

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому американскому изданию	6
Из предисловия ко второму американскому изданию	8
Из предисловия к третьему американскому изданию	8
Обозначения	9
Глава I. Растяжение и сжатие в пределах упругости	11
1. Упругость	11
2. Закон Гука	12
3. Диаграмма растяжения	15
4. Допускаемое напряжение	17
5. Напряжения и деформации при действии собственного веса	22
6. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии	26
7. Начальные и температурные напряжения	32
8. Растяжение кругового кольца	35
Глава II. Анализ напряжений и деформаций	40
9. Напряжения по наклонным сечениям при простом растяжении и сжатии	40
10. Круг Мора	43
11. Растяжение или сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям	46
12. Круг Мора при сложном напряженном состоянии	48
13. Главные напряжения	50
14. Поперечное сужение	53
15. Деформации в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям	54
16. Чистый сдвиг	57
17. Допускаемые напряжения при сдвиге	61
18. Растяжение или сжатие по трем взаимно перпендикулярным направлениям	63
Глава III. Изгибающий момент и поперечная сила	67
19. Типы балок	67
20. Изгибающий момент и поперечная сила	68
21. Зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой	72
22. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил	74
Глава IV. Напряжения в поперечно нагруженных симметричных балках	85
23. Чистый изгиб	85
24. Различные формы поперечных сечений балок	91
25. Общий случай изгиба поперечно нагруженных симметричных балок	96
26. Касательные напряжения при изгибе	102
27. Распределение касательных напряжений в случае кругового поперечного сечения	108
28. Распределение касательных напряжений в двутавровых балках	110

29. Главные напряжения при изгибе	113
30. Напряжения в составных балках	117
Глава V. Изогнутая ось балки	123
31. Дифференциальное уравнение изогнутой оси	123
32. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой	125
33. Прогиб свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенным грузом	128
34. Определение прогибов при помощи эпюры изгибающих моментов.	131
35. Определение прогиба консоли графоаналитическим методом	133
36. Определение прогиба свободно опертой балки графоаналитическим методом	137
37. Метод сложения действия сил	143
38. Прогиб балок с консолями	148
39. Влияние поперечных сил на прогиб балок	150
Глава VI. Статически неопределимые задачи при изгибе	155
40. Лишние закрепления	155
41. Балка заделанная одним концом и опертая другим	158
42. Балка с двумя заделанными концами	162
43. Рамы	165
44. Балки на трех опорах	172
45. Неразрезные балки	175
Глава VII. Симметричные балки переменного поперечного сечения. Балки из двух материалов	181
46. Балки переменного поперечного сечения	181
47. Симметричные балки из двух различных материалов	187
48. Железобетонные балки	190
49. Касательные напряжения в железобетонных балках	193
Глава VIII. Изгиб балок в плоскости, которая не является плоскостью симметрии	194
50. Чистый изгиб в плоскости, которая не является плоскостью симметрии	194
51. Изгиб балок, имеющих две плоскости симметрии	198
52. Изгиб балок в главной плоскости, которая не является плоскостью симметрии	200
Глава IX. Одновременное действие изгиба и растяжения или сжатия. Теория продольного изгиба	208
53. Изгиб, сопровождаемый растяжением или сжатием	208
54. Внецентренная нагрузка короткой стойки	212
55. Ядро сечения	215
56. Внецентренное сжатие гибкой симметричной колонны	219
57. Критическая нагрузка	223
58. Критическое напряжение. Расчет колонн	227
59. Расчет колонн на основании предполагаемых неточностей	232
60. Эмпирические формулы для расчета колонн	234
Глава X. Кручение и одновременное действие изгиба и кручения	238
61. Кручение круглого стержня	238
62. Кручение полого вала	243
63. Вал прямоугольного поперечного сечения	245
64. Винтовая пружина с малым шагом витков	246
65. Одновременное действие изгиба и кручения. Изгиб и кручение валов круглого поперечного сечения	250

