соответствии с замечанием, приведенным там же. Тогда уравнение (28) примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{\text{max}}}{\psi} \right)^n \varphi \left( \frac{3\sigma}{\sigma_{\text{max}}} \right), \quad (30)$$

где  $\sigma$  — среднее давление, а  $\varphi$  — некоторая функция.

При одноосном растяжении  $\frac{3\sigma}{\sigma_{\text{max}}} = 1$ , следовательно,  $\varphi(1) = 1$ . С уменьшением отношения  $\frac{3\sigma}{\sigma_{\text{max}}}$  функция  $\varphi$  убывает. Согласно формуле (3) § 7.2 полагаем

$$\varphi \left( \frac{3\sigma}{\sigma_{\text{max}}} \right) = \exp \left[ \left( 1 - \frac{3\sigma}{\sigma_{\text{max}}} \right) kn \right],$$

где  $k \leq 0$  — константа материала при данной температуре. Тогда время хрупкого разрушения  $t'$  равно

$$t' = t'_0 \exp(-2knq) > t'_0,$$

где  $t'_0$  — время чисто хрупкого разрушения при  $q = 0$ . Формулы (41), (42) § 6.2 определяют зависимость площади  $\frac{F}{F_0} = \frac{1}{\lambda}$  от

безразмерного времени  $\tau = \frac{t}{t_1}$ . Пусть  $\lambda = \Psi(\tau)$ , тогда  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_0 \lambda = \sigma_0 \Psi(\tau)$ ; интегрируя уравнение (30) и определяя время хрупкого разрушения  $t_*$  в условиях нарастающих деформаций ползучести, получаем

$$\frac{t'}{t_1} = \int_0^{t'/t_1} \Psi(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Влияние давления на зависимость времени разрушения от осевого напряжения  $\sigma_0$  показано на рис. 7.3.5. Наложение давления снижает время вязкого разрушения, увеличивает время хрупкого разрушения и приводит к расширению области разрушений смешанного типа.

## § 7.4. Хрупкое разрушение при изгибе

**1. Основные положения.** Рассмотрим задачу о хрупком разрушении стержня прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе. Предполагаем, что разрушение развивается при малых деформациях, а распределение напряжений близко к установившемуся.

В стадии скрытого разрушения  $0 \leq t < t_1$  сплошность  $\psi > 0$  и изгибу сопротивляется все сечение балки. Нормальное напряжение равно

$$\sigma = \frac{M}{I_{m0}} y_0^{\mu} \quad (y_0 > 0), \quad (1)$$

где  $M$  — изгибающий момент,  $x_0, y_0$  — координаты, причем ось  $x_0$  направлена по оси стержня. Обобщенный момент инерции

$$I_{m0} = \frac{2b}{1 + \mu/2} h_0^{2+\mu}, \quad (2)$$

где  $2b$  — ширина сечения, а  $2h_0$  — высота.

В растянутой зоне  $y_0 > 0$  сплошность  $\psi$  определяется согласно кинетическому уравнению (7) § 7.2; сжатая зона  $y_0 < 0$  не разрушается, в ней  $\psi = 1$ .

Напряжение  $\sigma$  максимально при  $y_0 = h_0$  и из формулы (7) § 7.2 при  $\psi = 0$  вытекает, что

$$t_1 = \left[ (n+1) A \left( \frac{M}{I_{m0}} \right)^n h_0^{n/\mu} \right]^{-1}. \quad (3)$$

**2. Движение фронта разрушения.** В момент  $t = t_1$  разрушается поверхностный слой  $y_0 = h_0$ . В дальнейшем фронт разрушения  $\Sigma$  перемещается в глубь стержня (рис. 7.4.1). Пусть к моменту времени  $t$  разрушен слой толщиной  $2\delta$ ; очевидно, что  $h_0 = h + \delta$ .

В некоторый момент  $\tau > t_I$  напряжение будет

$$\sigma = \frac{M}{I_m} y^\mu, \quad (4)$$

где обобщенный момент инерции

$$I_m = \frac{2b}{1 + \frac{\mu}{2}} h^{2+\mu}$$

является функцией  $\tau$ , а  $y$  отсчитывается от нового положения нейтральной оси, причем  $y = y_0 + h_0 - h$ . Пусть в момент  $t$  фронт разрушения проходит через фиксированную точку с координатой  $y_0$ . По уравнению (15) § 7.2 имеем

$$(n+1) AM^n \int_0^t [y_0 + h_0 - h(\tau)]^{n/m} \frac{d\tau}{I_m^n(\tau)} = 1.$$

Рис. 7.4.1.

Но в этот момент времени  $y = h(t)$ , следовательно,  $y_0 + h_0 = 2h(t)$  и последнее уравнение принимает вид

$$(n+1) AM^n \int_0^t [2h(t) - h(\tau)]^{n/m} \frac{d\tau}{I_m^n(\tau)} = 1. \quad (5)$$

Примем для простоты, что  $m = n$ , и продифференцируем зависимость (5) по  $t$ ; получим

$$2 \frac{dh}{dt} \int_0^t h^{-1-2m}(\tau) d\tau + h^{-2m} = 0. \quad (6)$$

Начальное условие таково:

$$\text{при } t = t_I \quad h = h_0. \quad (7)$$

Из (6) находим также, что

$$\text{при } t = t_I \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{h_0}{2t_I}. \quad (8)$$

Дифференцируя (6) по времени и исключая интегральный член, получаем дифференциальное уравнение для  $h(t)$ :

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + 2(m-1) \frac{1}{h} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение и определяя произвольные постоянные по условиям (7), (8), находим

$$\frac{t}{t_I} = 1 + \frac{2}{2m-1} \left[ 1 - \left( \frac{h}{h_0} \right)^{2m-1} \right]. \quad (9)$$

При  $h = 0$  наступает полное разрушение балки; время разрушения  $t'$  равно

$$\frac{t'}{t_I} = 1 + \frac{2}{2m-1}.$$

Отсюда вытекает, что стадия распространения разрушений характеризуется заметной длительностью (так, при  $m = 3$   $t' = 1,4 t_I$ ).

**3. Разрушение балки при произвольной нагрузке.** Следуя обычной схеме технической теории изгиба, можно полученные результаты применить к анализу разрушения балки при произвольной нагрузке. Тогда напряжение  $\sigma$  по-прежнему определяется формулой (4), но изгибающий момент  $M = M(x)$  является функцией  $x$ .

Пусть наибольший изгибающий момент имеет место при  $x = x^*$ . Разрушение возникает в поверхностном слое растянутой зоны балки в точке  $x = x^*$  в момент  $t'_I$ , определяемый по формуле (3) при  $M = M(x^*)$ . Распространяясь, зона разрушения охватит все сечение  $x = x^*$  в момент

$$t'_* = t'_I \left( 1 + \frac{2}{2m-1} \right). \quad (10)$$

К моменту времени  $t = t'_*$  разрушение охватит некоторую область клинообразного вида, примыкающую к растянутой стороне балки в окрестности сечения  $x = x^*$ . Очертания этой зоны  $h = h(x)$  можно найти из формулы (9), если положить в последней

$$t = t'_*, \quad t_I = t_I(x),$$

где  $t_I(x)$  — время окончания стадии скрытого разрушения поверхностного слоя балки в сечении, определяемом абсциссой  $x$ . С помощью (3) и (10) получаем

$$\left[ \frac{M(x)}{M(x^*)} \right]^m = \frac{2m-1}{2m+1} \left\{ 1 + \frac{2}{2m-1} \left[ 1 - \left( \frac{h(x)}{h_0} \right)^{2m-1} \right] \right\}. \quad (11)$$

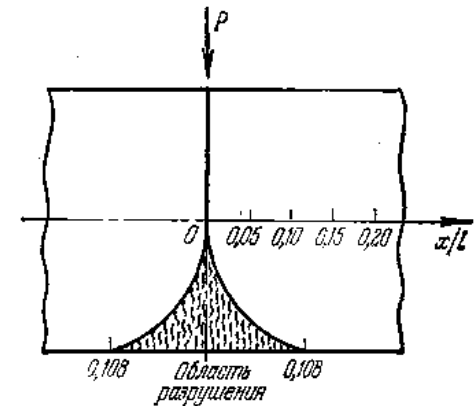


Рис. 7.4.2.

Задавая значения  $h(x)/h_0$ , вычисляем из уравнения (11) соответствующие координаты  $x$ .

Рассмотрим, например, разрушение балки длиной  $2l$ , лежащей на двух опорах и изгибаемой силой  $P$ , приложенной посередине; тогда  $\frac{M(x)}{M(x^*)} = 1 - \frac{x}{l}$ . Разрушение охватывает узкую область, заканчивающуюся острием (рис. 7.4.2).

**4. Распространение магистральной трещины.** Рассмотрим по схеме, изложенной в § 7.2, заключительную стадию разрушения балки при распространении магистральной трещины. Пусть  $\psi_0 = 0$ . По распределению изгибающих напряжений (1) вычисляем сплошность  $\psi_I$ :

$$\psi_I = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{y_0}{h_0} \right)^{n/m} \right]^{1/n+1} & \text{при } y_0 \geq 0, \\ 1 & \text{при } y_0 \leq 0. \end{cases}$$

Применим теперь уравнение (19) § 7.2; внося в него значение  $\psi_I$  и полагая, что при разрушении  $u = 2h_0$ , находим время разрушения

$$t' = t_I + \frac{h_0}{k_1} (1 + J), \quad (12)$$

где введено обозначение

$$J = \int_0^1 (1 - s^{n/m})^{1/n+1} ds > 0.$$

Интеграл  $J$  находится, вообще говоря, численно. В частном случае  $m = n$  будет  $J = n + 1/n + 2$  и тогда

$$t' = t_I + \frac{2n+3}{n+2} \frac{h_0}{k_1}. \quad (13)$$

Разрушение рассматриваемого типа показано на рис. 7.2.5, в. В монографии Одквиста [1] приведены фотографии балок с магистральными трещинами, развившимися в условиях ползучести.

В заключение заметим, что задача о времени полного разрушения балки прямоугольного поперечного сечения под действием изгибающего момента и осевой растягивающей силы изучена в работе Пехника и Хжановского [1].

## § 7.5. Время разрушения скручиваемого вала

**1. Стадия скрытого разрушения.** Рассмотрим задачу о хрупком разрушении круглого вала (радиуса  $a_0$ ), скручиваемого постоянным моментом  $M$ . Распределение касательного напряжения  $\tau_{\varphi z}$  в состоянии установившейся ползучести описывается

зависимостью

$$\tau_{\varphi z}^0 = \frac{(3+\mu)M}{2\pi a_0^3} \left( \frac{r}{a_0} \right)^\mu, \quad (1)$$

где  $r$  — текущий радиус,  $m = \frac{1}{\mu}$  — показатель ползучести; заметим, что  $\sigma_{\max} = \tau_{\varphi z}$ . Наибольшее касательное напряжение будет при  $r = a_0$ . В момент  $t = t_I$  наружный слой вала полностью разрушится (т. е.  $\psi = 0$ ). Согласно соотношению (7) § 7.2 находим, что

$$t_I = [(n+1) A \tau_{\varphi z}^n(a_0)]^{-1}. \quad (2)$$

**2. Распространение фронта разрушения.** Во второй стадии  $t > t_I$  в результате разрушения периферии стержня диаметр несущего ядра сечения к моменту  $t$  равен  $2a < 2a_0$  и является убывающей функцией времени.

Распределение касательного напряжения  $\tau_{\varphi z}$  в круглом стержне радиуса  $a$  описывается той же формулой (1) при замене  $a_0$  на  $a$ . Интегрируя дифференциальное уравнение (6) § 7.2 для сплошности  $\psi$  в некоторой точке  $r$ , лежащей к моменту  $t$  внутри несущего ядра, получаем

$$\psi^{n+1} - \psi_I^{n+1} = - (n+1) A \left[ \frac{(3+\mu)M}{2\pi} \right]^n r^{n/m} \int_{t_I}^t a^{-3n - \frac{n}{m}} dt, \quad (3)$$

где через  $\psi_I$  обозначено распределение сплошности  $\psi$  в момент  $t_I$ , именно

$$1 - \psi_I^{n+1} = (n+1) A \tau_{\varphi z}^n t_I. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (3) по  $r$ , исключая производную  $\partial \psi_I / \partial r$  согласно (4) и полагая  $r = a$ , находим значение производной  $(\partial \psi / \partial r)_{r=a}$  на фронте разрушения  $\Sigma$ . Далее, используя дифференциальное уравнение (6) § 7.2, получаем

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r=a} = - A \left( \frac{\tau_{\varphi z}^n}{\psi^n} \right)_{r=a}.$$

Согласно условию (13) § 7.2 на фронте, находим теперь скорость движения поверхности разрушения

$$\frac{da}{dt} = - \frac{m}{n} a^{-3n - \frac{n}{m} + 1} \left[ a_0^{-3n - \frac{n}{m}} t_I + \int_{t_I}^t a^{-3n - \frac{n}{m}} dt \right]^{-1}. \quad (5)$$

Полагая здесь  $a^{3n + \frac{n}{m}} = R$ , дифференцируя по времени и исключая интегральный член, приходим к дифференциальному

уравнению

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{dR}{dt} - \frac{1}{3m+1} \ln R \right) = 0. \quad (6)$$

Начальные условия имеют вид

$$\text{при } t = t_1 \quad a = a_0, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{3m+1}{t_1} a_0^{\frac{3m+n}{m}}.$$

Значение  $\left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_1}$  вычислено из (5).

Дифференциальное уравнение (6) имеет простое решение

$$R^{\frac{3m}{3m+1}} = C_1 t + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Определяя их по начальным условиям и полагая затем  $R = 0$ , получаем время разрушения вала

$$t' = t_1 \left( 1 + \frac{1}{3m} \right). \quad (7)$$

Так как  $m$  обычно значительно больше единицы, то в рассмотренной задаче вторая стадия составляет лишь малую долю первой стадии. Заметим, что в других задачах (например, при изгибе, § 7.4) вторая стадия может быть достаточно длительной.

### § 7.6. Хрупкое разрушение растягиваемого диска с отверстием

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о хрупком разрушении тонкого круглого диска постоянной толщины  $h$ . Первоначальные радиусы диска обозначим через  $a_0, b_0$  (рис. 7.6.1). Внутренний контур диска  $r = a_0$  свободен, на наружном действует равномерное растяжение  $q$ . Через  $a(t)$  обозначим радиус фронта разрушения  $\Sigma$  к моменту времени  $t$ . Как всегда, принимаем, что  $\sigma_z = 0$ . Пусть  $v(r)$  — радиальная скорость частиц диска; скорости деформации равны

$$\xi_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \xi_\varphi = \frac{v}{r}. \quad (1)$$

С целью упрощения математического анализа задачи перейдем к схеме максимального касательного напряжения при ассоциированном законе течения. На рис. 7.6.2 показано сечение призмы Треска плоскостью  $\sigma_z = 0$ . Изображающая точка  $(\sigma_r, \sigma_\varphi)$  лежит внутри одной из сторон шестиугольника или же в той или иной вершине его. Согласно закону ассоциированного течения

последнее развивается по нормали к поверхности призмы в рассматриваемой точке.

Если  $\sigma_\varphi > \sigma_r > 0$ , то  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_\varphi}{2}$ , а  $\sigma_r$  является промежуточным напряжением. Изображающая точка лежит внутри отрезка  $A_{11}A_{12}$ , нормаль к которому перпендикулярна к оси  $\sigma_r$ . Поэтому при степенном законе ползучести имеем

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\varphi = B_1 \sigma_\varphi^m, \quad \xi_z = -\xi_\varphi. \quad (2)$$

Если же изображающая точка находится в вершине  $A_{12}$ , то  $\sigma_r = \sigma_\varphi$  и течение может развиваться в любом направлении в пределах угла, образованного нормальными к соседним сторонам.

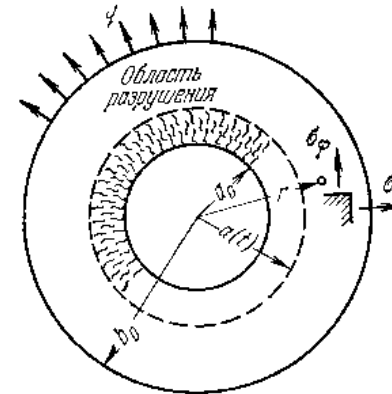


Рис. 7.6.1.

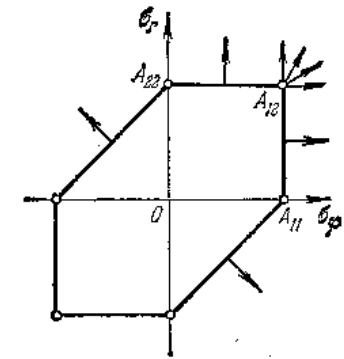


Рис. 7.6.2.

В диске, вообще говоря, может быть несколько зон, в каждой из которых реализуется то или иное течение. Ограничимся рассмотрением случая, когда во всем диске справедливо течение (2). Это условие накладывает, как будет видно из дальнейшего, некоторое ограничение на размеры диска.

Условие совместности скоростей деформации и уравнение равновесия имеют соответственно вид

$$\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} + \frac{\xi_\varphi - \xi_r}{r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \sigma_\varphi = 0. \quad (4)$$

Граничные условия таковы:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \quad (5)$$

$$\text{при } r = b_0 \quad \sigma_r = q. \quad (6)$$

**2. Интегрирование.** Если в диске реализуется течение (2), то  $\partial v/\partial r = 0$ ; следовательно,

$$v = v_0(t), \quad \xi_\varphi = \frac{v_0(t)}{r}, \quad (7)$$

где  $v_0(t)$  — произвольная функция времени. Вычисляя согласно зависимостям (2) напряжение  $\sigma_\varphi$ , внося его в дифференциальное уравнение равновесия и выполняя интегрирование при выписанных граничных условиях, получаем

$$r\sigma_r = b_0 g \frac{r^{1-\mu} - a^{1-\mu}}{b_0^{1-\mu} - a^{1-\mu}},$$

$$\sigma_\varphi = b_0 g \frac{r^{-\mu}}{b_0^{1-\mu} - a^{1-\mu}} (1 - \mu).$$

Это решение справедливо, если  $0 < \frac{\sigma_r}{\sigma_\varphi} < 1$ . Легко видеть, что для этого необходимо выполнение условия

$$\frac{b_0}{a_0} < m \frac{m}{m-1}.$$

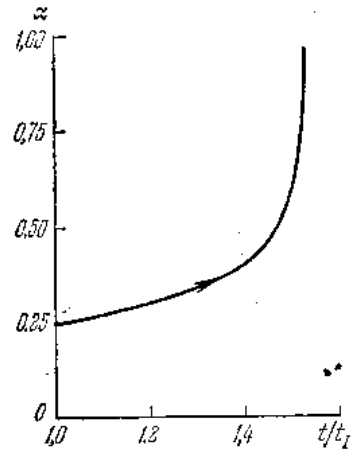


Рис. 7.6.3.

Вводя безразмерные переменные  $r/b_0 = \rho$ ,  $a/b_0 = \alpha$ ,  $a_0/b_0 = \alpha_0$ , находим, что напряжение  $\sigma_\varphi$  равно

$$\sigma_\varphi = s(\alpha) \rho^{-\mu}, \quad (8)$$

где положено

$$s(\alpha) = \frac{(1-\mu)g}{1-\alpha^{1-\mu}}.$$

В стадии скрытого разрушения  $t < t_1$  имеем  $\alpha = \alpha_0$ , следовательно, напряжение  $\sigma_\varphi$  не зависит от времени. Из кинетического уравнения поврежденности (6) § 7.2 при  $\psi = 0$  находим время

$$t_1 = \frac{1}{(n+1)A} \frac{\alpha_0^{n/m}}{s^n(\alpha_0)}. \quad (9)$$

При  $t > t_1$  развивается полное разрушение материала в области, прилегающей к отверстию. Внося в уравнение движения фронта разрушения (14) § 7.2  $\sigma_{\max} = \sigma_\varphi$ , полагая  $s(\alpha) = s[\alpha(\tau)]$ ,  $\rho = \alpha(t)$  и дифференцируя затем по  $t$ , приходим к дифференциальному уравнению для  $\alpha(t)$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m}{n} \frac{\alpha_0}{t_1} \left[ \frac{s(\alpha)}{s(\alpha_0)} \right]^n \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{1-\frac{n}{m}}. \quad (10)$$

Начальное условие имеет вид

$$\text{при } t = t_1 \quad \alpha = \alpha_0.$$

Интегрируя уравнение (10), получаем

$$\frac{t}{t_1} - 1 = \frac{n}{m} \frac{1}{\alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left( \frac{1 - \alpha^{1-\mu}}{1 - \alpha_0^{1-\mu}} \right)^n \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{\frac{m-n}{m}} d\alpha. \quad (11)$$

Полагая  $\alpha = 1$ , находим время разрушения  $t'$ :

$$\frac{t'}{t_1} = 1 + \frac{n}{m} \frac{1}{\alpha_0} \int_{\alpha_0}^1 \left( \frac{1 - \alpha^{1-\mu}}{1 - \alpha_0^{1-\mu}} \right)^n \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{\frac{m-n}{m}} d\alpha. \quad (12)$$

При целом  $n$  интеграл в (11) легко вычисляется.

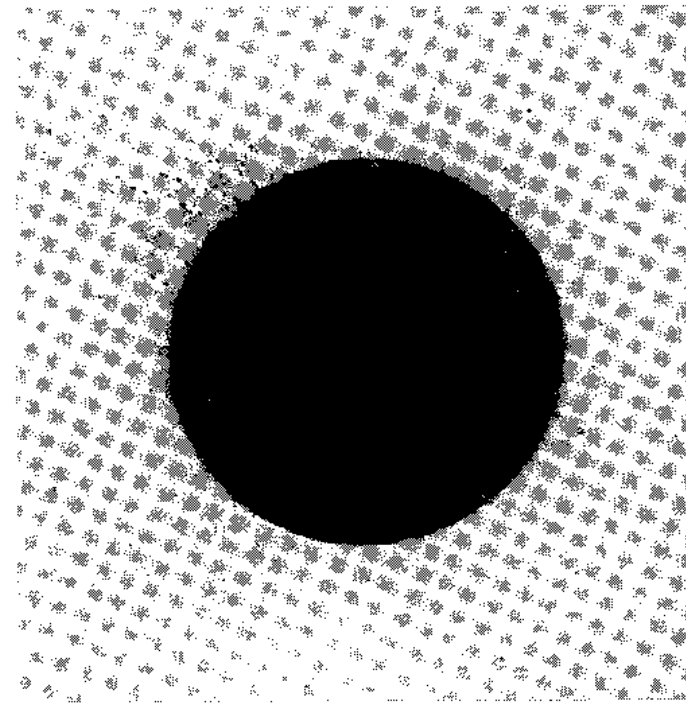


Рис. 7.6.4.

На рис. 7.6.3 приводится график положения фронта разрушения в зависимости от времени для случая  $m = n = 4$ ,  $\alpha_0 = 1/4$ .

вычисленный согласно решению (11). Как и в других примерах, первоначально разрушение распространяется сравнительно медленно, затем скорость развития разрушенной области все увеличивается и на последнем этапе (примерно от  $\alpha = 0,5$  до  $\alpha = 1,0$ ) разрушение носит лавинный характер. Пластина полностью разрушается в момент времени  $t' = 1,53 t_1$ .

**3. Заключительные замечания.** Рассматриваемая задача более подробно недавно изучена в работе Седерквиста [1]. В частности,

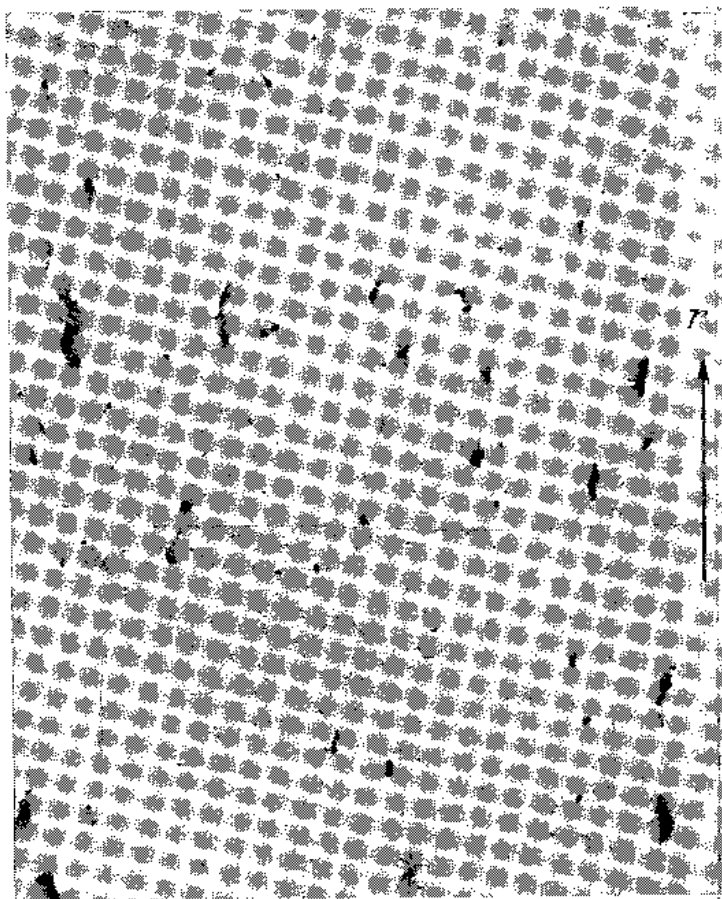


Рис. 7.6.5.

изучено разрушение диска в условиях большой деформации; при этом использованы также уравнения ползучести, предложенные Одквистом. Седерквист осуществил опыты по длительному раз-

рушению магневых дисков при температуре  $260^\circ\text{C}$ . Экспериментальные данные в общем подтвердили теоретические предсказания. На рис. 7.6.4 приведена заимствованная из названной работы фотография поверхности диска (увеличение в 10 раз) после 435 часов работы. Плотность трещин убывает с удалением от отверстия. Часть этого поля показана на рис. 7.6.5 при большем увеличении (в 240 раз); хорошо видна радиальная ориентация трещин.

### § 7.7. Влияние перераспределения напряжений на время хрупкого разрушения

В рассмотренных выше задачах о разрушении тех или иных элементов конструкций предполагалось, что поле напряжений соответствует состоянию установившейся ползучести. Между тем после нагружения установившееся состояние наступает через более или менее длительный промежуток времени, в первом же периоде происходит перераспределение напряжений (см., например, Л. М. Качанов [2]). Возникает вопрос о влиянии этого периода на время хрупкого разрушения.

Одквист и Эрикссон [1] изучили влияние перераспределения напряжений на время скрытого разрушения трубы в том случае, когда фронт разрушения возникает на наружной поверхности. Учитывая длительность процесса, упомянутые авторы пренебрегли первым периодом ползучести. Напряженное состояние трубы исследовано для частных значений размеров ( $b/a = 2$ ) и показателя ползучести ( $m = 10$ ) численным интегрированием. На основании выполненных расчетов Одквист и Эрикссон приходят к выводу о возможности заметного увеличения времени скрытого разрушения вследствие перераспределения напряжений.

Ниже излагается простой приближенный способ учета перераспределения напряжений, не требующий применения трудоемких методов численного интегрирования и пригодный для анализа различных задач.

В данной точке тела время скрытого разрушения  $t_1$  определяется из уравнения

$$(n+1) A \int_0^{t_1} \sigma_{\max}^n(t) dt = 1, \quad (1)$$

где  $\sigma_{\max}$  — наибольшее растягивающее напряжение.

Воспользуемся приближенным методом решения задач не установившейся ползучести при постоянных нагрузках (Л. М. Качанов [2], § 34). По этому решению компоненты напряжения

можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \tau(t)(\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}).$$

Здесь  $\sigma'_{ij}$  — напряжение в начальном упругом состоянии,  $\sigma''_{ij}$  — напряжение в конечном установившемся состоянии, а

$$\tau(t) = 1 - e^{-t/t^0}. \quad (2)$$

При этом безразмерное время  $t^0$  равно

$$t^0 = \frac{Q(0)}{2\Pi_-} 3^{\frac{m+1}{2}} \Omega_1(t) \equiv \kappa \Omega_1(t). \quad (3)$$

Здесь  $\Pi_-$  — упругая энергия тела для разности напряжений  $\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij}$ ,  $Q(0)$  — интеграл по объему тела от некоторой функции напряжений  $\sigma'_{ij}$ ,  $\sigma''_{ij}$ , а  $\Omega_1(t)$  — функция, пропорциональная какой-либо из кривых ползучести; множитель  $\kappa > 0$  будем считать вычисленным.

При достаточно длительных временах разрушения допустимо пренебрегать первым периодом ползучести и полагать, что

$$\kappa \Omega_1(t) = \alpha + \beta t,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  — известные коэффициенты.

Пусть  $\sigma_{\max}$  имеет такую же структуру, т. е.

$$\sigma_{\max} = \sigma'_{\max} + \tau(t)(\sigma''_{\max} - \sigma'_{\max}). \quad (4)$$

Внося формулы (2), (3), (4) в (1) и выполняя интегрирование (при  $n$  целом), получаем

$$\Phi(t_1) = t_1 - t_1^0, \quad (5)$$

где положено

$$\Phi(t_1) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [(1 + \lambda e^{-\beta t_1})^k - (1 + \lambda)^k],$$

$$\lambda = \left( \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma''_{\max}} - 1 \right) e^{-\alpha}, \quad t_1^0 = [(n+1) A \sigma''_{\max}]^{-1}.$$

Здесь  $t_1^0$  — время разрушения при постоянном напряжении  $\sigma''_{\max}$ . Легко видеть, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt_1} \cong 0 \quad \text{при } \lambda \leq 0.$$

Таким образом, если напряжение  $\sigma_{\max}$  с течением времени увеличивается, то функция  $\Phi$  растет, стремясь к значению  $\Phi(\infty) < 0$ .

Время скрытого разрушения  $t_1$  определяется из уравнения (5). На рис. 7.7.1 дан графический способ решения этого уравнения. Прямая линия  $\sigma'_{\max} = \sigma''_{\max}$  соответствует  $\Phi(t_1) = 0$ ; тогда время разрушения равно  $t_1^0$ . Если напряжение в процессе ползучести возрастает (см. график  $\Phi(t_1)$  при  $\sigma'_{\max} < \sigma''_{\max}$ ), время скрытого разрушения равно  $t_1^+ > t_1^0$ ; именно этот случай встретился в работе Одквиста и Эриксона. Если, наоборот, напряжение падает (т. е.  $\sigma'_{\max} > \sigma''_{\max}$ ), время скрытого разрушения убывает ( $t_1^- < t_1^0$ ).

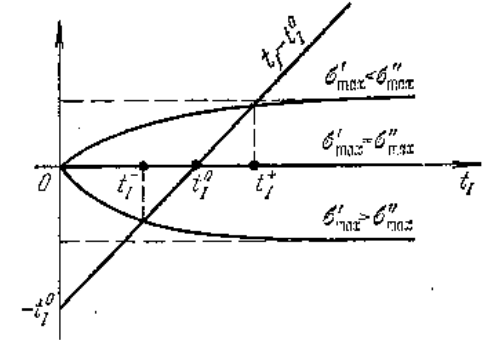


Рис. 7.7.1.

Изложенный способ позволяет сравнительно просто учитывать влияние перераспределения напряжений на время скрытого разрушения. Необходимо лишь знать начальное упругое  $\sigma'_{ij}$  и конечное установившееся  $\sigma''_{ij}$  поля напряжений и вычислить квадратуры  $\Pi$  и  $Q(0)$ .

Выше учет перераспределения напряжений проведен на основе теории течения. Использование уравнений теории упрочнения открывает возможности анализа более сложных условий нагружения. Результаты в этом направлении имеются в книге Ю. Н. Работнова [2], в статьях В. С. Наместникова [1] и Хжановски [1].

## § 7.8. Разрушение неравномерно нагретых тел. Задача о плоской стенке.

1. Влияние температуры. Температура существенно влияет на время хрупкого разрушения. В связи с этим приобретает важное значение вопрос о времени разрушения неравномерно нагретых тел.

При не слишком большом перепаде температуры  $\theta$  допустима следующая приближенная схема (если исходить из кинетического уравнения поврежденности в простейшей его форме): показатель  $n$  можно считать постоянным в данном интервале изменения температуры, а коэффициент  $A$  — функцией температуры

$$A = A_0 e^{\alpha \theta}, \quad (1)$$

где  $A_0$ ,  $\alpha$  — постоянные.

При значительном перепаде температуры необходимо также учитывать изменение показателя  $n$ .

**2. Время разрушения неравномерно нагретой растягиваемой стенки.** Плоская неравномерно нагретая стенка является одним из наиболее употребительных теплопередающих элементов различных машин и сооружений. Как плоские стенки можно рассматривать локально и тонкие оболочки (трубы, днища и т. д.), осуществляющие теплопередачу по нормали к поверхности. Рассмотрим в качестве примера задачу о хрупком разрушении неравномерно нагретой стенки при ее растяжении в условиях плоской деформации.

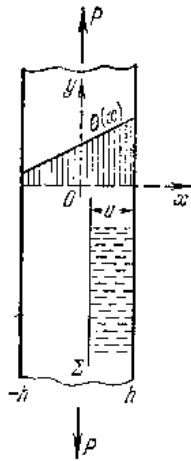


Рис. 7.8.1.

Стенка растягивается силами  $P$  в направлении оси  $y$  (рис. 7.8.1). Температура стенки  $\theta = \theta(x)$  стационарна и монотонно убывает в сторону отрицательных  $x$ . В условиях плоской деформации скорость деформации  $\dot{\xi}_z = 0$ ; тогда из соотношений установившейся ползучести вытекает, что среднее давление  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Ограничиваясь для простоты случаем степенного закона, имеем

$$\dot{\xi}_x = -\dot{\xi}_y = \frac{1}{4} B T^{m-1} (\sigma_x - \sigma_y), \quad (2)$$

где  $B$ ,  $m$  — коэффициент и показатель ползучести. Так как стенка длинная, то можно считать напряжения и скорости зависящими только от  $x$ . Тогда из условия равновесия вытекает, что

$\sigma_x = 0$ ; при этом интенсивность касательных напряжений  $T = \frac{1}{2} |\sigma_y|$ ; Теперь соотношения (2) принимают вид

$$\dot{\xi}_x = -\dot{\xi}_y = -\frac{B}{2} \left| \frac{\sigma_y}{2} \right|^{m-1} \frac{\sigma_y}{2}. \quad (3)$$

В предположении, что искривление стенки отсутствует (можно считать, что оно погашается действием растяжения), имеем  $\dot{\xi}_y = \text{const} = C_1$ ; считаем, далее, что  $\sigma_y > 0$ .

В случае простой зависимости от температуры показатель  $m$  можно считать неизменным, а коэффициент

$$B = B(\theta) = B_0 e^{\beta \theta}, \quad (4)$$

где  $B_0$ ,  $\beta$  — постоянные. Теперь из (3) легко находим напряжение

$$\sigma_y = K e^{-\frac{\beta}{m} \theta}, \quad K = 2 \left( \frac{2C_1}{B_0} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (5)$$

Определяя  $C_1$  из условия статической эквивалентности, получаем

$$K = P \left( \int_{-h}^h e^{-\frac{\beta}{m} \theta} dx \right)^{-1}. \quad (6)$$

При установившемся тепловом потоке

$$\theta(x) = a + bx, \quad a = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad b = \frac{1}{2h}(\theta_1 - \theta_2),$$

где  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  — температуры границ  $x = h$ ,  $x = -h$ .

В первой стадии разрушения (до образования фронта разрушения) напряжение  $\sigma_y$  не зависит от времени.

Тогда из уравнения роста поврежденности следует, что

$$\psi^{n+1} = 1 - (n+1) A_0 K^n e^{\alpha \theta(x) t}, \quad (7)$$

где введено обозначение  $\alpha = \beta \frac{n}{m}$ . В зависимости от знака  $\alpha$  разрушение происходит более интенсивно на фронтальной ( $x = h$ ) при  $\alpha > 0$  или тыльной ( $x = -h$ ) при  $\alpha < 0$  стороне стенки. Если ползучесть не зависит от температуры, то  $\beta = 0$  и  $\alpha > 0$ ; если же процесс накопления повреждений не зависит от температуры, то  $\alpha = 0$  и  $\alpha < 0$ . Время скрытого разрушения  $t_1$  определяется из (7) при  $\psi = 0$  и  $\alpha = h \text{ sign } \alpha$ .

Пусть, для определенности,  $\alpha > 0$ ; тогда фронт разрушения распространяется от границы  $x = h$ . На фронте разрушения  $\Sigma$  выполняется условие

$$(n+1) \int_0^t A \sigma_y^n(\tau) d\tau = 1. \quad (8)$$

Пусть в момент  $t$  фронт проходит через точку с координатой  $h - v$ , в момент  $\tau < t$  — через точку  $h - u$  (см. рис. 7.8.1). Находя согласно (5), (6) напряжение  $\sigma_y$  в точке  $h - v$  в момент  $\tau$ , внося его в (8) и полагая  $v = u$ , получаем

$$(n+1) A_0 P^n e^{\alpha \theta(h-u)} \int_0^t \left[ \int_{-h}^{h-u(\tau)} e^{-\frac{\beta}{m} \theta(x)} dx \right]^{-n} d\tau = 1. \quad (9)$$

Дифференцируя по времени  $t$  и исключая затем интегральный член, находим дифференциальное уравнение

$$e^{-\alpha \theta(h-u)} \theta'(h-u) \left[ \int_{-h}^{h-u} e^{-\frac{\beta}{m} \theta(x)} dx \right]^{-n} du = \frac{n+1}{\alpha} A_0 P^n dt,$$



где через  $\theta'(h-u) > 0$  обозначена производная. Внося 0 и выполняя интегрирование при условии  $u = 0$  при  $t = t_1$ , получаем при  $b \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ , что

$$\kappa b \left(\frac{m}{\beta b}\right)^n e^{-\alpha\theta_1 + \frac{\beta n}{m}(\theta_1 - \theta_2)} \int_0^u e^{\kappa b u} \left[1 - e^{-\frac{\beta b}{m}(2h-u)}\right]^n du = (n+1) A_0 P^n (t - t_1). \quad (10)$$

При целом  $n$  интеграл легко вычисляется. Полагая, далее,  $u = 2h$ , найдем время полного разрушения

$$t' = t_1 + t'_0 I_n, \quad (11)$$

где введены обозначения

$$I_n = \kappa e^{\frac{\alpha}{2}(\theta_1 - \theta_2)} \left[\frac{m}{\beta(\theta_1 - \theta_2)}\right]^n \sum_{s=0}^n c_s \left[1 - e^{-(\alpha - \frac{n-s}{m}\beta)(\theta_1 - \theta_2)}\right],$$

$$c_s = (-1)^s \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s! \left(\alpha - \frac{n-s}{m}\beta\right)}, \quad c_0 = \frac{1}{\alpha - \frac{n\beta}{m}}.$$

$$t'_0 = \left[(n+1) A_0 e^{\frac{\alpha}{2}(\theta_1 + \theta_2)} \left(\frac{P}{2h}\right)^n\right]^{-1}.$$

Здесь  $t'_0$  — время разрушения стенки, имеющей *равномерную температуру*  $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ .

Для случая  $\beta = 0$  также легко получить формулу (11), но здесь

$$I_n = q e^{\frac{1}{2}q} \int_0^1 e^{-q\xi} \xi^n d\xi, \quad q = \alpha(\theta_1 - \theta_2).$$

При этом формулу (11) нетрудно привести к виду

$$\frac{t'}{t_1} = 1 + e^{q/2} I_n. \quad (12)$$

На рис. 7.8.2 даны графики второго слагаемого для  $n = 1$ ,  $n = 3$  в зависимости от температурного параметра  $q$ . Важно отметить, что, в отличие от случая равномерно нагретого тела, относительное время распространения фронта разрушения может быть значительным. Это объясняется резким падением скорости разрушения с уменьшением температуры.

Рассмотрим теперь случай стенки, растягиваемой равными усилиями (погонными)  $P$  в направлениях  $y, z$ . Температура стенки, как и ранее, стационарна и монотонно убывает в сторону отрицательных  $x$ . В этих условиях  $\xi_y = \xi_z = \text{const} = C_1$ , следо-

вательно,  $\sigma_y = \sigma_z$ . Так как  $\sigma_x = 0$ , то интенсивность касательных напряжений  $T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y$  ( $\sigma_y > 0$ ). Используя условие несжимаемости, получаем

$$\xi_y = \xi_z = -\frac{1}{2} \xi_x = \frac{B}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\right)^m = C_1.$$

Коэффициент  $B$  связан с температурой соотношением (4). Для напряжений  $\sigma_y = \sigma_z$  имеем формулу

$$\sigma_y = \sigma_z = K e^{-\frac{\beta}{m}\theta}.$$

Постоянная  $K$  находится по условию статической эквивалентности,

т. е. определяется прежним соотношением (6). Очевидно, что скрытое разрушение описывается тем же уравнением (7), а время полного разрушения — тем же соотношением (11). Различие будет лишь в скоростях деформации.

В заключение заметим, что рассмотрена также задача о хрупком разрушении неравномерно нагретой стенки, испытывающей чистый изгиб (Л. М. Качанов [5]).

## § 7.9. Разрушение трубы под действием внутреннего давления

**1. Тонкостенная труба.** Рассмотрим сначала простую задачу о времени чисто хрупкого разрушения тонкостенной трубы под действием внутреннего давления  $p$ . В этом случае (рис. 7.9.1) отношение  $(b_0 - a_0)/\frac{1}{2}(b_0 + a_0) \ll 1$ ; через  $a_0, b_0$  обозначены радиусы трубы в начальном ее состоянии. По оси трубы действует сила внутреннего давления (труба с доньями). Тогда напряжения в трубе приближенно равны

$$\sigma_r \approx 0, \quad \sigma_\varphi = \frac{p a_0}{b_0 - a_0}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \frac{p a_0}{b_0 - a_0}.$$

Очевидно, что  $\sigma_{\max} = \sigma_\varphi$ . При этом время разрушения равно

$$t' = [(n+1) A \sigma_\varphi^n]^{-1}. \quad (1)$$

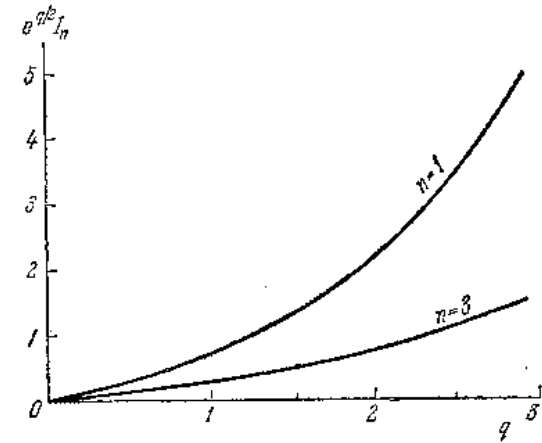


Рис. 7.8.2.

**2. Толстостенная труба.** В толстостенной трубе компоненты напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  являются функциями  $r$ . Распределение напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  в трубе с размерами  $a_0$ ,  $b$  в состоянии установившейся ползучести описывается известными формулами (см. Л. М. Качанов [2])

$$\sigma_r = s \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right], \quad \sigma_\varphi = s \left[ 1 + (2\mu - 1) \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right], \quad (2)$$

где  $s = s(\beta) = p(\beta^{2\mu} - 1)^{-1}$ , причем  $\beta = \frac{b}{a_0}$ ,  $\beta_0 = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $p$  — внутреннее давление,  $s_0 = s(\beta_0)$ .

При показателе ползучести  $m = 2$  напряжение  $\sigma_\varphi$  постоянно по толщине трубы, и разрушение наступает сразу во всем объеме. При  $m < 2$  разрушение распространяется от внутренней поверхности трубы. При  $m > 2$  и  $\beta \ll (1 - 2\mu)^{-m/2}$  напряжение  $\sigma_\varphi$  всюду растягивающее и достигает максимума на наружной поверхности трубы. В этом случае разрушение развивается по схеме, показанной на рис. 7.9.1; так как большей частью  $m > 2$ , ниже анализируется только этот случай.

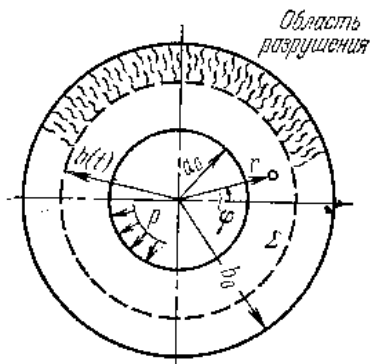


Рис. 7.9.1.