Глава XI. Энергия деформации и удар	255
66. Энергия упругой деформации при растяжении	255
67. Растяжение, вызываемое ударом	258
68. Энергия упругой деформации при сдвиге и кручении	264
69. Энергия упругой деформации при изгибе	267
70. Изгиб, вызываемый ударом	271
71. Общее выражение энергии деформации	275
72. Теорема Кастиллиано	277
73. Деформация ферм	283
74. Приложение теоремы Кастиллиано к решению статически неопределимых задач	287
75. Теорема о взаимности работ и перемещений	296
76. Исключительные случаи	303
Глава XII. Кривые брусья	305
77. Чистый изгиб кривых брусьев	305
78. Изгиб кривых брусьев силами, действующими в плоскости симметрии	309
79. Частные случаи изгиба кривых брусьев	310
80. Деформация кривых брусьев	317
81. Двухшарнирная арка	331
82. Напряжения в ободе махового колеса	334
83. Уравнение изогнутой оси для бруса с круговой осью	337
84. Изгиб кривых труб	340
85. Изгиб кривого бруса не в плоскости его начальной кривизны	345
Приложение А. Моменты инерции плоских фигур	350
I. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в ее плоскости	350
II. Полярный момент инерции плоской фигуры	352
III. Теорема о параллельном переносе осей	354
IV. Центробежный момент инерции. Главные оси	355
V. Изменение направления осей. Определение главных осей	357
Предметный указатель	360

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время происходит решительный перелом во взглядах конструкторов на применение аналитических методов при решении технических задач. Проектирование уже не основывается преимущественно на эмпирических формулах. Значение аналитических методов, увязанных с лабораторными исследованиями, при решении технических задач ныне является общепризнанным.

Типы машин и сооружений изменяются очень быстро, особенно в новых областях промышленности, вследствие чего мы не располагаем достаточным количеством времени для накопления необходимых данных практики. Размеры и стоимость сооружений постоянно увеличиваются, что заставляет предъявлять более строгие требования к надежности конструкции. В условиях конкуренции все более возрастает значение экономического фактора при проектировании. Конструкция должна быть достаточно прочна и долговечна и, вместе с тем, должна быть спроектирована с наибольшей экономией в материале. При таких условиях задача конструктора становится чрезвычайно трудной. Уменьшение веса влечет увеличение допускаемых напряжений, которые могут быть приняты как безопасные только на основании тщательного анализа распределения напряжений в конструкции и опытных исследований механических свойств применяемых материалов.

Цель этой книги — изложить вопросы данного курса таким образом, чтобы внимание студента было сосредоточено на практических приложениях теорий сопротивления материалов. Если это удастся и в результате появится более тесное взаимоотношение между наукой о сопротивлении материалов и техническим проектированием, то будет сделан значительный шаг вперед.

Книга разделена на два тома. Первый том содержит главным образом материал, обычно помещаемый в обязательных курсах сопротивления материалов в американских технических школах. Отделы, выходящие за рамки обычных курсов и представляющие интерес преимущественно для аспирантов и инженеров-исследователей, собраны во втором томе. Последний содержит также новые исследования практической важности в области сопротивления материалов.

При составлении первого тома сопротивления материалов было обращено внимание на возможное упрощение всех выводов, чтобы студент с обычной математической подготовкой был в состоянии читать их без затруднения. Например, при выводе теории изогнутой оси балки был широко использован *графоаналитический метод*. Таким образом было достигнуто значительное упрощение при выводе прогибов балок для различных условий нагружения и закрепления опор. При разборе статически неопределимых систем был применен *метод сложения действия сил*, который оказывается весьма удобным при изложении таких задач, как неразрезные балки и рамы. Для объяснения сложных напряжений и вывода главных напряжений был использован *круг Мора*, значительно упрощающий изложение этой части теории.

Применяя эти методы, упрощающие изложение, автор смог сжать материал и разобрать некоторые вопросы, выходящие за пределы обычных курсов. Например, при исследовании кручения рассмотрено скручивание прямоугольных стержней и прокатных сечений, как-то: уголков, швеллеров и двутавровых балок. Подробно разобраны деформации и напряжения в винтовых рессорах. В теории изгиба разобран случай несимметричных сечений; определен и объяснен *центр скручивания* и рассмотрено влияние поперечной силы на прогиб балок. Дана общая теория изгиба балок, материал которых не следует закону Гука; она применена к изгибу балок за пределом текучести. Рассмотрен изгиб железобетонных балок. При исследовании одновременного действия изгиба и растяжения или сжатия рассмотрено влияние прогибов на изгибающий момент и выяснен предел применимости метода сложения действия сил. При изложении одновременного действия изгиба и кручения разобраны прямоугольные и эллиптические поперечные сечения, а также в качестве приложения дан расчет коленчатых валов. Значительное место в книге отведено методам решения задач упругости, основанным на рассмотрении энергии деформации упругих тел. Эти методы применены при исследовании статически неопределимых систем. Рассмотрены также напряжения, вызываемые ударом. Все эти вопросы более сложного характера напечатаны мелким шрифтом и могут быть опущены при первом чтении книги.