Время скрытого разрушения при этом равно

$$t_1 = [(n + 1) A (2\mu s_0)^n]^{-1}. \quad (3)$$

В момент  $t = t_1$  на наружной поверхности трубы  $r = b_0$  образуется фронт разрушения. Пусть к моменту  $t$  радиус фронта разрушения равен  $b(t)$ . Выведем уравнение движения фронта.

Внося в уравнение (15) § 7.2  $\sigma_{\max} = \sigma_\varphi$ , полагая  $s = s[\beta(t)]$ ,  $b = b(t)$ ,  $\frac{r}{a_0} = \beta(t)$  и дифференцируя полученное соотношение по  $t$ , приходим к интегриродифференциальному уравнению для  $\beta(t)$ :

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{s^n(\beta)}{\Phi(\beta, \mu, n)}, \quad (4)$$

где положено

$\Phi(\beta, \mu, n) =$

$$= \frac{n(1 - 2\mu)}{(2\mu)^{n-1}} \int_0^t s^n[\beta(\tau)] \left[ 1 + (2\mu - 1) \left( \frac{\beta(\tau)}{\beta(t)} \right)^{2\mu} \right]^{n-1} \left( \frac{\beta(\tau)}{\beta(t)} \right)^{2\mu} \frac{d\tau}{\beta(\tau)}.$$

Начальное условие очевидно

$$\text{при } t = t_1 \quad \beta = \beta_0. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) строится численно, например, по методу Эйлера. При этом удобно интеграл разбить на сумму двух интегралов: по промежутку  $0 \leq \tau \leq t_1$  и промежутку  $t_1 < \tau \leq t$ . Так как в первом промежутке  $\beta(\tau) = \text{const} = \beta_0$ , то соответствующий интеграл сразу вычисляется. На рис. 7.9.2 приведены зависимости  $\beta = \beta\left(\frac{t}{t_1}\right)$ , найденные численным интегрированием для случаев  $\beta = 2$ ,  $m = 4$  и  $m = 6$ ; принято, что  $n = m$ .

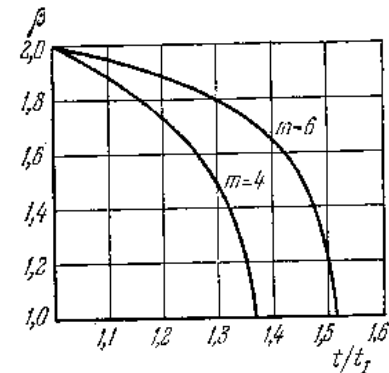


Рис. 7.9.2.

Интересно отметить, что вначале фронт разрушения перемещается сравнительно медленно, а в последующем процесс разрушения протекает с большой быстротой. По длительности стадии распространения разрушения может составлять заметную долю стадии скрытого разрушения. Другими словами, труба с частично разрушенным поперечным сечением может еще довольно долго сопротивляться внешней нагрузке.

При хрупком разрушении труб, нагруженных внутренним давлением, наружная поверхность трубы нередко испещрена трещинами, что в известной мере соответствует движению фронта разрушения. В слабом месте одна из трещин пронизывает стенку (рис. 7.9.3) и тем самым исключает дальнейшую нормальную эксплуатацию трубы. Для анализа этой картины воспользуемся приближенным способом, изложенным в § 7.2.

Как уже отмечалось выше, при показателе ползучести  $m > 2$  наибольшее напряжение  $\sigma_\varphi$  будет у наружной поверхности трубы  $r = b_0$ . Возникшая здесь трещина будет расти вглубь и в стороны (вдоль образующей) и в некоторый момент достигнет внутренней поверхности трубы  $r = a_0$ .

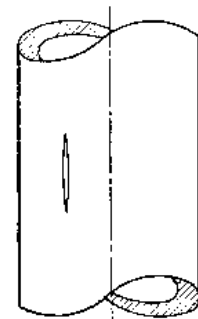


Рис. 7.9.3.

На рис. 7.9.4 показана стенка трубы в районе трещины  $O$ , возникшей на наружной поверхности трубы при  $\psi = \psi_0$  в момент  $t = t_1$ . При  $t \leq t_1$  напряжение  $\sigma_\varphi$  не зависит от времени и из зависимости (6) § 7.2 находим

$$1 - \psi^{n+1} = (n + 1) A \sigma_\varphi^n t.$$

Полагая здесь  $\psi = \psi_0$ ,  $r = b_0$ , получим время  $t_1$ . Согласно изложенным в § 7.2 представлениям, при  $t > t_1$  можно находить

поле повреждений как при  $t = t_1$ , именно

$$\psi_1 = \left[ 1 - (1 - \psi_0^{n+1}) \frac{\sigma_\phi^n(r)}{\sigma_\phi^n(b_0)} \right]^{1/(n+1)} \quad (6)$$

где  $\sigma_\phi$  берется согласно формуле (2) при  $b = b_0$ .

Пусть  $u$  — некоторое направление под углом  $\gamma$  к горизонтали; очевидно, что  $r = b_0 - u \cos \gamma$ . Согласно формуле (17) § 7.2 фронт трещины определяется уравнением

$$R(b_0 - u \cos \gamma) = k(t - t_1) \cos \gamma.$$

Здесь положено

$$\int_{r_0}^{b_0} (\psi_1 - \psi_0) dr = R(r).$$

Трещина пробьется к внутренней поверхности трубы в момент  $t_*$ ; полагая  $\gamma = 0$ ,  $u_* = b_0 - a_0$ , находим

$$t_* = t_1 + \frac{1}{k} R(a_0).$$

В этот момент форма трещины определяется уравнением

$$R(b_0 - u \cos \gamma) = R(a_0) \cos \gamma.$$

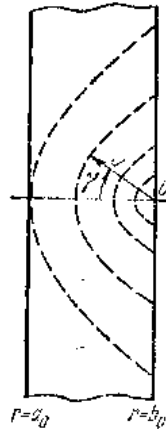


Рис. 7.9.4.

На рис. 7.9.4 показаны пунктиром последовательные очертания фронта трещины. С течением времени фронт все более вытягивается в продольном направлении. При малых временах форма фронта приближается к дуге окружности.

Если в момент  $t_1$  возникла трещина вдоль некоторого отрезка образующей (а не точечная), то фронт разрушения образуется огибающей очертаний трещин, развивающихся из различных точек указанного отрезка.

**3. Хрупкое разрушение тонкостенной трубы при значительных деформациях.** Согласно кинетическому уравнению скорость убывания сплошности равна

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{pa}{h\psi} \right)^n \quad (7)$$

Если деформации малы, то  $\frac{pa}{h} = \text{const}$  и из (7) находим время чисто хрупкого разрушения  $t'$  (см. формулу (1)).

В общем случае, когда накопление повреждений происходит на фоне значительных деформаций ползучести, в уравнение (7) следует внести  $pa/h$  согласно решению, приведенному в § 6.3.

Тогда получим

$$(n+1) \psi^n d\psi = -\frac{1}{t'} \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)^{-n/m} dt,$$

где через  $t_1$  обозначено время вязкого разрушения, определяемое формулой (7) § 6.3. Это уравнение аналогично соответствующему уравнению при одноосном растяжении (§ 7.3) и справедливо при  $t \leq t_1$ . Выполняя интегрирование, найдем, что время разрушения  $t_*$ , отвечающее значению  $\psi = 0$  в условиях нарастающей деформации ползучести, равно

$$\frac{t_*}{t_1} = 1 - \left( 1 - \frac{m-n}{m} \frac{t'}{t_1} \right)^{\frac{m}{m-n}}, \quad m \neq n. \quad (8)$$

Эта формула совпадает с формулой (6) § 7.3 для растягиваемого стержня, но следует помнить, что  $t_*$ ,  $t_1$ ,  $t'$  имеют здесь иные значения. Решение имеет смысл при  $t_* \leq t_1$ , поэтому

$$\sigma_{\phi_0}^{m-n} \leq 2^m \frac{n+1}{m-n} \frac{A}{B}.$$

При больших напряжениях происходит вязкое разрушение. Картина на плоскости  $\lg \sigma_{\phi_0}$ ,  $\lg t$  аналогична соответствующей картине для простого растяжения (см. рис. 7.3.1).

**4. Хрупкое разрушение толстостенной трубы при значительных деформациях.** Решение задачи о больших деформациях ползучести равномерно нагретой трубы приведено в § 6.3. Текущие размеры трубы  $a(t)$ ,  $b(t)$  определяются соотношением (22) § 6.3 и условием несжимаемости

$$a^2 = a_0^2 \frac{\beta_0^2 - 1}{\beta^2 - 1}, \quad b = a\beta.$$

Если следить за частицей, начальное положение которой характеризовалось радиусом  $r_0$ , то в момент  $t$  эта частица будет находиться на расстоянии  $r$ , причем

$$r^2 - a^2 = r_0^2 - a_0^2. \quad (9)$$

Внося сюда  $a(t)$ , находим  $r$  в зависимости от  $r_0$  и времени  $t$ . Согласно формуле (2) находим напряжение  $\sigma_\phi(r_0, t)$ , испытываемое избранной частицей. По общей схеме получаем

$$\psi^{n+1} = 1 - (n+1) A \int_0^t \sigma_\phi^n(r_0, \tau) d\tau. \quad (10)$$

При  $m > 2$  наибольшее напряжение будет на наружной поверхности трубы  $b(t)$ . В момент  $t_1$  поверхность трубы

разрушится ( $\psi = 0$ ), т. е.

$$\int_0^{t_1} s^n(\beta) dt = [(n+1)A(2\mu)^n]^{-1}. \quad (11)$$

При  $t > t_1$  фронт разрушения будет продвигаться по сечению трубы, все более ослабляя ее. Рассмотрим подробно эту стадию работы.

Скорость возрастания внутреннего радиуса трубы определяется соотношением

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} B\mu^m a s^m \left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (12)$$

Скорость изменения внешнего радиуса трубы определяется двумя факторами: ползучестью материала и движением фронта разрушения, т. е.

$$\frac{db}{dt} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{\text{полз}} + \left(\frac{db}{dt}\right)_{\text{разр}}.$$

Легко видеть, что

$$\left(\frac{db}{dt}\right)_{\text{полз}}^* = b(\xi_{\varphi})_{r=b} = \frac{1}{2} Bb\mu^m s^m. \quad (13)$$

На фронте разрушения имеем

$$\int_0^t s^n[\beta(\tau)] \left\{ 1 + (2\mu - 1) \left[ \frac{b(\tau)}{r} \right]^{2\mu} \right\}^n d\tau = [(n+1)A]^{-1}. \quad (14)$$

Здесь под  $r$  понимается радиус-вектор частицы, занимавшей в начальный момент времени  $t = 0$  положение  $r = r_0$  и попадающей в момент  $t$  на фронт разрушения  $b(t)$ . Рассматривая соотношение (9) в моменты  $\tau$  и  $t$ , находим

$$r^2 = b^2(t) - a^2(t) + a^2(\tau).$$

Дифференцируя (14) по времени, заменяя  $da/dt$  согласно (12) и используя (13), получаем

$$\frac{db}{dt} = Bb\mu^m s^m - \frac{s^n[\beta(t)]}{b\Phi_1(t, \mu, n)}, \quad (15)$$

где положено

$$\Phi_1(t, \mu, n) =$$

$$= n(1-2\mu) \left(\frac{m}{2}\right)^{n-1} \int_0^t s^n[\beta(\tau)] \left\{ 1 + (2\mu - 1) \left[ \frac{b(\tau)}{r} \right]^{2\mu} \right\}^{n-1} \frac{[b(\tau)]^{2\mu}}{r^{2+2\mu}} d\tau.$$

Таким образом, вопрос сводится к интегрированию системы двух уравнений (12) и (15) при начальных условиях: при  $t = t_1$

$a = a_1$ ,  $b = b_1$ , где  $a_1$ ,  $b_1$  — значения  $a$ ,  $b$  в момент  $t_1$ , определенные по решению задачи о ползучести трубы.

Решение строится численными методами до момента времени  $t_*$ , для которого либо  $a = b$  (хрупкое разрушение), либо  $a$  и  $b$  неограниченно возрастают (вязкое разрушение). Если трещинообразование отсутствует ( $A = 0$ ), следует исходить из решения, приведенного в § 6.3. Если можно пренебречь ползучестью, то  $B = 0$ ,  $r = b(t)$ , и мы приходим к случаю, рассмотренному в разделе 2.

Практически интересен случай, когда хрупкие разрушения происходят при сравнительно небольших деформациях трубы (скажем — до 5%). При этом, однако, могут заметно возрасти напряжения (так, при  $\beta = 1,5$  и  $m = 6$  наибольшее нормальное напряжение возрастает на 14%).

Если ограничиться рамками сравнительно небольших деформаций, открывается возможность упрощения анализа (Л. М. Качанов [6]).

**5. Хрупкое разрушение неравномерно нагретой толстостенной трубы.** Пусть тепловое поле трубы стационарно, осесимметрично и не зависит от координаты  $z$ ; заданы температуры  $\theta(a)$  и  $\theta(b)$  внутренней и наружной поверхностей трубы.

При установившейся ползучести формулы для напряжений в трубе имеют такой же вид (2), что и при равномерной температуре, если заменить показатель  $\mu$  на

$$\mu_* = \mu(1 + c\theta_*),$$

где

$$\theta_* = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{\ln b - \ln a}.$$

Множитель  $s$  примет значение  $s_*$ .

Определим время хрупкого разрушения трубы при малых деформациях на основе схемы, изложенной в § 7.8. При этом в формуле (2) для  $\sigma_{\varphi}$  следует положить  $a = a_0$ ,  $b = b(t)$ , если  $m_* > 2$ . Фронт разрушения распространяется от внешней границы к внутренней. Тепловое поле будет фиксированным, если принять, что разрушенный слой сохраняет первоначальную теплопроводность. Тогда время хрупкого разрушения определяется решением интегродифференциального уравнения

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{s_*^n(\beta)}{\Phi(\beta, \mu_*, n) + \Psi(\beta, \mu_*, n)} \quad (16)$$

при начальном условии  $\beta = \beta_0$  при  $t = t_1$ , где  $t_1$  — время скрытого разрушения.

Функция  $\Phi(\beta, \mu_*, n)$  такова же, что и для равномерно нагретой трубы; необходимо лишь заменить  $\mu$  на  $\mu_*$ . Функция

$\Psi(\beta, \mu_*, n)$  равна

$$\Psi(\beta, \mu_*, n) = \frac{\alpha \theta_*}{2\mu_* n (1 - 2\mu_*) \beta} \int_0^t s_*^n [\beta(\tau)] \left\{ 1 + (2\mu_* - 1) \left[ \frac{\beta(\tau)}{\beta(t)} \right]^{2\mu_*} \right\}^n d\tau.$$

Для равномерно нагретой трубы  $\Psi(\beta, \mu_*, n) = 0$ .

Решение уравнения (16) строится численными способами.

### § 7.10. Хрупкие разрушения при циклическом нагружении

**1. Введение.** Проблема хрупких разрушений в условиях ползучести при переменных нагрузках имеет большое практическое значение. Здесь, в основном, привлекает внимание случай циклических нагрузок. В этой области имеются обширные экспериментальные данные (особенно по усталости). Опыты многочисленны и охватывают разнообразные сплавы при различных температурах, но, как правило, очень однообразны по напряженному состоянию и программе нагружения. Это обстоятельство затрудняет формулировку механических критериев разрушения.

Рассмотрим схему, пригодную лишь в определенных условиях изменения нагрузок, а именно: ограничимся анализом достаточно медленного циклического нагружения (малоцикловая усталость).

Характер накопления повреждений существенно зависит от частоты циклов. При высоких частотах имеет значение обычная усталость. В этом случае можно полагать, что усталостные повреждения накапливаются одновременно с повреждениями от ползучести.

При низкочастотных изменениях можно считать, что накапливаются лишь повреждения от ползучести. Число циклов до разрушения предполагается сравнительно небольшим (сотни, тысячи).

Хрупкие разрушения в условиях ползучести носят направленный характер. К сожалению, опытные данные о накоплении повреждений при программном нагружении, как уже отмечалось, очень скудны. Накопленный экспериментальный материал относится, как правило, к частным случаям (растяжение, кручение и т. п.) простого нагружения, когда

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^0,$$

где  $\sigma_{ij}^0$  — фиксированный тензор напряжения, а  $\lambda$  — постоянный или возрастающий множитель. Расширим несколько круг

рассматриваемых задач и будем считать  $\lambda$  функцией времени, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это будет соответствовать условиям циклического нагружения. Тогда главные оси сохраняются, но меняются главные напряжения, причем

$$\sigma_i = \lambda \sigma_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где  $\sigma_i^0$  — фиксированные значения.

Примем, что разрушения (рассеянные трещины, повреждения) развиваются в плоскостях, на которых действует нормальное растягивающее напряжение. Сжимающее напряжение не вызывает накопления хрупких разрушений. В соответствии с этим введем три функции сплошности  $\psi_i$ , характеризующие рост поврежденности, автономные друг от друга. По существу здесь принята простейшая идеализированная схема.

Некоторым подтверждением этой схемы являются опыты Я. Б. Фридмана, Т. К. Зиловой, Н. И. Деминой, в которых показано решающее влияние на поведение образцов с трещинами ориентировки трещин по отношению к главным осям напряженного состояния.

Напомним также известный экспериментальный факт о том, что добавление гидростатического давления практически не изменяет скорости ползучести, но может (при достаточной величине давления) приостановить процесс накопления повреждений.

В опытах разрушения при изгибе не наблюдается повреждений в сжатой зоне.

Наконец, уместно здесь упомянуть и об испытаниях составных труб на длительную прочность: опыты показали их одинаковую со сплошными трубами сопротивляемость.

Из приведенных фактов можно заключить, что длительная прочность при сжатии значительно выше длительной прочности при растяжении. При переходе от растяжения к сжатию иногда наблюдается некоторое залечивание повреждений; этот эффект в дальнейшем не учитывается.

В развитие сказанного принимаем для изотропного материала, что при  $\sigma_i > 0$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = f(\sigma_i, \psi_i).$$

В частности, остановимся на степенной зависимости прежнего типа

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \begin{cases} -A \left( \frac{\sigma_i}{\psi_i} \right)^n & \text{при } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_i < 0. \end{cases} \quad (2)$$

В периоде скрытого разрушения  $0 \leq t < t_1$  сплошности  $\psi_i > 0$ . При достижении полного разрушения одна или несколько функций  $\psi_i$  обращаются в нуль, возникает фронт (или фронты) разрушения  $\Sigma$ . Скорость распространения последнего при  $\sigma_i > 0$  определяется уравнением, приведенным в § 7.2.

При циклическом нагружении возникает вопрос о работоспособности разрушенной зоны за фронтом  $\Sigma$  при сжимающем напряжении. Наиболее безопасным является представление о том, что разрушенная зона не сопротивляется сжатию; это можно пояснить тем, что при переходе к сжатию первое время происходит постепенное смыкание сторон трещин (рис. 7.10.1).



Рис. 7.10.1.

В дальнейшем при полном смыкании трещин сопротивление сжатию в какой-то мере восстанавливается. В связи с этим полезно рассмотреть и другой крайний случай, когда разрушенная зона полностью работает при сжатии.

**2. Разрушение стержня при растяжении-сжатии.** Рассмотрим простейшую задачу о разрушении стержня под действием переменной нагрузки. Пусть напряжение  $\sigma_1$  претерпевает гармонические изменения

$$\sigma_1 = \sigma_0 \left( \alpha + \beta \sin 2\pi \frac{t}{T} \right), \quad (3)$$

где  $\sigma_0 > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $T$  — постоянные. При растяжении  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , и параметр повреждения  $\psi_1$  убывает согласно кинетическому урав-

нению (2). Если значения постоянных таковы, что  $\sigma_1 > 0$ , то время разрушения  $t'$  определяется обычным соотношением

$$1 = (n+1) A \sigma_0^n \int_0^{t'} \left( \alpha + \beta \sin 2\pi \frac{t}{T} \right)^n dt. \quad (4)$$

Если при этом  $\alpha \gg |\beta|$ , то легко видеть, что время разрушения мало отличается от времени разрушения при постоянном напряжении  $\sigma_0 \alpha$ . Если все время  $\sigma_1 < 0$ , то по принятой схеме разрушение не происходит. Остановимся на общем случае, когда напряжение изменяет знак (рис. 7.10.2, а).

Введем функцию  $H(t)$ , равную единице при  $\sigma_1 > 0$  и нулю при  $\sigma_1 < 0$ . Тогда время разрушения  $t'$  определяется

соотношением

$$1 = (n+1) A \sigma_0^n \int_0^{t'} \left( \alpha + \beta \sin 2\pi \frac{t}{T} \right)^n H(t) dt. \quad (5)$$

Введем теперь время разрушения при постоянном напряжении  $\sigma_0$

$$t'_0 = [(n+1) A \sigma_0^n]^{-1},$$

а также положим

$$\frac{1}{T} \int_0^{T'} \left( \alpha + \beta \sin 2\pi \frac{t}{T} \right)^n H(t) dt = K.$$

Полагая, что время разрушения захватывает достаточно большое число циклов, т. е.  $t' \approx \kappa T$ , где  $\kappa = E(t'/T) \gg 1$  есть антье (целая часть от числа) от  $t'/T$ , легко получим из (5), что число циклов до разрушения равно

$$\kappa = E \left( \frac{t'_0}{KT} \right). \quad (6)$$

При  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  имеем симметричный цикл; тогда

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin^n x dx.$$

Если нагружение имеет ступенчатый характер (рис. 7.10.2, б), то  $K = T_1/T$  и число циклов до разрушения равно

$$\kappa = E \left( \frac{t'_0}{T_1} \right). \quad (7)$$

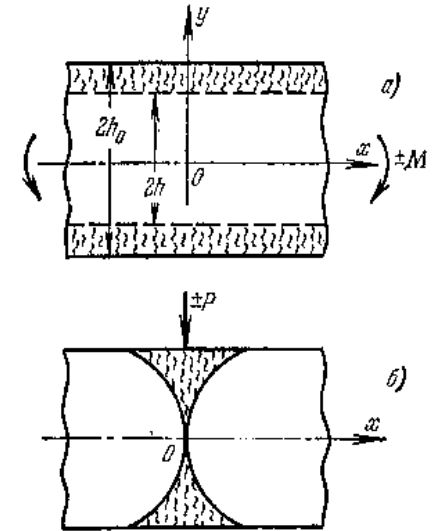


Рис. 7.10.3.

**3. Хрупкое разрушение при изгибе.** Ограничимся для простоты анализом чистого изгиба (рис. 7.10.3, а) балки прямоугольного сечения (ширина  $2b$ ) при симметричном цикле ( $+M, -M, +M, \dots$ ) со ступенями равной длины. Поскольку до разрушения реализуется, как уже отмечалось, достаточно большое число циклов, можно не различать смещений нейтральной оси от цикла к циклу и полагать, что нейтральная ось проходит по первоначальной оси балки.

При решении задачи необходимо знать распределение напряжений в условиях ползучести. Здесь возникает уже затронутый

ранее вопрос об участии разрушенных зон в сопротивлении ползучести. Поскольку деформации ползучести растут медленно, а длительность периода  $T$  не слишком велика, будем считать, что разрушенные зоны не сопротивляются ползучести. Тогда работает лишь ядро  $|y| \leq h$ , в разрушенных же зонах  $|y| > h$  напряжения равны нулю. Распределение напряжений (при  $y \geq 0$ ) характеризуется формулой

$$\sigma = \frac{M}{I_m} y^\mu, \quad \left( I_m = \frac{2b}{1 + \frac{\mu}{2}} h^{2+\mu} \right). \quad (8)$$

Полагаем, что установившееся распределение напряжений не испытывает существенных нарушений из-за изменений режима. Это объясняется медленностью изменения нагрузок; при этом гасятся нестационарности процесса ползучести и релаксируют остаточные напряжения. Следовательно, при низкочастотных изменениях реализуется упомянутое квазиустановившееся распределение.

В стадии скрытого разрушения  $t < t_1$  имеем  $h = h_0$ . При этом

$$t_1 = 2 \left[ (n+1) AM^n \left( \frac{1 + \frac{\mu}{2}}{2bh_0^2} \right)^n \right]^{-1} = 2h_0^{2n} D. \quad (9)$$

При  $t > t_1$  от крайних слоев к середине попеременно движутся два фронта разрушения. Условие на фронте имеет вид

$$1 = \frac{1}{D} \int_0^t \frac{h^{\frac{n}{m}}(\tau)}{h^{\frac{2n+n}{m}}(\tau)} d\tau. \quad (10)$$

Найденное отсюда время необходимо удвоить, так как при сжатии разрушение не происходит. Дифференцируя (10) по времени  $t$  и исключая интегральный член, получаем дифференциальное уравнение

$$D \frac{n}{m} \frac{dh}{dt} + h^{1-2n} = 0.$$

Его решение при начальном условии  $h = h_0$  при  $t = t_1$  таково:

$$1 - \left( \frac{h}{h_0} \right)^{2n} = \frac{2m}{Dh_0^{2n}} (t - t_1).$$

Устремляя  $h$  к нулю и удваивая результат, находим время разрушения

$$t' = t_1 \left( 1 + \frac{1}{2m} \right). \quad (11)$$

При постоянном моменте ( $M = \text{const}$ ) в § 7.4 было получено (отличаем это решение черточкой сверху):

$$\bar{t}' = \bar{t}_1 \left( 1 + \frac{2}{2m-1} \right) \quad \left( \bar{t}_1 = \frac{1}{2} t_1 \right), \quad (12)$$

т. е. при переменной нагрузке относительное время распространения фронта заметно короче.

Зависимость отношения  $t'/\bar{t}'$  от показателя ползучести  $m$  приведена на рис. 7.10.4. При  $m \rightarrow \infty$  эюра напряжений приближается к идеально пластической, тогда  $t' \rightarrow 2\bar{t}'$ .

Рассмотрим теперь второй крайний случай, когда разрушенная часть сечения не сопротивляется растяжению, но полностью работает при сжатии. Теперь, как нетрудно видеть, при  $m = n$  движение фронта описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 h_1}{dt^2} + 2(m-1) \frac{1}{h_1} \left( \frac{dh_1}{dt} \right)^2 = 0 \quad (2h_1 = h_0 + h),$$

уже встречавшимся ранее при анализе разрушения балки по-

стоянным моментом. Разрушение наступит при  $h_1 \rightarrow \frac{1}{2} h_0$ , так как в дальнейшем сечении теряет сопротивляемость растягивающим напряжениям. Для соответствующего момента времени  $t'_1$  имеем:

$$\frac{t'_1}{\bar{t}'} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^m (2m+1)} \right).$$

Эта зависимость показана на том же рис. 7.10.4. Отсутствие сопротивляемости сжатию разрушенной зоны заметно снижает длительность времени распространения разрушений.

Следуя обычной схеме технической теории анализа разрушения балки при произвольной нагрузке, изменяющейся во времени по симметричному циклу со ступенями равной длины. При этом изгибающий момент  $M$  будет также функцией  $x$ . В качестве иллюстрации на рис. 7.10.3, б показаны области разрушения для балки, лежащей на двух опорах и изгибаемой силой  $P$ , приложенной посередине.

В заключение заметим, что аналогичным образом можно рассмотреть случаи других поперечных сечений балок, а также другие (неступенчатые) циклы.

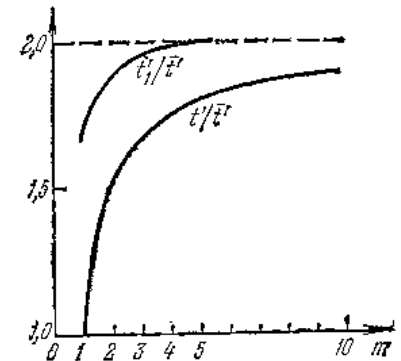


Рис. 7.10.4.

4. Разрушение вращающегося вала при изгибе. Рассмотрим задачу о разрушении медленно вращающегося круглого вала при чистом изгибе. При медленном вращении влиянием перераспределения напряжений можно пренебречь и считать, что в каждый момент времени напряжения такие же, как в состоянии установившейся ползучести.

При достаточно большом числе циклов можно полагать, что повреждения характеризуются осевой симметрией. При  $t > t_1$  образуется кольцевая зона  $r \geq c$  полного разрушения (рис. 7.10.5). Радиус ядра сечения  $c = c(t)$  с течением времени

уменьшается. Примем, что разрушенная зона сжатию также не сопротивляется. Изгибающий момент равен

$$M = M_0 \sin \omega t \quad (M_0 > 0).$$

Нормальное напряжение будет

$$\sigma = \frac{M}{I_m} y^\mu \quad (0 \leq y \leq c), \quad (13)$$

где  $I_m = q(\mu)c^{3+\mu}$  — обобщенный момент инерции; значения  $q(\mu)$  имеются, например, в книге Л. М. Качанова [2].

Найдем время  $t_1$ . В стадии скрытого разрушения  $0 \leq t < t_1$   $c = a$ ,

$\sigma_{\max} = \frac{M}{q(\mu)} a^{-3}$ , т. е. имеем условия симметричного гармонического цикла, поэтому  $t_1 = \kappa T$ , где множитель  $\kappa$  определяется формулой (6), в которой  $t_0$  — время разрушения при постоянном напряжении  $\sigma_0 = \sigma_{\max}$  при  $M = M_0$ .

Рассмотрим теперь движение фронта разрушения при  $t > t_1$ ; оно определяется уравнением

$$1 = (n+1) A \int_0^t \left[ \frac{M(\tau) c^\mu(\tau)}{q(\mu) c^{3+\mu}(\tau)} H(\tau) \right]^n d\tau.$$

Дифференцируя это соотношение по  $t$  и исключая интегральный член, получаем

$$\frac{dc}{dt} + N c^{1-3n} H(t) \sin^n \omega t = 0,$$

где положено

$$N = \frac{m}{n} \frac{(n+1) A}{q^n(\mu)} M_0^n.$$

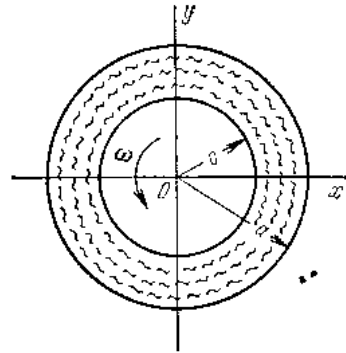


Рис. 7.10.5.

Начальное условие для  $c$  имеет вид:  $c = a$  при  $t = t_1$ . Решение задачи таково:

$$c^{3n} - a^{3n} = -3nKN(t - t_1).$$

При  $c \rightarrow 0$  получаем время разрушения

$$t' = t_1 \left( 1 + \frac{1}{3m} \right).$$

Таким образом, время распространения фронта разрушения сравнительно мало.

### § 7.11. Хрупкие разрушения при сложном нагружении

1. Основные положения. Кипетическое уравнение, рассмотренное в § 7.2, пригодно в условиях простого (пропорционального) нагружения. В предыдущем параграфе рассмотрены хрупкие разрушения при циклическом нагружении, когда направления главных осей напряженного состояния сохраняются.

Большой интерес представляет вопрос о накоплении повреждений в условиях ползучести при сложном (программном) нагружении. Здесь возникают значительные трудности в описании процесса накопления повреждений как формального характера (можно вводить тензоры поврежденности различных рангов), так и в связи с однообразием экспериментальных данных, не позволяющим определять большое число постоянных и функций.

Некоторые общие схемы введения тензоров и мер поврежденностей кратко рассмотрены ранее (§ 7.2). Ниже излагается простой вариант теории хрупкого разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении, опирающийся на имеющиеся экспериментальные данные и пригодный для решения различных конкретных задач.

Будем исходить из следующих представлений о развитии разрушения, вытекающих из анализа основных экспериментальных данных.

Можно считать, что хрупкие разрушения (возникновение, раскрытие и рост трещин), развивающиеся преимущественно в межзеренных прослойках, обуславливаются нормальными растягивающими напряжениями. Разрушения происходят по всем площадкам, испытывающим действие нормальных растягивающих напряжений. При сжатии повреждения не накапливаются.

Накопление повреждений носит направленный характер и концентрируется на площадках, перпендикулярных к направлению растягивающего напряжения. Заметим, что на площадках, параллельных направлению, вообще говоря, также возможен процесс разрушения; в принципе этот эффект можно учесть, введя некоторые множители (см. § 7.12).



Однако во многих случаях приемлемым приближением является условие отсутствия повреждений в упомянутых параллельных сечениях.

Полагаем, далее, что выполняется принцип линейного суммирования повреждений и что при простом нагружении кинетика разрушения удовлетворительно описывается уравнением (5) § 7.2.

Рассмотрим в данной точке среды некоторую площадку с нормалью  $\nu$ ; на площадке действует напряжение с нормальной составляющей  $\sigma_\nu$ , зависящей, вообще говоря, от времени. При этом, в согласии с изложенными выше положениями, происходит рост поврежденности (трещин, дефектов). Условимся характеризовать уровень поврежденности («сплошности») вектором  $\Psi_\nu$ , направленным по нормали; скорость его изменения равна  $\frac{d}{dt} \Psi_\nu$ . Длину этого вектора обозначим через  $\psi_\nu$ .

Пусть кинетическое уравнение поврежденности для изотропной среды имеет вид

$$\frac{d}{dt} \Psi_\nu = \begin{cases} f(\sigma_\nu, \Psi_\nu, \dots) & \text{при } \sigma_\nu > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_\nu < 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем  $f(0, \Psi_\nu, \dots) = 0$ . Кроме выписанных аргументов,  $f$  может зависеть от инвариантов напряженного и деформированного состояний, а также от некоторых параметров (например, температуры) и времени (при наличии эффектов старения).

Соотношения (1) могут включать и характеристики, связанные с иными критериями длительной прочности.

Удобны зависимости простейшего вида

$$\frac{d}{dt} \Psi_\nu = \begin{cases} -A \left( \frac{\sigma_\nu}{\Psi_\nu} \right)^n & \text{при } \sigma_\nu > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_\nu < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где постоянные  $A$ ,  $n$  имеют прежние значения (§ 7.2).

Остановимся теперь на условиях разрушения. Следует различать *частичное* и *полное* разрушения материала. При полном разрушении  $\psi_\nu = 0$  на любой площадке; материал не выдерживает растяжения. Частичное разрушение может быть *слоистым* и *волокнистым*. В первом случае достигнуто состояние разрушения в одном направлении (направлении 1, т. е.  $\psi_1 = 0$ ); материал, однако, может сопротивляться растяжениям в плоскости, перпендикулярной к направлению 1.

При волокнистом разрушении материал разрушен в двух ортогональных направлениях 1, 2 (т. е.  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = 0$ ), но сопротивляется растяжению в направлении 3 (т. е. вдоль «волокон»).

Таким образом, вопрос о несущей способности материала следует решать в связи с программой нагружения. Разрушение

достигнуто, коль скоро в данной точке найдется площадка, для которой  $\psi_\nu = 0$ , причем  $\sigma_\nu > 0$ .

В неоднородно напряженном теле в некоторый момент времени образуется фронт разрушения  $\Sigma$ . Рассмотрим уравнение его движения при условии, что нагрузки не испытывают резких изменений. Обозначим через  $\psi$  наименьшее значение  $\psi_\nu$  в данной точке. На фронте разрушения

$$\frac{d\psi}{dt} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_\Sigma + \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)_\Sigma \frac{du}{dt} = 0, \quad (3)$$

где  $u$  — расстояние по нормали к фронту.

При заметных деформациях ползучести (разрушения смешанного типа) можно характеризовать накопление повреждений тем же кинетическим уравнением (1), относя его к фиксированным частицам среды и учитывая изменения в геометрии тела.

Можно, наконец, следуя схеме Ю. Н. Работнова (§ 7.2), учесть влияние трещинообразования на деформации ползучести.

**2. Кручение трубки после растяжения.** Рассмотрим в качестве примера разрушение круглой тонкостенной трубки при ее скручивании после предварительного растяжения в интервале времени  $0 \leq t < t_1$ .

При растяжении нормальное напряжение на некоторой площадке, нормаль к которой образует угол  $\varphi$  с окружным направлением, равно

$$\sigma_{\nu 1} = \sigma \sin^2 \varphi,$$

где  $\sigma$  — растягивающее напряжение. Согласно кинетическому уравнению (2) к моменту  $t = t_1$  уровень поврежденности на площадке характеризуется соотношением

$$\psi_{\nu 1}^{n+1} = 1 - (n+1) A \sigma_{\nu 1}^n t_1.$$

При  $t \geq t_1$  действует только крутящий момент и тогда на той же площадке

$$\sigma_{\nu 2} = \tau \sin 2\varphi,$$

где  $\tau$  — напряжение кручения. Интегрируя уравнение (2) и определяя произвольную постоянную по условию  $\psi_{\nu 2}|_{t=t_1} = \psi_{\nu 1}$ , находим

$$\psi_{\nu 2}^{n+1} = 1 - (n+1) A [\sigma_{\nu 1}^n t_1 + \sigma_{\nu 2}^n (t - t_1)]. \quad (4)$$

Пусть в момент  $t = t_*$  произойдет разрушение (т. е.  $\psi_{\nu 2} = 0$ ), тогда из (4) получаем

$$t_* - t_1 = t_0 \left( 1 - \frac{t_1}{t_0} \sin^{2n} \varphi \right) \sin^{-2} 2\varphi. \quad (5)$$

Здесь через  $t_1 = [(n+1)A\sigma^n]^{-1}$  обозначено время разрушения при растяжении, через  $t_0 = [(n+1)A\tau^n]^{-1}$  — время разрушения при кручении. Очевидно, что  $\lambda \equiv \frac{t_1}{t_0} \leq 1$ .

Необходимо найти такую площадку  $\varphi = \varphi_*$ , для которой время разрушения минимально. Приравняв нулю производную  $t_*$  по  $\varphi$ , находим

$$1 - 2 \sin^2 \varphi + \lambda \sin^{2n} \varphi = 0.$$

Легко видеть, что при  $\lambda > 0$  будет  $\varphi_* > \frac{\pi}{4}$ .

При  $\lambda \ll 1$  разрушение происходит на площадках, близких к площадке  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; с ростом  $\lambda$  угол  $\varphi_*$  также растет.

На рис. 7.11.1 показаны соответствующие кривые. Необходимо отметить сильное влияние нелинейности. При большом показателе  $n$  опасные площадки мало отклоняются от площадки

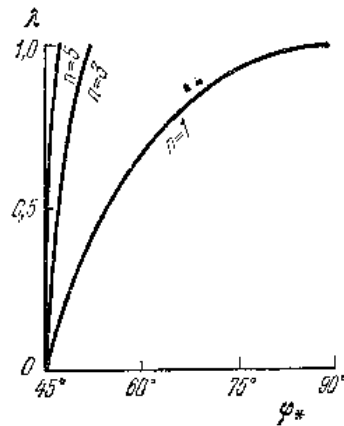


Рис. 7.11.1.

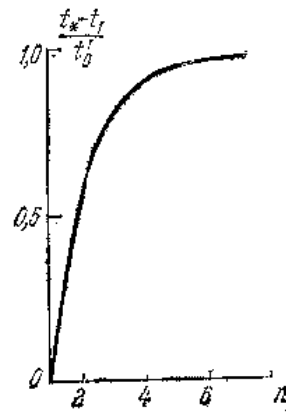


Рис. 7.11.2.

$\varphi = 45^\circ$ , т. е. даже при  $\lambda = 1$  (что следует понимать в смысле почти исчерпанной прочности на растяжение) на этих площадках накопление повреждений относительно невелико. Отношение  $(t_* - t_1)/t_0$  при  $\lambda = 0$  равно

$$\frac{t_* - t_1}{t_0} = \frac{1 - \sin^{2n} \varphi_*}{\sin^{2n} 2\varphi_*}.$$

Эта зависимость нанесена на рис. 7.11.2. С увеличением показателя  $n$  рассматриваемое отношение быстро стремится к единице, т. е. с ростом  $n$  влияние разрушений при растяжении быстро ослабевает. Лишь при  $n = 1$  трубка не выдерживает скручивания,

3. Последовательное растяжение в разных направлениях. В качестве другого примера рассмотрим хрупкое разрушение среды при последовательных одноосных растяжениях в разных направлениях. Сначала в интервале времени  $0 \leq t < t_1$  действует растягивающее напряжение  $\sigma'$  в направлении оси  $x$  (рис. 7.11.3). В момент  $t_1$  это напряжение заменяется напряжением  $\sigma''$ , действующим по направлению, образующему с осью  $x$  угол  $\alpha$ , причем  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Нормальное напряжение на площадке с нормалью  $\varphi$  равно

$$\sigma_{v1} = \sigma' \cos^2 \varphi \quad \text{при } t < t_1 \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

К моменту  $t = t_1$  уровень сплошности на площадке характеризуется соотношением

$$\psi_{v1}^{n+1} = 1 - \frac{t_1}{t_0'}.$$

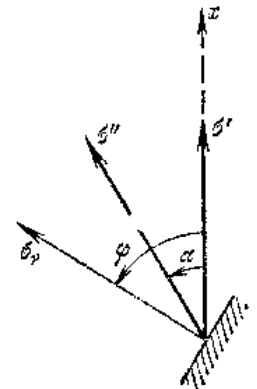


Рис. 7.11.3.

где введено обозначение  $t_0'$  для времени хрупкого разрушения при действии нормального напряжения  $\sigma_{v1}$ , т. е.

$$t_0' = [(n+1)A\sigma_{v1}^n]^{-1}.$$

На втором этапе

$$\sigma_{v2} = \sigma'' \cos^2(\varphi - \alpha) \quad \text{при } t \geq t_1.$$

Интегрируя кинетическое уравнение для  $\psi_{v2}$  и определяя произвольную постоянную по условию  $\psi_{v2}|_{t=t_1} = \psi_{v1}$ , находим

$$\psi_{v2}^{n+1} - \psi_{v1}^{n+1} = \frac{1}{t_0''} (t_1 - t),$$

где через  $t_0''$  обозначено время хрупкого разрушения при действии нормального напряжения  $\sigma_{v2}$ , т. е.

$$t_0'' = [(n+1)A\sigma_{v2}^n]^{-1}.$$

При разрушении в момент  $t_*$  имеем  $\psi_{v2} = 0$ , следовательно,

$$t_* = t_1 \left(1 - \frac{t_0''}{t_0'}\right) + t_0''. \quad (6)$$

Внося сюда значения  $t_0'$ ,  $t_0''$ , получаем

$$t_* = t_1 - t_1 \left(\frac{\sigma'}{\sigma''}\right)^n \frac{\cos^{2n} \varphi}{\cos^{2n}(\varphi - \alpha)} + [(n+1)A\sigma''^n]^{-1} \frac{1}{\cos^{2n}(\varphi - \alpha)}.$$

Найдем площадку  $\varphi = \varphi_*$ , для которой время разрушения минимально. Приравняв нулю производную  $t_*$  по  $\varphi$ , находим

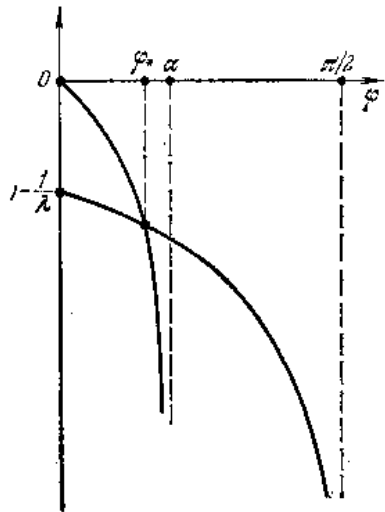


Рис. 7.11.4.

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(\varphi - \alpha) = 1 - \frac{1}{\lambda \cos^{2n} \varphi}, \quad (7)$$

где коэффициент

$$\lambda \equiv \frac{t_1}{t'} \leq 1,$$

$$t' = [(n+1) A \sigma'^n]^{-1}.$$

Здесь  $t'$  — время хрупкого разрушения при действии напряжения  $\sigma'$ .

При  $\lambda < 1$  правая часть уравнения (7) — отрицательная монотонно убывающая функция  $\varphi$  (рис. 7.11.4). Левая часть при  $\varphi < \alpha$  также отрицательна; при  $\varphi > \alpha$  левая часть положительна. Имеется, очевидно, единственный корень

$$0 \leq \varphi_* \leq \alpha,$$

причем знаки равенства реализуются лишь для  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0$ . Это означает, что нормаль к площадке разрушения лежит между направлениями растягивающих напряжений  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ , если на первом этапе ресурс прочности полностью не исчерпан (т. е.  $\lambda \neq 1$ ) или если первый этап ненулевой (т. е.  $\lambda \neq 0$ ).

При показателе  $n$ , заметно большем единицы, правая часть уравнения (7) быстро убывает, следовательно, площадка разрушения  $\varphi_*$  приближается к площадке  $\alpha$ .

## § 7.12. Влияние анизотропии

**1. Влияние анизотропии.** Влияние анизотропии заметно сказывается на длительной прочности металлов. Важно отметить, что особенности технологии (прокатки,ковки и т. д.) приводят к заметной начальной анизотропии свойств металла в отношении ползучести и длительной прочности. В общей постановке вопрос о накоплении повреждений в анизотропном материале сложен и мало изучен. Более детально изучена длительная прочность металлов в условиях плоского напряженного состояния. Обычно анизотропия характеризуется ортотропией и не является сильной.

При рассмотрении длительной прочности анизотропных металлов одна скалярная характеристика поврежденности недостаточна. Учитывая сделанное выше замечание, ограничимся об-

суждением случая совпадения главных осей анизотропии с главными осями напряженного состояния.

При испытаниях на растяжение образцов, вырезанных в направлениях 1, 2, 3, можно установить зависимости вида

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -A_i \left( \frac{\sigma_i}{\psi_i} \right)^{n_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — соответствующие сплошности. Используется простейшая степенная аппроксимация, параметры  $A_i, n_i$  находятся обычными приемами.

При переходе к случаю сложного напряженного состояния возникает вопрос о роли главных напряжений в процессе трещинообразования. Простейший вариант заключается в предположении о независимом развитии повреждений в трех главных плоскостях. Тогда приведенные выше уравнения (1) можно непосредственно использовать для решения. Повреждения при этом накапливаются автономно, и соответствующие времена хрупкого разрушения равны

$$t'_i = [(n_i + 1) A_i \sigma_i^{n_i}]^{-1}. \quad (2)$$

Наименьшее из времен  $t'_i$  и будет временем разрушения.

В другом крайнем случае разрушения от каждой составляющей развиваются равномерно по объему.

Естественно принять промежуточный вариант, допустив, что при растяжении в направлении 1

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \alpha_{21} \frac{d\psi_1}{dt}, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \alpha_{31} \frac{d\psi_1}{dt}, \quad (3)$$

причем

$$0 \leq \alpha_{21} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_{31} \leq 1.$$

Знакам равенства отвечают рассмотренные выше крайние случаи.

Теперь исходные соотношения принимают вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} A_j \left( \frac{\sigma_j}{\psi_j} \right)^{n_j}. \quad (4)$$

Здесь следует считать, что  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$ . В качестве возможного варианта можно принять условие взаимности коэффициентов  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Однако необходимости в таком ограничении нет. В согласии с опытами можно, по-видимому, полагать коэффициенты  $\alpha_{ij}$  при  $i \neq j$  заметно меньшими единицы.

Интегрирование системы (4) при начальных условиях

$$\psi_i = 1 \quad \text{для} \quad t = 0$$

может быть реализовано численными методами (например, методом Эйлера) или методом последовательных приближений.

**2. Сложное нагружение.** Распространим изложенную в § 7.11 схему на случай ортотропного металла. Пусть, как и для изотропной среды, развитие разрушений происходит из-за действия нормального растягивающего напряжения и разворачивается по площадкам, перпендикулярным к нему. Введем вектор сплошности  $\psi_v$ .

Ограничиваясь рассмотрением степенной зависимости, полагаем

$$\frac{d\psi_v}{dt} = \begin{cases} -A_v \left(\frac{\sigma_v}{\psi_v}\right)^{n_v} & \text{при } \sigma_v > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_v < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Исходные положения о преобладающей роли в трещинообразовании нормального положительного напряжения и приведенные выше замечания о характере анизотропии позволяют предложить простой прием определения  $A_v, n_v$ .

Рассматривая  $A_i$  как главные значения тензора, по известным формулам преобразования имеем

$$A_v = A_1 \cos^2(\nu, 1) + A_2 \cos^2(\nu, 2) + A_3 \cos^2(\nu, 3),$$

где  $\cos(\nu, i)$  — направляющие косинусы нормали. В плоском напряженном состоянии  $\cos(\nu, 3) = 0$ .

Для показателя  $n_v$  можно исходить из аналогичного представления. Иногда приемлемо условие  $n_i = \text{const} = n$ , тогда и  $n_v = n$ .

Условие разрушения и уравнение движения фронта разрушения формулируются в общих чертах так же, как и в изотропном случае.

### § 7.13. Влияние среды на время хрупкого разрушения

**1. Общие замечания.** Известно, что среда может оказывать большое влияние на прочность находящихся в ней материалов. В целом эта проблема сложна и слабо изучена; некоторые ее аспекты рассмотрены в книгах Л. А. Гликмана [1], В. И. Лихтмана, Е. Д. Шукина и П. А. Ребиндера [1] и недавно изданных докладах международного симпозиума (сборник [1]). Здесь мы коснемся лишь влияния жидкометаллической среды на время хрупкого разрушения металлов в условиях ползучести (Л. М. Качанов [8]). Этот вопрос интересен, в частности, в связи с использованием в энергетике жидкометаллических теплоносителей. Расплавленные легкоплавкие металлы, как оказалось, заметно снижают прочность конструктивных металлов.

Механизмы этого взаимодействия разнообразны и во многом остаются неясными.

Наибольшее значение, по-видимому, имеет диффузионное изъятие или внедрение некоторых элементов, существенно влияющих на прочностные свойства металлов (например, проникновение свинца). Этот процесс может одновременно изменять характеристики ползучести и длительной прочности металла.

Меньшее значение имеет поверхностный эффект растворения металла, являющийся, по существу, одной из форм коррозии.

Рассмотрим влияние этих эффектов на примере круглого стержня, растягиваемого в жидкометаллической среде.

**2. Влияние диффузии некоторых элементов.** Для сталей, достаточно устойчивых относительно поверхностных влияний (растворения, адсорбции), на длительную прочность преимущественное влияние оказывает диффузия некоторых элементов. Перенос этих элементов связан с градиентом их концентрации и, вообще говоря, зависит от уровня напряженного состояния. В случае жидкометаллической среды обычно не наблюдается заметной зависимости диффузионного процесса от напряженного состояния. Это позволяет рассматривать явление диффузии отдельно от поля напряжений. Процесс же разрушения существенно зависит от напряженного состояния и уровня концентрации элементов, изменяющегося вследствие диффузии с течением времени.

Рассмотрим задачу о разрушении круглого стержня (начальный диаметр  $2a_0$ ), растягиваемого силой  $P$ .

Обозначим через  $q = q(r, t)$  концентрацию элемента, существенно влияющего на прочность металла. Начальное значение концентрации считаем постоянным

$$q(r, t)|_{t=0} = q_0 < 0 \quad (0 \leq r < a_0).$$

Примем для простоты, что концентрация элемента в жидкометаллической среде равна нулю.

Концентрация  $q(r, t)$  в произвольный момент времени определяется решением дифференциального уравнения диффузии

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \beta \left( \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right),$$

где  $\beta$  — коэффициент диффузии.

В качестве граничного условия можно принять условие пропорциональности градиента концентрации (по нормали к границе) разности концентраций на границе металла и жидкометаллической среды. Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -\gamma q \quad \text{при } r = a_0,$$

где  $\gamma$  — коэффициент массообмена.

Решение рассматриваемой задачи известно:

$$q = q_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_0 \left( \mu_k \frac{r}{a_0} \right) \exp \left( - \mu_k^2 \frac{\beta t}{a_0^2} \right), \quad (1)$$

где положено

$$C_k = \frac{2}{\mu_k} \frac{I_1(\mu_k)}{I_0^2(\mu_k) + I_1^2(\mu_k)}.$$

Здесь  $I_0, I_1$  — бesselовы функции, а  $\mu_k$  — корни трансцендентного уравнения

$$\mu I_1(\mu) = \gamma a_0 I_0(\mu).$$

Таблицы корней этого уравнения вычислены; имеются также таблицы и графики для  $q(r, t)$ . Согласно решению концентрация монотонно изменяется. На рис. 7.13.1 схематически показана зависимость концентрации от радиуса  $r$  для моментов времени  $t_2 > t_1 > 0$ .

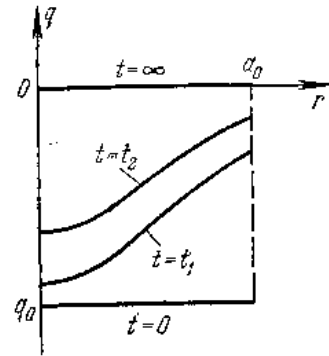


Рис. 7.13.1.

Будем считать, что процесс хрупкого разрушения определяется прежним уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^n \quad (2)$$

при условии, что коэффициент  $A$  зависит от концентрации  $q$ . Пусть эта зависимость линейная:

$$A = A_0 - A_1(q_0 - q), \quad (3)$$

где  $A_0 > 0, A_1$  — некоторые постоянные. При  $A_1 > 0$  с развитием процесса диффузии разрушение ускоряется.

Разделяя в (2) переменные и выполняя интегрирование, получаем

$$\psi^{n+1} = 1 - \frac{1}{t_0'} \left[ (1 - \alpha q_0) \int_0^t s^n dt + \alpha \int_0^t q s^n dt \right], \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$s = \left( \frac{a_0}{a} \right)^2, \quad \alpha = \frac{A_1}{A_0}, \quad \sigma_{\max} = s \sigma_{\max, 0},$$

$$\sigma_{\max, 0} = \frac{P}{\pi a_0^2}, \quad t_0' = [(n+1) A_0 \sigma_{\max, 0}^n]^{-1}.$$

Заметим, что  $t_0'$  — время хрупкого разрушения при отсутствии диффузионного эффекта,  $2a$  — диаметр неразрушенного ядра стержня.

В стадии скрытого разрушения  $0 \leq t \leq t_1$  при малых деформациях  $a = a_0$  и из предыдущего уравнения (4) следует соотношение

$$t_0' - (1 - \alpha q_0) t_1 - \alpha \int_0^{t_1} q dt = 0, \quad (5)$$

определяющее время  $t_1$  (напомним, что для  $t = t_1$  и  $r = a_0$   $\psi = 0$ ). При  $\alpha = 0$   $t_1 = t_0'$ , и в этот момент стержень сразу разрушается по всему сечению.

Легко видеть, что

$$\int_0^t q dt = \frac{q_0 a_0^2}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\mu_k^2} I_0 \left( \mu_k \frac{r}{a_0} \right) \left[ 1 - \exp \left( - \mu_k^2 \frac{\beta t}{a_0^2} \right) \right] \equiv J(r, t). \quad (6)$$

Для достаточно большого времени вторым членом в квадратной скобке можно пренебрегать; тогда  $J$  не зависит от времени.

Рассмотрим теперь стадию распространения разрушений  $t > t_1$ . Наибольшее изменение концентрации имеет место на контуре стержня  $a = a_0$ . В момент  $t = t_1$  поверхностный слой стержня разрушается, возникает фронт разрушения  $a(t)$ , стягивающийся с течением времени к оси стержня. Так как разрушенная зона практически возникает при грубой сетке макротрещин, можно принимать, что разрушение существенно не влияет на процесс диффузии.

На фронте разрушения  $r = a$   $\psi = 0$ , следовательно,  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ , откуда

$$\frac{da}{dt} = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_a / \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_a.$$

С помощью (4) находим, что при  $t \geq t_1$

$$\frac{da}{dt} = - [1 - \alpha(q_0 - q)_a] s^n \left[ \alpha \int_0^t \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right)_a s^n dt \right]^{-1}. \quad (7)$$

При достаточно большом  $t$  разность  $(q_0 - q)_a \approx q_0$ . Дифференцируя уравнение (7) по времени, получаем

$$\frac{d^2 a}{dt^2} \left( \frac{da}{dt} \right)^{-2} + \frac{2n}{a} = \frac{\alpha}{1 - \alpha q_0} \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right)_a. \quad (8)$$

В общем случае это уравнение интегрируется численными методами. Если же время  $t_1$  достаточно велико, так что концентрация  $q$  стала малой, то правая часть в уравнении (8) мала, следовательно,

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{2n}{a} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 \approx 0. \quad (9)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{da}{dt} = D_1 a^{-2n}, \quad (10)$$

где  $D_1$  — произвольная постоянная.

Из уравнения (7) при  $t = t_1$ ,  $a = a_0$ ,  $s = 1$  получаем значение производной  $\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_1}$ ; обозначим эту величину через  $\dot{a}_1$ . Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\frac{da}{dt} = \dot{a}_1 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2n}.$$

Интегрируя еще раз и определяя произвольную постоянную по начальному условию  $a = a_0$  при  $t = t_1$ , находим

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{2n+1} = 1 + \frac{\dot{a}_1}{a_0} (1 + 2n) (t - t_1). \quad (11)$$

В момент  $t''$  полного разрушения стержня  $a = 0$ . Таким образом,

$$t'' = t_1 - \frac{1}{1 + 2n} \frac{a_0}{\dot{a}_1}. \quad (12)$$

Заметим, что  $\dot{a}_1 < 0$ . Длительность стадии распространения разрушений зависит от характеристик диффузии и параметра  $\alpha$ .

Полученное решение позволяет определить масштабный фактор при разрушении стержней различного диаметра. При одних и тех же физических условиях опыта масштабный фактор зависит от влияния размеров стержня на процесс диффузии.

**3. Влияние растворения поверхности.** Растворение поверхностного слоя металла является одной из форм коррозии и зависит, вообще говоря, от уровня напряженного состояния. Но в жидкометаллической среде отсутствует разность потенциалов металла и среды, в связи с чем нет и электрохимических процессов. В этих условиях влияние напряженного состояния на процесс растворения незначительно и в дальнейшем мы будем этим влиянием пренебрегать.

Рассмотрим задачу о растяжении круглого стержня в жидкометаллической среде. Пусть в начальный момент времени радиус стержня равен  $a_0$ , а в момент  $t$  равен  $a = a(t)$ . Скорость растворения поверхностного слоя  $\frac{da}{dt}$  определяется насыщенностью среды. Если объем среды велик и в нем происходит энергичное перемешивание, можно полагать  $\frac{da}{dt}$  постоянным:

$$\frac{da}{dt} = \text{const} = -k,$$

откуда следует, что

$$a = a_0 \left(1 - \frac{k}{a_0} t\right). \quad (13)$$

Если нельзя пренебрегать изменением концентрации раствора, то  $\frac{da}{dt}$  будет переменным. Не останавливаясь на деталях анализа в этом случае, отметим, что в конце концов можно определить текущие размеры стержня, т. е. найти  $a = a_0 \varphi(t)$ , причем  $\varphi(0) = 1$ . В момент  $t = t_p$   $\varphi(t_p) = 0$ , т. е. весь стержень растворится. В случае постоянного  $k$   $t_p = \frac{a_0}{k}$ .

Рассмотрим теперь процесс хрупкого разрушения стержня, постепенно растворяющегося в жидкометаллической среде. Исходим из уравнения (2) при постоянном коэффициенте  $A$ . Очевидно, что

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{max}, 0} \varphi^{-2}(t).$$

Положим

$$\int_0^t \frac{dt}{\varphi^{2n}(t)} = \Phi(t).$$

Тогда из уравнения (2) следует, что

$$\psi^{n+1} = 1 - \frac{1}{t_0'} \Phi(t),$$

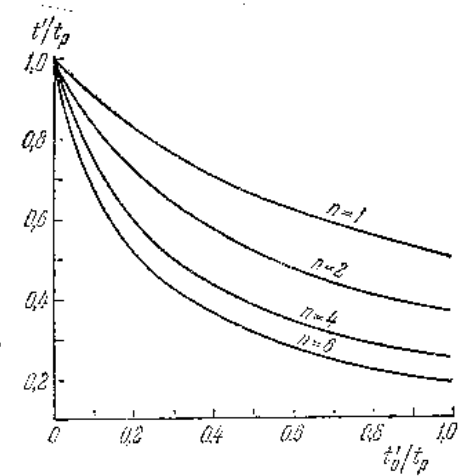


Рис. 7.13.2.

где  $t_0'$  — время чисто хрупкого разрушения (при отсутствии «коррозии»). Стержень разрушится в момент  $t = t'$ , когда  $\psi = 0$ . Следовательно,

$$\Phi(t') = t_0'. \quad (14)$$

Отсюда находим время разрушения

$$t' = \Phi_{-1}(t_0'), \quad (15)$$

где  $\Phi_{-1}$  — символ обратной функции. Решение имеет смысл, если  $t' < t_p$ . Это условие, как легко видеть, выполняется. Действительно, пусть при  $t = t_p$   $\frac{da}{dt} = a_0 \varphi'(t_p) \neq 0$ . Тогда, поскольку  $n > 1$ , функция  $\Phi(t)$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow t_p$ . Отсюда вытекает существование корня  $t' < t_p$  уравнения (14).

В частном случае постоянного  $k$

$$\frac{t'}{t_p} = 1 - \left[ 1 + (2n - 1) \frac{t'_0}{t_p} \right]^{-\frac{1}{2n-1}}. \quad (16)$$

На рис. 7.13.2 показаны графики зависимости (16) для некоторых значений показателя  $n$ . Нетрудно видеть, что даже при слабом процессе растворения может наблюдаться заметное снижение длительной прочности, если показатель  $n$  достаточно велик.

#### § 7.14. Накопление повреждений при усталостных разрушениях

**1. Стадии усталостного разрушения.** При воздействии переменных нагрузок уже на ранней стадии формируются микротрещины. Имевшиеся в материале и вновь возникшие микротрещины, микродефекты постепенно растут, сливаются и, наконец, образуются макротрещины. Распространение последних ослабляет тело и приводит к последующему его лавинному разрушению. Наличие начальных дефектов (надрезов, трещин, включений) уменьшает или даже исключает раннюю стадию процесса разрушения, иногда называемую *инкубационной*.

Соотношение длительностей инкубационной стадии и стадии распространения макротрещин зависит от очертаний тела, определяющих концентрацию напряжений, и от дефектов материала. Если отсутствует концентрация напряжений и материал достаточно однороден, то инкубационный период может быть весьма длительным (превышающим, в частности, длительность периода распространения трещин). В этом случае время разрушения можно определять на основе кривых усталости для стандартных гладких образцов.

Проблема усталостных разрушений имеет огромное практическое значение. Необъятная литература в этой области содержит главным образом изложение разнообразных экспериментальных данных и эмпирических формул. Для ориентации мы отсылаем читателя к книгам Екобори [1], Я. Б. Фридмана [1], Марина [1] и курсам сопротивления материалов. Ниже рассматриваются лишь элементы схем описания кинетики усталостных повреждений.

**2. Накопление повреждений.** Если режим работы — переменный (например, уровень напряженного состояния время от времени изменяется по ступенчатому закону, см. рис. 7.2.3), то для оценки ресурса прочности можно исходить из принципа линейного суммирования повреждений, сформулированного применительно к усталостным разрушениям впервые, по-видимому,

Бейли (Baily, 1939). Пусть в  $k$ -й группе циклов  $\Delta n_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , амплитуда напряжения равна  $\Delta \sigma_k$ , а соответствующее число циклов до разрушения при этой амплитуде равно  $N_k$ . По принципу линейного суммирования повреждений время до разрушения (характеризуемое числом  $s$ ) определяется соотношением

$$\sum_{k=1}^s \frac{\Delta n_k}{N_k} = 1. \quad (1)$$

При непрерывном изменении амплитуды напряжений последнее соотношение принимает вид

$$\int_0^{N'} \frac{dn}{N(n)} = 1, \quad (2)$$

где  $N(n)$  — число циклов до разрушения при текущем по отношению к  $n$  значению амплитуды  $\Delta \sigma$ ,  $N'$  — число циклов до разрушения. Величина

$$\Omega = \int_0^{n'} \frac{dn}{N(n)}, \quad (3)$$

как подмечено рядом авторов, характеризует уровень повреждения. Из (3) вытекает кинетическое уравнение повреждения

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{1}{N(n)}. \quad (4)$$

Согласно соотношению (2) условие разрушения таково:

$$\Omega = 1. \quad (5)$$

По эмпирическому критерию Мэнсона — Коффина (§ 2.4), относящемуся к симметричному циклу растяжения — сжатия, при достаточно высоких напряжениях, имеем

$$N' \Delta_p^2 = \text{const} = C, \quad (6)$$

где  $\Delta_p$  — ширина петли пластического гистерезиса,  $C$  — постоянная. Таким образом, число циклов до разрушения зависит от диссипации энергии в цикле.

Более общее построение теории накопления повреждений развивается в работах В. В. Новожилова [5] и его учеников. Пусть  $\lambda$  — некоторый параметр, характеризующий путь процесса разрушения. Это может быть время  $t$  (например, — в условиях ползучести), параметр Одквиста

$$\Gamma_0 = \int \sqrt{2 ds_{ij}^p} de_{ij}^p$$

(характеризующий путь пластической деформации), число циклов  $n$  и т. д. Кинетическое уравнение поврежденности имеет структуру

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = f(s_1, s_2, \dots), \quad (7)$$

где  $s_1, s_2, \dots$  — зависящие от  $\lambda$  величины, влияющие на процесс разрушения. Поскольку зависимости от  $\lambda$ , вообще говоря, — дифференциальные, соотношение (7) может быть проинтегрировано при задании истории нагружения. Разрушению отвечает условие (5), из которого определяется критическое значение  $\lambda = \lambda'$ .

Для хрупких разрушений при ползучести за параметр  $\lambda$  можно взять время  $t$ . Если  $s_1 = \sigma_{\max}/1 - \Omega$ ,  $s_2 = s_3 = \dots = 0$ , из (7) следует простейшее кинетическое уравнение (5) § 7.2. Если  $s_1 = \sigma_{\max}$ ,  $s_2 = \Omega$ , из (7) вытекает уравнение Ю. Н. Работнова (20) § 7.2.

Если за параметр «пути» взять рассеянную работу ползучести

$$\lambda = \int \sigma d\epsilon^e,$$

получим соотношение А. Г. Костюка, и т. д.

Допустим теперь, что процесс разрушения определяется атермической пластической деформацией. Сюда можно отнести усталостные разрушения (преимущественно — малоцикловые) и, в известных пределах, разрушения при обычных монотонных нагружениях. Тогда скорость процесса не играет роли и в качестве параметра  $\lambda$  естественно взять, например, параметр Олквиста  $\Gamma_0$ .

Для симметричного циклического нагружения  $\Gamma_0 = 4n\Delta_p$ . Полагая в кинетическом уравнении (7), что «скорость» накопления повреждений  $d\Omega/d\Gamma_0$  пропорциональна размаху пластической деформации, и используя условия — при  $n = 0$   $\Omega = 0$ , при  $n = N'$   $\Omega = 1$ , нетрудно вывести соотношение Мэнсона — Коффина (6).

В заключение отметим континуальную модель накопления усталостных повреждений, развиваемую С. А. Алексеевым [1]; исходными здесь являются представления теории дислокаций.

## ГЛАВА 8

### МЕХАНИКА ТРЕЩИН

#### § 8.1. Хрупкие разрушения и механика трещин

**1. Общие замечания.** В главах 3, 5, 6 рассматривались некоторые виды деформационных разрушений, происходящих при значительных пластических сдвигах. Подобные сдвиги в металлах объясняются влиянием дефектов решетки, называемых дислокациями.

Развивающиеся с течением времени малодеформационные (хрупкие, квазихрупкие) разрушения характеризуются накоплением дефектов другого типа — микропор, микротрещин, постепенно снижающих уровень прочности. Появление и рост микротрещин приводят, в конце концов, к их слиянию, к образованию макротрещин (магистральных трещин). На этой стадии разрушение определяется главным образом распространением макротрещин. Анализ всей картины разрушения требует рассмотрения поведения тела, ослабленного достаточно большими трещинами.

Другой аспект проблемы трещин заключается в следующем. Реальные материалы всегда имеют те или иные дефекты. В частности, это могут быть трещины (надрезы, узкие полости, повреждения поверхности и т. д.). В некоторых условиях эти трещины безопасны, так как они не обнаруживают тенденции к расширению; при других же значениях параметров нагрузок и геометрии имеющиеся трещины могут оказаться неустойчивыми и вызвать быстрое (лавинное) разрушение тела из-за спонтанного роста трещин.

Наконец, если материалы очень хрупки, то даже малые трещины резко снижают прочность.

**2. О теоретической прочности.** Прочность идеальных материалов определяется силами связи между правильно расположенными атомами. Строгое определение этих сил затруднительно ввиду необходимости учитывать взаимодействие многих атомов.

В металлах атомы располагаются в узлах кристаллической решетки. Для оценки теоретической прочности металлов рассмо-



трим упрощенную схему — взаимодействие двух слоев атомов (рис. 8.1.1). Кривая изменения напряжения взаимодействия  $\sigma$  между слоями атомов в зависимости от расстояния  $r$  между ними показана на рис. 8.1.2. Точка  $O$  соответствует положению относительного равновесия между силами отталкивания и притяжения;  $r_0$  — межатомное расстояние (равновесное расстояние

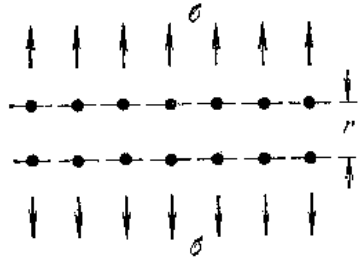


Рис. 8.1.1.

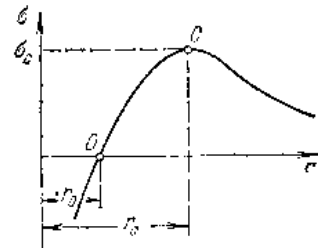


Рис. 8.1.2.

между слоями). При растяжении расстояние между слоями атомов увеличивается. При  $r = r_c$  напряжение  $\sigma$  достигает максимального значения  $\sigma_c$  (теоретическая прочность), равновесие становится неустойчивым и происходит разрушение. Угол наклона касательной в точке  $O$  характеризует модуль упругости.

Для приближенной оценки теоретической прочности можно аппроксимировать участок  $OC$  частью синусоиды

$$\sigma = \sigma_c \sin 2\pi \frac{r - r_0}{r_0}.$$

Отношение  $\frac{r - r_0}{r_0}$  можно интерпретировать как относительное удлинение  $\epsilon$ , следовательно,

$$\sigma = \sigma_c \sin 2\pi \epsilon. \quad (1)$$

Полагая, что модуль упругости  $E$  равен

$$E = \left( \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0},$$

получаем, что

$$\sigma_c \approx \frac{E}{2\pi}. \quad (2)$$

Можно поэтому считать, что грубой оценкой теоретической прочности является значение

$$\sigma_c \approx 0,1E. \quad (3)$$

Для жестких металлов модуль упругости характеризуется величиной  $10^6$  кг/см<sup>2</sup>, стало быть, теоретическая прочность оценивается величиной  $10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Реальная прочность, однако, в десятки раз ниже.

Как уже отмечалось, снижение прочности объясняется дефектами — трещинами, порами различных размеров. Устранение дефектов приводит к повышению прочности. В этом отношении очень показательны бездефектные нитевидные кристаллы (так называемые усы), прочность которых приближается к теоретической.

**3. Теория Гриффитса.** Гриффитс [1] впервые (1920 г.) показал, что низкая реальная прочность хрупких материалов вызывается наличием трещин, приводящих к значительной концентрации напряжений. Заметим, что в реальных материалах имеют значение не только трещины, но и другие факторы (неоднородность материала из-за поликристаллического строения, скопление дефектов решетки — дислокаций, пор и т. д.).

Гриффитс исходил из решения задачи об эллиптическом вырезе в упругой плоскости, равномерно растягиваемой на бесконечности напряжением  $p$  (рис. 8.1.3, а). Устремляя полуось эллипса к нулю ( $b \rightarrow 0$ ), найдем распределение напряжений, вызываемое бесконечно тонким разрезом длиной  $2l$ . Наибольший интерес представляют напряжения вдоль оси  $x$  при  $x \geq l$ . Здесь  $\tau_{xy} = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_{x+p}$ , причем

$$\sigma_y = \frac{p}{\sqrt{\frac{x^2}{l^2} - 1}} \left( 2 \frac{x}{l} + \sqrt{\frac{x^2}{l^2} - 1} \right)^{-1} + p. \quad (4)$$

Распределение напряжения  $\sigma_y$  показано на рис. 8.1.3, б. При  $x \rightarrow l$  напряжение неограниченно возрастает.

Вертикальное перемещение верхнего берега трещины равно

$$u_y = \frac{2p(1-\nu^2)}{E} \sqrt{l^2 - x^2},$$

т. е. разрез после нагружения принимает форму очень вытянутого эллипса.

К пластине с трещиной можно перейти, постепенно уменьшая растягивающее напряжение  $\sigma_y$ , приложенное к краям воображаемого разреза в сплошной пластине (рис. 8.1.4), от значения  $p$  до нуля. При этом напряжения произведут работу

$$W = 2 \left( -\frac{1}{2} p \int_{-l}^l u_y dx \right) = -(1-\nu^2) \frac{\pi l^2 p^2}{E} \quad (5)$$

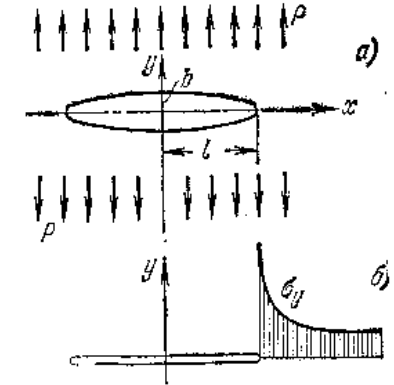


Рис. 8.1.3.

(в случае плоской деформации; для плоского напряженного состояния множитель  $(1 - \nu^2)$  следует отбросить). Величину  $W$  назовем *работой раскрытия*.

Величина  $W$  характеризует работу, которая может быть получена из системы при образовании трещины (см. § 8.3). В частности, если нагруженные границы тела зафиксированы, то величина  $W$  равна освобождающейся упругой энергии. В рассматриваемой же задаче Гриффитса *упругая энергия тела* при его разрыве возрастает, и  $W$  равна изменению потенциальной энергии системы.

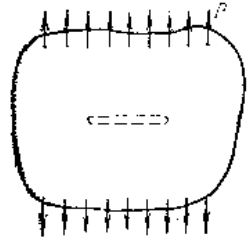


Рис. 8.1.4.

Для расширения трещины нужно преодолеть силы взаимодействия соседних атомных слоев, т. е. затратить некоторую работу. Пусть для образования единицы свободной поверхности необходима работа  $\gamma$ . Величину  $\gamma$ , называемую *плотностью поверхностной энергии*, можно считать константой, характерной для материала в данных условиях (температура, внешняя среда и т. д.). Эта энергия аккумулируется в смещенных поверхностных слоях атомов.

Величину  $\gamma$  можно оценить, используя приближенное представление (1) для «горба» кривой  $\sigma = \sigma(r)$  при  $r \geq r_0$  и полагая, что  $\sigma = 0$  при  $r \geq 1,5r_0$  (ввиду быстрого убывания сил сцепления). Действительно, работа разрушения связей, необходимая для образования двух новых единиц поверхности, равна

$$2\gamma = \int_{r_0}^{\infty} \sigma dr \approx \int_{1/4}^{1/2} \sigma_c \sin 2\pi\varepsilon \cdot r_0 d\varepsilon = \frac{\sigma_c r_0}{2\pi}, \quad (6)$$

т. е.  $\gamma \approx 0,01Er_0$ .

Если трещина растет, освобождается потенциальная энергия, которая при равновесном расширении трещины расходуется на образование новой поверхности, т. е. при переходе к  $l + dl$

$$dW = -d\Pi, \quad (7)$$

где

$$\Pi = 4l\gamma \quad (8)$$

есть поверхностная энергия трещины. Соотношение (7) можно переписать в форме

$$\frac{\partial}{\partial l} (W + \Pi) = 0. \quad (9)$$

Внося сюда значения  $W$  и  $\Pi$ , приходим к формуле Гриффитса

$$p^2 = \frac{2E\gamma}{\pi l (1 - \nu^2)}. \quad (10)$$

Эта формула при заданной длине  $l$  определяет критическое напряжение  $p = p_*$ , приводящее к расширению трещины. Так как с увеличением длины  $l$  критическое напряжение уменьшается, то далее происходит быстрое (лавинное) распространение трещины.

Заметим, что при залечивании трещин поверхностная энергия переходит в потенциальную энергию системы.

При уменьшении длины трещины разрушающее напряжение растет. Следует заметить, что беспредельное уменьшение длины  $l$  лишено смысла, так как при этом теряет смысл сама модель сплошной среды.

Если, как и выше, рассмотреть взаимодействие двух слоев атомов (см. рис. 8.1.1), то трещина может быть представлена расхождением слоев (схема Эллиота [1]), показанным на рис. 8.1.5. Очевидно, нет смысла рассматривать значения  $l < r_0$ . Пусть  $l = r_0$ ; внося в (10)  $l = r_0$ , постоянную  $\gamma$  из (6) и полагая согласно (2)  $\frac{E}{2\pi} \approx \sigma_c$ , приходим

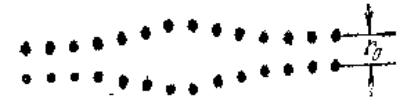


Рис. 8.1.5.

к выводу, что напряжение достигает теоретической прочности  $p = \sigma_c$ . Эта оценка носит, разумеется, грубый характер, но указывает на ориентировочную нижнюю границу  $l$ .

Из формулы (10) вытекает, что для данного материала

$$p \sqrt{\pi l} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1 - \nu^2}} = \text{const}. \quad (11)$$

Для хрупких материалов это соотношение качественно подтверждается (т. е.  $p_* \sim 1/\sqrt{l}$ ), например, опытами Гриффитса со стеклом. Для материалов, разрушение которых сопровождается заметной пластической деформацией, наблюдаются большие количественные отклонения.

**4. Учет пластической деформации.** В вершине трещины, развивающейся в металле, происходит пластическая деформация, причем затрачиваемая на нее работа может быть во много раз больше поверхностной энергии  $\gamma$  идеально хрупкого разрушения. Опыты показывают, что для достаточно жестких сталей пластическая деформация охватывает сравнительно узкий слой, примыкающий к трещине (заштрихованный слой на рис. 8.1.6). Но тогда, как заметили Орован и Ирвин в 1952 г., можно учесть пластическую работу в рамках той же схемы Гриффитса, если приписывать поверхностной энергии более широкий смысл и заменить  $\gamma$  суммой  $(\gamma + \gamma_p)$ , где  $\gamma_p$  — работа

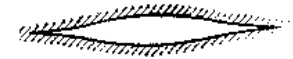


Рис. 8.1.6.

пластической деформации при образовании единицы поверхности. Разумеется, из-за необратимости работы  $\gamma_p$  теперь можно говорить только о росте трещин.

Важно подчеркнуть, что для металлов  $\gamma_p \gg \gamma$ . Например, для стали  $\gamma_p \approx 10^3 \gamma$ . Именно столь значительная пластическая работа и обеспечивает хорошее сопротивление металлов хрупкому разрушению.

Теперь формула Гриффитса (10) может быть переписана так:

$$p^2 = \frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi l(1 - \nu^2)}. \quad (12)$$

Здесь, конечно,  $\gamma$  можно отбросить.

Из (12) вытекает, что по-прежнему

$$p \sqrt{\pi l} = \left[ \frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{1 - \nu^2} \right]^{1/2} = \text{const}. \quad (13)$$

Этот параметр очень важен; чем он больше, тем выше сопротивление материала хрупкому разрушению.

Хотя слой пластической деформации тонкий, но он много больше атомных расстояний, поэтому в формуле (12) нижняя граница длины  $l$  существенно больше  $r_0$  и, грубо говоря, должна оцениваться толщиной пластического слоя.

Детальное обсуждение границ применимости модели сплошной среды в окрестности вершины трещины и условий Гриффитса — Ирвина можно найти в работах В. В. Новожилова [2, 3].

**5. Вязкость разрушения (трещиностойкость).** С инженерной точки зрения большую роль играет степень хрупкости материала, его чувствительность к повреждениям разного рода (главным образом — к трещинам, надразам). В нашей технической литературе способность материалов (преимущественно металлов) сопротивляться развитию трещин обычно называется малоудачным термином «вязкость разрушения», возникшим при переводе английского термина «fracture toughness». Более правильно (по аналогии с теплостойкостью, коррозионной стойкостью и т. п.) говорить о *трещиностойкости*.

Понятие вязкость разрушения (трещиностойкость) объединяет, в сущности, разнообразные свойства металла, определяемые его микроструктурой и способностью к пластической деформации. Достаточная трещиностойкость (достаточная вязкость) является лучшей гарантией от внезапных разрушений.

Эта характеристика важна, так как все более широкое использование новых высокопрочных материалов (высокопрочных сталей, металлокерамики, материалов, армированных усами, и т. д.) связано с реальной опасностью неожиданных хрупких разрушений. В конструкциях из высокопрочных материалов обычно аккумулируется большая потенциальная энергия. При

возникновении трещин последние могут вызвать лавинное разрушение. Необходимая для этого энергия черпается из потенциальной энергии, освобождающейся в процессе распространения трещин.

**6. Механика трещин.** Выше в общих чертах охарактеризовано значение трещин в проблеме разрушения. Отмечены некоторые подходы к оценкам опасности трещин и трещиностойкости материалов, некоторые обоснования перехода от данных, полученных на образцах, к характеристикам прочности тел сложной формы с различными дефектами — трещинами в зависимости от материала, условий нагружения, влияния среды.

Интенсивность напряжения в вершине трещины, характеризующая (см. ниже) множителем  $p \sqrt{\pi l}$ , существенна не только при статическом нагружении, но и для оценки прочности при переменных нагрузках, т. е. в условиях усталости. Большой интерес представляют также закономерности быстрого, лавинного распространения трещин (*динамика трещин*). Внезапные катастрофы крупных конструкций (сварных кораблей, газопроводов, резервуаров, герметических кабин самолетов и т. д.), происшедшие при сравнительно низких средних напряжениях, еще более обострили интерес к исследованиям в этой области.

Все это способствовало интенсивному развитию механики трещин, изредка называемой также *линейной механикой разрушения*. Дело в том, что из-за математических трудностей в теории рассматриваются главным образом трещины (*линейные разрывы*) в плоской задаче; это обстоятельство и отражено во втором названии.

## § 8.2. Простейшие задачи о напряженном состоянии упругого тела с щелями

**1. Трещины и задачи о щелях в упругом теле.** Трещина представляет собой узкую щель, имеющуюся или образовавшуюся в теле. При медленном развитии трещины можно пренебрегать инерционными силами и рассматривать задачу в квазистатической постановке (динамика распространения трещин излагается в § 8.11).

Трещины существенно изменяют напряженное состояние тела. Весьма сложным является вопрос о напряженном состоянии в окрестности вершины трещины в связи с возникновением там больших деформаций, лежащих за пределом упругости. До обсуждения условий развития трещин необходимо рассмотреть вспомогательные задачи о равновесии идеально упругого тела с щелями. Из-за математических трудностей изучены лишь сравнительно простые задачи этого типа. Рассмотрены, главным образом, плоские задачи со щелями, имитируемыми идеальными

(бесконечно тонкими) разрезами. Наиболее важными и в то же время относительно простыми являются задачи о щелях в неограниченных телах, испытывающих на бесконечности однородное напряженное состояние.

Перечислим несколько типичных задач. В плоских задачах напряжения и деформации не зависят от координаты  $z$ , причем наиболее простым является случай так называемой антиплоской деформации (продольный сдвиг).

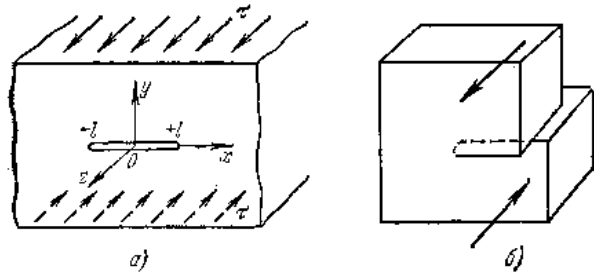


Рис. 8.2.1.

Этот случай показан на рис. 8.2.1. Здесь проекции смещения имеют вид

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y) \quad (1)$$

и в неограниченном теле вызываются касательными напряжениями  $\tau$ , заданными на бесконечности (рис. 8.2.1, а). Противоположные стороны трещины проскальзывают друг относительно друга в направлении оси  $z$  (рис. 8.2.1, б).

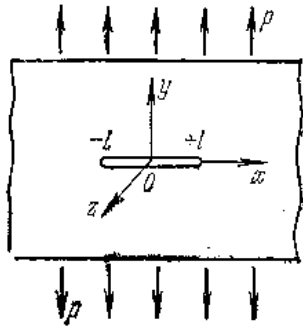


Рис. 8.2.2.

На рис. 8.2.2 изображен случай трещины в поле однородного (на бесконечности) растяжения в условиях плоской деформации, когда

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0, \quad (2)$$

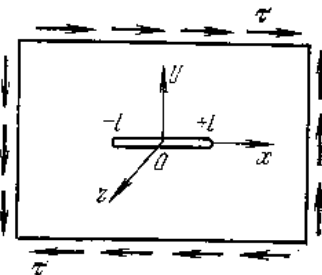


Рис. 8.2.3.

На рис. 8.2.3 показана трещина в условиях плоской деформации при сдвиге в плоскости  $x, y$ .

Напомним, что плоская деформация и плоское напряженное состояние (сквозные щели в тонкой пластинке) описываются одним и тем же бигармоническим уравнением.

**2. Продольный сдвиг пространства с щелью.** Здесь отлично от нуля только смещение  $u_z = u_z(x, y)$  и, следовательно, сдвиги равны

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

По закону Гука соответствующие компоненты напряжения будут

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (3)$$

Два первых дифференциальных уравнения равновесия удовлетворены тождественно; из третьего уравнения

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

вытекает, что смещение является гармонической функцией

$$\Delta u_z = 0. \quad (4)$$

Решение задачи можно получить наложением поля однородного сдвига

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau, \quad u_z = \frac{\tau}{G} y \quad (5)$$

на состояние, вызванное касательными напряжениями

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = -\tau,$$

действующими на краях разреза, причем здесь на бесконечности напряжения и перемещения равны нулю.

Рассмотрим задачу о втором состоянии в несколько более общей формулировке, когда заданное на разрезе касательное напряжение является функцией  $x$ , т. е.

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = -\tau(x), \quad |x| \leq l. \quad (6)$$

Задача сводится к построению однозначной гармонической функции  $u_z(x, y)$  по заданной на берегах разреза  $(-l, +l)$  нормальной производной  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$  и нулевым условиям на бесконечности.

Решение задачи может быть получено различными способами. В частности, можно воспользоваться методами теории функций комплексного переменного.

Вводя сопряженную гармоническую функцию  $u_z^*$ , перейдем к комплексному потенциалу<sup>1)</sup>

$$\varphi(z) = u_z + iu_z^* \quad (z = x + iy),$$

вещественной частью которого будет смещение  $u_z$ , т. е.

$$u_z = \operatorname{Re}[\varphi(z)].$$

С помощью формул (3) и соотношений Коши — Римана находим, что

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\varphi'(z). \quad (7)$$

Итак, необходимо найти голоморфную функцию  $\varphi'(z)$  по следующим условиям. В силу (6) на берегах разреза заданы одинаковые значения мнимой части функции  $\varphi'(z)$ , а вещественная часть равна нулю. Поскольку смещение  $u_z$  стремится к нулю на бесконечности, функция  $\varphi'(z)$  при больших  $|z|$  должна убывать не медленнее чем  $z^{-2}$ . На концах разреза  $\varphi'(z)$  может иметь особенности.

Подобные краевые задачи впервые, по-видимому, были рассмотрены в гидромеханике (в плоской задаче обтекания тонкого крыла потоком несжимаемой жидкости); они являются частным случаем краевой задачи Гильберта о нахождении голоморфной в области функции по разрывным предельным условиям, заданным на замкнутых или разомкнутых контурах. Методы решения задачи Гильберта хорошо разработаны (см. Н. И. Мусхелишвили [1, 2]); однако встретившийся здесь ее частный случай может быть решен простым способом (Л. И. Седов [1]).