Книга иллюстрирована большим числом задач, к которым приложены решения. Во многих случаях задачи выбраны так, чтобы расширить область, охватываемую текстом, и иллюстрировать приложение теории к решению задач проектирования. Можно надеяться, что эти задачи будут интересны для учебных целей, а также полезны для конструкторов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания этой книги усилие было направлено к тому, чтобы приспособить книгу к учебным требованиям технических школ США.

С этой целью часть материала более сложного характера, который содержался в предыдущем издании этого тома, была удалена и будет включена во второй том нового издания. В то же время некоторые сведения, которые были лишь кратко рассмотрены в первом издании, были расширены с намерением сделать книгу более доступной для начинающего. По этой причине глава II, излагающая сложные напряжения, была полностью переработана. Часть книги, излагающая эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, была расширена и было добавлено значительное количество материала по определению изогнутой оси балки методом интегрирования. Рассмотрение теории продольного изгиба и ее применение было включено в главу VIII, так как этот вопрос обычно излагается в обязательных курсах сопротивления материалов. Было сделано несколько добавлений к главе X, излагающей приложение метода энергии деформации к решению статически неопределенных задач. Добавлено много новых задач, которые могут быть полезны для аудиторной и домашней работы.

Можно надеяться, что при сделанных изменениях книга окажется более удовлетворительной для усвоения курса сопротивления материалов и что она даст лучшее основание для изучения более сложного материала, рассматриваемого во втором томе.

С. Тимошенко

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

В третье издание этой книги добавлено значительное число новых задач и включены ответы ко многим старым задачам. Книга расширена путем добавления двух новых глав, а именно главы VIII, излагающей изгиб балок в плоскости, не являющейся плоскостью симметрии, и главы XII об изгибе кривых брусков. В главе VIII введено понятие о центре сдвига, которое имеет большое практическое значение для тонкостенных конструкций. В главе XII изложен материал о кривых брусках, который прежде помещался во второй части этой книги. Этот материал был полностью переработан, причем были добавлены новые сведения.

Станфордский университет
25 марта 1955 г.

С. Тимошенко

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- α — угол, коэффициент линейного температурного расширения, числовой коэффициент
- β — угол, числовой коэффициент
- γ — относительный сдвиг, вес единицы объема
- Δ — относительное объемное расширение, приращение
- Δl — полное удлинение, полный прогиб, расстояние
- ϵ — относительное удлинение или укорочение
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — относительные удлинения по направлениям осей x, y, z
- θ — угол, угол закручивания на единицу длины вала
- μ — коэффициент Пуассона
- σ — нормальное напряжение
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения
- σ_n — нормальное напряжение по плоскости, перпендикулярной направлению n
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные напряжения по плоскостям, перпендикулярным осям x, y и z
- $\sigma_{пч}$ — предел прочности
- $[\sigma]$ — допускаемое напряжение
- σ_T — предел текучести
- $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — касательные напряжения по плоскостям, перпендикулярным к осям y, z и x и параллельным осям x, y и z
- $[\tau]$ — допускаемое напряжение на сдвиг
- τ_T — предел текучести при сдвиге
- φ — угол
- ω — угловая скорость
- a, b, c, d — расстояния
- C — жесткость при кручении, постоянная интегрирования
- D, d — диаметры
- E — модуль упругости при растяжении (сжатии)
- F — площадь поперечного сечения
- G — модуль упругости при сдвиге
- H — горизонтальная сила
- h — высота, толщина
- J_p — полярный момент инерции площади