Пусть на берегах разреза  $y = 0$ ,  $|x| \leq l$  задано одно и то же предельное значение  $v(x, 0)$  гармонической функции  $v(x, y)$ ; сопряженная же гармоническая функция  $u(x, y)$  обращается в нуль на вещественной оси. Рассмотрим комплексную функцию

$$F(z) = u - iv,$$

убывающую на бесконечности не медленнее чем  $z^{-2}$ .

Так как на верхнем и нижнем берегах разреза функция  $v(x, y)$  имеет одно и то же значение, она четна по  $y$ , т. е.  $v(x, y) = v(x, -y)$ . Тогда из условий Коши — Римана нетрудно установить, что сопряженная функция  $u(x, y)$  нечетна по  $y$ .

Как уже отмечалось, напряжения на концах разреза могут иметь особенности, поэтому и функция  $F(z)$  может иметь там особенности.

Поскольку разрез имеет два берега, следует ввести двузначную на нем функцию. Возьмем функцию  $\sqrt{z^2 - l^2}$ , причем при

$z = x > l$  берем положительное значение корня. Проведем разрез от  $-l$  до  $+l$  (рис. 8.2.4); тогда функция  $\sqrt{z^2 - l^2}$  будет голоморфной вне разреза. На краях разреза эта функция чисто мнимая и принимает значения  $+i\sqrt{l^2 - x^2}$  на верхнем берегу,  $-i\sqrt{l^2 - x^2}$  — на нижнем берегу.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = F(z) \sqrt{z^2 - l^2},$$

которая также голоморфна вне разреза и, по предположению, ограничена на его концах.

Пусть  $L$  — контур, охватывающий отрезок  $(-l, +l)$ ; будем считать положительным направлением обхода движение по часовой стрелке (см. рис. 8.2.4). Функция от  $\zeta$

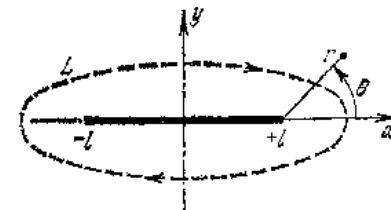


Рис. 8.2.4.

$$\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z},$$

где  $z$  — точка вне контура, имеет вне  $L$  единственную особую точку  $\zeta = z$  с вычетом  $\Phi(z)$ . Вычет функции в бесконечно удаленной точке равен нулю (из-за условия убывания  $F(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ ). Поэтому вспомогательную функцию  $\Phi(z)$  можно представить через ее значения на контуре  $L$  по формуле Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

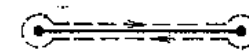


Рис. 8.2.5.

Стянем теперь контур  $L$  к дважды пробегаемому отрезку  $(-l, +l)$  (рис. 8.2.5).

На верхнем берегу разреза

$$\Phi_+(\xi) = [u(\xi, +0) - iv(\xi, +0)] i \sqrt{l^2 - \xi^2},$$

на нижнем же

$$\Phi_-(\xi) = -[u(\xi, -0) - iv(\xi, -0)] i \sqrt{l^2 - \xi^2}.$$

Но

$$u(\xi, +0) = u(\xi, -0) = 0,$$

$$v(\xi, +0) = v(\xi, -0) = v(\xi).$$

Так как  $\Phi(\zeta)$  ограничена в вершинах разреза и интегралы по охватывающим их малым окружностям стремятся к нулю, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{v(\xi)}{\xi - z} \sqrt{l^2 - \xi^2} d\xi.$$

<sup>1)</sup> Не смешивать комплексную переменную  $z = x + iy$  с декартовой координатой  $z$ .

Итак, искомая функция  $F(z)$  равна

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{v(\xi)}{\xi - z} \sqrt{l^2 - \xi^2} d\xi,$$

Легко видеть, что  $F(z)$  удовлетворяет условиям на бесконечности и в вершинах разреза.

Возвращаясь к исходной задаче (6), (7), можем теперь указать ее решение; именно,

$$G\varphi'(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\tau(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \quad (8)$$

Для проблемы трещин представляет интерес особенность в вершине трещины и энергия, освобождающаяся при образовании трещины.

Для выяснения поведения напряжений вблизи вершины рассмотрим асимптотические выражения для компонент напряжения. Положим

$$z - l = re^{i\theta},$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты (с полюсом в вершине трещины  $z = l$ , см. рис. 8.2.4). Рассмотрим окрестность вершины, т. е. будем считать расстояние  $r$  малым сравнительно с  $l$ . При малых  $r$  функция  $G\varphi'(z)$  принимает вид

$$G\varphi'(z) = -\frac{ik_3}{\sqrt{2\pi}(z-l)} + \dots,$$

где через  $k_3$  обозначена величина

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \tau(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi. \quad (9)$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим согласно (7) асимптотические представления для напряжений

$$\tau_{xz} = -\frac{k_3}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots, \quad \tau_{yz} = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \dots \quad (10)$$

Вычисляя  $\varphi(z)$  в окрестности вершины, находим смещение

$$u_z = \frac{k_3}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots \quad (11)$$

Напряжения имеют особенность вида  $1/\sqrt{r}$ , а смещение стремится к нулю как  $\sqrt{r}$ . В формулах (10) отброшены члены, имеющие конечные значения в окрестности вершины.

Величина  $k_3$  (иногда используются обозначения  $K_3, k_{III}$ ; индекс «три» указывает на случай продольного сдвига), называемая коэффициентом интенсивности напряжений, зависит от заданного касательного напряжения  $\tau(\xi)$ . Если, например,  $\tau(\xi) = \text{const} = \tau$ , то из (9) легко находим, что

$$k_3 = \tau \sqrt{\pi l}. \quad (12)$$

Вычислим теперь работу раскрытия. Пусть в сплошной пластине вдоль воображаемого разреза  $(-l, +l)$  действует продольное касательное напряжение  $\tau(\xi)$ . Уменьшая последнее до нуля, приходим к разрезу со свободными краями. При этом перемещения краев  $u_z^+, u_z^-$  пропорциональны напряжению  $\tau(\xi)$ , и соответствующая энергия равна

$$W_3 = - \int_{-l}^l \tau(\xi) u_z^+(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где индекс  $+$  характеризует смещение, относящееся к верхнему краю разреза; так как на нижнем крае производится такая же работа, результат удвоен.

При равномерной нагрузке  $\tau(\xi) = \text{const} = \tau$ , тогда

$$W_3 = -\tau \int_{-l}^l u_z^+(\xi) d\xi. \quad (14)$$

**3. Растяжение плоскости с щелью.** Рассмотрим задачу о растяжении плоскости с щелью (см. рис. 8.2.2) в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

Как известно, тогда напряжения и смещения выражаются через две функции комплексного переменного  $\varphi(z), \psi(z)$  по формулам Колосова — Мухелишвили

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2G(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Черточки сверху отличают сопряженные функции, получающиеся при замене переменного  $z$  и всех комплексных коэффициентов на сопряженные величины. Для случая плоской деформации  $\kappa = 3 - 4\nu$ , для случая обобщенного плоского напряженного состояния  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ .

Иногда вводят другие функции комплексного переменного  $\Phi(z), \Psi(z)$ , связанные с функциями  $\varphi(z), \psi(z)$  соотношениями

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z).$$

Решение задачи можно получить наложением однородного растяжения на состояние, вызванное напряжениями

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -p,$$

приложенными к берегам щели. Как и прежде, рассмотрим вторую задачу в несколько более общей постановке.

Пусть на краях щели  $|x| \leq l, y = 0$  заданы напряжения

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = -p(x), \quad (16)$$

причем на бесконечности напряжения и перемещения обращаются в нуль.

По условиям симметрии касательное напряжение  $\tau_{xy}$  равно нулю на всей оси  $x$ , нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  четны, а касательное напряжение  $\tau_{xy}$  нечетно относительно  $y$ . Поэтому можно попытаться искать решение в форме

$$\Phi(z) = \frac{i}{2} Z_1(z), \quad \Psi(z) = -\frac{i}{2} z Z_1'(z). \quad (17)$$

При этом подлежит разысканию лишь одна функция  $Z_1(z)$ . Согласно формулам (15) теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1', \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1', \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \tilde{Z}_1 - y \operatorname{Im} Z_1, \\ 2Gu_y &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_1 - y \operatorname{Re} Z_1, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\tilde{Z}_1$  — первообразная функция  $Z_1$ . Функция  $Z_1$  должна быть найдена по граничным значениям (16) на берегах разреза и условию на бесконечности. На берегах разреза согласно (18) и (16) должно быть

$$\operatorname{Re} Z_1 = -p(x) \quad \text{при} \quad |x| \leq l, \quad y = 0. \quad (20)$$

Характер убывания функции  $Z_1$  при  $|z| \rightarrow \infty$  устанавливается из условия стремления перемещений на бесконечности к нулю. Из формул (19) следует, что при больших  $|z|$  функция  $Z_1$  должна убывать не медленней чем  $z^{-2}$ .

Итак, необходимо построить голоморфную вне разреза, убывающую на бесконечности функцию  $Z_1$ , по заданным на обоих берегах разреза одинаковым значениям ее действительной части.

Аналогичная задача уже встречалась выше (см. предыдущий раздел 2), с тем несущественным отличием, что там на берегах разреза задавалась мнимая часть функции  $\varphi'(z)$ .

Решение задачи (Л. И. Седов [1]) имеет вид

$$Z_1 = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{p(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \quad (21)$$

Для выяснения поведения напряжений вблизи вершины трещины выведем надлежащие асимптотические формулы. Полагая, как и ранее,  $z - l = re^{i\theta}$ , где  $r \ll l$ , найдем из (21), что

$$Z_1 = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi} (z - l)} + \dots,$$

где через  $k_1$  (иногда используются обозначения  $K_1, k_1$ ; индекс «один» относится к случаю плоского поля растяжения) обозначена величина

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l p(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi, \quad (22)$$

называемая коэффициентом интенсивности напряжений. Коэффициент  $k_1$  зависит от вида нагрузки  $p(\xi)$ ; при  $p(\xi) = \operatorname{const} = p$  имеем

$$k_1 = p \sqrt{\pi l}. \quad (23)$$

Вообще говоря, коэффициент  $k_1$  отличен от нуля, хотя в частных случаях распределения нагрузок  $p(\xi)$  он может обратиться в нуль.

По формулам (18) и (19) вычисляем напряжения и перемещения вблизи вершины трещины

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= k_1 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y &= k_1 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= k_1 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{k_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ u_y &= \frac{k_1}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Напряжения имеют особенность  $1/\sqrt{r}$ ; перемещения же убывают как  $\sqrt{r}$ . В формулах (24) отброшены члены, имеющие

конечные значения в вершине трещины. Отметим, что в случае плоской деформации напряженное состояние у вершины трещины в общем довольно близко к состоянию гидростатического растяжения; это способствует хрупкому разрушению.

Вычислим теперь работу раскрытия:

$$W_1 = - \int_{-l}^l p(\xi) u_y^+(\xi) d\xi$$

или в развернутой форме:

$$W_1 = - \frac{\kappa+1}{4G} \int_{-l}^l p(\xi) (\operatorname{Im} \tilde{Z}_1)_{y=0}^+ d\xi. \quad (26)$$

Если  $p(\xi) = \text{const} = p$ , то

$$W_1 = - \frac{\kappa+1}{4G} p \int_{-l}^l (\operatorname{Im} \tilde{Z}_1)_{y=0}^+ d\xi.$$

Решение (21) позволяет рассматривать различные задачи о трещине под действием нагрузок, приложенных к ее берегам,

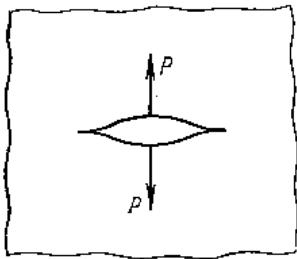


Рис. 8.2.6.

и при отсутствии напряжений на бесконечности (расклинивание трещины). Простейший пример задачи этого рода — трещина, раскрываемая двумя равными противоположно направленными сосредоточенными силами  $P$  (рис. 8.2.6).

В этом случае  $p(\xi) = P\delta(\xi)$ , где  $\delta(\xi)$  — дельта-функция, отличная от нуля лишь в точке  $\xi = 0$ . В соответствии с основным свойством дельта-функции интеграл от произведения  $\delta(\xi)$  на функцию

$\sqrt{l^2 - \xi^2} (z - \xi)^{-1}$  равен значению последней в точке  $\xi = 0$ . Поэтому из (21) получаем

$$Z_1 = \frac{Pl}{\pi z \sqrt{z^2 - l^2}}. \quad (27)$$

Нетрудно также найти, что

$$\tilde{Z}_1 = \frac{P}{\pi} \operatorname{arccos} \frac{l}{z}.$$

Согласно (22) коэффициент интенсивности напряжений равен

$$k_1 = \frac{P}{\sqrt{\pi l}}. \quad (28)$$

**4. Щель в поле сдвига** (см. рис. 8.2.3). Решение этой задачи можно получить наложением равномерного сдвига на состоя-

ние, вызванное действием на краях щели следующих напряжений:

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\tau.$$

Рассмотрим задачу в несколько более общей постановке, когда на краях щели  $|x| \leq l$  заданы напряжения

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\tau(x).$$

Полагая, что  $\sigma_y$  обращается в нуль вдоль всей оси  $x$ , ищем решение в форме

$$\Phi(z) = -\frac{i}{2} Z_2(z), \quad \Psi(z) = \frac{i}{2} (2Z_2(z) + zZ_2'(z)),$$

где  $Z_2(z)$  — искомая функция. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z_2 + y \operatorname{Re} Z_2', \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z_2', \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_2 - y \operatorname{Im} Z_2'; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_2 + y \operatorname{Re} Z_2, \\ 2Gu_y &= -(\kappa+1) \operatorname{Re} \tilde{Z}_2 - y \operatorname{Im} Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где  $\tilde{Z}_2$  — первообразная функция  $Z_2$ . Для нахождения функции  $Z_2$ , регулярной вне щели, имеем граничное условие на ее берегах

$$\operatorname{Re} Z_2 = -\tau(x) \quad \text{при} \quad |x| \leq l, \quad y = 0 \quad (31)$$

и условие убывания на бесконечности не медленнее чем  $z^{-2}$  (что следует из стремления перемещений на бесконечности к нулю).

Эта краевая задача аналогична предыдущей; легко видеть, что

$$Z_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\tau(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \quad (32)$$

Рассмотрим поведение напряжений и перемещений в окрестности вершины щели. Здесь

$$Z_2 = \frac{k_2}{\sqrt{2\pi(z-l)}} + \dots, \quad (33)$$

где положено

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \tau(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi.$$



Коэффициент интенсивности напряжений  $k_2$  (заметим, что для него иногда используются также обозначения  $K_2$ ,  $k_{II}$ ; индекс «два» относится к случаю плоского поля сдвига) зависит от нагрузки  $\tau(\xi)$ ; при  $\tau(\xi) = \text{const} = \tau$  имеем

$$k_2 = \tau \sqrt{\pi l}. \quad (34)$$

По формулам (29) и (30) вычисляем напряжения и перемещения вблизи вершины трещины

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{k_2}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ u_y &= \frac{k_2}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Напряжения в вершине трещины имеют особенность  $1/\sqrt{r}$ ; перемещения же убывают как  $\sqrt{r}$ .

Вычислим теперь работу раскрытия при образовании трещины. В рассматриваемом случае имеем

$$W_2 = - \int_{-l}^l \tau(\xi) u_x^+(\xi) d\xi$$

или в развернутой форме:

$$W_2 = - \frac{\kappa+1}{4G} \int_{-l}^l \tau(\xi) (\text{Im } \tilde{Z}_2)_{y=0}^+ d\xi. \quad (37)$$

Если  $\tau(\xi) = \text{const} = \tau$ , то

$$W_2 = - \frac{\kappa+1}{4G} \tau \int_{-l}^l (\text{Im } \tilde{Z}_2)_{y=0}^+ d\xi.$$

**5. Наклонная щель в поле растяжения.** Суперпозиция решений, полученных в предыдущих разделах 3 и 4, приводит к решению задачи о щели, расположенной наклонно к направлению одноосного растяжения  $p_0$  (рис. 8.2.7). При этом в коэффициенты интенсивности

$$k_1 = p \sqrt{\pi l}, \quad k_2 = \tau \sqrt{\pi l}$$

следует внести значения нормальной и касательной составляющих поля растяжения

$$p = p_0 \sin^2 \alpha, \quad \tau = \frac{1}{2} p_0 \sin 2\alpha. \quad (38)$$

Соответствующие напряжения и смещения (формулы (24), (25) и (35), (36)) складываются.

Разыскивая в окрестности вершины главную площадку  $\theta = \theta_*$ , на которой нормальное напряжение — наибольшее (т. е.

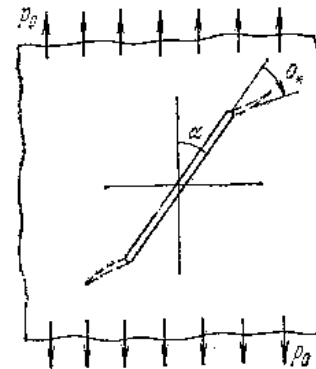


Рис. 8.2.7.

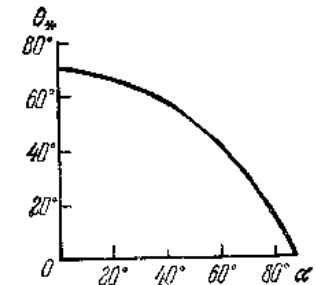


Рис. 8.2.8.

$\tau_{\theta} = 0$ , а  $\sigma_{\theta} = \text{max}$ ), получим уравнение, связывающее ориентацию упомянутой площадки с ориентацией щели:

$$\sin \theta_* + (3 \cos \theta_* - 1) \text{ctg } \alpha = 0 \quad (\alpha \neq 0). \quad (39)$$

Зависимость  $\theta_*$  от  $\alpha$  показана на рис. 8.2.8; заметим, что угол  $\theta_*$  отсчитывается против часовой стрелки.

Если принять, что трещина развивается по направлению площадки наибольшего нормального напряжения, то трещина будет распространяться под углом  $\theta_*$  к направлению  $\alpha$  (пунктир на рис. 8.2.7). Эта картина подтверждается некоторыми экспериментами.

**6. Заключительные замечания.** В рассмотренных выше задачах напряжения вблизи вершины трещины имели особенность вида

$$k/\sqrt{2\pi r},$$

перемещения же стремились к нулю как

$$\frac{k}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}.$$

Под  $k$  понимается соответствующий коэффициент интенсивности напряжений, зависящий от нагрузки. Полученные решения

относились к прямолинейным трещинам — щелям в бесконечном теле. Однако приведенные соотношения будут характеризовать поведение напряжений и смещений вблизи краев щелей произвольной формы, если под  $r$  понимать расстояние по нормали  $n$  к контуру края трещины (рис. 8.2.9). При этом тело может быть конечным, а поле напряжений вдали от трещины неоднородным. Разумеется, коэффициент интенсивности напряжений уже не будет определяться приведенными ранее формулами.



Рис. 8.2.9.

В рамках классической модели сплошной среды неограниченность напряжений в вершине трещины вполне закономерна. В гидромеханике в источниках и стоках возникают бесконечные скорости, в теории упругости напряжения бесконечны в точке приложения сосредоточенной силы, в вершине острого надреза и т. д. В ряде случаев решения подобного типа имеют особенно простой смысл, коль скоро есть стабильная физическая величина, сохраняющая значение по произвольному контуру, охватывающему особенность (для простоты рассматривается плоский случай). В гидромеханических источниках — это секундный расход жидкости, при действии сосредоточенной силы — это главный вектор, в вершине трещины — это коэффициент интенсивности напряжений, характеризующий приток к вершине энергии, освобождающейся при расширении трещины (см. § 8.3).

### § 8.3. Энергетическое уравнение для тела с распространяющейся трещиной

**1. Уравнение энергии.** Рассмотрим упругое тело, занимающее объем  $V$  и ограниченное внешней поверхностью  $S$  (рис. 8.3.1, а). Поверхность  $S$  разбивается на части  $S = S_u + S_F$ , причем на  $S_u$  заданы перемещения  $u_i^0$ , а на  $S_F$  — поверхностные нагрузки  $X_{ni}^0$ ; объемные силы для простоты не рассматриваются. Имеется также полость (или полости), ограниченная свободной от нагрузок поверхностью  $\Sigma$ ; в частности, это могут быть трещины. В этом состоянии 1 напряжения, деформации и перемещения равны  $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, u_i^0$ .

Пусть полость несколько увеличилась, тогда состояние 1 перейдет в состояние 2, для которого объем полости больше на  $\Delta v$ , поверхность — на  $\Delta \Sigma$  (рис. 8.3.1, б), а напряжения, деформации и перемещения равны  $\sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^0 + \Delta \epsilon_{ij}, u_i^0 + \Delta u_i$ .

Уравнение энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 имеет вид

$$\Delta U + \Delta K = \Delta A + \Delta Q - \Delta \Pi, \quad (1)$$

где  $\Delta U$  — изменение упругой энергии,  $\Delta K$  — изменение кинетической энергии,  $\Delta A$  — приращение работы внешних сил,  $\Delta Q$  — приток тепла,  $\Delta \Pi$  — приток энергии иного происхождения.

Будем рассматривать медленные (квазистатические) изменения, тогда можно пренебрегать приращением кинетической энергии, т. е.  $\Delta K = 0$ . Далее, будем считать, что приток тепла

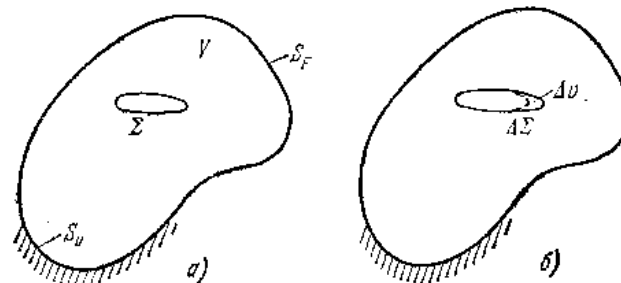


Рис. 8.3.1.

отсутствует, т. е.  $\Delta Q = 0$ . Что касается  $\Delta \Pi$ , то будем учитывать здесь лишь энергию, расходуемую на разрушение материала. Итак,

$$\Delta U - \Delta A = -\Delta \Pi. \quad (2)$$

Изменение работы  $\Delta A$  подсчитывается по части поверхности  $S_F$ , поскольку точки  $S_u$  при переходе из состояния 1 в состояние 2 не смещаются. Разность  $U - A \equiv \mathcal{E}$ , где

$$A = \int_{S_F} X_{ni}^0 u_i^0 dS, \quad (3)$$

обычно называется *потенциальной энергией тела*. Следовательно,

$$\Delta \mathcal{E} = -\Delta \Pi. \quad (4)$$

**2. Приращение потенциальной энергии тела.** Необходимо, таким образом, вычислить приращение потенциальной энергии тела при расширении полости. Рассмотрим этот вопрос, следуя работе Райса и Друкера [1].

В состоянии 1 потенциальная энергия тела равна

$$\mathcal{E}^0 = \int_V u(\epsilon_{ij}^0) dV - \int_{S_F} X_{ni}^0 u_i^0 dS, \quad (5)$$

где плотность внутренней энергии

$$u(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{mn} d\epsilon_{mn} \quad (6)$$

для упругой среды является однозначной функцией деформаций. Для линейно упругого тела  $u(\epsilon_{ij})$  — однородная положительно определенная квадратичная форма.

В состоянии 2 потенциальная энергия тела равна

$$\mathcal{E}^0 + \Delta\mathcal{E} = \int_{V-\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0 + \Delta\epsilon_{ij}) dV - \int_{S_F} X_{ni}^0 (u_i^0 + \Delta u_i) dS. \quad (7)$$

Вычислим приращение  $\Delta\mathcal{E}$ ; при этом нужно иметь в виду, что напряжения могут быть неограниченными на контуре полости. Вычитая из (5) соотношение (7), находим

$$-\Delta\mathcal{E} = \int_V u(\epsilon_{ij}^0) dV - \int_{V-\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0 + \Delta\epsilon_{ij}) dV + \int_{S_F} X_{ni}^0 \Delta u_i dS. \quad (8)$$

Так как  $\Delta X_{ni} = 0$  на  $S_F$ ,  $\Delta u_i = 0$  на  $S_u$ , а  $X_{ni}^0 + \Delta X_{ni} = 0$  на  $\Sigma + \Delta\Sigma$ , то последний интеграл в правой части (8) может быть также записан в виде

$$\int_{S_F} X_{ni}^0 \Delta u_i dS = \int_{S+\Sigma+\Delta\Sigma} (X_{ni}^0 + \Delta X_{ni}) \Delta u_i dS.$$

Интеграл по всей поверхности тела  $S + \Sigma + \Delta\Sigma$  можно преобразовать с помощью уравнения виртуальной работы в интеграл по объему тела  $V - \Delta v$ ; тогда будет

$$\int_{S_F} X_{ni}^0 \Delta u_i dS = \int_{V-\Delta v} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij} dV.$$

Используя это соотношение и очевидное равенство

$$\int_V u(\epsilon_{ij}^0) dV = \int_{V-\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0) dV + \int_{\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0) dV,$$

преобразуем уравнение (8) к виду

$$-\Delta\mathcal{E} = \int_{\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0) dV + \int_{V-\Delta v} \{(\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij} - [u(\epsilon_{ij}^0 + \Delta\epsilon_{ij}) - u(\epsilon_{ij}^0)]\} dV. \quad (9)$$

Рассмотрим упругое тело, следующее закону Гука (общий случай см. в работе Райса и Друкера [1]). Нетрудно видеть, что

для линейно упругого тела выражение внутри фигурных скобок равно  $\frac{1}{2} \Delta\sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij}$ . Это же наглядно вытекает из плоского геометрического построения, символизирующего зависимость между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\epsilon_{ij}$ . По уравнению виртуальных работ имеем

$$\frac{1}{2} \int_{V-\Delta v} \Delta\sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{S+\Sigma+\Delta\Sigma} \Delta X_{ni} \Delta u_i dS = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \Delta X_{ni} \Delta u_i dS,$$

так как  $\Delta X_{ni} = 0$  на  $S_F$  и  $\Sigma$ , а  $\Delta u_i = 0$  на  $S_u$ . Что же касается новой поверхности  $\Delta\Sigma$ , то здесь  $\Delta X_{ni} = -\sigma_{ij}^0 n_j = -X_{ni}^0$ , где  $n_j$  — нормаль к  $\Delta\Sigma$ . Следовательно,

$$-\Delta\mathcal{E} = \int_{\Delta v} u(\epsilon_{ij}^0) dV - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} X_{ni}^0 \Delta u_i dS. \quad (10)$$

В случае трещины (идеальной щели)  $\Delta v = 0$  и тогда

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} X_{ni}^0 \Delta u_i dS.$$

Поверхность трещины состоит из двух ее берегов ( $\Delta\Sigma_+$  и  $\Delta\Sigma_-$ ), поэтому

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_+} X_{ni}^{0+} \Delta u_i^+ dS + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_-} X_{ni}^{0-} \Delta u_i^- dS. \quad (11)$$

Заметим, что  $X_{ni}^{0+} = -X_{ni}^{0-}$ ; введем, далее, обозначение для скачка перемещений

$$\Delta u_i^+ - \Delta u_i^- = [\Delta u_i].$$

Тогда

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_+} X_{ni}^{0+} [\Delta u_i] dS, \quad (12)$$

где интегрирование распространяется на один из берегов трещины.

При расширении трещины необходимо преодолеть силы сцепления между частицами материала. Согласно Гриффитсу энергия разрушения равна

$$*\Delta\Pi = \gamma \Delta\Sigma, \quad (13)$$

где  $\gamma > 0$  — энергия, требующаяся для образования единицы поверхности. Используя приближение Ирвина — Орована, можно отнести к  $\gamma$  работу пластической деформации (см. § 8.1) в тонком слое, примыкающем к  $\Delta\Sigma$ .

3. **Плоская задача.** Рассмотрим двумерный случай — плоскую деформацию или плоское напряженное состояние. От обозначений  $x_1, x_2$  перейдем к обозначениям  $x, y$ . Напряжения зависят лишь от  $x, y$ . Пусть трещина направлена по оси  $x$  (рис. 8.3.2) и имеет длину  $l$ ; обозначим через  $\mathcal{E}$  потенциальную энергию тела на единицу его толщины в направлении оси  $z$ . Знак «+» относится к верхнему берегу трещины, знак «-» к нижнему;  $dS = dx$ . Теперь

$$X_{n1}^{0+} = -X_{n1}^{0-} = -\tau_{xy}, \quad X_{n2}^{0+} = -X_{n2}^{0-} = -\sigma_y,$$

$$\Delta u_1^+ = u_x^+, \quad \Delta u_2^+ = u_y^+,$$

$$\Delta u_1^- = u_x^-, \quad \Delta u_2^- = u_y^-$$

и уравнение (12) принимает вид

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta l} [\tau_{xy}(u_x^+ - u_x^-) + \sigma_y(u_y^+ - u_y^-)] dx. \quad (14)$$

При условии симметрии задачи относительно оси  $x$  имеем

$$u_x^- = -u_x^+, \quad u_y^- = -u_y^+$$

и тогда

$$\Delta \mathcal{E} = -\int_0^{\Delta l} (\tau_{xy}u_x^+ + \sigma_y u_y^+) dx. \quad (15)$$

Считая  $\Delta l$  малым (в пределе — бесконечно малым), видим, что для вычисления приращения полной энергии тела достаточно воспользоваться асимптотическими представлениями напряжений и перемещений вблизи вершины трещины. При этом компоненты  $\tau_{xy}, \sigma_y$  следует прямо брать по полю напряжений на продолжении трещины. Несколько иначе обстоит дело с вычислением  $u_x^+, u_y^+$ , которые характеризуют

смещения краев трещины после ее малого продвижения. Можно исходить из прежних асимптотических формул, но нужно рассматривать перемещения берегов продвинувшейся трещины. Для этого в формулах (25), (30) § 8.2 нужно положить  $\theta = \pi$  и  $r = \Delta l - x = \Delta l(1 - \xi)$ . Так, в случае растяжения плоскости с щелью с помощью формул (24), (25) § 8.2 находим

$$\Delta \mathcal{E}_1 = -\frac{k_1^2}{4\pi G} (\kappa + 1) \Delta l \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi = -\frac{k_1^2}{8G} (\kappa + 1) \Delta l. \quad (16)$$

В случае трещины в поле сдвига

$$\Delta \mathcal{E}_2 = -\frac{k_2^2}{8G} (\kappa + 1) \Delta l. \quad (17)$$

Заметим в дополнение, что в случае продольного сдвига нетрудно получить формулу

$$\Delta \mathcal{E} = -\int_0^{\Delta l} \tau_{yz} u_z^+ dx.$$

Используя асимптотические представления (10), (11) § 8.2, находим, что в этой задаче

$$\Delta \mathcal{E}_3 = -\frac{k_3^2}{2G} \Delta l. \quad (18)$$

Таким образом, производная  $\frac{d\mathcal{E}}{dl}$  имеет конечное значение, определяемое коэффициентом интенсивности напряжений.

Соотношение (13) для трещины принимает вид

$$d\Pi = 2\gamma dl. \quad (19)$$

Внося теперь  $d\mathcal{E}$  и  $d\Pi$  в уравнение энергетического баланса (4), получаем:

в случае растяжения

$$\frac{k_1^2}{8G} (\kappa + 1) = 2\gamma, \quad (20)$$

в случае трещины в поле сдвига

$$\frac{k_2^2}{8G} (\kappa + 1) = 2\gamma, \quad (21)$$

в случае продольного сдвига

$$\frac{k_3^2}{2G} = 2\gamma. \quad (22)$$

Пусть  $p(\xi) = \text{const} = p$ , тогда  $k_1 = p\sqrt{\pi l}$  и из (20) вытекает формула Гриффитса

$$p^2 = \frac{2E\gamma}{\pi l(1-\nu^2)}.$$

Существенно подчеркнуть, что изменение потенциальной энергии *всего тела*  $d\mathcal{E}$ , которое входит в уравнение энергетического баланса, подсчитывается по напряженно-деформированному состоянию в вершине трещины, имеющему там особенность. Таким образом, вершина трещины играет роль стока освобождающейся энергии, которая и расходуется там же на

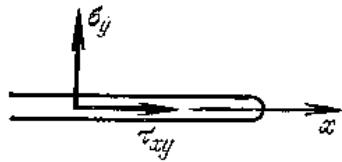


Рис. 8.3.2.

разрушение материала. В то же время этот сток, как показывает вывод, определяется состоянием *всего тела*.

Если при расширении трещины поверхность  $S_F$  свободна (т. е.  $X_{ni}^0 = 0$ ), то согласно (8) *упругая энергия тела уменьшается*. В общем же случае это не так, поскольку внешние силы  $X_{ni}^0$  производят работу; величина  $d\mathcal{E}$  характеризует освобождающуюся потенциальную энергию системы.

Как уже отмечалось ранее, в вершине трещины условия малости деформации и закон Гука не выполняются. Можно, однако, считать, в силу подчеркнутой глобальности энергетического уравнения, что упомянутые «некорректности» не сказываются сколько-нибудь значительно на окончательных выводах. Естественно при этом принимать, что освобождающаяся энергия поглощается в малой, но конечной области, охватывающей вершину трещины.

Остановимся, наконец, еще на одном замечании. В предыдущем параграфе вычислялась работа раскрытия  $W$  (именно  $W_1, W_2, W_3$ ). Легко видеть, что в рассмотренных случаях

$$\bullet \frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{dW}{dl}. \quad (23)$$

Значения  $\Delta\mathcal{E}$  в формулах (15)–(18) здесь удвоены, так как в § 8.2 работа раскрытия определялась для трещины, симметрично продвигающейся в обе стороны.

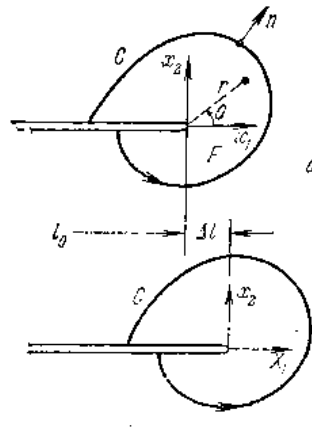


Рис. 8.3.3.

**4. Не зависящий от пути интеграл  $J$ .** Рассмотрим трещину в *нелинейно-упругом материале* в условиях плоской задачи. Покажем, что интеграл

$$J = \int_C \left[ u(\epsilon_{ij}) dx_2 - X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (i, j = 1, 2) \quad (24)$$

имеет одно и то же значение для всех путей, окружающих вершину трещины (рис. 8.3.3, а). Рассмотрим два пути  $C_1, C_2$ , причем  $C_2$  охватывает  $C_1$ ; соответствующие значения интегралов обозначим через  $J_1, J_2$ . Так как подын-

тегральное выражение исчезает на краях трещины, то  $J_2 - J_1$  представляет собой интеграл по контуру площади, заключенной между кривыми  $C_1, C_2$  и отрезками краев трещины.

Преобразовывая этот интеграл по формуле Грина в интеграл по площади и учитывая дифференциальные уравнения

равновесия, получаем

$$J_2 - J_1 = \iint \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{mn} d\epsilon_{mn} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1},$$

то  $J_2 - J_1 = 0$ , т. е. интеграл  $J$  не зависит от пути.

Для кругового пути радиуса  $r$  имеем

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left( u \cos \theta - X_{r1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) d\theta. \quad (25)$$

Структура каждого слагаемого внутри круглых скобок может быть сведена к произведению напряжений на деформации. Поэтому следует ожидать, что каждое слагаемое должно иметь особенность вида  $1/r$ . Большой порядок недопустим из-за ограниченности энергии, члены с меньшим порядком особенности не влияют на значение интеграла. В пользу высказанного положения говорят решения задач для линейно упругого тела, решения задач о разрезе в идеально пластическом теле в условиях плоской деформации, решения упруго-пластических задач о трещине при продольном сдвиге. Считаем поэтому, что для материалов рассматриваемого типа в окрестности вершины трещины

$$\sigma_{ij} \epsilon_{ij} \rightarrow \frac{l(\theta)}{r} \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (26)$$

Независимость контурного интеграла от пути рассмотрена в работах Сандерса [1], Г. П. Черепанова [1] и Райса [1].

Интеграл  $J$  характеризует «скорость» уменьшения *потенциальной энергии тела*, именно

$$J = - \frac{d\mathcal{E}}{dl}. \quad (27)$$

Действительно, рассмотрим уравнение (9) в случае плоской задачи и толщину  $\Delta l$ ; тогда  $\Delta u = 0$  и

$$\begin{aligned} & - \frac{d\mathcal{E}}{dl} = \\ & = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_F \left\{ (\sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \epsilon_{ij} - [u(\epsilon_{ij}^0 + \Delta \epsilon_{ij}) - u(\epsilon_{ij}^0)] \right\} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение оценивается величиной  $\Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}$  и на расстояниях, существенно превышающих  $\Delta l$ , будет второго порядка по  $\Delta l$ . Поэтому, учитывая предельный переход  $\Delta l \rightarrow 0$ , интегрирование в (28) можно проводить по области  $F$ , ограниченной произвольным контуром  $C$ , охватывающим вершину трещины. Введем подвижную систему

координат  $X_1 = x_1 - l$ ,  $x_2$  с началом в вершине трещины и пусть контур  $C$  испытывает жесткое смещение вместе с продвигающейся вершиной (рис. 8.3.3, б). Напряжения, деформации и другие функции зависят от  $X_1$ ,  $x_2$  и  $l = l_0 + \Delta l$ , т. е.

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(X_1, x_2, l_0), \quad \sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(X_1, x_2, l), \quad \text{и т. д.}$$

Полная производная по  $l$  равна

$$\frac{d}{dl} = \frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Преобразуя первый интеграл в (28) с помощью уравнения виртуальной работы в интеграл по контуру и используя приведенную формулу дифференцирования, находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_F (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij} dx_1 dx_2 = \\ &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_C (X_{ni}^0 + \Delta X_{ni}) \Delta u_i ds = \\ &= \int_C X_{ni}(X_1, x_2, l_0) \frac{\partial u_i(X_1, x_2, l_0)}{\partial l} ds - \int_C X_{ni}(x_1, x_2, l_0) \frac{\partial u_i(x_1, x_2, l_0)}{\partial x_1} ds. \end{aligned} \quad (29)$$

По уравнению виртуальной работы первое слагаемое может быть представлено в виде

$$\int_C X_{ni}(X_1, x_2, l_0) \frac{\partial u_i(X_1, x_2, l_0)}{\partial l} ds = \int_F \frac{\partial u(X_1, x_2, l_0)}{\partial l} dX_1 dx_2. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части соотношения (28):

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_F [u(e_{ij}^0 + \Delta e_{ij}) - u(e_{ij}^0)] dx_1 dx_2 = \\ &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_{F+\Delta F} u(X_1, x_2, l_0 + \Delta l) dX_1 dx_2 - \int_F u(X_1, x_2, l_0) dX_1 dx_2 \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Delta F$  — разность между последовательными близкими положениями области интегрирования.

Здесь предел интеграла по области  $F$  равен интегралу от частной производной  $\partial u / \partial l$ . Предел интеграла по разности областей  $\Delta F$  равен контурному интегралу по  $C$  от произведения  $u$  на нормальное смещение точек контура. Следовательно,

$$I_2 = \int_F \frac{\partial u(X_1, x_2, l_0)}{\partial l} dX_1 dx_2 - \int_C u(x_1, x_2, l_0) dx_2, \quad (31)$$

так как  $ds \cos(n, x_1) = dx_2$ .

Внося величины  $I_1$ ,  $I_2$  согласно (29), (30) и (31) в соотношение (28), получаем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \int_C \left( u dx_2 - X_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds = J$$

Инвариантность интеграла  $J$  относительно любых путей, охватывающих вершину трещины (своеобразный закон сохранения) означает, что  $J$  можно рассматривать как переменное, характеризующее состояние концевой зоны трещины. Так, вместо коэффициентов интенсивности  $k$ , в плоской задаче можно исходить из соответствующих величин  $J$ .

Более общие инвариантные интегралы построены в работе Будянского и Райса [1].

## § 8.4. Теория Гриффитса и критерий Ирвина

**1. Теория Гриффитса.** Теория Гриффитса уже обсуждалась в § 8.1; рассмотрим ее теперь несколько более подробно.

В основе теории лежит представление об энергетическом барьере — поверхностной энергии  $\Pi$ , который необходимо преодолеть для продвижения трещины (следовательно, для образования новой поверхности). В то же время при расширении трещины освобождается потенциальная энергия, которая может быть израсходована на разрушение.

По уравнению энергетического баланса (§ 8.3)

$$d\mathcal{E} = -d\Pi.$$

В случае плоской задачи и симметрично нагруженной трещины, продвигающейся в обе стороны, имеем

$$d\Pi = 4\gamma dl.$$

Выше было найдено, что

$$d\mathcal{E} = dW = \frac{\partial W}{\partial l} dl.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial W}{\partial l} = -4\gamma. \quad (1)$$

Для трещины в поле равномерного растяжения (см. рис. 8.1.4) в условиях плоской деформации

$$W = -\frac{\pi(1-\nu^2)}{E} p^2 l^2.$$

Для плоского напряженного состояния множитель  $(1-\nu^2)$  следует опустить.

Тогда из (1) находим

$$p^2 = \frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l} \equiv p_c^2. \quad (2)$$

Соотношение (2) характеризует состояние предельного равновесия. Если при данной длине трещины освобождающаяся при ее продвижении на единицу длины энергия по величине

меньше  $4\gamma$  (например, при  $p < p_*$ ), то трещина не растет. Если же напряжение достигает критического значения  $p_*$ , трещина расширяется.

Таким образом, энергетический критерий Гриффитса имеет следующую формулировку: разрушение развивается, если интенсивность освобождающейся энергии достигает критического значения (например,  $4\gamma$  для рассмотренной трещины с двумя вершинами).

В рассматриваемом случае трещины в бесконечной растягиваемой плоскости критическое напряжение  $p_*$  обратно пропорционально  $\sqrt{l}$ , поэтому при достижении  $p_*$  происходит лавинное разрушение. Это объясняется большим запасом потенциальной энергии в данной задаче; интенсивность ее освобождения растет вместе с длиной трещины. Подобные трещины называются *неравновесными*.

Существуют также *равновесные трещины*, длина которых возрастает вместе с увеличением нагрузки. Примером может служить трещина, раскрываемая двумя равными противоположно направленными сосредоточенными силами  $P$  (см. рис. 8.2.6). Здесь будет

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} P^2 \ln l$$

и из (1) получаем

$$P = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1-\nu^2}} \sqrt{\pi l} = P_*$$

т. е. длина трещины может равновесно возрастать с увеличением нагрузки  $P$ . Этот результат объясняется сравнительно малым запасом потенциальной энергии.

Рассмотренные зависимости показаны на рис. 8.4.1. Если в случае неравновесной трещины длиной  $l_0$  нагрузка  $p < p_*$ , то трещина не растет; при достижении критического значения  $p_*$  происходит лавинное расширение трещины. Иная картина наблюдается для равновесных трещин: при нагрузке  $P < P_*$  трещина не растет; при достижении же значения  $P_*$  равновесная трещина удлиняется соответственно увеличению нагрузки.

Вернемся теперь к формуле (2), относящейся к достаточно большому растягиваемому телу с трещиной. Из (2) вытекает, что произведение

$$p_* \sqrt{\pi l} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1-\nu^2}} = \text{const} \quad (3)$$

является константой, характерной для материала. Этот вывод хорошо подтверждается экспериментами над хрупкими материалами (например, над стеклом).

Для металлов необходимо учитывать, как уже отмечалось в § 8.1, пластическую деформацию. Опыты показывают, что к по-

верхности трещины примыкает тонкий слой пластически деформированного металла, достигающий иногда толщины  $0,2 \sim 0,4$  мм. При этом работа, затрачиваемая на пластическое деформирование единицы поверхности этого слоя, во много раз (на два-три порядка) больше поверхностной энергии  $\gamma$  идеального хрупкого разрушения. Такая трещина окаймлена сравнительно тонким пластически деформированным слоем (см. рис. 8.1.6). Можно учесть пластическую работу, если более широко трактовать величину  $\gamma$ , а именно считать, что она состоит из поверхностной энергии хрупкого разрушения  $\gamma$  и работы пластической деформации  $\gamma_p$  (см. § 8.1).

Тогда формула Гриффитса принимает вид

$$p^2 = \frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi(1-\nu^2)l}$$

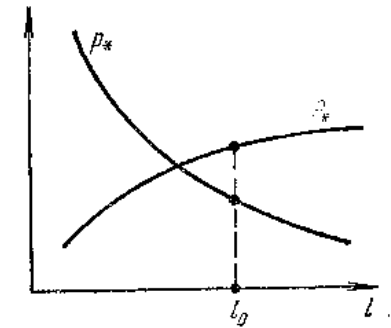


Рис. 8.4.1.

где обычно  $\gamma_p \gg \gamma$ . Таким образом, вместо поверхностной плотности

энергии хрупкого разрушения  $\gamma$  вводится поверхностная плотность эффективной энергии разрушения  $\gamma_p + \gamma$ . В дальнейшем условимся под  $\gamma$  понимать плотность эффективной работы разрушения (включая и пластическую работу).

При таком расширении теории, принадлежащем Оровану и Ирвину, схема Гриффитса охватывает также и хрупко-вязкие разрушения металлов. Параметр  $p_* \sqrt{\pi l}$  и в этих условиях может рассматриваться как характерная константа материала.

**2. Критерий Ирвина** [1, 2]. По результатам предыдущего параграфа

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{d\Sigma_+} X_{nl}^+ [\Delta u_l] dS.$$

Напряжения в окрестности вершины трещины имеют особенность вида  $1/\sqrt{r}$ , а перемещения стремятся к нулю как  $\sqrt{r}$ . Очевидно, что предыдущую формулу можно представить в виде

$$d\mathcal{E} = -Q d\Sigma_+, \quad (4)$$

где множитель  $Q$  конечен и зависит от размеров трещины, формы тела, граничных условий и упругих постоянных. Например, в случае растяжения плоскости со щелью

$$Q = \frac{k_1^2}{4G} (\kappa + 1) \quad (d\Sigma_+ = 2dl).$$

В случае трещины в поле сдвига

$$Q = \frac{k_2^2}{4G} (\kappa + 1) \quad (d\Sigma_+ = 2dl)$$

и т. д. Так как приращение поверхностной энергии равно

$$d\Pi = 2\gamma d\Sigma_+,$$

то условие Гриффитса (1) для распространения трещины может быть записано также в форме

$$Q = 2\gamma. \quad (5)$$

Приведенные в § 8.2 решения показывают, что множитель  $Q$  имеет структуру

$$Q = ck^2, \quad (6)$$

где  $k$  — коэффициент интенсивности напряжений, а  $c$  зависит лишь от упругих постоянных.

Из (5) вытекает, что условие Гриффитса может быть записано в форме

$$k = \sqrt{\frac{2\gamma}{c}} \equiv k_*. \quad (7)$$

Это известная формула Ирвина (заметим, что для  $k_*$  часто используется обозначение  $K_c$ ). Таким образом, энергетический (глобальный) критерий Гриффитса можно заменить «силовым» условием в вершине трещины.

Так как в задаче Гриффитса  $k_1 = \rho \sqrt{\pi l}$ , то в ней условие разрушения может быть также представлено в виде

$$\rho \sqrt{\pi l} = \text{const} = k_{*1}. \quad (8)$$

Возвращаясь к формуле (7), отметим, что коэффициент интенсивности напряжений  $k$  (точнее,  $k^2/G$ ) можно трактовать как силу расширения трещины. Трещина начнет распространяться, если сила  $k$  достигнет критического значения  $k_*$ , характерного для данного материала. Условие разрушения при этом имеет локальный характер, поскольку оно исходит из полей напряжений и смещений вблизи вершины трещины; необходимость в определении изменений энергии всего тела как бы отпадает.

По существу, условие Гриффитса и критерий Ирвина эквивалентны. Однако критерий Ирвина более удобен для применения, так как здесь внимание сосредоточено на окрестности вершины трещины и можно оценивать опасность разрушения по интенсивности соответствующего напряженного состояния.

Критическое значение  $k_*$  характеризует опасное физическое состояние в вершине трещины. Можно, в принципе, определить  $k_*$  на специальных образцах с надрезами в зависимости от раз-

личных факторов (температуры, скорости нагружения, внешней среды и т. д.).

Обычно испытываются плоские образцы, имеющие центральную трещину. Различными методами можно измерять увеличение длины трещины (в докритическом режиме) с ростом нагрузки. Эти данные позволяют, опираясь на решение соответствующей задачи, вычислять величину  $k_*$ . Необходимо отметить, что при чрезмерных пластических деформациях в вершине трещины получение правильных значений  $k_*$  затруднено.

Хотя опытные данные не подтверждают того, что  $k_*$  — строгая константа материала, все же критерий Ирвина существенно лучше других параметров, характеризующих чувствительность материала к концентрации напряжений, трещиностойкость (вязкость разрушения). Этим определяется практическое значение критерия Ирвина, все шире используемого в оценке прочности машин и сооружений.

В заключение заметим, что хотя критерий Ирвина внешне носит локальный характер, не следует забывать того, что коэффициент интенсивности отражает влияние упругого поля всего тела (см. § 8.3) и пропорционален квадратному корню из интеграла  $J$ . Последний же инвариантен относительно любых путей, охватывающих вершину трещины, и может рассматриваться как величина, характеризующая состояние концевой зоны трещины.

**3. Модель Г. И. Баренблатта.** В теории Гриффитса принимается, что берега трещины свободны от напряжений вплоть до самой вершины.

Обратимся, например, к задаче о растяжении плоскости с целью, изученной в § 8.2. Поля напряжений и перемещений вблизи вершины трещины описываются формулами (24) и (25)

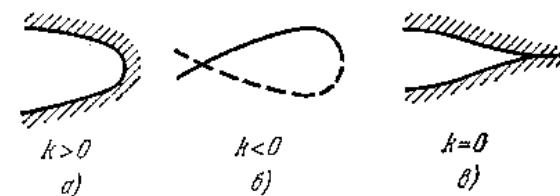


Рис. 8.4.2.

§ 8.2, где  $k_1$  — коэффициент интенсивности напряжений. Раскрытие трещины определяется вертикальным смещением  $u_y$  при  $\theta = \pm\pi$ . Картина смещений существенно зависит от знака  $k_1$ . На рис. 8.4.2 показаны очертания берегов трещины после деформации. При  $k_1 = 0$  (рис. 8.4.2, в) напряжения конечны, берега трещины образуют острие (клюв). При  $k_1 > 0$  напряжения



бесконечны, вследствие чего после нагружения окончание трещины имеет гладкое очертание (рис. 8.4.2, а). Случай  $k_1 < 0$  (рис. 8.4.2, б) лишен механического смысла.

Нужно не забывать, что эти результаты являются следствием использования линейной теории упругости в очаге больших деформаций. В § 8.1 обсуждались границы применимости схемы сплошной среды в задачах о трещинах и характер изменения сил сцепления между атомами при раскрытии трещин в совершенной решетке. Еще Гриффитс в работе 1920 г. отметил несоответствие упругой модели и реальной физической картины в вершине трещины. Он полагал, что берега трещины под влиянием больших сил сцепления (порядка теоретической прочности) должны смыкаться плавно, образуя остриё (рис. 8.4.2, в). В реальных материалах картина в вершине трещины значительно сложнее из-за наличия огромного числа разнообразных дефектов (в частности, пор различных очертаний). Расширение

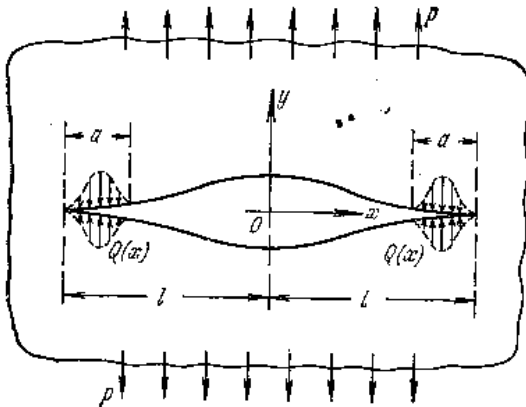


Рис. 8.4.3.

трещины происходит по слабым местам и в вершине ее обычно оказывается тот или иной дефект.

В модели Г. И. Баренблатта [1, 2] предпринята попытка учесть названные силы сцепления, оставаясь в рамках линейной теории упругости. Предполагается, что в малой зоне длиной  $a$  (рис. 8.4.3,  $a \ll l$ ) у вершины трещины действуют интенсивные силы сцепления  $Q(x)$ , распределение которых,

вообще говоря, неизвестно. Постулируется, что в предельном состоянии конфигурация трещины в концевой области не зависит от заданных нагрузок и для данного материала в данных условиях опыта (температура, скорость испытания, среда и т. п.) всегда одна и та же. Берега трещины смыкаются плавно (см. рис. 8.4.2, в), т. е. напряжения в вершине трещины конечны.

Ограничимся обсуждением плоской задачи о растяжении тела с трещиной; соответствующее решение приведено в § 8.2. Так как используются уравнения линейной теории упругости, то упомянутое решение — формулы (21) — (25) § 8.2 — можно применить к рассматриваемой схеме.

Для плавного смыкания берегов трещины необходимо потребовать, чтобы в новых условиях нагружения коэффициент

интенсивности напряжений (обозначим его через  $k_1'$ ) был бы равен нулю:

$$k_1' = 0. \quad (9)$$

При этом нагрузка  $p(\xi)$ , входящая в формулу (22) § 8.2 для коэффициента интенсивности напряжений, определяется не только действием внешних нагрузок, но и силами сцепления  $Q(\xi)$ , развивающимися на малых участках вблизи вершины. Поэтому в формуле (22)  $p(\xi)$  следует заменить на

$$\begin{aligned} p(\xi) & \quad \text{при} \quad 0 \leq |\xi| < l - a, \\ p(\xi) - Q(\xi) & \quad \text{при} \quad l - a \leq |\xi| \leq l. \end{aligned}$$

Тогда условие  $k_1' = 0$  в развернутом виде таково:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l p(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi - \int_{l-a}^l Q(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi - \\ - \int_{-l}^{-l+a} Q(\xi) \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь первый интеграл равен  $\sqrt{\pi l} k_1$ , где  $k_1$  — коэффициент интенсивности напряжений Ирвина. Второй интеграл после подстановки  $l - \xi = \zeta$  и упрощения  $l + \xi \approx 2l$  принимает вид

$$\sqrt{2l} \int_0^a \frac{Q(l-\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = \sqrt{2l} K. \quad (11)$$

Поскольку силы сцепления зависят от расстояния между берегами трещины, а конфигурация концевой области в предельном состоянии предполагается неизменной, этот интеграл можно считать константой материала. Величина  $K$  называется коэффициентом сцепления.

Третий интеграл не имеет особенностей, мал по сравнению с предыдущим и может быть отброшен. Тогда из (10) вытекает, что

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{2}} k_1, \quad (12)$$

т. е. коэффициент сцепления пропорционален коэффициенту интенсивности напряжений Ирвина. В рамках линейной теории упругости и при условии малости участка  $a$  модель Г. И. Баренблатта формально эквивалентна силовой схеме Ирвина. Параметр  $a$  выпадает из анализа, поэтому задача сводится к тем же построениям решений теории упругости с определенными интенсивностями в вершинах разрезом, что и по схеме Ирвина.

Для упругих тел схема Ирвина кажется предпочтительней, поскольку при этом используется стабильная характеристика и не вводятся гипотезы о локальных условиях в концевой области. Характер окончания расширяющейся трещины меняется и в значительной мере определяется статистическими аспектами. Поэтому для описания состояния в вершине трещины методами механики сплошной среды целесообразно опираться на интегральные характеристики, связанные с инвариантной величиной  $J$ , которая имеет простой энергетический смысл и может вычисляться по контуру вне очага разрушения.

Вместе с тем модель Г. И. Баренблатта может оказаться полезной (в частности при рассмотрении временных процессов), так как она содержит некоторые возможности более детального анализа состояния у вершины трещины. Необходимо, однако, помнить о существенном значении геометрической и физической нелинейностей для рассмотрения состояния в вершине, являющейся очагом разрушения. Поэтому результаты анализа тонких деталей картины вблизи вершины на основе линейных уравнений требуют осторожной оценки.

### § 8.5. Задачи о трещинах в упругом теле

**1. Предварительные замечания.** По уравнениям линейной теории упругости вблизи вершины трещины компоненты напряжения имеют, как уже отмечалось, структуру

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{конечные члены},$$

где  $r, \theta$  — локальная система полярных координат с началом в вершине трещины в нормальном сечении последней, а  $k$  — коэффициент интенсивности напряжений. По схеме Ирвина для каждого материала имеется критическое значение коэффициента интенсивности  $k_*$ , по достижении которого трещина начнет распространяться, т. е. для прочности тела необходимо, чтобы

$$k < k_*.$$

Коэффициент интенсивности  $k$  зависит от формы тела, системы нагрузок и геометрии трещины. Таким образом, для оценки опасности данной трещины необходимо иметь решение соответствующей задачи теории упругости. В связи с этим в последние годы усиленно изучаются разнообразные задачи об упругих телах с трещинами.

Ниже приводится краткий обзор основных направлений этих исследований. Мы отсылаем читателя к книгам Снеддона [1], Снеддона и Лавенграба [1], В. В. Панасюка [1], к обзорам Си и Либовица [1], Снеддона [2], Париса и Си [1], В. З. Партон

и Г. П. Черепанова [1], Д. Д. Ивлева [1], а также к книгам по теории упругости А. И. Лурье [1, 2], Н. И. Мусхелишвили [1], Я. С. Уфлянда [1], Снеддона и Берри [1] и многочисленным публикациям в различных механических журналах (Int. J. Fracture Mech., Int. J. Eng. Sci., J. Appl. Mech., Механика тверд. тела, Прикл. матем. и мех. и т. д.). Для инженерных приложений публикуются также справочные данные о коэффициентах интенсивности напряжений (см. Парис и Си [1], Исидо [1]).

**2. Плоские задачи.** Наиболее простой случай плоской задачи относится к так называемой антиплоской деформации (состоянию продольного сдвига), когда

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y).$$

Продольное смещение  $u_z$  удовлетворяет уравнению Лапласа (см. § 8.2). Практическое значение этого случая сравнительно невелико.

Значительный интерес представляют задачи о плоской деформации и плоском напряженном состоянии. Обе эти задачи приводятся к решению бигармонической проблемы. Здесь весьма эффективен метод комплексных потенциалов, развитый в известных работах Н. И. Мусхелишвили. Напряжения и смещения определяются через два комплексных потенциала  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$  (см. § 8.2), подлежащих разысканию согласно граничным условиям. В подавляющем большинстве имеющихся решений рассмотрены прямолинейные трещины и лишь изредка — трещины, имеющие форму круговой дуги. Часто результаты можно получить в замкнутой форме, используя весьма эффективные методы решения краевой задачи Римана — Гильберта (см. Н. И. Мусхелишвили [1, 2]).

Следует иметь в виду, что вблизи острия модель обобщенного плоского напряженного состояния может нарушиться и напряженное состояние может приобрести заметный пространственный характер, поскольку толщина пластинки не является малой по сравнению с размерами концевой зоны трещины.

Рассмотрим теперь кратко (подробно см. Н. И. Мусхелишвили [1] и В. В. Панасюк [1]) задачу о растяжении плоскости с двумя симметрично расположенными трещинами (рис. 8.5.1). Приведем окончательную формулу для напряжения  $\sigma_y$  на оси  $x$  вне щелей:

$$\sigma_y(x, 0) = p \frac{x^2 - d}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}},$$

где  $d$  — некоторая величина, зависящая от длин  $a, b$ . Коэффициент интенсивности в вершине  $A$  больше коэффициента интенсивности в вершине  $B$ . Поэтому сначала разрушится перемычка

( $-a, a$ ) и образуется одна трещина длиной  $2b$ . Картина последующего разрушения уже определяется этой одной трещиной.

Для трещины, выходящей на грань растягиваемой полуплоскости (рис. 8.5.2), коэффициент интенсивности напряжений равен

$$k = 1,12p \sqrt{\pi l}.$$

Сопоставление с коэффициентом интенсивности  $k_1 = p \sqrt{\pi l}$  для трещины длиной  $2l$  в растягиваемой плоскости (§ 8.2, см.

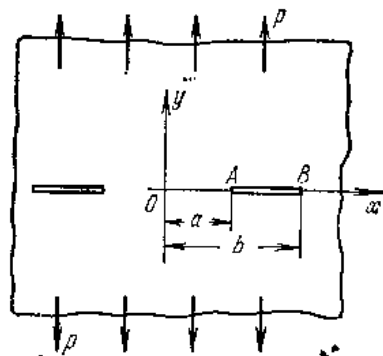


Рис. 8.5.1.

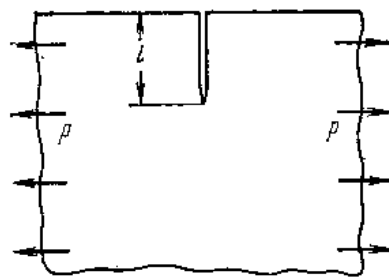


Рис. 8.5.2.

рис. 8.2.2) показывает, что трещина, выходящая на свободную грань, опаснее.

Располагая решениями различных задач, можно, таким образом, получать количественные оценки опасности тех или иных трещин.

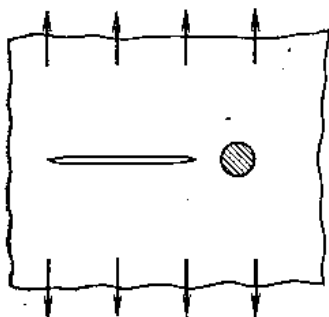


Рис. 8.5.3.

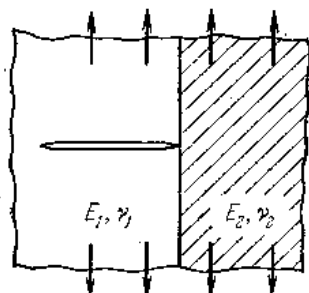


Рис. 8.5.4.

Распространение трещин во многом зависит от дефектов на пути трещин (пор или жестких включений, см. пример на рис. 8.5.3) и от неоднородности материала (см., например, случай растяжения плоскости с разрезом, составленной из двух

материалов, рис. 8.5.4). Изучены разнообразные задачи этого рода.

**3. Пластинки и оболочки.** К рассмотренной выше плоской задаче по методу решения (бигармоническая проблема при несколько более сложных граничных условиях) примыкают задачи по изгибу пластинок с трещинами (см. Парис и Си [1]).

Значительно более трудны задачи о трещинах в оболочках; здесь некоторые решения удалось получить лишь в самые последние годы.

**4. Пространственные задачи.** Большой интерес представляют пространственные задачи для упругих тел с трещинами. Из-за математических трудностей получены лишь немногие решения в этой области.

Решение задачи о растягиваемом пространстве с эллиптической в плане трещиной вытекает из решения внешней задачи для эллипсоидальной полости, полученного Садовским и Стернбергом. Проще, однако, этот результат получить непосредственно. На основе решения смешанной задачи для полупространства можно, в принципе, рассмотреть симметричное относительно плоскости  $z=0$  растяжение пространства с плоской трещиной не только эллиптического, но и произвольного очертания (Кассир и Си, 1967).

Рассмотрим здесь кратко задачу о равномерном одноосном растяжении пространства с круговой в плане трещиной (рис. 8.5.5), лежащей в плоскости  $z=0$ . При осевой симметрии дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а условия совместности таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_\varphi + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{3}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

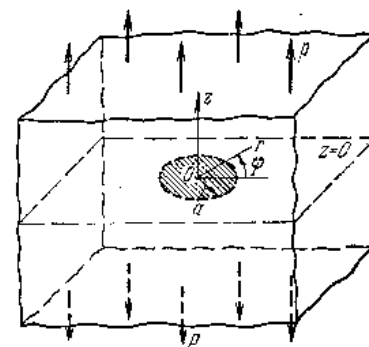


Рис. 8.5.5.

Здесь через  $\sigma$  обозначено среднее давление,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа. Кручение отсутствует, поэтому окружное смещение  $u_\varphi = 0$ . Компоненты деформации связаны с компонентами смещения  $u_r, u_z$  известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_\varphi &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= 0, & \gamma_{\varphi z} &= 0, & \gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Компоненты напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — относительное изменение объема, а  $\lambda, \mu = G$  — упругие постоянные Ламе. Ищем решение задачи в форме

$$u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \frac{1}{2G} \left[ 2(1-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (5)$$

где  $\Phi = \Phi(r, z)$  — произвольная функция. Вычисляя теперь компоненты деформации согласно (3) и внося их в закон Гука (4), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что дифференциальные уравнения равновесия (1) при этом тождественно удовлетворяются. Из условий же совместности (2) вытекает, что функция напряжений  $\Phi$  должна быть бигармонической:

$$\Delta \Delta \Phi = 0. \quad (7)$$

Умножая это уравнение на  $rJ_0(\xi r)$ , где  $\xi \geq 0$  — некоторый параметр,  $J_0$  — бесселева функция нулевого порядка, интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 H(\xi, z) = 0, \quad (8)$$

где  $H(\xi, z)$  — преобразование Ханкеля порядка 0 функции  $\Phi$ :

$$H(\xi, z) = \int_0^\infty \Phi(r, z) J_0(\xi r) r dr. \quad (9)$$

При выводе уравнения (8) использованы формулы преобразований Ханкеля производных функции  $\Phi$ . Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$H(\xi, z) = (C_1 + C_2 z) e^{-\xi z} + (C_3 + C_4 z) e^{\xi z},$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные.

По найденной функции  $H(\xi, z)$  функция напряжений  $\Phi(r, z)$  восстанавливается согласно теореме обращения Ханкеля

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty H(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi.$$

Обратимся к граничным условиям. Удобно искать решение в форме

$$\sigma_z = \sigma'_z + p, \quad \sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{rz}.$$

Поскольку на сторонах трещины  $r < a, z = \pm 0$

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0,$$

то для компонент  $\sigma'_z, \sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{rz}$  вспомогательной задачи имеем граничные условия

$$\sigma'_z = -p, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (10)$$

На остальной части плоскости  $z = 0$  по симметрии должно быть

$$\tau_{rz} = 0, \quad u_z = 0 \quad (r > a). \quad (11)$$

На бесконечности смещения и напряжения вспомогательной задачи стремятся к нулю. По симметрии достаточно рассмотреть полупространство  $z \geq 0$ ; при этом следует положить (в соответствии с упомянутыми условиями при  $z \rightarrow \infty$ ), что  $C_3 = 0, C_4 = 0$ .

Умножая обе части формул (5) для  $u_z$  и (6) для  $\sigma_z$  на  $rJ_0(\xi r)$ , интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$  и применяя теорему обращения Ханкеля, находим

$$u_z(r, z) = \frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \left[ (1-2\nu) \frac{d^2 H}{dz^2} - 2(1-\nu) H \xi^2 \right] J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad (12)$$

$$\sigma'_z(r, z) = \int_0^\infty \left[ (1-\nu) \frac{d^3 H}{dz^3} - (2-\nu) \frac{dH}{dz} \xi^2 \right] J_0(\xi r) \xi d\xi. \quad (13)$$

Умножая, далее, обе части формулы (6) для  $\tau_{rz}$  на  $rJ_1(\xi r)$  и интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$  и применяя теорему обращения Хан-келя, получаем

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^{\infty} \left[ \nu \frac{d^2 H}{dz^2} + (1 - \nu) H \xi^2 \right] J_1(\xi r) \xi^2 d\xi. \quad (14)$$

Подобным же путем можно найти формулы для смещения  $u_r(r, z)$  и других компонент напряжения.

На всей плоскости  $z = 0$  касательное напряжение  $\tau_{rz} = 0$ , при этом из формулы (14) вытекает, что  $C_1 \xi - 2\nu C_2 = 0$ . Следовательно,

$$H = \frac{C_2}{\xi} (2\nu - \xi z) e^{-\xi z}. \quad (15)$$

Внося это значение в формулы (13), (12) для  $\sigma'_z$  и  $u_z$ , полагая  $z = 0$ , находим из граничных условий (10), (11) парные интегральные уравнения для функции  $f(x)$ :

$$\int_0^{\infty} x f(x) J_0(\rho x) dx = -a^4 p \quad \text{при } 0 < \rho < 1, \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) J_0(\rho x) dx = 0 \quad \text{при } \rho > 1, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\rho = r/a, \quad x = a\xi, \quad f(x) = x^2 C_2.$$

Парные интегральные уравнения (16), (17) решаются, например, с помощью преобразования Меллина (см. Снеддон [1]). В рассматриваемом случае постоянного  $p$  решение имеет простой вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} p a^4 \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right). \quad (18)$$

Таким образом,  $C_2$  найдено. Полагая теперь в формуле (12)  $z = 0$ ,  $\rho < 1$ , находим вертикальное перемещение стороны  $z = +0$  трещины

$$u_z(\rho, 0) = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E} p a \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (19)$$

Легко видеть, что при раскрытии трещины принимает эллипсоидальную форму (рис. 8.5.6). Аналогичным образом вычисляем по формуле (13) нормальное напряжение при  $z = 0$ :

$$\sigma'_z = \frac{2p}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} - \arcsin \frac{1}{\rho} \right) \quad (\rho > 1). \quad (20)$$

Напряжение  $\sigma_z$  имеет особенность такого же типа, что и в плоской задаче. Коэффициент интенсивности напряжений равен

$$k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p \sqrt{a}. \quad (21)$$

Зная перемещение сторон трещины, нетрудно найти работу раскрытия

$$W = -2\pi p a^2 \int_0^1 u_z(\rho, 0) \rho d\rho.$$

Внося сюда  $u_z(\rho, 0)$  и выполнив несложные вычисления, получим

$$W = -\frac{8(1 - \nu^2)}{3E} a^3 p^2. \quad (22)$$

Во вспомогательной задаче давление на сторонах трещины было постоянным. Нетрудно получить решение и для переменного давления  $p = p(\rho)$ , что позволяет, например, рассматривать осесимметричные трещины с немалыми концевыми зонами (см. В. В. Панасюк [1] и др.).

Укажем также и на некоторые другие осесимметричные решения. Я. С. Уфлянд [1] рассмотрел задачу о двух параллельных круглых щелях в пространстве, равноотстоящих от плоскости  $z = 0$ , и задачу о круглой щели в слое. Изучены задачи о круглой щели в полупространстве (см. Я. С. Уфлянд [1]), об одной и серии параллельных круглых щелей в растягиваемом цилиндре (см. Ватанаби и Ацуми [1]).

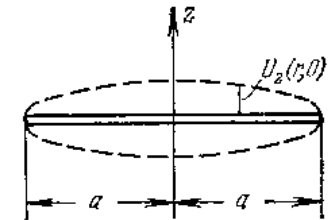


Рис. 8.5.6.

**5. Трещины в неравномерно нагретых телах.** При неравномерном нагреве могут возникнуть значительные температурные напряжения, что нередко является причиной хрупких разрушений. Последние начинаются в местах концентрации напряжений, в особенности у трещин или надрезов. В связи с этим изучено довольно большое число задач о трещинах в неравномерно нагретых телах с целью найти значения коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от характеристик теплового поля. В задачах этого типа возникает дополнительный вопрос об условии теплоотдачи на берегах трещины (влияющем на тепловое поле и, следовательно, на температурные напряжения).

**6. Трещины в анизотропных телах.** Анализ напряженного состояния в окрестности трещин в однородных анизотропных

телах сравнительно просто проводится в плоской задаче (см., например, Парис и Си [1], Си и Либовиц [1]). При этом оказывается, что напряжения имеют в вершине трещины особенность вида  $1/\sqrt{r}$ , как и для изотропного тела. В то же время следует подчеркнуть, что поле напряжений в окрестности вершины трещины зависит также и от упругих коэффициентов анизотропии.

### § 8.6. Трещины с немалой концевой зоной — пластической и на пределе прочности

**1. Упруго-пластическая модель Дагдейла.** Выше неоднократно подчеркивалось, что в развитии трещин в металлах огромную роль играет предшествующая разрушению пластическая деформация. В вершине трещины образуется некоторая область пластической деформации. Вообще говоря, задача об упруго-пластическом состоянии тела с трещиной очень сложна. Немногие имеющиеся решения, а также экспериментальные данные свидетельствуют о том, что пластические зоны нередко имеют сложные очертания. Тем не менее, целесообразно рассмотреть схематизированные упруго-пластические решения с вырожденными пластическими зонами. Эти решения отличаются простотой и в отдельных случаях имеют определенное значение.

Рассмотрим решение, предложенное Дагдейлом [1] и относящееся к случаю плоского напряженного состояния.

Как известно, (см., например, Л. М. Качанов [1]), в условиях плоского напряженного состояния возможен разрыв в нормальной составляющей перемещения, приводящий к «шейке» (рис. 8.6.1, а). Так, в растягиваемой пластине толщиной  $h$  с острым надрезом образуется шейка (рис. 8.6.1, б), напряженное состояние в которой (при условии пластичности Мизеса) будет

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T, \quad \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести. Если исходить из условия пластичности Треска, то можно принять, что в шейке  $\sigma_y = \sigma_T$ .

Возможность подобного состояния позволяет предложить простую модель упруго-пластической трещины. В концевой области последней можно рассмотреть узкую пластическую зону (шейку) длиной  $a$  (рис. 8.6.2); напряжение  $\sigma_y$  в этой зоне постоянно и равно  $\sigma_T$ . В такой постановке задача сводится к по-

строению решения для упругой плоскости с щелью с заданными на берегах концевых зон постоянными напряжениями  $\sigma_y = \sigma_T$ . Решение более общей задачи было приведено выше (§ 8.2). На концах трещины  $|x| = l$  напряжения ограничены (так,  $\sigma_y = \sigma_T$ ). Это условие определяет длину пластических участков  $l - a \leq \leq |x| \leq l$ .

Для ограниченности напряжений необходимо потребовать, чтобы коэффициент интенсивности напряжений был бы равен нулю (т. е.  $k_I = 0$ ), так же как и в модели Г. И. Баренблатта (§ 8.4). В формуле (22) § 8.2 функцию  $p(\xi)$  следует заменить на

$$p(\xi) \quad \text{при} \quad 0 \leq |\xi| < l - a, \\ p(\xi) - \sigma_T \quad \text{при} \quad l - a \leq |\xi| \leq l,$$

т. е. в формуле (10) § 8.4 положить  $Q(\xi) = \sigma_T$ . Тогда упомянутая формула примет вид

$$\sqrt{\pi l} k_1 - \sigma_T \int_{l-a}^l \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi - \sigma_T \int_{-l}^{-l+a} \sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} d\xi = 0. \quad (1)$$

Вычислив интегралы, приходим к соотношению

$$\sqrt{\pi l} k_1 - 2\sigma_T l \arccos \left(1 - \frac{a}{l}\right) = 0, \quad (2)$$

определяющему длину  $a$  пластической зоны. Пусть, например, пластина равномерно растягивается на бесконечности, тогда  $p(\xi) = \text{const} = p$ ,  $k_1 = p\sqrt{\pi l}$  и из (2) вытекает зависимость

$$\frac{a}{l} = 1 - \cos \frac{\pi p}{2\sigma_T}. \quad (3)$$

показанная на рис. 8.6.3.

Эксперименты подтверждают образование узкой пластической зоны для металлов с выраженным пределом текучести. Измерения длин наблюдаемых пластических зон, проведенные Дагдейлом и другими авторами, согласуются с вычислениями.

В недавно опубликованной работе Хальберга, Хана, Розенфельда и Каннинена [1] дано решение аналогичной задачи для растягиваемой полосы конечной ширины с центральной трещиной и приведены данные испытаний тонких пластин из мягкой

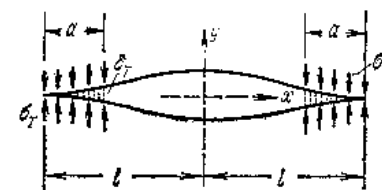


Рис. 8.6.2.

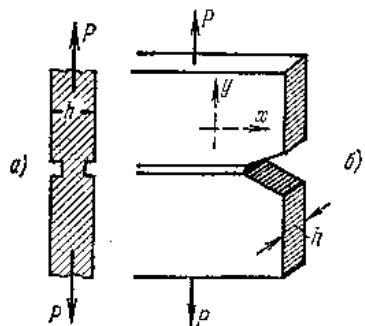


Рис. 8.6.1.

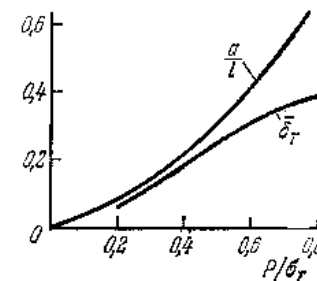


Рис. 8.6.3.

стали с соответствующими разрезами. Отмечено хорошее согласие теоретических результатов с экспериментальными. На рис. 8.6.4 приведена одна из полученных авторами фотографий (для нагрузки  $p = 0,82 \sigma_T$ ) образовавшихся пластических зон (светлые линии).

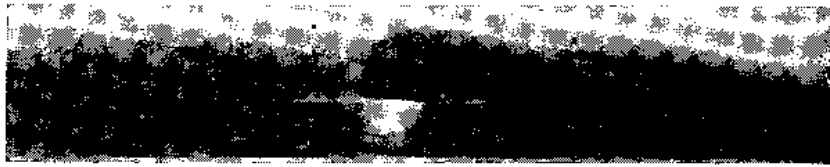


Рис. 8.6.4.

Согласно формуле (19) § 8.2 удвоенное вертикальное смещение при  $y = 0, x = l - a$  равно

$$2u_y = \frac{\kappa + 1}{2G} (\operatorname{Im} \tilde{Z}_1)_{y=0, x=l-a}. \quad (4)$$

Эта величина определяет расстояние между берегами трещины («раскрытие»  $\delta_T$ , см. рис. 8.6.2) в начале пластической зоны. Проведя вычисления, найдем

$$\delta_T = \frac{(\kappa + 1) l \sigma_T}{\pi G} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \ln \left(1 - \frac{a}{l}\right)^{-1}. \quad (5)$$

Заметим, что для плоского напряженного состояния  $(\kappa + 1)/G = 8/E$ . На рис. 8.6.3 показан график зависимости безразмерного раскрытия  $\bar{\delta}_T = \delta_T / [(\kappa + 1) l \sigma_T / \pi G]$  от  $p/\sigma_T$ .

Раскрытие  $\delta_T$  принимается в качестве критерия наступления разрушения, именно: разрушение происходит (т. е. трещина растет), когда раскрытие  $\delta_T$  достигает критического значения  $\delta_*$  (критическое раскрытие трещины; иногда для этой величины используется обозначение  $\delta_c$ ). Следует заметить, что прямые измерения величины  $\delta_*$  связаны с рядом трудностей.

Таким образом, если приписывать  $\sigma_T$  смысл предела текучести, то имеется одна прочностная характеристика материала — критическое раскрытие  $\delta_*$ .

При большой длине трещины и сравнительно невысоких напряжениях имеем  $\bar{\delta}_T \ll 1, \frac{p}{\sigma_T} \ll 1, \frac{a}{l} \ll 1$ . Тогда, удерживая в разложениях лишь первые слагаемые и полагая  $\delta_T = \delta_*$ , приходим к соотношению

$$p \sqrt{\pi l} = \sqrt{E \sigma_T \delta_*}, \quad (6)$$

вполне аналогичному критерию Ирвина (8) § 8.4. Таким обра-

зом, новая характеристика материала  $\delta_*$  сводится в этом случае к прежней характеристике  $k_*$ .

По схеме Дагдейла рассмотрены и другие задачи (трещина в условиях сдвига, см. рис. 8.2.3; трещина в поле продольного сдвига, см. рис. 8.2.2; осесимметричная задача о дискообразной трещине), хотя в некоторых случаях вопрос о возможности подобных вырожденных пластических зон остается открытым и механическая интерпретация построенных решений не ясна.

**2. Модель хрупкого разрушения М. Я. Леонова и В. В. Панасюка.** Модель хрупкого разрушения, предложенная М. Я. Леоновым и В. В. Панасюком [1] в 1959 г., формально эквивалентна упруго-пластической модели Дагдейла, однако ее механическое содержание иное.

Рассмотрим идеально хрупкое тело с трещиной. В концевой зоне трещины (рис. 8.6.5) между берегами имеются силы взаимодействия, зависящие от расстояния (см. § 8.1) приблизительно так, как это показано на рис. 8.1.2. Как уже указывалось, строгое определение этих сил затруднительно.

В качестве приближения можно принять, что в концевой зоне берега трещины притягиваются с постоянным напряжением  $\sigma_0$ , если расстояние между ними не превышает некоторой величины  $\delta_K$ . Если же расстояние между берегами больше  $\delta_K$ , полагаем, что взаимодействие отсутствует.

Величина  $\sigma_0$  считается равной так называемому пределу хрупкой прочности (т. е. разрушающему напряжению при отсутствии пластической деформации, см., например, Я. Б. Фридман [1]).

Примем, далее, что трещина начнет распространяться, если ее раскрытие достигнет критического значения  $\delta_K$ , т. е.

$$(2u_y)_{y=0, x=l-a} = \delta_K. \quad (7)$$

Длина концевой зоны  $a$  определяется по-прежнему из условия ограниченности напряжения в вершине трещины. Очевидно, что для вычисления величины  $a$  и раскрытия  $\delta$  пригодны формулы (3) и (5) и графики, приведенные на рис. 8.6.4, при замене  $\sigma_T, \delta_T$  на  $\sigma_0, \delta_K$ .

При большой длине трещины и относительно невысоких напряжениях  $p$  аналогично предыдущему имеем

$$p \sqrt{\pi l} = \sqrt{E \sigma_0 \delta_K}$$

(для плоского напряженного состояния). Таким образом, при

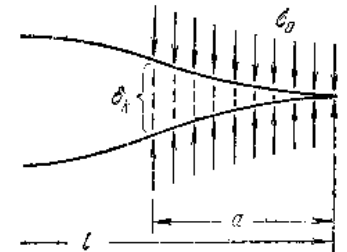


Рис. 8.6.5.

сделанных ограничениях новые характеристики материалов также сводятся к критической силе Ирвина.

В общем случае модель Леонова — Панасюка шире схемы Ирвина. Определение предела хрупкой прочности  $\sigma_0$  затруднительно; кроме того, использование этой характеристики в концевой зоне трещины является, по существу, условным. Возможно поэтому более широкое толкование постоянной  $\sigma_0$ . При этом рассматриваемая модель содержит две константы, характеризующие трещиностойкость материала. Отметим также, что модель Леонова — Панасюка относится к хрупким телам и не рассматривает пластических деформаций. Поэтому ее применение не ограничено условиями реализуемости вырожденных пластических зон.

### § 8.7. Упруго-пластические задачи о трещинах

**1. Общие замечания.** Влияние пластических деформаций в механике разрушения существенно даже для достаточно жестких металлов, когда пластические деформации сравнительно невелики и могут быть учтены при помощи приведенной поверхностной энергии  $\gamma + \gamma_p$  (см. § 8.1). Однако даже в этом случае анализ упруго-пластического поля в окрестности вершины трещины интересен для правильного понимания механизма развития трещины. Такой анализ особенно важен для «мягких» металлов, когда зоны пластической деформации могут быть значительными.

В окрестности вершины трещины неизбежно возникают пластические деформации. На рис. 8.7.1 пунктиром показаны границы областей (*a*, *b* — плоская деформация (растяжение и

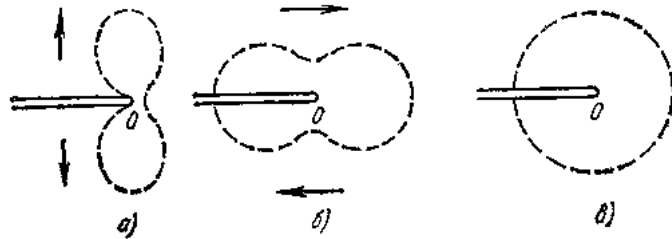


Рис. 8.7.1.

сдвиг); *в* — продольный сдвиг), в которых по упругому решению превзойден предел текучести (согласно условию Мизеса). Разумеется, эти границы не совпадают с границами пластических зон в упруго-пластическом решении, однако приведенные рисунки дают некоторое представление об опасных зонах высоких напряжений. Заметим, что действительное очертание пла-

стической зоны в случае продольного сдвига приведено на рис. 8.7.2.

Решение упруго-пластических задач для тела с трещиной наталкивается на большие математические трудности. По существу, найдены решения лишь для состояния продольного сдвига (наиболее простой задачи). Хотя это состояние не столь важно, как плоская деформация и плоское напряженное состояние, но его анализ позволяет сделать ряд качественных заключений.

**2. Упруго-пластическое состояние при продольном сдвиге.** Будем исходить из схемы упругого идеально пластического материала. В § 8.6 рассматривалась модель Дагдейла с тонкой пластической зоной на продолжении трещины. Подобное решение может быть построено и для продольного сдвига; при этом пластическая зона будет линией разрыва смещения  $u_z$ . Вопрос о возможности реализации такого упруго-пластического состояния не выяснен. Непрерывное упруго-пластическое решение представляется более естественным; такое решение получили Хальт и Макклиток [1]. Ниже, однако, рассматривается более простое решение Райса [1], справедливое при условии, что вдали от трещины напряжение продольного сдвига мало сравнительно с пределом текучести  $\tau_T$ . Тогда можно считать, что область пластической деформации мала сравнительно с областью пригодности асимптотического решения (10), (11) § 8.2. В этих условиях трещину можно считать полубесконечной и полагать, что упругое поле напряжений и смещений в отдалении от вершины описывается соотношениями (10), (11) § 8.2, где  $k_3$  — значение коэффициента интенсивности напряжений в исходной задаче.

Введем полярные координаты  $r, \theta$  с началом в вершине трещины (см. рис. 8.7.2). В пластической зоне по условию Мизеса имеем

$$\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2 = \tau_T^2. \quad (1)$$

Примем, следуя Хальту и Макклитоку [1], что  $\tau_{rz} = 0$ , тогда

$$\tau_{\theta z} = \text{const} = \tau_T. \quad (2)$$

Легко видеть, что уравнения равновесия удовлетворяются. Из уравнений теории пластического течения следует, что  $d\gamma_{rz} = 0$ , т. е.  $\frac{\partial}{\partial r}(du_z) = 0$ . Смещение в пластической зоне

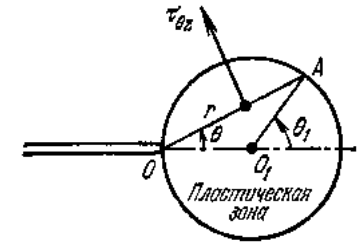


Рис. 8.7.2.



является функцией  $\theta$ , т. е.  $u_z = u_z(\theta)$  и

$$\gamma_{rz} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{du_z}{d\theta}. \quad (3)$$

Обозначим расстояние  $OA$  до границы пластической зоны через  $R(\theta)$ ; на ней напряжения, деформации и смещения непрерывны, т. е., в частности,

$$\frac{1}{R(\theta)} \frac{du_z}{d\theta} = \frac{\tau_r}{G}.$$

Следовательно,

$$\frac{du_z}{d\theta} = \frac{\tau_r}{G} R(\theta). \quad (4)$$

Выполняя интегрирование при условии  $u_z|_{\theta=0} = 0$ , находим

$$u_z = \frac{\tau_r}{G} \int_0^{\theta} R(\varphi) d\varphi. \quad (5)$$

Необходимо определить контур пластической зоны из условий непрерывности упругого и пластического состояний. При сделанных предположениях относительно малости пластической области поле напряжений и смещений в упругой области можно описать асимптотическими формулами (10), (11) § 8.2, если сместить полюс внутрь пластической зоны и тем самым отсесть чрезмерно высокие напряжения. При этом искомая граница находится при помощи конформного отображения. Однако конечный результат настолько прост, что его можно установить вполне элементарно.

Покажем, что граница раздела является окружностью радиуса  $R_0$  с центром  $O_1$  в точке  $r = \frac{1}{\sqrt{2}} R_0$ ,  $\theta = 0$  (см. рис. 8.7.2). Действительно, пусть упругое поле определяется асимптотическими формулами

$$u_z = \frac{k_3}{G} \sqrt{\frac{2r_1}{\pi}} \sin \frac{\theta_1}{2},$$

$$\tau_{r,z} = G \frac{\partial u_z}{\partial r_1} = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2}, \quad \tau_{\theta,z} = \frac{G}{r_1} \frac{\partial u_z}{\partial \theta_1} = \frac{k_3}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2},$$

где  $r_1$ ,  $\theta_1$  — полярные координаты с началом в центре  $O_1$ .