- J_y, J_z — моменты инерции площади относительно осей y и z
 J_{yz} — центробежный момент инерции площади относительно осей y и z
 i_y, i_z — радиусы инерции площади относительно осей y и z
 K — объемный модуль упругости
 k — коэффициент безопасности, постоянная пружины, числовой коэффициент
 l — длина, пролет
 M — изгибающий момент
 M_k — крутящий момент
 N — продольная сила, мощность в лошадиных силах
 n — число оборотов в минуту, нормаль к плоскости
 P — сосредоточенная сила
 p — распределенная нагрузка на единицу площади (давление)
 Q — поперечная сила, груз, собственный вес
 q — распределенная нагрузка на единицу длины (интенсивность распределенной нагрузки)
 R — реакция, сила, радиус
 r — радиус, радиус кривизны
 S — продольное усилие в стержне
 t — температура, толщина
 U — энергия деформации
 u — прогиб, расстояние, перемещение
 V — объем
 v — скорость, прогиб, расстояние, перемещение
 W — момент сопротивления при изгибе
 W — момент сопротивления при кручении
 X, Y, Z — продольные усилия в стержнях, неизвестные реакции
 x, y, z — прямоугольные координаты

ГЛАВА I

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

1. Упругость

Материал тела состоит из малых частиц или молекул, между которыми действуют силы. Эти молекулярные силы оказывают сопротивление внешним силам, которые стремятся произвести изменение формы тела. Под действием внешних сил частицы тела перемещаются, и перемещения продолжают до тех пор, пока не установится равновесие между внешними и внутренними силами. В таком случае тело находится в *деформированном состоянии*. Во время деформации внешние силы, действующие на тело, производят работу, и эта работа превращается полностью или частично в *потенциальную энергию деформации*. Часовая пружина является примером такого накопления потенциальной энергии в деформированном теле. Если силы, которые произвели деформацию, затем постепенно уменьшаются, то тело вполне или отчасти возвращается к своей первоначальной форме, и во время этой обратной деформации потенциальная энергия деформации, которая была накоплена в теле, может быть возвращена в форме внешней работы.

Рассмотрим, например, призматический стержень, нагруженный на конце, как показано на рис. 1⁴⁾. Под действием этого груза будет иметь место некоторое удлинение. Точка приложения груза будет перемещаться вниз, и во время этого движения грузом будет совершена положительная работа. Если груз уменьшается, то удлинение стержня также уменьшается, нагруженный конец стержня перемещается вверх, и потенциальная энергия деформации превращается в работу, необходимую для перемещения груза вверх.

Свойство тел возвращаться к своей первоначальной форме после удаления нагрузки называется *упругостью*. Тело *совершенно упруго*, если оно после разгрузки восстанавливает свою первоначальную форму; оно *частично упруго*, если деформация, произведенная внешними силами, не исчезает полностью после разгрузки. В случае совершенно упругого тела работа, произведенная внешними силами,

⁴⁾ Предполагается, что груз действует по оси стержня, т. е. по линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

во время деформации должна превратиться в потенциальную энергию деформации¹⁾. В случае частично упругого тела часть работы, совершенной внешними силами во время деформации, рассеется в форме теплоты, которая развивается в теле при неупругой деформации. Опыты показывают, что такие строительные материалы, как сталь, дерево и камень, могут рассматриваться как совершенно упругие в некоторых пределах, которые зависят от свойств материала. При условии, что внешние силы, действующие на сооружение, известны, основной задачей для конструктора является установление таких размеров в частях сооружения, чтобы последнее при всех условиях службы приближалось к совершенно упругому телу. Только при таких условиях мы будем иметь продолжительную службу сооружения без какой-либо остаточной деформации его частей.

2. Закон Гука

Непосредственными опытами над растяжением призматических стержней (рис. 1) было установлено для многих строительных материалов, что в некоторых пределах удлинение стержня пропорционально растягивающей силе. Это простое линейное соотношение между силой и удлинением, которое она вызывает, впервые было сформулировано английским ученым Робертом Гуком²⁾ в 1678 г. и носит его имя. При помощи обозначений:

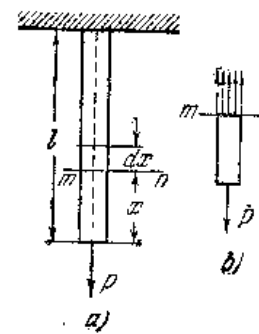


Рис. 1.

P — сила, вызывающая растяжение стержня,
 l — длина стержня,
 F — площадь поперечного сечения стержня,
 Δl — полное удлинение стержня,
 E — упругая постоянная материала, называемая *модулем упругости* при растяжении, экспериментальный закон Гука можно выразить

следующим уравнением:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (1)$$

Удлинение стержня пропорционально растягивающей силе и длине стержня и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости. При производстве испытаний на растяжение обыкновенно принимаются все меры предосторожности к тому, чтобы обеспечить центральное приложение растягивающей

¹⁾ При этом рассмотрении пренебрегается малыми температурными изменениями, которые обычно сопровождают упругую деформацию, и соответствующим тепловым обменом со средой (см. часть II).

²⁾ Robert Hooke, De Potentia restitutiva, London, 1678.

силы. На рис. 2 показан способ закрепления концов круглого образца в испытательной машине на разрыв. Таким образом будет предупрежден какой бы то ни был изгиб стержня. Исключая из рассмотрения части стержня, находящиеся вблизи точек приложения сил¹⁾, можем заключить, что при растяжении все продольные волокна призматического стержня имеют одно и то же удлинение, и поперечные сечения стержня, первоначально плоские и перпендикулярные к оси стержня, остаются такими же и после растяжения.

При определении величины внутренних сил вообразим стержень, разрезанный на две части поперечным сечением mn , и рассмотрим равновесие нижней части стержня (рис. 1, б). К нижнему концу этой части приложена растягивающая сила P . Силы, действующие на верхнем конце, представляют действие частиц верхней части деформированного стержня на частицы нижней части. Эти силы непрерывно распределены по поперечному сечению. Близкий пример такого непрерывного распределения сил по поверхности представляет гидростатическое давление или давление пара. В случае таких непрерывно распределенных сил имеет большое значение *интенсивность силы*, т. е. сила, приходящаяся на единицу площади. В данном случае осевого растяжения, в котором все волокна имеют одно и то же удлинение, распределение сил по поперечному сечению mn будет *равномерным*. равнодействующая этих сил будет проходить через центр тяжести поперечного сечения и будет действовать по оси стержня. Принимая во внимание, что сумма этих сил из условия равновесия (рис. 1, б) должна быть равна P , и обозначая силу, приходящуюся на единицу площади, через σ , мы получаем:

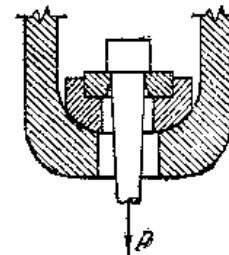


Рис. 2.

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (2)$$

Эта сила, приходящаяся на единицу площади, называется *растягивающим напряжением* или просто *напряжением*. В дальнейшем мы будем измерять силу в килограммах и площадь — в квадратных сантиметрах, так что напряжение будет измеряться в килограммах на 1 кв. см. Удлинение стержня, приходящееся на единицу длины, определяется уравнением

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3)$$

¹⁾ Более сложное распределение напряжений вблизи точек приложения сил рассматривается в части II.

и называется *относительным удлинением* или *относительной деформацией* растяжения. Пользуясь уравнениями (1), (2) и (3), можем написать закон Гука в следующей форме:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (4)$$

Мы видим, что *модуль упругости равен напряжению, деленному на относительное удлинение*, и его легко можно вычислить, если напряжение и соответствующее относительное удлинение найдены из испытания на растяжение. Относительное удлинение ϵ есть отвлеченная величина, представляющая отношение двух длин (см. уравнение (3)); поэтому из уравнения (4) можно заключить, что модуль упругости измеряется в тех же единицах, что и напряжение σ , т. е. в килограммах на 1 кв. см. Средние значения модуля E для некоторых материалов даны во втором столбце таблицы 1¹⁾.

Таблица 1

Механические свойства материалов

Материал	E кг/см ²	Предел текучести кг/см ²	Предел прочности кг/см ²
Строительная углеродистая сталь от 0,15 до 0,25% углерода	$2,1 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^5 - 2,8 \cdot 10^5$	$3,9 \cdot 10^5 - 4,6 \cdot 10^5$
Никелевая сталь от 3 до 3,5% никеля	$2,0 \cdot 10^6$	$2,8 \cdot 10^5 - 3,5 \cdot 10^5$	$5,4 \cdot 10^5 - 7,0 \cdot 10^5$
Дюралюминий	$0,70 \cdot 10^6$	$2,4 \cdot 10^5 - 3,1 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^5 - 4,6 \cdot 10^5$
Медь катаная в холодном состоянии	$1,1 \cdot 10^6$	—	$2,0 \cdot 10^5 - 2,8 \cdot 10^5$
Стекло	$0,70 \cdot 10^6$	—	$2,5 \cdot 10^5$
Сосна вдоль волокон	$0,1 \cdot 10^6$	—	$5,6 \cdot 10^4 - 1,4 \cdot 10^5$
Бетон при сжатии	$0,28 \cdot 10^6$	—	$2 \cdot 10^5$