На границе раздела  $r_1 = R_0$ ,  $\theta_1 = 2\theta$  должны выполняться условия непрерывности:

$$\frac{\tau_r}{G} \int_0^{\theta} R(\varphi) d\varphi = \frac{k_3}{G} \sqrt{\frac{2R_0}{G}} \sin \frac{\theta_1}{2},$$

$$\tau_{rz} = \tau_{r,z} \cos \theta - \tau_{\theta,z} \sin \theta = 0; \quad \tau_{\theta z} = \tau_{r,z} \sin \theta + \tau_{\theta,z} \cos \theta = \tau_r.$$

Рассмотрим первое из этих соотношений. Так как  $R(\theta) = 2R_0 \cos \theta$ , то получаем

$$R_0 = \frac{k_3^2}{\pi \tau_r^2}. \quad (6)$$

Легко теперь видеть, что остальные два условия выполняются. Раскрытие трещины равно

$$\delta_r = 2u_z \Big|_{\substack{\theta_1=\pi \\ r_1=R_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi G} \frac{k_3^2}{\tau_r}. \quad (7)$$

В упомянутой работе Хальта и Макклитока рассмотрена трещина в полуплоскости (рис. 8.7.3, а) без ограничений на нагрузки и размеры пластической зоны. Райс [1] изучил также

упруго-пластическую задачу о трещине в полосе (рис. 8.7.3, б). Мы не будем останавливаться на этих решениях, так как

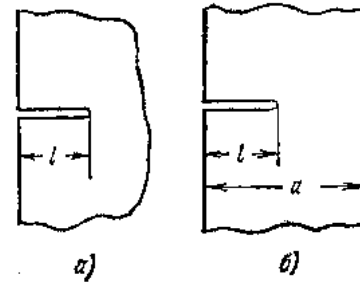


Рис. 8.7.3.

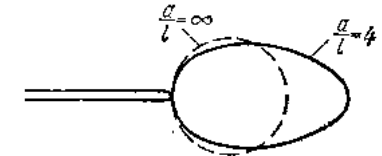


Рис. 8.7.4.

ниже приводится решение аналогичной упруго-пластической задачи для упрочняющейся полуплоскости с надрезом. Отметим лишь, что с уменьшением относительной ширины сечения полосы пластическая зона вытягивается (рис. 8.7.4); размер пластической зоны с увеличением нагрузки быстро растет.

3. Влияние упрочнения при продольном сдвиге. В излагаемом ниже решении Райса [1] принимается, что упрочняющийся материал следует уравнениям деформационной теории пластичности. Интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига

$$T = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}, \quad \Gamma = (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)^{1/2}$$

связаны зависимостью вида

$$T = \begin{cases} \frac{\tau_r}{\gamma_r} \Gamma & \text{при } \Gamma \leq \gamma_r, \\ T(\Gamma) & \text{при } \Gamma \geq \gamma_r, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\tau_r$  — предел текучести, а  $\gamma_r$  — соответствующая деформация сдвига (рис. 8.7.5). Компоненты напряжения и деформации

связаны соотношениями

$$\tau_{xz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{yz}. \quad (9)$$

Дифференциальное уравнение задачи можно линеаризовать обращением переменных. Принимая  $x, y$  за искомые функции, получим, что уравнения равновесия и непрерывности деформаций

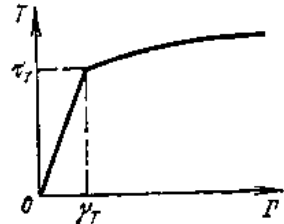


Рис. 8.7.5.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0$$

переходят соответственно в уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial \tau_{xz}} + \frac{\partial y}{\partial \tau_{yz}} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \gamma_{yz}} - \frac{\partial y}{\partial \gamma_{xz}} = 0. \quad (10)$$

Второму уравнению можно удовлетворить, введя потенциал  $\psi$ :

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{xz}}, \quad y = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{yz}}. \quad (11)$$

Введем, далее, в плоскости деформаций  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  полярную систему координат  $\Gamma, \varphi$ ; угол  $\varphi$  будем отсчитывать от оси ординат. Тогда  $\psi = \psi(\Gamma, \varphi)$ , причем, используя соотношения (11) и формулы перехода от полярных координат  $\Gamma, \varphi$  к координатам  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , нетрудно найти, что

$$x = -\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} - \frac{\cos \varphi}{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad y = \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} - \frac{\sin \varphi}{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Внося эти значения в первое уравнение (10), приходим к линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{T(\Gamma)}{\Gamma T'(\Gamma)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Gamma^2} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} + \frac{1}{\Gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (13)$$

В упругой области (т. е. при  $\Gamma \leq \gamma_T$ ) отсюда вытекает уравнение Лапласа для потенциала  $\psi$ .

Рассмотрим теперь задачу о трещине в полуплоскости, нагруженной касательными напряжениями  $\tau < \tau_T$  (рис. 8.7.6, а). Упруго-пластической картине в физической плоскости  $z = x + iy$  отвечает следующая картина в плоскости сдвигов  $\gamma = \gamma_{xz} + i\gamma_{yz}$  (рис. 8.7.6, б). Берега трещины (на них  $\tau_{yz} = 0$ , следовательно,  $\gamma_{yz} = 0$ ) переходят в ось  $\gamma_{xz}$ ; на ней из условия  $y = 0$  имеем  $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$ . Вершина трещины  $x = 0, y = 0$  отображается на бесконечно удаленную точку плоскости  $\gamma$ , причем производные от  $\psi$  исчезают на бесконечности. Граница области  $x = -l$  (на ней

$\tau_{xz} = 0$ , т. е.  $\gamma_{xz} = 0$ ) переходит в разрез  $\gamma_{xz} = \pm 0, \gamma_{yz} \leq \gamma_\infty = \frac{\tau}{G}$  на плоскости  $\gamma$ . Отображением упругой области на плоскости  $\gamma$  является полукруг  $\Gamma \leq \gamma_T$  с разрезом. В этом полукруге  $\psi$  — гармоническая функция; ее можно считать мнимой частью некоторой функции комплексного переменного  $\gamma$ . Так как на оси  $\gamma_{xz}$  производная  $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$ , возможно симметричное продолжение в нижнюю полуплоскость. Стало быть, необходимо найти функцию  $\psi$  внутри круга радиуса  $\gamma_T$  с разрезом  $\gamma_{xz} = \pm 0, |\gamma_{yz}| \leq \gamma_\infty$ . Граничное условие на разрезе очевидно:  $x = -l$ ; на контуре

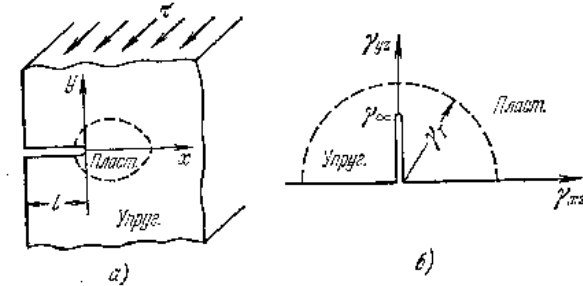


Рис. 8.7.6.

круга граничные данные заранее не известны. Однако имеющиеся условия позволяют определить (на основе методов решения задачи Римана — Гильберта) структуру функции  $\psi$  с точностью до произвольной внутри круга аналитической функции  $g(\gamma)$ .

Вне полукруга ищем решение в форме

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k(\Gamma) \sin(2k-1)\varphi,$$

удовлетворяющей условию  $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$  на оси  $\gamma_{xz}$ . Подставляя это разложение в уравнение (13), приходим к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{T(\Gamma)}{\Gamma T'(\Gamma)} f_k'' + \frac{1}{\Gamma} f_k' - \frac{(2k-1)^2}{\Gamma^2} f_k = 0. \quad (14)$$

На границе упругой зоны  $\Gamma = \gamma_T$  полагаем  $f_k = 1$ ; на бесконечности же следует считать  $f_k' = 0$ , поскольку там производные от  $\psi$  исчезают.

Коэффициенты  $C_k$  и коэффициенты ряда Тэйлора функции  $g(\gamma)$  находятся из условий непрерывности  $x, y$  (т. е. производных  $\frac{\partial \psi}{\partial \Gamma}, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ ) на границе  $\Gamma = \gamma_T$ . Эти условия приводят к бесконечной системе линейных уравнений.

На рис. 8.7.7 представлены результаты вычислений при сравнительно слабом упрочнении, когда

$$T(\Gamma) = \tau_r \left( \frac{\Gamma}{\gamma_r} \right)^n, \quad \text{причем } n = 0,1. \quad (15)$$

Показаны два положения упруго-пластической границы (для нагрузок  $\tau = 0,6\tau_r$  и  $0,8\tau_r$ ; пунктир), а также графики деформации

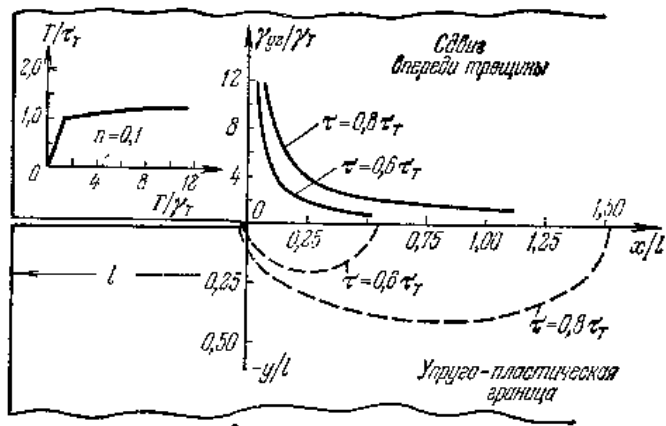


Рис. 8.7.7.

сдвига  $\gamma_{yz}$  впереди трещины (т. е. при  $x > 0, y = 0$ ). При упрочнении деформация сдвига (а, следовательно, и напряжение) неограниченно возрастает с приближением к вершине трещины. С увеличением нагрузки пластические зоны вытягиваются. Заметим, что при слабом упрочнении результаты близки к картине упруго-идеально пластического решения.

При более сильном упрочнении, когда  $n = 0,3$ , пластическая зона уменьшается и становится менее вытянутой.

**4. Плоская задача.** Как уже отмечалось, для приложений более важны упруго-пластические задачи о трещинах в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния. Здесь, однако, возникают большие математические трудности и получены лишь частные результаты. Прежде всего следует упомянуть о рассмотренной ранее (§ 8.6) модели Дагдейла с линейной пластической зоной впереди трещины; такая зона действительно наблюдается в плоском напряженном состоянии для материалов с хорошо выраженной площадкой текучести. В случае плоской деформации подобная пластическая зона не согласуется с возможностями пластического течения и требует особого истолкования (как зоны скопления дислокаций).

Известное представление об упруго-пластическом состоянии в окрестности вершины трещины дают асимптотические решения,

недавно полученные Райсом и Розенгреном [1] и Хачинсоном [1] на основе уравнений деформационной теории пластичности. В первой из этих статей рассмотрена трещина в неограниченном равномерно растягиваемом теле в условиях плоской деформации. В работах Хачинсона рассмотрена трещина в условиях плоской деформации (при растяжении или сдвиге) и плоского напряженного состояния (при растяжении).

Остановимся кратко на задаче о трещине в поле растяжения в условиях плоской деформации.

Введем полярные координаты  $r, \theta$  с началом в вершине трещины (см. рис. 8.3.3). Дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются с помощью функции Эри  $\Phi = \Phi(r, \theta)$ :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (16)$$

Условие совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (17)$$

Выражая здесь компоненты деформации с помощью соотношений деформационной теории пластичности через напряжения и используя формулы (16), получим для функции  $\Phi$  сложное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Построение решения  $\Phi$  для области с трещиной наталкивается на большие математические трудности. Однако, если ограничиться рассмотрением поля вблизи особенности — вершины трещины, то сингулярную часть решения можно искать в форме

$$\Phi = Kr^s F(\theta). \quad (18)$$

Здесь  $s$  — показатель степени, подлежащий определению, а  $K$  — коэффициент интенсивности особенности. В окрестности вершины трещины происходит пластическая деформация, поэтому сингулярное решение зависит от вида кривой деформации в пластической ее части. Это позволяет игнорировать упругую составляющую деформации и принимать, что

$$\varepsilon_{ij} = B T^{n-1} s_{ij}, \quad (19)$$

где  $B > 0, n \geq 1$  — постоянные материала. Условный предел упругости достигается при

$$\sqrt{3} T = \sigma_T, \quad (20)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести (отвечающий, например, 0,2% остаточной деформации).

Характер особенности зависит от показателя  $n$ . Ранее (§ 8.3) было выяснено, что произведение  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  имеет особенность вида

1/г. Если напряжения вблизи вершины трещины характеризуются множителем  $r^n$ , то деформации согласно соотношениям (19) имеют множитель  $r^{kn}$ ; так как  $k + kn = -1$ , то  $k = -1/(n+1)$ . Легко теперь видеть, что  $s = (2n+1)/(n+1)$ .

Таким образом, вблизи вершины имеем для напряжений асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Kr \frac{1}{n+1} (sF + F''), & \sigma_\theta &= Kr \frac{1}{n+1} s(s-1)F, \\ \tau_{r\theta} &= Kr \frac{1}{n+1} (1-s)F'. \end{aligned} \quad (21)$$

При разыскании решения в форме (18) функция  $F(\theta)$  удовлетворяет обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое из-за громоздкости здесь не выписывается. Остановимся на граничных условиях. Берега трещины  $\theta = \pm\pi$  свободны от напряжений, т. е.  $\tau_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ , или  $F(\pm\pi) = 0$ ,  $F'(\pm\pi) = 0$ .

Граничные условия удобнее сформулировать в несколько иной форме. По симметрии задачи функция  $F(\theta)$  — четная, следовательно, можно потребовать, чтобы

$$F(\pi) = 0, \quad F'(\pi) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'''(0) = 0.$$

Можно показать с помощью интеграла  $J$ , что первые два условия зависимы. Далее, из одинаковой размерности членов упомянутого дифференциального уравнения вытекает, что если  $F(\theta)$  является решением, то  $AF(\theta)$ , где  $A$  — произвольная константа, также будет решением. Удобно нормировать  $F$  условием  $F(0) = 1$ . Коэффициент же  $K$  определится с помощью интеграла  $J$ .

Рассмотрим круговой контур  $C$ , лежащий в упругой зоне и достаточно удаленный от вершины трещины. Считая пластическую зону малой, можно найти значение  $J$  по упругому решению

$$J = \frac{k_1^2(1-\nu^2)}{E} \equiv J_1, \quad k_1 = \rho \sqrt{\pi l}.$$

Вычисляя, далее, интеграл  $J$  по решению (21) (тогда контур  $C$  лежит в пластической зоне) и приравняв  $J_1$ , находим множитель

$$K = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_T} \left( \frac{1-\nu^2}{2BE} \frac{\pi l}{l} \rho^2 \right)^{\frac{1}{n+1}},$$

где  $I$  — некоторый интеграл, зависящий от показателя  $n$ . Приведем вычисленные значения  $I$ :

$n=3$	5	9	13
$I=5,51$	5,01	4,60	4,40

На рис. 8.7.8, а показаны графики функций  $\Sigma_r(\theta) = \frac{1}{\sigma_T} (sF + F'')$ ,  $\Sigma_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_T} s(s-1)F$ ,  $\Sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sigma_T} (1-s)F'$  для случая  $n=13$ .

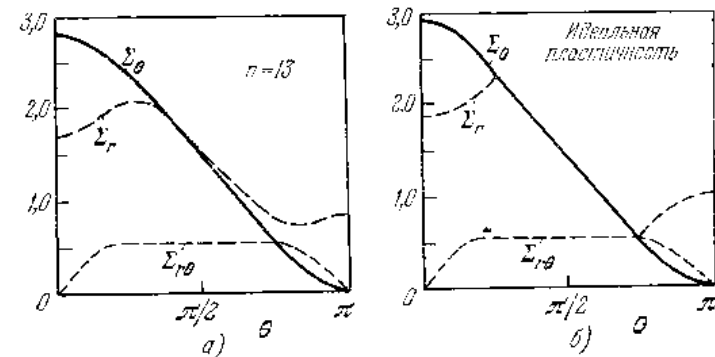


Рис. 8.7.8.

На рис. 8.7.9 нанесены границы пластических зон по условию (20) для  $n=3,33$  и  $n=20$ .

Любопытно сопоставить полученное решение с идеально пластическим полем напряжений, которое формально можно построить в окрестности вершины, если не вникать в кинематическую картину течения. На рис. 8.7.10 показана конструкция

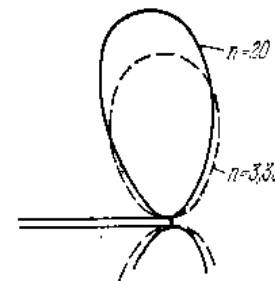


Рис. 8.7.9.

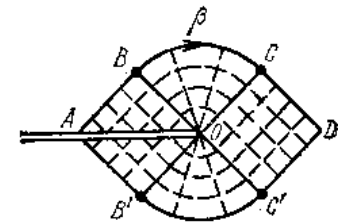


Рис. 8.7.10.

такого поля. В треугольнике  $OAB$  имеет место одноосное растяжение  $\sigma_x = \sigma_T$ ,  $\sigma_y = 0$ . В квадрате  $OCDC'$  реализуется равномерное напряженное состояние  $\sigma_x = \text{const}$ ,  $\sigma_y = \text{const}$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , причем напряжения удовлетворяют условию текучести Мизеса, принимающему здесь вид  $\sigma_y - \sigma_x = \sigma_T$ . Вдоль линии скольжения  $\beta$  характеристический параметр  $\eta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma_T} + \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона линии скольжения  $\alpha$ , — постоянен. Отсюда вытекает,

что в упомянутом квадрате

$$\sigma_y = \sigma_r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sigma_x = \sigma_r \cdot \frac{\pi}{2}.$$

В секторе  $OBC$  касательное напряжение  $\tau_{r\theta}$  вдоль круговых линий скольжения постоянно ( $= \sigma_r/\sqrt{3}$ ), а нормальные напряжения равны  $\sigma_\theta = \sigma_r$  и линейно зависят от угла  $\theta$ . Распределение напряжений  $\frac{\sigma_r}{\sigma_r} = \Sigma_r$ ,  $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_r} = \Sigma_\theta$ ,  $\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_r} = \Sigma_{r\theta}$  в пластической зоне в зависимости от угла  $\theta$  (от  $r$  оно не зависит) показано на рис. 8.7.8, б. Легко видеть, что к этим графикам приближаются кривые зависимости «нелинейно-упругого решения» от угла  $\theta$  для больших показателей  $n$ . К аналогичному выводу приводят решения задачи о трещине в поле сдвига в плоском деформированном состоянии и соответствующих задач для плоского напряженного состояния.

Как мы знаем, в плоском напряженном состоянии возможны решения с линейной пластической зоной (шейкой) впереди трещины. Вопрос о реализации той или иной схемы зависит от свойств материала. По-видимому, в материалах с выраженной площадкой текучести возникают шейки, а пластические деформации в материалах с упрочнением охватывают некоторую область.

### § 8.8. О практическом применении механики трещин

**1. Разрушения и трещины.** Внезапные разрушения ответственных конструкций (крупных судов, самолетов, ракет и т. д.), происшедшие при сравнительно невысоких расчетных напряжениях и в спокойных условиях, выявили необходимость более глубокого подхода к анализу прочности, подчеркнули значение трещин и их роста в проблеме разрушения, необходимость введения новых характеристик прочности, учитывающих трещиностойкость (вязкость), способность противостоять начавшемуся разрушению.

Прежние представления о наступлении разрушения при достижении некоторого критического напряжения материала, некоторого предела сопротивления (например, сопротивления отрыву) устарели. Современные экспериментальные данные убедительно свидетельствуют о постепенном развитии разрушения, о большой роли первичных дефектов, микротрещин в формировании картины разрушения. Трещины начинают развиваться задолго до полного разрушения. Анализ хрупких разрушений конструкций показывает, что в очагах изломов всегда имеются начальные трещины. Разрушение не является одновременным актом, оно развивается с большей или меньшей скоростью и

представляет собой некоторый, иногда длительный, процесс. Для оценки реальной прочности конструкций и пригодности тех или иных материалов необходимо учитывать влияние трещин.

Естественно, что при этом важное значение приобрело использование результатов теории трещин. Хотя эти результаты не позволяют охватить все относящиеся к трещиностойкости данные, все же использование теории трещин дает инженеру важный инструмент для более правильной оценки прочности материалов и конструкций и более глубокого понимания причин разрушения.

Остановимся кратко на некоторых вопросах инженерных применений механики трещин.

**2. Критическое значение коэффициента интенсивности напряжений.** Решение задач теории упругости для тел с трещиной показывает, что вблизи ее края компоненты напряжения имеют структуру

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{конечные члены} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент интенсивности напряжений, а  $r, \theta$  — локальная система полярных координат в нормальном сечении края трещины (рис. 8.8.1). Коэффициент интенсивности напряжений пропорционален нагрузке и зависит от формы тела и трещины (но не от свойств материала).

Согласно Ирвину для каждого материала имеется критическое значение коэффициента интенсивности напряжений  $k_*$ , по достижении которого трещина начинает распространяться. Таким образом, условие прочности

$$k < k_* \quad (2)$$

учитывает как поле напряжений в теле данной формы, геометрию трещины, так и свойства материала. Механика трещин вместе с тем дает известную оценку влияния геометрических размеров тела на его прочность (при одинаковых трещинах).

При сложной системе нагрузок иногда необходимо вносить в эту схему коррективы. Рассмотрим, например, трещину в произвольном плоском поле (рис. 8.8.2), характеризуемом на бесконечности нормальными напряжениями  $p, q$  и касательным напряжением  $\tau$ . Этому полю соответствует двухосное растяжение плоскости главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$ . Прежде всего отметим, что трещина не изменяет однородного растяжения (или сжатия), вызываемого составляющей  $q$ . Последняя поэтому выпадает из рассмотрения. Касательное напряжение  $\tau$  приводит

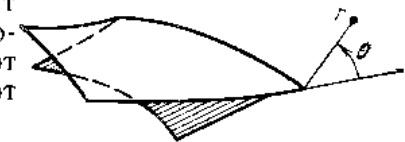


Рис. 8.8.1.

к коэффициенту интенсивности напряжений  $k_2$ . Более сложный учет влияния нормального напряжения  $p$ . Если  $p$  — растягивающее напряжение, то ему отвечает коэффициент интенсивности напряжений  $k_1$  и условие прочности имеет вид

$$k_1 + k_2 < k_* \quad (3)$$

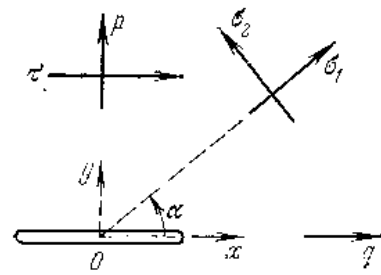


Рис. 8.8.2.

Если же  $p$  — сжимающее напряжение, то при тонкой (волосной) трещине ее берега приходят в соприкосновение и их нельзя уже считать свободными. Наиболее просто полагать, что при сжатии трещина полностью закрывается и не вызывает никакой концентрации напряжений. Тогда при  $p < 0$  условие прочности таково:

$$k_2 < k_* \quad (4)$$

Учитывая, что  $k_1 = p \sqrt{\pi l}$ ,  $k_2 = \tau \sqrt{\pi l}$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} (p + \tau) \sqrt{\pi l} < k_* & \text{ при } p > 0, \\ \tau \sqrt{\pi l} < k_* & \text{ при } p < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Соответствующая граница области безопасных нагрузок показана на рис. 8.8.3.

В связи с изложенным отметим одну возможность (намеченную еще Гриффитсом и развитую В. И. Моссаковским и М. Т. Рыбкой [1]) перехода к условию разрушения хрупких тел в форме

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = K \quad (6)$$

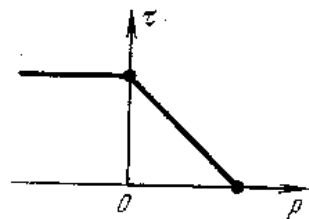


Рис. 8.8.3.

аналогичной обычному критерию прочности изотропных материалов (см. § 2.2). Полагая, что в теле имеются различным образом ориентированные, но достаточно удаленные друг от друга трещины типичной для данного материала длины, находим наиболее неблагоприятно расположенные (по углу  $\alpha$ ) трещины соответственно при сжатии и растяжении. Этот анализ приводит к соотношению вида (6), причем граница прочности имеет

вид, показанный на рис. 8.8.4. По этой схеме при разрушении сжимающие напряжения в два раза больше растягивающих.

Асимптотическое представление (1) получено для упругого тела. Если имеется небольшая пластическая деформация, так что трещина окаймлена тонким пластическим слоем (рис. 8.1.6), то этот случай может быть охвачен рассмотренной схемой по способу Орована и Ирвина (§ 8.4) путем задания существенно большего критического значения  $k_*$ . Из-за пластичности возможно влияние составляющей  $q$ .

Если, однако, пластические деформации распространяются на значительную область в районе трещины (что может быть, например, при высоких средних напряжениях), выводы механики упругого тела с трещинами становятся сомнительными. Будем сначала считать, что условия применимости схемы Гриффитса — Ирвина не нарушаются. Случай значительных неупругих деформаций обсуждается в разделах 6, 7.

Для определения критического значения  $k_*$  проводятся испытания образцов с трещинами или имитирующими их острыми надрезами. Имеется несколько типов образцов (некоторые из них вошли в стандарты) для экспериментального определения трещиностойкости (вязкости разрушения), характеризующейся значением  $k_*$ . Опыты осуществляются большей частью в условиях плоского напряженного или плоского деформированного состояний; образцы испытываются на растяжение или изгиб. На рис. 8.8.5 показаны плоские симметричные образцы для опытов растяжения:  $a$  — с острыми угловыми надрезами,  $b$  — с центральной трещиной,  $b'$  — с боковыми трещинами.

Трещины образуются тонким пропилом. Требованиям остроты вершины иногда удовлетворяют, создавая тем или иным способом (например, предварительными усталостными испытаниями) «постоящую» трещину.

При испытаниях конструкций в опасных местах делают иницирующие надрезы той или иной формы.

Значительные трудности приходится преодолевать при наблюдении за распространением трещины. Здесь используются датчики различного типа, киносъемка, измерения поля электрического напряжения (оно меняется с нарушением сплошности образца), запись звуков, порождаемых текущим разрушением (акустический метод) и т. д. Подробности и литературные указания по поводу проведения экспериментов можно найти в сборниках [2, 4, 5].

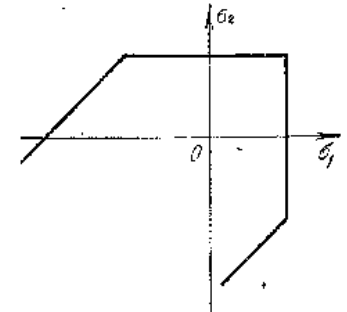


Рис. 8.8.4.

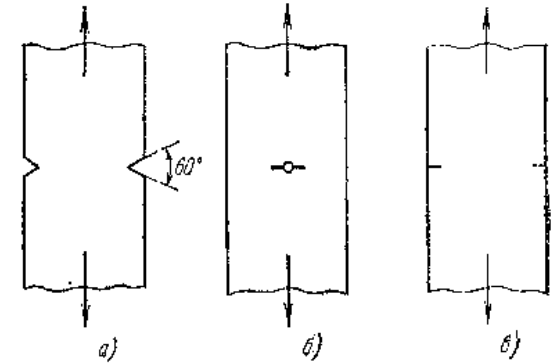


Рис. 8.8.5.

Для неравновесных трещин коэффициент интенсивности напряжений при однопараметрическом нагружении может быть представлен в форме

$$k = \alpha p \sqrt{\pi l}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — известный из теоретического решения задачи множитель, зависящий от формы тела и нагружения,  $p$  — характерное напряжение в удалении от трещины,  $l$  — характерный размер трещины.

Повышая уровень напряжения  $p$  и наблюдая одновременно за продвижением трещины, можно определить для данного образца в данных условиях опыта (плоское напряженное состояние, плоская деформация, температура, среда и т. д.) критическое значение нагрузки  $p_*$  и, следовательно, значение критического коэффициента интенсивности напряжений  $k_*$ .

Материал, для разрушения которого требуется *большая трещина*, лучше сопротивляется хрупкому разрушению.

Отметим теперь некоторые выводы, вытекающие из анализа опытных данных.

**3. Влияние температуры.** С повышением температуры наблюдается рост сопротивления прочных сталей хрупкому разрушению (т. е. растет критический коэффициент  $k_*$ ), с понижением температуры стали охрупчиваются. Следует заметить, что в определенных интервалах температуры для некоторых сплавов по

тем или иным причинам могут быть отклонения от указанной общей тенденции изменения  $k_*$ .

**4. Влияние среды.** Испытания в агрессивной среде образцов с трещинами (или острыми надрезами) позволяют выявить существенную роль среды в изменении трещиностойкости. В таких опытах фиксируется время до разрушения при определенных начальных значениях коэффициента интенсивности напряжений  $k_0$ . На рис. 8.8.6 показана опытная кривая, построенная по взя-

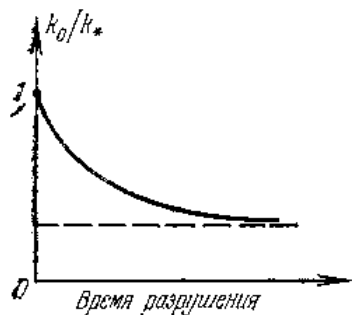


Рис. 8.8.6.

тым значениям  $k_0$ . Чем ближе  $k_0$  к критическому значению  $k_*$ , тем меньше время до разрушения. Опытная кривая, как правило, имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую так называемому *пределу коррозионной прочности*.

Таким образом, при воздействии агрессивной среды и достаточно высоких напряжениях имеющиеся трещины «подрастают» с течением времени. Отношение  $k_0/k_*$  характеризует ресурс прочности (запас).

Здесь уместно подчеркнуть изменение первоначальной схемы оценки прочности. Возникает необходимость в рассмотрении кинетики разрушения, что, в сущности, находится уже за рамками модели идеально упругого тела. Однако, поскольку очагом разрушения является вершина трещины, можно связать скорость разрушения с коэффициентом интенсивности напряжений. При этом кинетическое уравнение роста трещины имеет вид

$$\frac{dl}{dt} = f(k)$$

и позволяет, в принципе, определить время до разрушения. Обычно, однако, время до разрушения (ресурс прочности) при влиянии среды оценивается по экспериментальным данным согласно изложенной выше схеме.

**5. Распространение усталостных трещин.** В процессе усталостного разрушения различают два периода: 1) и *н* *к* *у* *б* *а* *ц* *и* *о* *н* *н* *ы* *й*, характеризующийся накоплением микрповреждений (см. § 7.14); 2) период распространения усталостных трещин. Иногда выделяют еще стадию заключительного, быстрого разрушения, но ее можно отнести и ко второму периоду.

При наличии концентрации напряжений (или возможности ее появления) ресурс прочности определяется главным образом периодом распространения трещины. Поэтому для приложений наиболее важен характер протекания второй стадии. На рис. 8.8.7 показана опытная кривая зависимости числа циклов  $N$  до разрушения от начальной интенсивности напряжений. Здесь, как и выше, наблюдается «подрастание» трещины до критического состояния.

Имеются различные предложения относительно кинетического уравнения, описывающего рост трещины при циклическом нагружении (см. Эрдоган [1]). Анализ многочисленных экспериментальных данных свидетельствует об определяющей роли интенсивности напряжения в вершине трещины в процессе роста последней. Это, как уже отмечалось выше, вполне естественно, поскольку упругое поле напряжений и размер пластической зоны у вершины трещины зависят интегрально от коэффициента интенсивности  $k$ .

Остановимся кратко на схеме Париса и Эрдогана [1], в которой предлагается кинетическое уравнение вида

$$\frac{dl}{dN} = C (\Delta k)^n, \quad (8)$$

где  $l$  — длина трещины,  $N$  — число циклов,  $\Delta k$  — изменение коэффициента интенсивности напряжений в цикле,  $n$  — константа

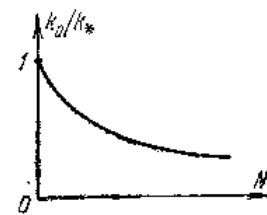


Рис. 8.8.7.

материала. Множитель  $C$  зависит от свойств материала, частоты и среднего напряжения.

Для неравновесных трещин можно исходить из представления (7), тогда

$$\Delta k = \alpha \sqrt{\pi l} \cdot \Delta p,$$

где  $\Delta p$  — изменение характерного напряжения в цикле. Уравнение (8) при этом принимает вид

$$\frac{dl}{dN} = C (\alpha \sqrt{\pi} \Delta p)^n l^{\frac{n}{2}}.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии  $l = l_0$  при  $t = 0$ , получаем

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{1-\kappa N}, \quad \left(\frac{n}{2} - 1 > 0\right), \quad (9)$$

где положено  $\kappa = \left(\frac{n}{2} - 1\right) l_0^{\frac{n}{2}-1} C (\alpha \sqrt{\pi} \Delta p)^n$ .

График изменения длины трещины с ростом числа циклов показан на рис. 8.8.8. С приближением к разрушающему числу циклов  $N^* = 1/\kappa$  скорость роста трещины быстро увеличивается.

В заключение отметим, что предложены и другие варианты кинетического уравнения, описывающего рост усталостной трещины.

**6. Критическое раскрытие трещины.** Использование коэффициента интенсивности напряжений (по критерию Ирвина) предполагает, как указывалось выше, относительную малость зон пластической деформации. Иногда рамки применимости критерия Ирвина удается несколько раздвинуть при помощи эмпирической поправки на пластическую деформацию (см. Ирвин [13]). Однако для некоторых материалов (например, для мягких сталей) началу разрушения может предшествовать развитая пластическая деформация. В таких случаях для пластин при слабом упрочнении можно исходить из рассмотренной в § 8.6 модели трещины с немалой концевой пластической областью. При этом критерием разрушения является предельное расхождение бергов трещины (см. рис. 8.6.2) в начале пластической зоны — критическое раскрытие трещины  $\delta_T$  (или  $\delta_h$ ). Считается, что  $\delta_T$  — экспериментальная характеристика, зависящая от температуры, скорости деформирования и объема напряженного состояния.

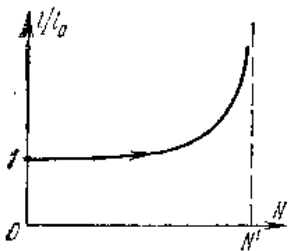


Рис. 8.8.8.

сти критерия Ирвина удается несколько раздвинуть при помощи эмпирической поправки на пластическую деформацию (см. Ирвин [13]). Однако для некоторых материалов (например, для мягких сталей) началу разрушения может предшествовать развитая пластическая деформация. В таких случаях для пластин при слабом упрочнении можно исходить из рассмотренной в § 8.6 модели трещины с немалой концевой пластической областью. При этом критерием разрушения является предельное расхождение бергов трещины (см. рис. 8.6.2) в начале пластической зоны — критическое раскрытие трещины  $\delta_T$  (или  $\delta_h$ ). Считается, что  $\delta_T$  — экспериментальная характеристика, зависящая от температуры, скорости деформирования и объема напряженного состояния.

Использование критерия  $\delta_T$  связано с многими трудностями. Измерение  $\delta_T$  технически осуществить нелегко. В §§ 8.6, 8.7 было подчеркнуто ограниченное значение схемы с линейной пластической зоной, что также затрудняет истолкование экспериментальных данных. Однако, возможности оценки разрушений пластичных металлов, открывающиеся при использовании представлений о критическом раскрытии трещины, заманчивы и побуждают к интенсивной разработке методики применения этого критерия (см. сборник [4]).

Заметим, наконец, что при упрочнении поле напряжений имеет особенность (см. § 8.7), и, аналогично случаю линейно-упругого тела, можно в качестве критерия разрушения выдвинуть предельные значения соответствующего коэффициента интенсивности напряжения.

**7. Временные эффекты.** Выше уже обсуждалось влияние внешней среды и циклических нагрузок на рост трещин. Однако проблема временных эффектов шире и связана с зависимостью деформаций и прочностных характеристик различных материалов от времени.

В инженерной схеме расчета обычно необходимо найти опасный (критический) размер трещины в данном теле при данных нагрузках. Это можно сделать на основе упругой модели. Вторая часть расчета — определение времени подрастания трещины до критического размера — связана с большими трудностями. Механизм медленного роста трещин сложен и зависит от многообразных факторов структуры материала и ее изменений. Изложение некоторых подходов к анализу роста трещин содержится в § 8.10.

## § 8.9. Вариационные уравнения в теории трещин

**1. Общие замечания.** В механике трещин возникают разнообразные постановки задачи. Простейшая из них заключается в следующем: трещина имеет заданную форму и расширяется в известном направлении. Примером такого рода является задача Гриффитса о расширении плоской прямолинейной трещины (рис. 8.9.1, а); здесь необходимо найти условие роста трещины. Задача другого типа, значительно более трудная, возникает, если траектория продвижения трещины заранее не известна и подлежит определению в зависимости от нагружения.

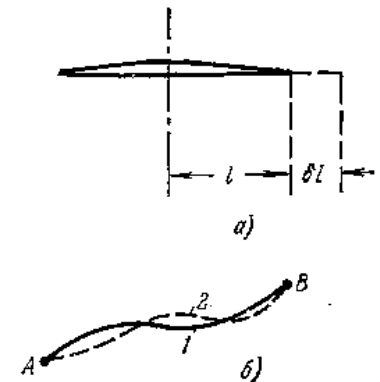


Рис. 8.9.1.



Представляет интерес также и вопрос: какие трещины (изломы) возникнут в теле при данных нагрузках? Многочисленные наблюдения свидетельствуют об определенных закономерностях в форме и расположении трещин. Например, на рис. 8.9.2 показана фотография растрескивания поверхности земли при высыхании; углы между трещинами, сходящимися в одной точке, в среднем равны  $120^\circ$ . При усталостных разрушениях очертания фронтов трещин приближаются к дугам окружностей (рис. 8.9.3).

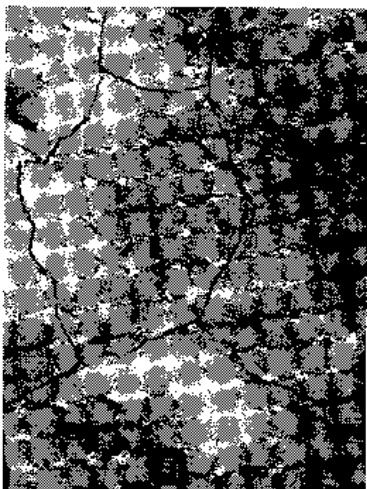


Рис. 8.9.2.

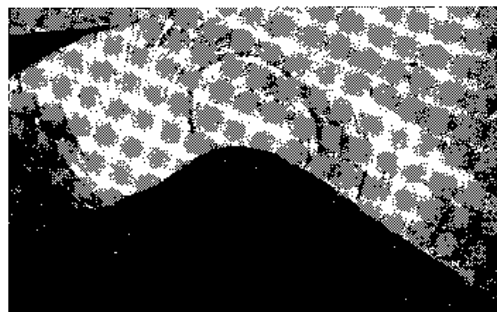


Рис. 8.9.3.

Естественным образом возникает мысль о том, что форма трещин характеризуется некоторыми минимальными свойствами. Так, форма сетки трещин на поверхности тела может быть объяснена условием минимальности периметра трещин. Упомянутые дуги окружностей можно интерпретировать как кратчайшие линии, охватывающие наибольшую площадь разрушения. Подобные соображения послужили толчком для формулировки вариационного принципа теории трещин в работах Е. М. Морозова и Я. Б. Фрийдмана ([1, 2]).

**2. Трещина заданного очертания.** Если очертание трещины известно и характеризуется некоторым параметром (длиной  $2l$ , диаметром  $2a$  и т. п.), а деформации тела — упругие, то вариационные уравнения задачи непосредственно вытекают из уравнений теории упругости для тела с надлежащим разрезом и энергетического условия разрушения Гриффитса.

Обратимся к энергетическому уравнению для тела с распространяющейся трещиной, рассмотренному в § 8.3. Ограничимся для простоты обсуждением плоской задачи.

При равновесном бесконечно малом виртуальном расширении трещины  $\delta l$  изменение потенциальной энергии тела  $\delta \mathcal{E}$  равно

приращению энергии разрушения  $-\delta \Pi = -2\gamma \delta l$ , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} + 2\gamma = 0. \quad (1)$$

Как известно (§ 8.3), для вычисления производной  $\partial \mathcal{E} / \partial l$  достаточно воспользоваться асимптотическим представлением напряжений и перемещений вблизи вершины трещины; эта производная имеет конечное значение, определяемое коэффициентом интенсивности напряжений. С другой стороны, ранее (§ 8.3) было отмечено, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial l}, \quad (2)$$

где  $W$  — работа раскрытия:

$$W = - \int_{-l}^l X_{ni}(\xi) u_i^+(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2).$$

Здесь  $X_{ni}$  — компоненты вектора напряжения в сплошном теле; очевидно,  $X_{ni}$  не зависят от  $l$ . Смещения же верхнего берега трещины  $u_i^+$  зависят от  $l$ , причем в вершине трещины они обращаются в нуль. Но тогда, как нетрудно видеть,

$$\frac{\partial W}{\partial l} = - \int_{-l}^l X_{ni} \frac{\partial u_i^+}{\partial l} d\xi$$

и соотношение (1) может быть также записано в форме

$$2\gamma - \frac{1}{2} \int_{-l}^l X_{ni} \frac{\partial u_i^+}{\partial l} d\xi = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является условием термодинамического равновесия (уравнением баланса энергии) в вершине распространяющейся трещины. Оно недостаточно, конечно, для полного решения задачи и лишь дополняет систему уравнений теории упругости, определяющую поле смещений  $u_i$ . Последнее, в частности, можно найти из принципа минимума потенциальной энергии тела (при варьировании поля смещений)

$$\delta \iint u dx dy - \int X_{ni} \delta u_i ds = 0, \quad (4)$$

где  $u$  — упругий потенциал,  $s$  — контур области, занимаемой телом (включая контур трещины текущего размера). Таким образом, вариационное уравнение (4) характеризует поле смещений в теле с трещиной; размер же последней (и, в частности, — критическая длина) определяется энергетическим условием (3).

В задаче разрушения специфическим является лишь энергетическое условие (3), совпадающее, по существу, с условием Гриффитса.

**3. Варьирование конфигурации трещины.** При разыскании формы трещины необходимо сравнение различных близких ее конфигураций при фиксированных концах (рис. 8.9.1, б). Рассматривая два состояния (с трещиной 1 и варьированной трещиной 2, рис. 8.9.1, б) одного и того же тела по методу Бюкнера [1], можно показать, что вариация потенциальной энергии тела равна

$$\delta\mathcal{E} = -\delta \frac{1}{2} \int X_{ni}(\xi) u_i(\xi) d\xi,$$

где интегрирование проводится по контуру трещины.

Вариация энергии разрушения равна  $\delta\Pi = 2\gamma\delta l$ , причем здесь под  $\delta l$  понимается изменение длины трещины при переходе к близкой конфигурации. Таким образом, имеем

$$2\gamma\delta l - \delta \frac{1}{2} \int X_{ni}(\xi) u_i(\xi) d\xi = 0. \quad (5)$$

Сюда снова следует присоединить вариационное уравнение (4) для определения поля смещений в теле с произвольной трещиной, соединяющей фиксированные точки  $A, B$ .

**4. Заключение.** Приведенные вариационные уравнения обобщаются на случай трещин с немалыми вырожденными пластическими зонами (Е. М. Морозов [1]) и на динамические задачи (см. Е. М. Морозов, Я. Б. Фридман [1]; там же приведены дополнительные литературные ссылки).

Центральной частью рассмотренных выше вариационных задач является определение поля смещений (а, следовательно, и напряжений) в упругом теле с надлежащей трещиной (щелью). Эта часть задачи наиболее трудна; соответствующие поля характеризуются резко выраженной локальностью вблизи трещины. Для нахождения таких полей вариационные методы в обычных их формах (без выделения особенностей) малоэффективны.

Заметим, наконец, что объяснение удивительной правильности многих картин разрушения, над которой нельзя не задуматься, потребует, возможно, также учета реологических свойств материала и кинетики изменения напряженного состояния.

## § 8.10. Медленный рост трещин

**1. Медленный рост трещин.** Лавинному распространению трещины часто предшествует медленный ее рост. Этот рост определяется процессами разрушения, постепенно развертывающимися в вершине трещины, а также развитием деформации тела

из-за несовершенной его упругости и накоплением рассеянных повреждений. При быстро пульсирующих нагрузках рост трещин связан, главным образом, с накоплением повреждений усталостного характера.

Особое значение имеет рост трещин для полимеров, деформация и прочность которых существенно изменяются с течением времени. В металлах при постоянных нагрузках рост трещин играет большую роль в условиях ползучести, а также при воздействии агрессивных сред.

Ниже кратко обсуждаются вопросы анализа роста трещин при медленно изменяющихся нагрузках (хотя некоторые из излагаемых схем используются и при циклически изменяющихся нагрузках).

Проблема роста трещин практически очень важна и поэтому привлекает к себе усиленное внимание. Несмотря на огромный объем исследований в этой области, многое в кинетике роста трещин остается неясным. В механике трещин проблема их роста стала разрабатываться лишь в последние годы. В известной мере условно можно отметить два подхода к анализу роста трещин.

В первом (феноменологическом) подходе анализ базируется в основном на использовании представлений и методов механики сплошных сред. Рассматривается, как правило, трещина в упруго-вязкой среде. С течением времени расстояние между берегами трещины увеличивается. Введение некоторых дополнительных предположений относительно состояния в концевой зоне трещины (критическое раскрытие, уровень диссипации, характер пластической зоны и т. д.) приводит к зависимости длины трещины от времени.

Во втором (микроструктурном) подходе основное внимание уделяется анализу микроскопических процессов разрушения в малой концевой зоне. Остальная часть тела обычно рассматривается как упругая. В самой же концевой области напряжения очень высоки, здесь развертываются процессы разрушения. Считается, что здесь важны реологические свойства материала и кинетика изменения связей между берегами трещины. Количественное описание этих процессов в вершине трещины представляет интерес, но по многим причинам затруднительно. Так, затруднителен анализ деформаций и напряжений в малом очаге разрушения, не ясны детали физической картины разрушения (не говоря уже о количественном их описании), нельзя игнорировать случайный разброс локальных характеристик, изменяющийся нередко и сам механизм разрушения.

Вследствие сказанного ниже рассматриваются лишь некоторые феноменологические схемы.

2. Трещины в вязко-упругом теле. Деформация линейной вязко-упругой среды описывается уравнениями наследственной теории Больцмана

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G_*} s_{ij}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $s_{ij}$  — компоненты девиаторов напряжения и деформации; для простоты принято, что среда несжимаема. Здесь введен оператор

$$\frac{1}{G_*} f = \frac{1}{G} f + \int_0^t M(t-s) f(s) ds \quad (2)$$

с ядром последействия  $M(t-s)$  и некоторой постоянной  $G \geq 0$  (или  $E = 3G$ ). Если последействия нет, то  $M = 0$  и соотношения (1) переходят в закон Гука. Разрешая соотношения (1) относительно компонент напряжения, получим

$$s_{ij} = 2G_* \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

с оператором

$$G_* f = G f - \int_0^t R(t-s) f(s) ds, \quad (4)$$

где  $R(t-s)$  — ядро релаксации.

Пусть при  $t < 0$  напряжения равны нулю, а при  $t \geq 0$  — постоянны. Тогда при малых временах  $\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2G} s_{ij}$ , т. е. постоянная

$G$  является мгновенным модулем упругости (мгновенным модулем сдвига).

Рассмотрим два простых примера. Релаксирующая среда Максвелла изображается моделью, состоящей из последовательно соединенных упругого и вязкого элементов (рис. 8.10.1, а). Здесь  $M = \text{const} = 3/\mu$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкости, и

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{3}{2\mu} s_{ij} \quad (5)$$

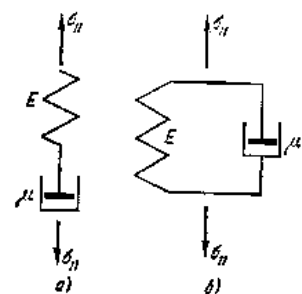


Рис. 8.10.1.

(точки обозначают производную по времени). В случае рассмотренного выше ступенчатого нагружения в момент  $t = 0$  происходит мгновенная упругая деформация, далее разворачивается вязкое течение (рис. 8.10.2, кривая 1). Мгновенный модуль упругости равен  $G$ .

Параллельное соединение упругого и вязкого элементов (рис. 8.10.1, б) приводит к вязко-упругой среде Фойхта

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2}{3}\mu\dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (6)$$

При том же ступенчатом нагружении деформация в начальный момент времени равна нулю, далее она возрастает, стремясь к «упругому» значению  $s_{ij}/2G$  (рис. 8.10.2, кривая 2). Таким образом, эта среда не обладает мгновенной упругостью (мгновенной упругой реакцией).

Вопрос о напряжениях и перемещениях в линейной вязко-упругой среде обычно рассматривается с помощью принципа соответствия Вольтерра. Именно, результаты решения задач теории упругости, не содержащие упругих констант, будут теми же и для вязко-упругого тела. Результаты, содержащие упругие константы, сохраняют силу для вязко-упругого тела при замене упругих констант соответствующими операторами ( $G$  на  $G_*$ ,  $1/G$  на  $1/G_*$ ).

Рассмотрим трещину — разрез в теле, испытывающем действие постоянных нагрузок. Если трещина не растет, то напряжения в вязко-упругом теле будут такими же, что и в идеально упругом теле. Действительно, нетрудно убедиться в том, что в каждый момент времени компоненты напряжения удовлетворяют тем же дифференциальным уравнениям и граничным условиям, что и для упругого тела (см., например, книгу Ю. Н. Работнова [2]). Следовательно, напряжения в вершине трещины будут иметь прежнюю особенность вида  $1/\sqrt{r}$ . Перемещения в упругом теле пропорциональны  $1/G$ , поэтому для вязко-упругого тела в случае плоской деформации, в частности, имеем

$$u_y = u_y^0 \left[ G + 1 \int_0^t M(t-s) ds \right], \quad (7)$$

где  $u_y^0$  — перемещение в упругом теле с трещиной (см. формулы (25) § 8.2). Таким образом, перемещения растут с течением времени. В частности, если действуют постоянные нагрузки, то расстояние между берегами трещины (раскрытие  $2u_y$ ) в вязко-упругом теле увеличивается.

Если длина трещины растет, необходимо уточнить вопрос о применимости принципа соответствия. В простейших случаях легко непосредственно убедиться в справедливости такого

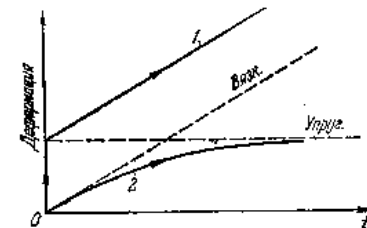


Рис. 8.10.2.

расширения. Более общий анализ содержится, например, в работе Грэма [1]. Принцип соответствия сохраняет силу в задачах теории трещин при монотонно и квазистатически растущих трещинах.

**3. О критериях разрушения.** Основную трудность задачи составляет установление критерия разрушения в вершине трещины в вязко-упругом теле. Сам же эффект расширения трещины при некоторых формальных предположениях получить несложно. Рассмотрим, например, такую схему. Пусть трещина раскрывается силами  $P$ , приложенными к ее берегам (рис. 8.2.6). Тогда в несжимаемом упругом теле имеем (см. § 8.4)

$$l = \frac{3}{8\pi\gamma} \frac{P^2}{E}. \quad (8)$$

Пусть, далее, величина  $\gamma$ , характеризующая поверхностную энергию, остается постоянной (заметим сразу же, что это условие является сильным ограничением). Допуская, что принцип соответствия может быть применен и к соотношению (8), характеризующему предельное состояние трещины в упругом теле, заменим постоянную  $1/E$  оператором  $1/E_*$   $\frac{1}{E_*} = 1/3G_*$ . При  $P = \text{const}$  получаем

$$l = \frac{3P^2}{8\pi\gamma} \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{3} \int_0^t M(t-s) ds \right], \quad (9)$$

т. е. длина трещины растет с течением времени. Так, для среды Максвелла получаем

$$l = \frac{P^2}{8\pi\gamma} \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\mu} \right),$$

т. е. трещина растет с постоянной скоростью.

Для неравновесной трещины в поле однородного растяжения (рис. 8.2.2) критическая длина определяется соотношением (3) § 8.4. В упруго-вязкой среде

$$l_* = \frac{8\gamma}{3\pi P^2} \left[ E - 3 \int_0^t R(t-s) ds \right].$$

т. е. критическая длина уменьшается со временем. Трещина длиной  $l_0$ , меньшей критической, не расширяется, но в момент  $t_*$ , когда  $l_* = l_0$ , произойдет разрушение.

Эти примеры имеют, конечно, иллюстративный характер, поскольку в них используются достаточно произвольные допущения. Здесь вряд ли целесообразно останавливаться на других вариантах аналогичных построений (быть может, и несколько более удачных).

Обычно в феноменологических схемах скорость продвижения трещины связывается так или иначе с темпом раскрытия ее концевой области, которая может быть, как и прежде, малой (см. § 8.4) и немалой (см. § 8.6). Остановимся сначала на схемах с малой концевой областью.

Напомним, что при разрушении упругого тела по условию Гриффитса приток освобождающейся потенциальной энергии  $\Delta E$  расходуется на увеличение поверхностной энергии  $\Delta\Pi$ ; при этом вводится характерная для данного материала удельная поверхностная энергия разрушения  $\gamma$  (§ 8.4). Можно попытаться использовать уравнение энергетического баланса в вершине трещины, продвигающейся в вязко-упругом теле, при сохранении представления Гриффитса о постоянстве  $\gamma$ . Это уравнение изучено в статьях Г. П. Черепанова [2] и В. В. Кострова, Л. В. Никитина и Л. М. Флитмана [1]. Освобождающаяся энергия зависит от реологических свойств среды, что нередко позволяет получить формальным путем некоторое условие разрушения. Выяснилось, однако, что приток энергии к вершине трещины определяется значениями мгновенных модулей упругости. В среде, не обладающей мгновенной упругой реакцией (вязкая жидкость, среда Фойхта и т. д.), приток энергии к вершине трещины при ее продвижении равен нулю, следовательно, при  $\gamma > 0$  разрушение оказывается как бы невозможным. Этот вывод, противоречащий наблюдениям, свидетельствует о недостаточности схемы прямого переноса на вязко-упругие среды энергетического критерия крупного разрушения упругих тел.

**4. Диссипативный критерий разрушения.** При формулировке критерия разрушения важно опираться на интегральные характеристики состояния в вершине трещины. Рассмотрим среду, для которой возможно разделение упругой  $e_{ij}^e$  и необратимой  $e_{ij}^p$  составляющих деформации

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad \text{или} \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p. \quad (10)$$

Подобная среда имеет как бы две реологические степени свободы.

Для *нелинейно упругого тела* имеем  $e_{ij}^p = 0$ , а

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial e_{ij}}, \quad (11)$$

где плотность упругого потенциала  $u = u(e_{ij})$  определена формулой (6) § 8.3.

Для *нелинейно вязкого тела* имеем  $e_{ij}^e = 0$ . Введем *плотность рассеяния*

$$L = \int_0^{(e_{ij})} \sigma_{mn} d\dot{e}_{mn}. \quad (12)$$

При условии несжимаемости компоненты дивергента напряжения здесь равны

$$s_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}. \quad (13)$$

Рассеяние  $L$  связано с диссипативной функцией Релея

$$D = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0. \quad (14)$$

Так, если  $L$  — однородная функция степени  $q$ , то  $qL = 2D$ . В случае линейной вязкости  $q = 2$  и  $L = D$ .

Для вязко-упругой среды Максвелла (5) имеем

$$D = \mu' \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad \left( \mu' = \frac{1}{3} \mu \right). \quad (15)$$

Для вязко-упругой среды Максвелла введем (Л. М. Качанов [10]) дополнительный критерий разрушения, связанный с диссипацией и подлежащим расширением энергетических теорем Райса и Друкера, приведенных в § 8.3.

Рассмотрим тело с трещиной, занимающее объем  $V$ , ограниченный внешней поверхностью  $S$ . На ее части  $S_F$  заданы неизменные во времени поверхностные нагрузки  $X_{ni}^0$ , на остальной же части  $S_u$  — неизменные во времени перемещения  $u_i^0$ . Поверхность трещины  $\Sigma$  свободна.

Пусть тело является *линейно-упругим* ( $e_{ij} = e_{ij}^e$ ). Тогда при расширении трещины на величину  $\Delta \Sigma$  *потенциальная энергия*  $\mathcal{E}$  (см. § 8.3) получит приращение.

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma_+} X_{ni}^+ [\Delta u_i^e] dS, \quad (16)$$

где  $X_{ni}^+ = -\sigma_{ij}^0 n_j^+$  — поверхностные силы на продолжении края трещины, вычисленные для одного из ее берегов до продвижения, а  $[\Delta u_i^e] = \Delta u_i^{e+} - \Delta u_i^{e-}$  — скачок упругих перемещений при расширении трещины. Для линейно-упругого тела приращение  $\Delta \mathcal{E}$  пропорционально квадрату интенсивности напряжений (см., например, формулы (16)–(18) § 8.3).

Рассмотрим теперь для *линейно-вязкого тела* ( $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p$ ) его *рассеяние*

$$R = \int_V L(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV - \int_{S_F} X_{ni}^0 v_i^p dS, \quad (17)$$

где  $v_i^p$  — компоненты скорости, отвечающие скоростям деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ . Повторяя рассуждения, приведенные в § 8.3, нетрудно убедиться в том, что при расширении трещины рассеяние тела

изменится на величину

$$\Delta R = \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma_+} X_{ni}^+ [\Delta v_i^p] dS. \quad (18)$$

Обратимся далее к *вязко-упругому телу* со структурой (10), при условии  $u_i^0 = 0$  на  $S_u$ . Пусть среда — *линейная* и для данной краевой задачи поле напряжений в соответствующем упругом случае не зависит от упругих констант. Тогда, по принципу Вольтерра, такое же поле напряжений будет и в упруго-вязкой задаче. Нетрудно видеть, что при этом полю деформаций  $e_{ij}^e$  отвечает поле перемещений  $u_i^e$ , а полю скоростей деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  — поле скоростей  $v_i^e$ . Стало быть, одновременно верны формулы (16) и (18).

Основываясь на результатах § 8.3, легко теперь видеть, что изменение потенциальной энергии  $\Delta \mathcal{E}$  и изменение рассеяния  $\Delta R$  выражаются через коэффициенты интенсивности напряжений. Так, для равномерно растягиваемой плоскости с щелью эти приращения соответственно равны

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{k^2}{8G} (\kappa + 1) \Delta l, \quad (19)$$

$$\Delta R = -\frac{k^2}{8\mu'} (\kappa + 1) \Delta l, \quad (20)$$

где  $k$  — коэффициент интенсивности напряжений,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$  для плоского напряженного состояния. Следовательно, производные  $d\mathcal{E}/dl$  и  $dR/dl$  имеют конечные значения, определяемые коэффициентом интенсивности напряжений.

В конце § 8.3 для плоской задачи *нелинейно-упругого тела* был рассмотрен интеграл  $J$ , инвариантный относительно всех путей, охватывающих вершину трещины, причем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = -J. \quad (21)$$

Для *нелинейно-вязкого тела* (12), (13) нетрудно аналогичным образом показать, что постоянен интеграл

$$J_* = \int_C \left[ L(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dx_2 - X_{ni} \frac{\partial v_i^p}{\partial x_1} dC \right], \quad (22)$$

причем

$$\frac{dR}{dl} = -J_*. \quad (23)$$

Для линейного вязко-упругого тела при указанных выше условиях результаты (19), (20) и (21), (23) реализуются, очевидно, одновременно.

Приведенные расширения теорем Друкера и Райса на вязко-упругое тело позволяют сформулировать простой критерий разрушения, учитывающий реологию среды и выражающийся через интегральные характеристики.

Пусть для *упругого тела* по-прежнему справедлив критерий разрушения Гриффитса — Ирвина.

Рассмотрим *вязкое тело*. Здесь в процессе течения происходит увеличение плотности энтропии  $ds$ , складывающееся из притока энтропии  $ds'$ , связанного с теплообменом, и возрастания энтропии  $ds''$ , обусловленного внутренними причинами — рассеянием. Первое слагаемое здесь не представляет интереса. Согласно второму началу термодинамики  $ds'' \geq 0$ . Скорость порождения энтропии

$$\frac{ds''}{dt} = \frac{2}{\Theta} D \geq 0,$$

где  $\Theta$  — абсолютная температура. Ограничимся рассмотрением изотермического процесса  $\Theta = \text{const}$  и будем, как обычно, пренебрегать изменением плотности среды. Примем, что накопление диссипации приводит к разрушению (см. А. И. Чудновский [1]). Величина  $-\frac{dR}{dt} = J_*$  характеризует скорость диссипации в вершине трещины, отнесенную к единице длины продвижения трещины. Накопление диссипации связано со скоростью движения вершины трещины  $\dot{l}$ . Но тогда можно положить, что

$$\frac{1}{\dot{l}} \left( -\frac{dR}{dt} \right) = \text{const} = \eta, \quad (24)$$

где  $\eta > 0$  — константа материала, которую можно назвать коэффициентом сопротивляемости. Так как

$$\frac{dR}{dt} < 0,$$

то  $\dot{l} > 0$ , т. е. трещина растет.

Рассмотрим пример щели  $(-l, +l)$  в *линейно-вязкой* растягиваемой плоскости (см. рис. 8.1.4). Здесь  $k = p \sqrt{\pi l}$  и из соотношений (20) и (24) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{p^2 \pi l}{4\mu'} = \eta \dot{l}, \quad (25)$$

из которого вытекает, что

$$l = l_0 \exp \left( \frac{\pi p^2}{4\eta \mu'} t \right), \quad (26)$$

т. е. трещина растет по экспоненциальному закону.

Для другого примера — трещины, раскрываемой двумя равными силами  $P = \text{const}$  (см. рис. 8.2.6), коэффициент интенсивности напряжений  $k = P/\sqrt{\pi l}$  и нетрудно найти, что

$$l = l_0 \left( 1 + \frac{P^2 t}{2\pi \eta \mu' l_0^2} \right)^{1/2}, \quad (27)$$

т. е. рост устойчивой трещины происходит сравнительно медленно.

Перейдем теперь к *вязко-упругому телу*. Ограничимся обсуждением случая, когда справедливо расширение теорем Друкера и Райса. Тогда следует учесть два механизма разрушения — хрупкий и вязкий, действующих как бы параллельно. Хрупкий механизм следует схеме Гриффитса и в критическом состоянии справедливо прежнее соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\gamma,$$

где  $\gamma$  — удельная поверхностная энергия. При вязком разрушении выполняется условие (24).

Поясним эту схему на прежних примерах. В случае трещины  $(-l, +l)$  в растягиваемой линейной вязко-упругой плоскости по условию Гриффитса имеется критическая длина

$$l_* = \frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)p^2}. \quad (28)$$

При  $l < l_*$  действует механизм вязкого разрушения и согласно (26) длина трещины растет экспоненциально; по достижении критического размера  $l_*$  наступает лавинное разрушение.

В примере устойчивой трещины ее длина растет согласно (27), критическое состояние не наступает.

Изложенная выше схема может быть расширена в различных направлениях. Течение материала приводит обычно к накоплению рассеянных по объему повреждений, которые облегчают развитие трещины. В связи с этим коэффициенты  $\gamma$  и  $\eta$  должны, вообще говоря, как-то зависеть от уровня поврежденности. Рассмотрение трещин в сложных вязко-упругих средах, характеризующихся большим числом реологических степеней свободы, требует несколько более общего подхода и дальнейшей конкретизации структуры разрушения.

Заметим, что можно использовать и другие критерии разрушения, например, — накопление необратимой деформации в вершине. Так как коэффициент  $k$  характеризует интенсивность скорости вязкой деформации, то вместо условия (24) тогда естественно взять условие

$$\frac{k}{\dot{l}} = \text{const},$$

приводящее, как легко видеть, к более медленному росту трещин.

**5. Трещины с немалой концевой областью.** Возможности иного подхода к анализу роста трещин доставляет модель трещин с немалой концевой областью. В работах Г. Н. Савина и А. А. Каминского [1, 2], Б. В. Кострова, Л. В. Никитина и Л. М. Флитмана [2] и др. исходными являются представления модели М. Я. Леонова и В. В. Панасюка (см. § 8.6). В концевой области сложное распределение сил сцепления заменяется простым, именно принимается, что здесь действует постоянное напряжение  $\sigma_0$ , если расстояние между берегами трещины не превышает некоторой величины  $\delta_k$  (см. рис. 8.6.5). Если же это расстояние больше  $\delta_k$ , взаимодействие отсутствует. Постоянные  $\sigma_0$ ,  $\delta_k$  характерны для данного материала. Условие ограниченности напряжений определяет длину концевой области  $a$ . Трещина растет, если ее раскрытие достигает критического значения  $\delta_k$ .

Рассмотрим, например, задачу о трещине длиной  $2l$  (см. рис. 8.6.5) в равномерно растягиваемой вязко-упругой пластине из несжимаемого материала. По принципу соответствия распределение напряжений будет таким же, что и в упругой пластине (см. § 8.6), а смещения можно получить из упругих смещений при замене постоянной  $1/G$  оператором  $1/G_*$ . Ранее найденная формула (3) § 8.6 сохраняется, т. е.

$$\frac{a}{l} = 1 - \cos \frac{\pi p}{2\sigma_0},$$

но здесь длины  $a$ ,  $l$  могут с течением времени изменяться.

Условие роста трещины имеет вид

$$(2u_y)_{y=0, x=l-a} = \delta_k. \quad (29)$$

По формуле (19) § 8.2 расстояние между берегами трещины в упругой пластине равно

$$(2u_y)_{y=0} = \frac{4}{3G} (\text{Im } \tilde{Z}_1)_{y=0} = \frac{1}{G} f(x, l).$$

Конкретный вид функции  $f$  для данной задачи здесь не приводится (см., например, В. В. Панасюк [1]). Воздействуя на функцию  $f(x, l)$  оператором  $1/G_*$ , полагая  $x = l - a = l \cos \frac{\pi p}{2\sigma_0} \equiv \equiv al$ , получаем из (29) уравнение

$$\frac{1}{G} f(al, l) + \int_0^l M(t-s) f[al(t), l(s)] ds = \delta_k, \quad (30)$$

определяющее развитие трещины.

В цитированных выше статьях приводится анализ влияния различных факторов — вида оператора  $1/G_*$ , характера нагрузки и т. д.

Схема, опирающаяся на модель Дагдейла, рассмотрена в работах Внуча [1]. Интегрируя численными методами полученное уравнение, Внуча изучил рост трещины при монотонной и пульсирующей нагрузках.

Границы применимости изложенных схем (в частности, условий независимости тех или иных параметров, например,  $\sigma_0$ ,  $\delta_k$  от скорости роста трещины) устанавливаются по экспериментальным данным.

## § 8.11. Динамика трещин

**1. Лавинное распространение трещин.** Выше неоднократно отмечалось, что хрупкое (и «квазихрупкое») разрушение может развиваться с большой скоростью при сравнительно малых энергетических затратах. Вязкое разрушение, наоборот, требует большого расхода энергии и происходит относительно медленно.

При анализе лавинного распространения трещин нельзя пренебрегать силами инерции, необходимо рассматривать динамическую задачу теории упругости для тела с движущейся трещиной. Задачи эти трудны по двум причинам. Во-первых, трудны сами по себе динамические задачи теории упругости (даже в линейной постановке) для тела с распространяющейся щелью. Второе, более принципиальное затруднение заключается в отсутствии критерия разрушения материала в вершине трещины в динамических условиях. В статических задачах, рассмотренных в начале этой главы и ориентированных главным образом на выяснение условий *предельного равновесия* трещин, имеются достаточно простые критерии разрушения (энергетический критерий Гриффитса, критерий Ирвина, некоторые другие схемы), которые, в общем, приводят к одинаковым результатам.

В динамике различные критерии приводят к различным выводам, большую роль здесь играет скорость распространения трещин. Сложность физических процессов в вершине быстро распространяющейся трещины, трудности их экспериментального изучения, наконец, — математические трудности препятствуют анализу картины динамического разрушения. Несмотря на рост исследований в этой области, многое здесь остается проблематичным и неизученным. В этом параграфе кратко излагаются лишь некоторые вопросы динамики трещин. Мы отсылаем читателя к работам Снеддона [2], В. М. Финкеля [1], Г. П. Черепанова [1], Эрдогана [1], Г. И. Баренблатта [1], В. З. Партон и Г. П. Черепанова [1], в которых можно найти многочисленные литературные ссылки и дискуссию по теоретическим и экспериментальным результатам.

Рассмотрим уравнения динамической теории упругости, ограничиваясь для простоты случаем плоской деформации, когда

компоненты смещения

$$u_x = u_x(x, y, t), \quad u_y = u_y(x, y, t), \quad u_z = 0 \quad (1)$$

удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям движения:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \Delta u_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \Delta u_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu = G$  — упругие константы Ламе,  $\rho$  — плотность,  $\Delta$  — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ищем решение уравнений (2) в виде

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\Phi = \Phi(x, y, t)$  — потенциал продольных волн, а  $\Psi = \Psi(x, y, t)$  — потенциал поперечных волн. Внося формулы (3) в уравнения движения и выполняя несложные преобразования, находим, что введенные потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$c_1^2 \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$c_2^2 \Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где положено

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho} \frac{2-2\nu}{1-2\nu}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6)$$

Уравнение (4) описывает распространение волн изменения объема (волны уплотнения,  $P$ -волны). Уравнение (5) описывает распространение волн искажения формы элемента (волны сдвига,  $S$ -волны). Скорости распространения этих волн соответственно равны  $c_1$  и  $c_2$ , причем их отношение равно

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} \equiv \kappa \quad (\kappa > 1). \quad (7)$$

Компоненты напряжения определяются по закону Гука:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= G \left[ \kappa^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \right], \\ \sigma_y &= G \left[ \kappa^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right], \\ \tau_{xy} &= G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Легко, разумеется, выразить компоненты напряжения через производные потенциалов  $\Phi, \Psi$ .

Остановимся на одном замечании. Если вдоль свободной границы полуплоскости  $y > 0$  распространяется волна с амплитудой, уменьшающейся с глубиной  $y$  по экспоненциальному закону, то скорость распространения  $c_R$  такой поверхностной волны (волны Релея) определяется уравнением

$$D(c) \equiv 4 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 0. \quad (9)$$

Релеевская скорость зависит от коэффициента Пуассона. При  $\nu = 0,25$  имеем

$$c_R = 0,919c_2. \quad (10)$$

В задаче о распространяющейся трещине необходимо найти потенциалы  $\Phi, \Psi$  в соответствии с граничными условиями на поверхности тела (включая берега трещины) и начальными данными. Для упрощения задачи размеры тела обычно предполагаются достаточно большими, так что можно рассматривать трещину в неограниченной упругой среде. Так как в принципе возможно решение задачи теории упругости при заданном законе движения щели, то необходимо дополнительное условие, которое определяло бы кинетику расширения трещины. Это условие и является, в сущности, упоминавшимся выше критерием разрушения.

**2. Уравнение энергетического баланса.** Рассмотрим, как и в статическом случае (§ 8.3), уравнение энергетического баланса в вершине трещины (см. работы Г. П. Черепанова [1], Б. В. Кострова, Л. В. Никитина и Л. М. Флитмана [1], Эрдогана [1]). Это уравнение не устраняет отмеченную выше трудность, связанную с критерием разрушения, но позволяет выяснить некоторые детали.

Уравнение энергетического баланса можно составить для любой части тела. Поскольку процесс разрушения локализуется в концевой зоне трещины, естественно рассмотреть малую область, охватывающую вершину трещины и движущуюся вместе с ней. Пусть, для простоты, это будет круговая область радиуса  $\delta$  (рис. 8.11.1). Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{A} - \dot{C}, \quad (11)$$

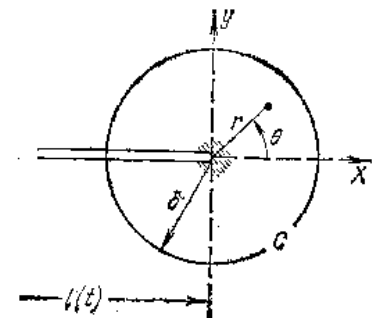


Рис. 8.11.1.



где  $U$  — упругая энергия,  $K$  — кинетическая энергия,  $A$  — работа внешних (контурных) сил,  $\Pi$  — диссипируемая энергия, включающая в себя работу разрушения, пластическую работу и т. д. Так как вершина трещины движется с большой скоростью, можно пренебрегать теплообменом. При хрупком (или квазихрупком) разрушении можно считать, что диссипация энергии происходит в очень малой подобласти, условно показанной на рис. 8.11.1 штриховкой. Но тогда, по схеме Орована и Ирвина, диссипируемую энергию можно рассматривать как поверхностную энергию, следовательно,

$$\dot{\Pi} = \frac{d\Pi}{dt} \frac{dt}{dt} = 2\gamma^* \frac{dl}{dt}, \quad (12)$$

где через  $\gamma^*$  обозначена поверхностная плотность работы разрушения, являющаяся, вообще говоря, некоторой функцией параметров движения вершины трещины.

При симметрии относительно оси  $x$  на продолжении трещины действует лишь нормальное напряжение  $\sigma_y$ , а нормальное перемещение  $u_y$  равно нулю. Рассечем область плоскостью  $y = 0$  на две части и составим для одной из них (т. е. для полукруга) уравнение энергетического баланса. При этом, помимо работы внешних сил на круговом контуре, необходимо учесть работу нормальных напряжений  $\sigma_y$  при движении вершины трещины.

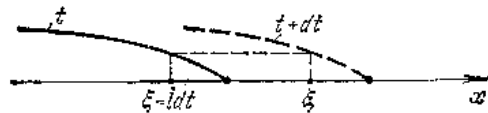


Рис. 8.11.2.

Нормальные напряжения  $\sigma_y$  снимаются, а смещения  $u_y$  берега трещины обратно по направлению, т. е. работа раскрытия отрицательна и по величине возрастает со временем.

Соответствующая мощность раскрытия  $\frac{1}{2} \dot{W}$  также отрицательна.

На рис. 8.11.2 показаны очертания носика трещины в близкие моменты  $t$  и  $t + dt$ . Очевидно, что

$$\frac{1}{2} dW = \frac{1}{2} \dot{W} dt = \frac{1}{2} \int_{l}^{l+dt} \sigma_y(\xi) u_y(\xi - l dt) d\xi, \quad (13)$$

где, как и прежде (§ 8.3), смещения берутся позади вершины трещины и используется теорема Клапейрона. Уравнение баланса для полукруга имеет вид

$$\frac{1}{2} \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{K} = \frac{1}{2} \dot{A} + \frac{1}{2} \dot{W}. \quad (14)$$

Сравнивая соотношения (11) и (14), получаем

$$-\dot{\Pi} = \dot{W}. \quad (15)$$

В статическом случае изменение работы раскрытия  $dW$  равно изменению потенциальной энергии тела  $d\mathcal{E}$  (§ 8.3). В динамических задачах мощность раскрытия  $\dot{W}$  не равна мощности освобождающейся энергии системы; следует учитывать кинетическую энергию приводимой в движение окрестности вершины трещины.

В развернутой форме уравнение баланса (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\delta} \left[ u + \frac{\rho}{2} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) \right] r dr d\theta = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_r \dot{u}_r + \tau_{r\theta} \dot{u}_\theta) \delta d\theta - 2\gamma^* \dot{l}. \end{aligned} \quad (16)$$

**3. Распространение трещины с постоянной скоростью.** Как уже отмечалось, вопрос об условии разрушения в вершине трещины при динамическом ее распространении весьма сложен. Кроме того, решение задач теории упругости с неизвестной заранее скоростью распространения разреза наталкивается на большие математические трудности. Первая попытка определения скорости распространения трещины из анализа размерностей принадлежит Мотту [1]. В связи с отмеченными трудностями рассматриваются более простые задачи о трещинах, распространяющихся с *заданной постоянной скоростью*. Первая задача этого типа — движение трещины с неизменной длиной при постоянной скорости  $v$  — была решена Иоффе [1]. Задача эта сама по себе физически мало реальна, но дает представление о состоянии в окрестности движущейся вершины. Несколько позднее Броберг [1] изучил с помощью преобразования Лапласа задачу о распространении трещины —  $vt < x < vt$ ,  $v = \text{const}$ , в однородно растягиваемой плоскости. Подобные задачи являются автомодельными и, как показано в работах Крегса [1], Е. Ф. Афанасьева [1] и Г. П. Черепанова, решаются в замкнутой форме. Здесь весьма эффективен метод функционально инвариантных решений волнового уравнения, развитый В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым.

**4. Поле в окрестности вершины распространяющейся трещины.** Рассмотрим поле напряжений в окрестности вершины трещины, распространяющейся вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $l = v$ . Введем систему координат  $X, y$ , движущуюся вместе с вершиной  $X = x - vt, y$ .

Так как

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}, \dots,$$

то уравнения (4), (5) для потенциалов принимают вид

$$\alpha_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha_2^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\alpha_1^2 = 1 - \frac{v^2}{c_1^2}, \quad \alpha_2^2 = 1 - \frac{v^2}{c_2^2}.$$

При  $\alpha_1^2 > 0$ ,  $\alpha_2^2 > 0$  эти уравнения эллиптического типа и простым изменением масштаба

$$Y_1 = \alpha_1 y, \quad Y_2 = \alpha_2 y$$

приводятся к уравнениям Лапласа. Естественно ввести комплексные переменные

$$z_1 = X + i\alpha_1 y, \quad z_2 = X + i\alpha_2 y.$$

Тогда потенциалы  $\Phi, \Psi$  можно считать вещественными частями аналитических функций приведенных комплексных переменных. Соответствующие мнимые части обозначим через  $\Lambda, M$ .

Вычисляя компоненты смещения по формулам (3), компоненты напряжения — по формулам (8), исключая производные по  $y$  с помощью дифференциальных уравнений (17) и надлежащих условий Коши — Римана, находим компоненты напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{G} &= (1 + 2\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2 M}{\partial X^2}, \\ \frac{\sigma_y}{G} &= -(1 + \alpha_2^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial^2 M}{\partial X^2}, \\ \frac{\tau_{xy}}{G} &= -(1 + \alpha_2^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - 2\alpha_1 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Пусть поле симметрично относительно оси  $X$ . Примем, далее, для простоты изложения, что в вершине трещины напряжения имеют особенность вида  $1/\sqrt{r}$ , где  $r$  — расстояние от вершины (см. рис. 8.11.1), так же как и в статическом случае. Это предположение не является необходимым и при полном анализе задачи тип особенности устанавливается из решения. Заметим, что указанная особенность вытекает также из уравнения баланса (16) при  $\gamma^* > 0$  (аналогично статическому случаю, § 8.3).

На верхнем берегу трещины напряжения равны нулю, т. е.

$$\text{при } \theta = \pi \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (19)$$

Учитывая характер особенности в вершине, можно, следуя Коттреллу [1] и Е. Н. Шеру [1], искать решение в форме

$$\Phi = a \operatorname{Re} z_1^{1/2}, \quad \Psi = b \operatorname{Re} iz_2^{1/2}, \quad (20)$$

где  $a, b$  — вещественные константы, определяемые из условий на берегах трещины и в ее вершине.

Будем считать заданным коэффициент интенсивности напряжений  $k$ , т. е. пусть при  $\theta = 0, X \geq 0$

$$\sigma_y = \frac{k}{\sqrt{2\pi X}}. \quad (21)$$

В рассматриваемом асимптотическом решении задание коэффициента  $k$  характеризует нагружение тела.

Вместо формул (20) имеем также формулы

$$\Phi + i\Lambda = az_1^{1/2}, \quad \Psi + iM = biz_2^{1/2}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2} = \frac{3}{4} az_1^{-1/2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + i \frac{\partial^2 M}{\partial X^2} = \frac{3}{4} biz_2^{-1/2}. \quad (23)$$

Исходя из тригонометрического представления комплексных переменных  $z_1, z_2$

$$z_n = r_n e^{i\theta_n} = r (\cos \theta + i\alpha_n \sin \theta) \quad (n = 1, 2)$$

и сравнивая формулы для напряжений (18) с формулами (23), легко видим, что решения (20) приводят к нужной особенности в компонентах напряжения.

Удовлетворим теперь граничным условиям на верхнем берегу трещины. Здесь  $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi, y = 0$ , следовательно  $r_1 = r_2 = |X|$  и  $z_1^{-1/2} = -i/\sqrt{|X|}, iz_2^{-1/2} = 1/\sqrt{|X|}$ . Тогда из (23) получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial X^2} = -\frac{3}{4} \frac{a}{\sqrt{|X|}}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = \frac{3}{4} \frac{b}{\sqrt{|X|}}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial X^2} = 0.$$

Легко видеть, что при этом условии  $\sigma_y = 0$  удовлетворяется тождественно, а условие  $\tau_{xy} = 0$  приводит к линейному соотношению

$$2\alpha_1 a - (1 + \alpha_2^2) b = 0.$$

Перейдем к условию (21) в вершине трещины. Полагая  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, y = 0, r_1 = r_2 = \sqrt{X}$ , определяя аналогично предыдущему вторые производные потенциалов из (23), внося их в формулы (18) и (21), получаем второе линейное соотношение

$$-(1 + \alpha_2^2) a + 2\alpha_2 b = \frac{4}{3} \frac{k}{\sqrt{2\pi G}}.$$

Решая эти уравнения, находим

$$a = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} \frac{k}{G} \frac{(1 + \alpha_2^2)}{D(v)}, \quad b = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}} \frac{k}{G} \frac{\alpha_1}{D(v)},$$

где определитель системы

$$D(v) \equiv 4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2 = 4 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c_1^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)} - \left(2 - \frac{v^2}{c_2^2}\right)^2 \quad (24)$$

аналогичен выражению  $D(c)$  в уравнении (9), определяющем скорость релеевской волны.

Отделяя в (23) вещественную и мнимую части, внося соответствующие вторые производные и найденные значения постоянных в формулы (18), нетрудно получить формулы для компонент напряжения. Приведем лишь их структуру из-за некоторой громоздкости результатов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k}{\sqrt{2\pi r^3}} \frac{1}{GD(v)} F_x(\alpha_1, \alpha_2, \theta), \\ \sigma_y &= \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{GD(v)} F_y(\alpha_1, \alpha_2, \theta), \\ \tau_{xy} &= \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{GD(v)} F_{xy}(\alpha_1, \alpha_2, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где  $F_x, F_y, F_{xy}$  — надлежащие функции.

Напряженное состояние в окрестности вершины зависит от полярного угла  $\theta$  и скорости распространения  $v$  (через параметры  $\alpha_1, \alpha_2$ ). При  $v \rightarrow 0$  формулы (25) переходят в формулы (24).

§ 8.2 для компонент напряжения в окрестности неподвижной вершины трещины в растягиваемой плоскости.

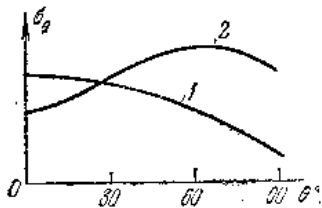


Рис. 8.11.3.

Используя полученные формулы, можно вычислить нормальное напряжение  $\sigma_\theta$  на наклонной площадке  $\theta = \text{const}$ :

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta.$$

Вычисления показывают, что график  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\theta)$  существенно зависит от скорости распространения  $v$ . При небольшой скорости напряжение  $\sigma_\theta$  монотонно убывает (кривая 1 на рис. 8.11.3). С увеличением скорости на кривой  $\sigma_\theta$  появляется максимум (кривая 2), т. е. на некоторой площадке  $\theta = \theta_*$ , наклоненной к трещине, напряжение  $\sigma_\theta$  будет больше, чем на продолжении трещины  $\theta = 0$ .

Если допустить, что разрушение вызывается наибольшим нормальным напряжением  $\sigma_\theta$ , то отсюда вытекает, что трещина с возрастанием скорости должна ветвиться. Это соображение, высказанное Иоффе [1], качественно подтверждается наблюдениями (рис. 8.11.4). По вычислениям возможность ветвления возникает при  $v \approx 0,6 c_2$  (для  $\nu = 0,25$ ).

В связи с этим иногда полагают, что предельная скорость распространения  $v$  лимитируется приведенным значением  $0,6 c_2$ . Разумеется, эти соображения носят качественный характер вследствие известной условности выбранного критерия разрушения.

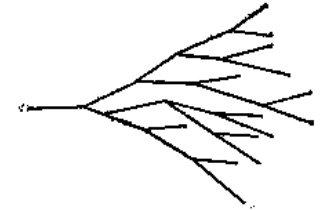


Рис. 8.11.4.

Как отмечалось выше (§ 8.2), в статическом случае при плоской деформации напряженное состояние близко к гидростатическому растяжению, что затрудняет пластическое течение. В динамическом случае перед трещиной ( $\theta = 0$ ) отношение главных напряжений  $\sigma_y/\sigma_x$  быстро падает с ростом скорости (рис. 8.11.5, пунктир). Следовательно, возникают более благоприятные условия для развития пластических деформаций. При этом, однако, следует помнить о зависимости пластических свойств материала от скорости деформирования.

Перейдем теперь к уравнению энергетического баланса (16). Внося в него значения смещений, деформаций и напряжений, получаем при  $\delta \rightarrow 0$

$$k^2 = 4G\gamma^* \frac{D(v)}{\alpha_1(1 - \alpha_2^2)}. \quad (26)$$

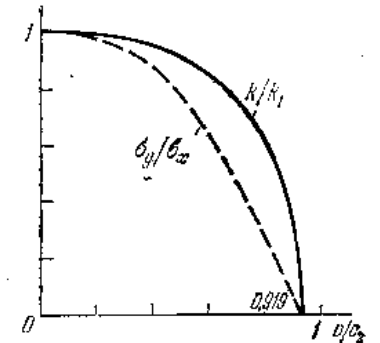


Рис. 8.11.5.

Как уже подчеркивалось, в динамических условиях  $\gamma^*$  может зависеть от скорости распространения трещины. Допустим, однако, что параметр  $\gamma^*$  постоянен и имеет такое же значение, что и в статических условиях, т. е. пусть  $\gamma^* = \gamma$ .

В статических условиях коэффициент интенсивности напряжений в соответствии с формулой Гриффитса (3) § 8.4 равен

$$k_1^2 = p^2 \pi l = \frac{4G\gamma}{1 - \nu}. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \frac{1 - \nu}{\alpha_1(1 - \alpha_2^2)} D(v). \quad (28)$$

При  $v \rightarrow 0$  это отношение стремится к единице. На рис. 8.11.5 показана зависимость отношения  $k/k_1$  от скорости распространения трещины  $v/c_2$ , вычисленная по приведенной формуле для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$ . С увеличением скорости  $v$  коэффициент  $k$  монотонно уменьшается; он обращается в нуль, когда скорость  $v$  достигает релеевской скорости  $c_R$ , т. е. при

$$\frac{v}{c_2} = 0,919.$$

Множитель  $k$  характеризует приток к вершине трещины освобождающейся энергии, которая расходуется на разрушение. Этот приток с ростом скорости  $v$  уменьшается. Релеевская скорость  $c_R$  является верхней границей для скорости самопроизвольного распространения трещины, т. е.

$$v \leq c_R.$$

Распространение трещины со скоростью выше релеевской требует передачи энергии извне в вершину трещины каким-либо специальным способом. Это имеет место, например, при лазерном возбуждении трещины (см. Каррен, Шоки и Випклер [1]).

**Б. Заключительные замечания.** Кроме плоских динамических задач, получено решение осесимметричной задачи о распространении дискообразной трещины. Рассмотрены также некоторые вопросы распространения трещин в анизотропной среде.

В динамических задачах о движении трещин, так же как и в статическом случае, важно учитывать пластические деформации, развивающиеся в окрестности вершины. В случае вырожденных пластических зон последние можно имитировать заданием напряжений, равных пределу текучести на продолжении щели, или использовать некоторые условия в вершине трещины относительно пластической работы. В такой постановке изучен ряд динамических задач (Аткинсон [1], Каннинен [1], Си и др.).

Движение трещин в вязко-упругом теле рассматривали Б. В. Костров, Л. В. Никитин и Л. М. Флитман [2], Аткинсон и Лист [1] и др.

Дальнейшие ссылки можно найти в работах, упомянутых в начале параграфа.

## ЛИТЕРАТУРА

Список литературы не претендует на полноту и содержит, как правило, лишь цитированную литературу. Дополнительные ссылки можно найти в приведенных книгах, сборниках, обзорах, а также в журналах, печатающих работы по механике разрушения: Прикладная математика и механика (ПММ); Механика твердого тела (МТТ); Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ); Прикладная механика (ПМ); Проблемы прочности (ПП); Journ. Appl. Mech. (JAM, выход в русск. перев.); Journ. Mech. a. Phys. of Solids (JMPS); Intern. Journ. Fracture Mech. (IJFM); Intern. Journ. Eng. Sci. (IJES); Intern. Journ. Mech. Sci. (IJMS); Intern. Journ. of Solids a. Struct. (IJSS); Zst. angew. Math. u. Mech. (ZAMM) и др. См. также сб. переводов «Механика», изд-во «ИЛ», и реферативные журналы «Механика» и Appl. Mech. Rev.

Алексеев С. А.

1. К теории усталостного разрушения. МТТ, 1968, № 3.

Аткинсон (Atkinson C.)

1. The interaction between a crack and an inclusion. IJES, 1972, т. 10, № 2.

Аткинсон и Лист (Atkinson C. a List R.)

1. A moving crack problem in a viscoelastic solid. IJES, 1972, т. 10, № 3.

Афанасьев Е. Ф.

1. Некоторые однородные решения динамической теории упругости. В кн. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа». Изд-во «Наука», 1972.

Баренблатт Г. И.

1. Математическая теория трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.

2. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. 23, №№ 3, 4, 5.

Биргер И. А.

1. Вероятность разрушения, запасы прочности и диагностика. В кн. «Проблемы механики твердого деформируемого тела». Изд-во «Судостроение», 1970.

2. Сравнение условий усталостной прочности. Вестник машиностроения, 1954, № 9.

Болотин В. В.

1. Статистические методы в строительной механике. Изд-во «Стройиздат», 1961.

2. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. Изд-во «Стройиздат», 1971 г.

Бонт (Bont R. A.)

1. A special case of uniaxial creep, including rupture. «Kungl. Tekniska Högskolan Publication». Stockholm, 1962, № 137.

Бриджмен П.

1. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. Изд-во «ИЛ», 1955.

- Броберг (Broberg K. B.)  
1. The propagation of a brittle crack. Arkiv för fysik, 1960, т. 18, № 2.
- Будянский и Райс (Budiansky B. a. Rice J.)  
1. Conservation laws and energy-release rates. JAM, 1973, № 1.
- Бюкнер (Buesckner H. F.)  
1. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. Trans. ASME, 1958, т. 80, № 6.
- Вакуленко А. А. и Качанов Л. М.  
1. Теория пластичности. В кн. «Механика в СССР за 50 лет», т. 3. Изд-во «Наука», 1972.
- Ватанаби и Адзуми (Watanabe K. a. Atsumi A.)  
1. Long circular cylinder having an infinite row of penny-shaped cracks. IJES, 1972, т. 10, № 2.
- Вейбулл В.  
1. Усталостные испытания и анализ их результатов. Изд-во «Машиностроение», 1964.
- Вейль (Weil N. A.)  
1. Tensile instability of thin-walled cylinders of finite length. IJMS, 1963, т. 5, р. 487.
- Внук (Wnuk M.)  
1. Subcritical growth of fracture (inelastic fatigue). IJFM, 1971, т. 7, № 4.
- Волков С. Д.  
1. Статистическая теория прочности. Изд-во «Машгиз», 1960.
- Гейки Г.  
1. О медленных стационарных течениях в пластических телах. В сб. переводов «Теория пластичности». Изд-во «ИЛ», 1948.
- Глен (Glen J.)  
1. The shape of creep curves. Trans. ASME, 1963, т. D-85, № 4.
- Глякман Л. А.  
1. Коррозионно-механическая прочность металлов. Изд-во «Машгиз», 1955.
- Гольденблат И. И. и Копнов В. А.  
1. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. Изд-во «Машиностроение», 1968.
- Гоффман О. и Закс Г.  
1. Введение в теорию пластичности для инженеров. Изд-во «Машгиз», 1957.
- Гохфельд Д. А.  
1. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. Изд-во «Машиностроение», 1970.
- Григорьев А. С.  
1. Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях. ПММ, 1957, № 6.  
2. Равновесие безмоментных оболочек вращения при больших деформациях. ПММ, 1961, т. 25, № 6.  
3. Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения. МТТ, 1967, № 1.
- Грин А. и Адкинс Дж.  
1. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд-во «Мир», 1965.
- Гриффитс (Griffith A. A.)  
1. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, т. A-221, с. 163—198.
- Грэм (Graham G. A.)  
1. The correspondence principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary value problems involving time-dependent boundary regions. Quart. Appl. Math., 1968, т. 26, с. 167—174. См. дополнительно тот же журн. — 1970, т. 27, с. 497—507.

- Гузь А. Н.  
1. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1973.
- Гуль В. Е.  
1. Структура и прочность полимеров. Изд-во «Химия», 1971.
- Даб и Арьяратнам (Dubey R. a. Araratnam S.)  
1. Necking instabilities in elastic-plastic plates. IJES, 1972, т. 10, № 2.
- Дагдейл (Dugdale D. S.)  
1. Yielding of steel sheets containing slits. JMPS, 1960, т. 8, № 2.
- Данкомби (Duncombe E.)  
1. Plastic instability and growth of grooves and pathes in plates or tubes. IJMS, 1972, т. 14, № 5.
- Джонсон, Гендерсон и Хан (Johnson A. E., Henderson J. a. Khan B.)  
1. Complex-stress creep, relaxation, and fracture of metallic alloys. Edinburgh, 1962.
- Друкер (Drucker D. C.)  
1. A continuum approach to the fracture of metals. В кн. «Fracture of solids». N. Y. — London, Изд-во «Intersci. Publ.», 1963.
- Екоборн Т.  
1. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. Изд-во «Металлургия», 1971.
- Журков С. Н.  
1. Проблема прочности твердых тел. Вестник АН СССР, 1957, № 11.
- Захаров К. В.  
1. Критерий прочности для слоистых масс, Пластические массы, 1961, № 8.
- Ивлев Д. Д.  
1. Теория идеальной пластичности. Изд-во «Наука», 1966.  
2. О теории трещин квазихрупкого разрушения. ПМТФ, 1967, № 6.
- Ильюшин А. А.  
1. Пластичность. Изд-во «Гостехиздат», 1948.  
2. Об одной теории длительной прочности. МТТ, 1967, № 3.
- Ильюшин А. А. и Лепский В. С.  
1. Сопротивление материалов. Изд-во «Физматгиз», 1959.
- Иоффе (Yoffe E.)  
1. The moving Griffith crack. Philos. Mag., 1951, т. 42, № 2.
- Ирвин (Irwin G. R.)  
1. Fracture. В кн. «Springer Encyclopedia of Physics», т. 6, 1958.  
2. Analysis of stresses and strains near the end of a crack. JAM, 1957, т. 24, № 3.  
3. Линейная механика разрушения, переход от вязкого разрушения к хрупкому и методы контроля разрушения. В сборнике [4].
- Исида (Isida M.)  
1. Data on crack tip stress intensity factors. J. Japan Soc. Mech. Eng-s, 1972, т. 75, № 642.
- Канаун С. К. и Чудновский А. И.  
1. О квазихрупком разрушении. МТТ, 1970, № 3.
- Каннинен (Kanninen M. F.)  
1. An estimate of the limiting speed of a propagating ductile crack. JMPS, 1968, т. 16, № 4.
- Каррен, Шоки и Винклер (Curran D., Shokey D. a. Winkler S.)  
1. Crack propagation at supersonic velocities. IJFM, 1970, т. 6, № 3.
- Кач Ш. Н.  
1. Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления. Изд. АН СССР, ОН, 1957, № 10.
- Качанов Л. М.  
1. Основы теории пластичности. Изд-во «Наука», 1969.  
2. Теория ползучести. Изд-во «Физматгиз», 1960.

3. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
  4. Время разрушения в условиях ползучести. В кн. «Проблемы механики сплошной среды». Изд-во АН СССР, 1961.
  5. Время разрушения неравномерно нагретой стенки. В кн. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа». Изд-во «Наука», 1972.
  6. Некоторые вопросы разрушения в условиях ползучести. — В кн. «Ползучесть и длительная прочность». Изд-во Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1963.
  7. К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении. Вестник ЛГУ, 1972, № 1.
  8. О времени разрушения при воздействии жидко-металлической среды. В кн. «Исследов. по упругости и пластичности», вып. 3. Изд-во ЛГУ, 1964.
  9. О разрушении и росте трещин. МТТ, 1968, № 1.
  10. Рост трещин в упруго-вязком теле. Вестн. ЛГУ, 1973, № 19.
- Киялбаев Д. А. и Чудновский А. И.
1. О разрушении деформируемых тел. ПМТФ, 1970, № 3.
- Койтер В. Т.
1. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. Изд-во «ИЛ», 1961.
- Костров Б. В., Никитин Л. В. и Флитман Л. М.
1. Механика хрупкого разрушения. МТТ, 1969, № 3.
  2. Распространение трещин в вязко-упругих телах. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1970, № 7.
- Костюк А. Г.
1. О деформации и разрушении кристаллического материала при сложной программе нагружения. ПМТФ, 1967, № 3.
- Коттрел (Cotterell V.)
1. On the nature of moving crack. JAM, 1964, т. 31, № 1.
- Крегс (Craggs J. W.)
1. Fracture criteria for use in continuum mechanics. В кн. «Fracture of solids», N. Y. — London. Изд-во «Intersci. Publ.», 1963.
- Левитас Е. М.
1. Время разрушения труб под действием внутреннего давления и осевой силы. В кн. «Исслед. по упругости и пластичности», вып. 4. Изд-во ЛГУ, 1965.
- Леонов М. Я.
1. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
- Леонов М. Я. и Панасюк В. В.
1. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. ПМ, 1959, т. 5, № 4.
- Лихтман В. И., Щукин Е. Д. и Ребиндер П. А.
1. Физико-химическая механика материалов. Изд-во АН СССР, 1962.
- Ломакин В. А.
1. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. Изд-во «Наука», 1970.
- Лурье А. И.
1. Теория упругости. Изд-во «Наука», 1970.
  2. Пространственные задачи теории упругости. Изд-во «Гостехиздат», 1955.
- Майлз (Miles J. P.)
1. Bifurkation in plastic flow under uniaxial tension. JMPS, 1971, т. 19, № 2.
- Макклинтон Ф. и Аргон А.
1. Деформация и разрушение материалов. Изд-во «Мир», 1970.
- Макклинтон Ф. и Ирвин Д.
1. Вопросы пластичности в механике разрушения. В кн. «Прикладные вопросы вязкости разрушения». Изд-во «Мир», 1968.

- Максак В. И. и Черноморченко В. И.
1. Устойчивость при растяжении и испытании трубок на прочность. ПП, 1970, № 5.
- Малинин Н. Н.
1. Прикладная теория пластичности и ползучести. Изд-во «Машиностроение», 1968.
  2. Устойчивость двухосного пластического растяжения анизотропных листов и цилиндрических оболочек. МТТ, 1971, № 2.
- Малмейстер А. К., Тамуж В. П. и Тетерс Г. А.
1. Сопrotивление жестких полимерных материалов. Изд-во «Зинатне», Рига, 1972.
- Марин (Marin J.)
1. Mechanical behavior of engineering materials, N. J., Изд-во «Prentice — Hall», 1962.
- Мартин и Леки (Martin J. a. Leckie F.)
1. On the creep rupture of structures. JMPS, 1972, т. 20, № 4.
- Марциняк (Marciniak Z.)
1. Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych. Mechan. teor. i stos., 1966, т. 4, № 3.
- Милейко С. Т.
1. Оценка долговечности в условиях ползучести. МТТ, 1968, № 5.
- Морозов Е. М.
1. Энергетическое условие роста трещин в упруго-пластических телах. ДАН СССР, 1969, т. 187, № 1.
- Морозов Е. М. и Фридман Я. Б.
1. Некоторые закономерности в теории трещин. В кн. «Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях», вып. 2, Изд-во «Атомиздат», 1968.
  2. Трассектории трещин хрупкого разрушения как геодезические линии на поверхности тела. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 1.
- Моссаковский В. И. и Рыбка М. Т.
1. Попытка построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффитса. ПММ, 1955, т. 29, № 2.
- Мотт (Mott N.)
1. Fracture of metals: theoretical considerations. Engineering, 1948, т. 165, № 4275.
- Мусхелишвили Н. И.
1. Некоторые основные задачи теории упругости. Изд-во «Наука», 1966.
  2. Сингулярные интегральные уравнения. Изд-во «Наука», 1968.
- Надаи А.
1. Пластичность и разрушение твердых тел. т. 1. Изд-во «ИЛ», 1954.
  2. Пластичность и разрушение твердых тел, т. 2. Изд-во «Мир», 1969.
- Наместников В. С.
1. О времени до разрушения при ползучести. ПМТФ, 1961, № 1.
- Нил Б. Г.
1. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. Изд-во «Стройиздат», 1961.
- Новожилов В. В.
1. Теория упругости. Изд-во «Судпромгиз», 1958.
  2. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. ПММ, 1969, т. 33, № 2.
  3. К основам теории равновесных трещин в упругих телах. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
  4. Теория тонких оболочек. Изд-во «Судпромгиз», 1962.
  5. О пластическом разрыхлении. ПММ, 1965, т. 29, № 4.

- Новожилов В. В. и Рыбакина О. Г.  
1. Перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении. МТТ, 1966, № 5.
- Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В. и Геминев В.  
1. Теория ползучести и длительной прочности металлов. Изд-во «Металлургия», издат., 1959.
- Одквист (Odqvist F. K. G.)  
1. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford, Изд-во «Clarendon Press», 1966.
- Одквист и Хальт (Odqvist F. K. G. a. Hult J.)  
1. Some aspects of creep rupture. Arkiv för fysik, 1961, т. 19, № 26.  
2. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Изд-во «Springer», Berlin, 1962, 303 с.
- Одквист и Эрикссон (Odqvist F. K. G. a. Eriksson J.)  
1. Influence of redistribution of stress on brittle creep rupture of thick-walled tubes under internal pressure. — В кн. «The Prager Anniversary Volume», N. Y. — London, 1960.
- Панасюк В. В.  
1. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, Изд-во «Наукова думка», 1968.
- Парис П. и Си Д.  
1. Анализ напряженного состояния около трещин. — В кн. «Прикладные вопросы вязкости разрушения». Изд-во «Мир», 1968.
- Парис и Эрдоган (Paris P. S. a. Erdogan F.)  
1. A critical analysis of crack propagation laws. Trans. ASME, 1963, т. D-85, № 4.
- Партов В. З. и Черепанов Г. П.  
1. Механика разрушения. В кн. «Механика в СССР за 50 лет», т. 3. Изд-во «Наука», 1972.
- Пауль (Paul V.)  
1. Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture. В кн. «Fracture», т. 2, N. Y.-London, «Academic Press», 1968.
- Пехник и Хжановски (Piechnik S. a. Chrzapanowski M.)  
1. Time of total creep rupture of beam under combined tension and bending. IJSS, 1970, т. 6, с. 453—477.
- Писаренко Г. С. и Лебедев А. А.  
1. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1969.
- Прагер В.  
1. Введение в механику сплошных сред. Изд-во «ИЛ», 1963.  
2. Проблемы теории пластичности. Изд-во «Физматгиз», 1958.  
3. Приспособляемость в упруго-пластической среде, подвергнутой циклам нагрузки. В сб. переводов «Механика», № 6 (51). Изд-во «ИЛ», 1958.
- Прагер В. и Ходж Ф.  
1. Теория идеально пластических тел. Изд-во «ИЛ», 1956.
- Работнов Ю. И.  
1. Сопротивление материалов. Изд-во Физматгиз, 1962.  
2. Ползучесть элементов конструкций. Изд-во «Наука», 1966.  
3. Механизм длительного разрушения. В кн. «Вопросы прочности материалов и конструкций». Изд-во АН СССР, 1959.  
4. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность. МТТ, 1967, № 3.  
5. О разрушении твердых тел. В кн. «Проблемы механики твердого деформированного тела». Изд-во «Судостроение», 1970.  
6. Creep rupture under stress concentration. В кн. «Advances in creep design», London. Изд-во «Appl. Sci. Publ.», 1971.
- Работнов Ю. И. и Милейко С. Т.  
1. Кратковременная ползучесть. Изд-во «Наука», 1970.

- Райс (Rice J.)  
1. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. В кн. «Fracture», т. 2. Изд-во «Academic Press», N. Y. — London, 1968.
- Райс и Друкер (Rice J. a. Drucker D.)  
1. Energy changes in stressed bodies due to void and crack growth. IJFM, 1967, т. 3, № 1.
- Райс и Розенгрэн (Rice J. a. Rosengren G.)  
1. Plane strain deformation near a crack tip in a powerlaw hardening material. JMPS, 1968, т. 16, № 1.
- Регель В. Р., Слуккер А. И. и Томашевский Э. Е.  
1. Кинетическая природа прочности твердых тел. Успехи физ. наук, 1972, т. 106, № 2.
- Римрот (Rimrott F.)  
1. Versagenzeit beim Kriechen. Ing. Arch, 1959, т. 27, № 3.
- Римрот и Люк (Rimrott F. a. Luke J.)  
1. Large strain creep of rotating cylinders. ZAMM, 1961, т. 41, № 12.
- Робинсон (Robinson E. L.)  
1. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels. Tr. ASME, 1952, т. 74, № 5.
- Розенберг В. М.  
1. Ползучесть металлов. Изд-во «Металлургия», 1967.
- Розенблюм В. И.  
1. О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.  
2. Время до разрушения вращающегося диска в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, № 3.
- Савин Г. Н. и Каминский А. А.  
1. Рост трещин при разрушении твердых полимеров. ПМ, 1967, т. 3, № 9.  
2. Об одной модели разрушения вязко-упругих сред. ПМ, 1971, т. 7, № 9.
- Сандерс (Sanders J. L.)  
1. On the Griffith — Irwin fracture theory. JAM, 1960, № 2.
- Саркисян М. С.  
1. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел. ПММ, 1969, т. 24, № 6.
- Сборники  
1. Чувствительность механических свойств к действию среды. Избр. докл. на междунар. симп. Изд-во «Мир», 1969.  
2. Прикладные вопросы вязкости разрушения. Изд-во «Мир», 1968.  
3. Разрушение твердых полимеров. Изд-во «Химия», 1971.  
4. Браун У., Сроули Дж., Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации. Изд-во «Мир», 1972.  
5. Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению. Изд-во «Мир», 1972.  
6. Физика прочности и пластичности. Изд-во «Металлургия», 1972.  
7. Разрушение, т. 1. Изд-во «Мир», 1973.
- Свифт (Swift H.)  
1. Plastic instability under plane stress. JMPS, 1952, т. 1, № 1.
- Сдобырев В. П.  
1. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
- Седерквист (Söderquist B.)  
1. Creep rupture under uniform radial tension of a disk with a circular hole. Acta Polyt. Scandinavica, 1958, № 53.
- Седов Л. И.  
1. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд-во «Наука», 1965.

2. Введение в механику сплошной среды. Изд-во «Физматгиз», 1962.
  3. Механика сплошной среды, т. 1. Изд-во «Наука», 1973.
  4. Механика сплошной среды, т. 2. Изд-во «Наука», 1973.
- Серенсен С. В., Когаев В. П. и Шнейдерович Р. М.  
1. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Изд-во «Машгиз», 1963.
- Си и Либовиц (Sih G. and Liebowitz H.)  
1. Mathematical theories of brittle fracture. В кн. «Fracture», vol. 2, N. Y., London. Изд-во «Academic Press», 1968.
- Снеддон И. (Sneddon I.)  
1. Преобразования Фурье. Изд-во «ИЛ», 1955.  
2. Crack problems in the theory of elasticity. В кн. «Developments in theoretical and applied mechanics», т. 3. Изд-во «Pergamon Press», N. Y. — London, 1967.
- Снеддон И. Н. и Берри Д. С.  
1. Классическая теория упругости. Физматгиз, 1961.
- Снеддон и Лавенграб (Sneddon I. a. Lowengrub M.)  
1. Crack problems in the classical theory of elasticity. Изд-во «Wiley and Sons», 1972.
- Солодилов Ю. И.  
1. Большие деформации безмоментной сферической оболочки, нагруженной давлением жидкости. МТТ, 1966, № 4.
- Станюкович А. В.  
1. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов. Изд-во «Металлургия», 1967.
- Сторакерс (Storakers B.)  
1. Plastic and visco-plastic instability of a thin tube under internal pressure, torsion and axial tension. IJMS, 1968, т. 10, № 6.  
2. Ductile creep failure under complex stress, J. de Mécanique, 1967, т. 6, № 3.  
3. Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure. Acta Polyt. Scandinavica, 1969, № 44.
- Сэлмон (Salmon M.)  
1. Plastic instability of cylindrical shells with rigid end closures. Trans. ASME, 1963, E-30, № 3.
- Таира и Отани (Taira S. a. Ohtani R.)  
1. Creep of tubular specimens under combined stress. В кн. «Advances in creep design». Изд-во «Appl. Sci. Publ.», London, 1971.
- Тамуж В. П. и Лагздиньш А. Ж.  
1. Вариант построения феноменологической теории разрушения. Механика полимеров, 1968, № 4.
- Томас Т.  
1. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. Изд-во «Мир», 1964.
- Томленов А. Д.  
1. Теория пластического деформирования металлов. Изд-во «Металлургия», 1972.
- Трунин И. И.  
1. Критерий прочности в условиях ползучести. ПМ, 1965, т. 1, № 7.
- Уфлянд Я. С.  
1. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во «Наука», 1967.
- Феодосьев В. И.  
1. Сопротивление материалов. Изд-во «Наука», 1972.
- Финкель В. М.  
1. Физика разрушения. Изд-во «Металлургия», 1970.
- Фишер (Fischer L.)  
1. How to predict structural behavior of R. P. laminates. Modern. Plastics, 1960, № 6.

- Фрейденталь (Freudenthal A. M.)  
1. Statistical approach to brittle fracture. В кн. Fracture, т. 2. Изд-во «Academic Press», N. Y. — London, 1968.
- Фридман Я. Б.  
1. Механические свойства металлов. Изд-во «Оборонгиз», 1952.
- Фушизава и Такеяма (Fuchizawa S. a. Takeyama H.)  
1. Study on the bulge forming of thin-walled cylinder. J. Japan Soc. Precision Eng-g, 1971, т. 37, № 8.
- Хажинский Г. М.  
1. О теории ползучести и длительной прочности металлов. МТТ, 1971, № 6.
- Хальберт, Хан, Розенфельд и Каннинен (Hulbert L., Hahn G., Rosenfield A. a. Kanninen M.)  
1. An elastic-plastic analysis of a crack in a plate of finite size. В кн. «Applied Mechanics, Proc. 12 Intern. Congr.». Изд-во «Springer», 1969.
- Хальт Я. и Макклиток Ф.  
1. Упруго-пластическое распределение напряжений и деформаций вокруг острой выточки при повторном сдвиге. В сб. переводов «Механика», № 6 (58). Изд-во «ИЛ», 1959.
- Хачинсон (Hulshinson J. W.)  
1. Plastic stress and strain fields at a crack tip. JMPS, 1968, т. 16, № 5.
- Хестерманс и Дефдет (Hestermans P. a. Deffet L.)  
1. Creep of thick-walled cylinders under internal pressure. В кн. «Engineering solids under pressure». Издание Inst. Mechan. Eng-s, London, 1971.
- Хжавовски (Chrzanowski M.)  
1. On the possibility of describing the complete process of metallic creep. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. techn., 1972, т. 20, № 3. См. также Изв. вузов, Машиностроение, 1971, № 11.
- Хилл Р. (Hill R.)  
1. Математическая теория пластичности. Изд-во «Гостехиздат», 1965.  
2. Об определяющих неравенствах для простых материалов, I, II. В сб. перев. «Механика», № 4 (116). Изд-во «ИЛ», 1969.  
3. Бифуркация и единственность в нелинейной механике сплошной среды. В кн. «Проблемы механики сплошной среды». Изд-во АН СССР, 1961.
- Хиллер (Hillier M.)  
1. Tensile plastic instability of thin tubes, I. JMPS, 1952, т. 1, № 1.  
2. Tensile plastic instability of thin tubes, II. IJMS, 1965, т. 7, № 8.
- Хофф (Hoff N.)  
1. The necking a. the rupture of rods subjected to constante tensile loads. JAM, 1953, т. 20, № 1.
- Черепанов Г. П.  
1. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, № 3.  
2. К математической теории равновесных трещин. МТТ, 1967, № 6.
- Чудловский А. И.  
1. О разрушении макротел. В кн. «Исслед. по упругости и пластичности», вып. 9. Изд-во ЛГУ, 1973.
- Шер Е. Н.  
1. Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины. ПМТФ, 1969, № 3.
- Шнейдерович Р. М.  
1. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружении. Изд-во «Машиностроение», 1968.
- Эллиот (Elliot H. A.)  
1. An analysis of the conditions for rupture due to Griffith crack. Proc. Phys. Soc., 1947, т. 59, № 2.
- Эрдоган (Erdogan F.)  
1. Crack-proragation theories. В кн. «Fracture», т. 2, Изд-во «Academic Press», N. Y. — London, 1968.



## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адкинс Дж. 86, 298  
 Алексеев С. А. 208, 297  
 Апдраде 97  
 Аргон А. 22, 300  
 Арьяратнам (Ariyaratnam) 82, 299  
 Аткинсон (Atkinson C.) 296, 297  
 Афанасьев Е. Ф. 291, 297  
 Афанасьев Н. Н. 13  
 Ацуми (Atsumi A.) 251, 298  
  
 Баренблатт Г. И. 241, 242, 243, 244, 253, 287, 297  
 Бейли (Bailey) 207  
 Берри Д. С. 245, 304  
 Биргер И. А. 6, 14, 297  
 Бойль 115  
 Болотин В. В. 13, 297  
 Больцман 278  
 Бонт (Bont R. A.) 161, 297  
 Браун У. 303  
 Бриджмен П. 297  
 Броберг (Broberg K. B.) 291, 298  
 Будянский (Budiansky B.) 237, 298  
 Бурдуковский В. В. 302  
 Бюклер (Buesckler H. F.) 276, 298  
  
 Вакуленко А. А. 114, 298  
 Ватанаби (Watanabe K.) 251, 298  
 Вейбулл В. 12, 13, 298  
 Вейль (Weil N. A.) 91, 95, 298  
 Винклер (Winkler S.) 296, 299  
 Внук (Wnuk M.) 286, 298  
 Волков С. Д. 13, 298  
 Вольтерра 279  
  
 Галилей 29  
 Гаусс 57  
 Геминион В. Н. 302  
 Гендерсон (Henderson J.) 299  
 Генки Г. 97, 298  
 Гильберт 40, 245, 261  
 Глен (Glen J.) 12, 298  
 Гликман Л. А. 200, 298  
 Гольдсблат И. И. 27, 34, 40, 45, 298  
  
 Гоффман О. 298  
 Гохфельд Д. А. 72, 76, 298  
 Григорьев А. С. 91, 298  
 Грин А. 86, 298  
 Гриффитс (Griffith A. A.) 211, 212, 213, 214, 231, 233, 237, 238, 239, 240, 242, 268, 269, 273, 281, 284, 287, 295, 298  
 Грэм (Graham G. A.) 280, 298  
 Гузь А. И. 86, 299  
 Гук 30, 74, 234, 248  
 Гуль В. Е. 47, 299  
  
 Дабн (Dubey R.) 82, 299  
 Давиденков 35, 36  
 Дагдейл (Dugdale D. S.) 252, 253, 255, 262, 286, 299  
 Данкомби (Duncombe E.) 91, 299  
 Девис 85  
 Демина Н. И. 187, 305  
 Деффет (Deffet L.) 124, 305  
 Джонсон (Johnson A. E.) 49, 142, 299  
 Дори 82  
 Друкер (Drucker D. C.) 56, 82, 229, 230, 282, 284, 299, 303  
  
 Екоборн Т. 11, 47, 206, 299  
  
 Журков С. Н. 48, 299  
  
 Закс Г. 298  
 Захаров К. В. 41, 299  
 Зибель 142  
 Зилова Т. К. 187, 305  
  
 Иванова В. С. 302  
 Ивлев Д. Д. 46, 245, 299  
 Ильюшин А. А. 63, 153, 299  
 Иоффе (Yoffe E.) 291, 295, 299  
 Ирвин (Irwin G. R.) 213, 214, 231, 237, 239, 240, 241, 243, 244, 254, 255, 267, 268, 269, 272, 284, 287, 290, 299, 300  
 Исида (Isida M.) 245, 299  
  
 Каминский А. А. 286, 303  
 Канаун С. К. 153, 299  
 Каннинген (Kanninon M. F.) 253, 296, 299, 365  
 Каррен (Curran D.) 296, 299  
 Кассир 247  
 Кац Ш. Н. 101, 123, 299  
 Качанов Л. М. 36, 58, 63, 65, 114, 123, 125, 141, 173, 179, 180, 185, 192, 200, 252, 282, 298, 299, 300  
 Кельвин 31  
 Княлбаев Д. А. 153, 300  
 Клапейрон 290  
 Когасв В. П. 304  
 Койтер В. Т. 73, 300  
 Колосов 221  
 Конгорова Т. А. 13  
 Копнов В. А. 27, 34, 40, 45, 298  
 Костров Б. В. 281, 286, 289, 296, 300  
 Костюк А. Г. 151, 208, 300  
 Коттрел (Cotterell V.) 293, 300  
 Коффин 51, 207, 208  
 Коши 14, 57, 218, 219  
 Крегг (Craggs J. W.) 291, 300  
 Кулон 31  
  
 Лавенграб (Lowengrub M.) 244, 304  
 Лагздиньш А. Ж. 153, 304  
 Ламе 68, 248, 288  
 Лаплас 245, 260, 288, 291  
 Лебелев А. А. 22, 28, 34, 37, 302  
 Левитас Е. М. 125, 300  
 Леки (Leckie F.) 161, 301  
 Ленский В. С. 299  
 Леонов М. Я. 255, 256, 286, 300  
 Либовиц (Liebowitz H.) 5, 244, 252, 304  
 Линьков А. М. 6  
 Лист (List R.) 296, 297  
 Лихтман В. И. 200, 300  
 Лоде 16, 29  
 Ломакин В. А. 300  
 Лурье А. И. 86, 245, 300  
 Людвик П. 35  
 Люк (Luke J.) 130, 303  
  
 Майлз (Milcs J. P.) 82, 300  
 Макклиток Ф. 22, 257, 259, 300, 305  
 Максак В. И. 91, 301  
 Максвелл 31, 278, 282  
 Малинин Н. Н. 6, 301  
 Малмейстер А. К. 40, 301  
 Марин (Marin J.) 41, 51, 206, 301  
 Мариотт 115  
 Мартин (Martin J.) 161, 301  
 Марциняк (Marciniak Z.) 88, 301  
  
 Мелан 72, 74, 76  
 Меллин 250  
 Меллор 82  
 Мизес Р. 31, 34, 46, 56, 70, 112, 113, 114, 256, 257  
 Милейко С. Т. 152, 301, 302  
 Мор О. 16, 32, 33, 34  
 Морозов Е. М. 274, 276, 301  
 Моссаковский В. И. 268, 301  
 Мотт (Mott N.) 291, 301  
 Мухелишвили Н. И. 218, 221, 245, 301  
 Мэнсон 51, 207, 208  
  
 Надаи А. 16, 22, 24, 31, 33, 34, 85, 301  
 Наместников В. С. 161, 175, 301  
 Никитин Л. Б. 281, 286, 289, 296, 300  
 Нил Б. Г. 64, 301  
 Новожилов В. В. 51, 134, 207, 214, 301, 302  
  
 Одинг И. А. 145, 302  
 Одквист (Odqvist F. K. G.) 97, 99, 110, 113, 130, 131, 146, 157, 158, 161, 166, 173, 175, 208, 302  
 Орован 213, 231, 239, 268, 290  
 Остроградский 57  
 Отани (Ohtani R.) 122, 124, 304  
  
 Панасюк В. В. 244, 245, 251, 255, 256, 286, 300, 302  
 Парис П. (Paris-P. S.) 244, 245, 247, 252, 271, 302  
 Партон В. З. 244, 287, 302  
 Пауль (Paul V.) 28, 35, 302  
 Пехник (Piechnik S.) 166, 302  
 Писаренко Г. С. 22, 28, 34, 37, 302  
 Прагер В. 63, 70, 76, 302  
  
 Работнов Ю. Н. 22, 141, 150, 151, 152, 159, 175, 195, 208, 279, 302  
 Райс (Rice J.) 229, 230, 235, 237, 257, 259, 263, 282, 284, 298, 303  
 Ребиндер П. А. 139, 200, 300  
 Регель В. Р. 11, 48, 303  
 Релей 282, 289  
 Ренкин 29  
 Риман 218, 245, 261  
 Римрот (Rimrott F.) 115, 123, 130, 303  
 Робинсон (Robinson E. L.) 107, 146, 303  
 Розенберг В. М. 47, 303  
 Розенблом В. И. 76, 106, 127, 303  
 Розенгрэн (Rosengren G.) 263, 303  
 Розенфельд (Rosenfield A.) 253, 305

- Рыбакина О. Г. 51, 302  
Рыбка М. Т. 268, 301
- Савин Г. Н. 286, 303  
Садовский 247  
Сандерс (Sanders S. L.) 235, 303  
Сарксепи М. С. 46, 303  
Свифт (Swift H.) 88, 303  
Сдобырев В. П. 142, 152, 303  
Седерквист (Söderquist B.) 172, 173, 303  
Седов Л. И. 218, 223, 303, 304  
Сеп-Венан 31, 46, 56, 112, 113  
Серенсен С. В. 304  
Си (Sih G.) 244, 245, 247, 252, 296, 302, 304  
Слуцкер А. И. 11, 48, 303  
Смирнов В. И. 291  
Снеддон И. (Sneddon I.) 244, 245, 250, 287, 304  
Соболев С. Л. 291  
Солодилов Ю. И. 91, 304  
Сроули Дж. 303  
Сташюкович А. В. 157, 304  
Стернберг 247  
Сторакерс (Storakers B.) 82, 88, 133, 304  
Стрелецкий Н. С. 11  
Сэлмон (Salmon M.) 91, 304
- Таира (Taira S.) 122, 124, 304  
Такеяма (Takeyama H.) 95, 305  
Тамуж В. П. 153, 301, 304  
Тетерс Г. А. 301  
Томас Т. 304  
Томашевский Э. Е. 11, 48, 303  
Томасов А. Д. 304  
Треска 31, 46, 56  
Трунин И. И. 143, 162, 304
- Уфлянд Я. С. 245, 251, 304
- Феодосьев В. И. 304  
Финкель В. М. 287, 304
- Фишер (Fischer L.) 41, 304  
Флитман Л. М. 281, 286, 289, 296, 306  
Фойхт 279  
Фрейденталь (Freudenthal F. M.) 13, 305  
Френкель Я. И. 13  
Фридман Я. Б. 22, 25, 26, 35, 36, 187, 206, 255, 274, 276, 301, 305  
Фушизава (Fuchizawa S.) 95, 305
- Хажинский Г. М. 151, 305  
Хальберт (Hulbert L.) 253, 305  
Хальт Я. 146, 257, 259, 302, 305  
Хан (Hahn G.) 253, 299, 305  
Ханкель 249  
Хачинсон (Hutchinson J. W.) 263, 305  
Хестерманс (Hestermans P.) 124, 305  
Хжановски (Chzhanowski M.) 166, 175, 302, 305  
Хилл Р. 46, 56, 63, 82, 305  
Хиллер (Hillier M.) 88, 305  
Ходж Ф. 63, 302  
Хофф (Hoff N.) 97, 155, 305  
Хубер 31
- Черепанов Г. П. 235, 245, 281, 287, 289, 291, 302, 305  
Черноморченко В. И. 91, 301  
Чудновский А. И. 153, 284, 299, 300, 305
- Шер Е. Н. 293, 305  
Шлейхер 34, 46  
Шнейдерович Р. М. 304, 305  
Шоки (Shokey D.) 296, 299
- Щукин Е. Д. 200, 300
- Эйлер 200  
Эйнштейн А. 15  
Эллиот (Elliot H. A.) 213, 305  
Эрдоган (Erdogan F.) 271, 287, 289, 302, 305  
Эрикссон (Eriksson J.) 173, 175, 302

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автофретаж 70
- Валик 58  
Волна Релея 289  
— сдвига 288  
— уплотнения 288  
Время вязкого разрушения 96  
— разрушения 8, 26  
— вала 166  
— диска 127  
— стержневых решеток 107  
— стержня 99, 103, 104  
— труб 120  
— чисто хрупкого разрушения 155  
Вязкость разрушения 214
- Давление гидростатическое (среднее) 15  
Девiator напряжений 15  
Дефекты рассеянные 140  
Деформация антиплоская 216  
— приведенная 18  
— прогрессирующая 67  
— устойчивая в малом 81  
Диаграмма Мора 16  
Динамика трещин 215  
Дислокации 209  
Диффузия элементов 201
- Зависимость коэффициентов прочности от ориентации 44  
Задача краевая Гильберта 218  
Закон ассоциированного течения 56  
— Бойля — Мариотта 115  
— суммирования повреждений линейный 51  
Залечивание повреждений 187  
Запас по приспособляемости 72
- Изотропия трансверсальная 38  
Инварианты девiatorа деформаций 17  
— напряжений 16  
— тензора деформаций 16  
— напряжений 16
- Интенсивность деформации 18  
— — сдвига 18  
— напряжений 16  
— касательных 16  
— скоростей деформаций сдвига 20
- Коэффициент интенсивности напряжений 221, 223, 226  
— — — значение критическое 267  
— — — Ирвина 243  
— кинематический 60  
— Лоде — Надаи 16  
— предельной нагрузки 59  
— сопротивляемости 284  
— — — статический 61  
— сцепления 243  
Кривая единая 85  
Кривые деформации 22  
— усталости 50, 51  
Критерии прочности длительной 48  
— разрушения анизотропных материалов 39  
Критерий Давиденкова — Фридмана 35  
— длительной прочности 142  
— Ирвина 239  
— Мора 32  
— Мэнсона — Коффина 51  
— наибольшего приведенного касательного напряжения 52  
— — — напряжения 52  
— — растягивающего напряжения 49, 142  
— — удлинения (критерий Мариотта) 30  
— наибольшей интенсивности касательных напряжений 31  
— наибольших касательных напряжений 30  
— — нормальных напряжений 29  
— Писаренко — Лебедева 37  
— приведенной интенсивности касательных напряжений 52  
— Сдобырева 142

- Критерий Трубина 143  
 — Шлейхера — Надава 34  
 — приведенной интенсивности касательных напряжений 32
- Материал ортотропный 38  
 Материалы анизотропные 37  
 — композитные 38  
 Меры повреждений 153  
 Механика разрушения линейная 215  
 Модель упруго-пластическая Дагдейла 252  
 — хрупко-вязкого разрушения Работнова 159  
 — хрупкого разрушения Баренблатта 242  
 — — — Леонова — Папасюка 255  
 Модуль упругости мгновенный 278  
 Мощность поверхностных сил 57
- Нагружение жесткое 36  
 — мягкое 36  
 — пропорциональное 82  
 Нагрузка предельная 54  
 Накопление повреждений 206  
 Напряжение максимальное касательное 15  
 — приведенное 16
- Область приспособляемости 70  
 Оператор Лапласа 248  
 Опыты Андраде 97  
 — Седерквиста 173  
 Ортотропия цилиндрическая 38
- Параметр жесткости нагружения 36  
 — Лоде 29  
 — Одживиста 83  
 Период установившейся ползучести 97  
 Пластичность атермическая 53  
 — знакопеременная 67  
 Плотность поверхностной энергии 212  
 — рассеяния 281  
 Поверхность предельная 28  
 — текучести 55  
 — упрочнения (мизесовская) 83  
 Повреждение 153  
 Повреждения внутриверенные 140, 151  
 — межверенные 140, 151  
 Поврежденность 141  
 — материала 140  
 Поле напряжений безопасное 74  
 — — допустимое 74
- Потенциал течения 112  
 Правило суммирования А. Эйнштейна 15  
 Предел длительной прочности 8, 96  
 — коррозионной прочности 270  
 — прочности (временное сопротивление) 22  
 — текучести 22  
 — — технический 22  
 Преобразование Ханкеля 249  
 Призма текучести Треска — Сен-Венана 56  
 Принцип линейного суммирования повреждений 107, 146, 207  
 — соответствия Вольтерра 279  
 Приспособляемость 70, 71  
 Прочность глобальная 9  
 — длительная 47  
 — конструктивная 8, 9  
 — материалов 8  
 — тела 9, 10  
 — теоретическая 210
- Работа раскрытия 212  
 — рассеянная ползучести 151  
 Раздувание оболочки 115  
 Разрушение волокнистое 194  
 — вязкое 10  
 — материала полное 194  
 — — частичное 194  
 — пластическое 54  
 — прогрессирующее 67  
 — слоистое 194  
 — хрупкое 10  
 Раскрытие трещины критическое 272  
 Рассеяние 57  
 Растворение поверхности 204  
 Ресурс прочности (запас) 270  
 Решения полные 63
- Самоупрочнение 70  
 Сдвиг максимальный 17  
 Сдвиги главные 17  
 Символ Кронекера 15  
 Скорость уменьшения потенциальной энергии тела 235  
 Сопротивление временное (предел прочности) 22  
 — отрыву 35  
 — сдвигу (срезу) 35  
 Сплошность 141  
 Способность несущая (решетки) 54  
 Среда вязко-упругая Фойхта 279  
 — ползуче-пластическая 99  
 — релаксирующая Максвелла 278  
 Стадия разрушения инкубационная 206

- Стадия распространения разрушения 148  
 — скрытого разрушения 147  
 Старение 144  
 Схема жестко-пластического тела 55  
 — Орована — Ирвина 213  
 — Париса и Эрдогана 271
- Тело изотропное 44  
 — однородно-ортотропное 38  
 — ортотропное 41  
 — трансверсально изотропное 43  
 Температуры сходственные (гомологические) 25  
 Тензор деформаций 17  
 — единичный 15  
 — коэффициентов прочности 40  
 — напряжений 14  
 — скорости деформаций 20  
 — сплошности 141  
 Теорема приспособляемости кинематическая 72  
 — — статическая (теорема Мелане) 72, 74  
 — обращения Ханкеля 249  
 Теории разрушения статистические 12  
 Теория Гриффитса 211, 237  
 — прочности хрупких тел флуктуационная 48  
 — упрочнения 98  
 — установившегося течения 98  
 Трещиностойкость 214  
 Трещины магистральные 140  
 — неравновесные 238  
 — равновесные 238
- Удлинение 23  
 — логарифмическое (натуральное) 18, 19  
 Упрочнение 70  
 Уравнение диффузии 201  
 — поврежденности кинетическое 141, 151, 152, 194  
 — — — Работнова 150  
 — ползучести 98
- Уравнение распространения волн сдвига 288  
 — — — упрочнения 288  
 — роста трещины 271  
 — фронта разрушения 148  
 — энергетическое основное 58  
 Уравнения наследственной теории Больцмана 278  
 — ползуче-пластической среды 113  
 — теории деформационной 84  
 — — пластического течения 83  
 — — упрочнения 113  
 Условие анизотропной пластичности 45  
 — — — Мизеса 46  
 — — — Мизеса — Хилла 46  
 — — — Мизеса — Шлейхера 46  
 — упрочнения 83  
 Усталость малоцикловая 49, 67, 187  
 — пластическая 67  
 — при действии вибрационных нагрузок 49  
 — термическая 49  
 Устойчивость деформации в малом 81  
 Усы 211
- Формула Гриффитса 212, 214, 239  
 — Ирвина 240  
 — Коши 219  
 Формулы Колосова — Мусхелишвили 221  
 — Коши для напряжений 14  
 Фронт разрушения 147  
 Функция Релея диссипативная 282
- Шейка 58
- Энергия поверхностная трещины 212  
 — тела потенциальная 229  
 Эффект Баушингера 72  
 — масштабный 11  
 — Ребиндера 139
- Явление охрупчивания 138