Уравнения (1) — (4) можно применить также в случае сжатия призматических стержней. Тогда Δl будет обозначать полное продольное укорочение, ϵ — относительное укорочение и σ — сжимающее напряжение. Для большинства строительных материалов модуль упругости при сжатии тот же, что и при растяжении. В вычислениях растягивающее напряжение и деформация растяжения рассматриваются положительными, а сжимающие напряжение и деформация — отрицательными.

¹⁾ Более подробно о механических свойствах материалов изложено в части II.

ЗАДАЧИ

1. Определить полное удлинение стального стержня длиной 60 см, если растягивающее напряжение равно 1000 кг/см².

Ответ. $\Delta l = 0,03$ см.

2. Определить силу, растягивающую цилиндрический стальной стержень диаметром в один см, если относительное удлинение равно $0,7 \cdot 10^{-4}$.

Решение. Растягивающее напряжение в стержне из уравнения (4) равняется

$$\sigma = E\epsilon = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

Растягивающая сила из уравнения (2) равняется

$$P = \sigma F = 1400 \cdot \frac{\pi}{4} = 1100 \text{ кг.}$$

3. Каково отношение модулей упругости материалов двух стержней одинаковых размеров, если под действием равных растягивающих сил относительные удлинения стержней имеют отношение $1: \frac{20}{11}$. Определить эти удлинения, если один из стержней стальной, а другой — медный и растягивающее напряжение равно 600 кг/см².

Решение. Модули упругости обратно пропорциональны относительным удлинениям. Для стали

$$\epsilon = \frac{600}{2 \cdot 10^6} = 0,00030,$$

для меди

$$\epsilon = 0,00054.$$

4. Призматический стальной брусок длиной 60 см под действием растягивающей силы P удлиняется на 0,06 см. Найти величину силы, если объем стержня равняется 360 см³.

Ответ. $P = 12\,000$ кг.

5. Кусок проволоки длиной 30 м, подверженный действию растягивающей силы $P = 400$ кг, удлиняется на 2,5 см. Найти модуль упругости материала, если площадь поперечного сечения проволоки равняется 0,3 см².

Ответ. $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

6. Определить полное удлинение стального стержня AB , имеющего площадь поперечного сечения $F = 10$ см² и подверженного действию сил $Q = 4t$ и $P = 2t$ (рис. 3).

Решение. Растягивающая сила в верхней и нижней частях стержня равна Q , а в средней части равна $Q - P$. Тогда полное удлинение будет

$$\Delta l = 2 \frac{Ql_1}{FE} + \frac{(Q-P)l_2}{FE} = 2 \frac{4000 \cdot 10}{10 \cdot 2 \cdot 10^6} + \frac{2000 \cdot 10}{10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,004 + 0,001 = 0,005 \text{ см.}$$

7. Решить задачу 6, предполагая, что материалом является дюралюминий и что $P = Q = 4t$.

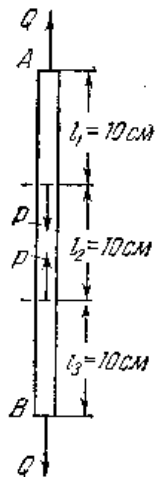


Рис. 3.

3. Диаграмма растяжения

Пропорциональность между растягивающей силой и соответствующим удлинением сохраняется до некоторого предельного значения растягивающего напряжения, называемого *пределом пропорциональности*, который зависит от свойств материала. За этим

пределом зависимость между удлинением и растягивающим напряжением становится более сложной.

Для таких материалов, как строительная сталь, пропорциональность между нагрузкой и удлинением сохраняется до значительного напряжения, и предел пропорциональности может быть принят $1,6 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$.

Для таких материалов, как чугун или мягкая медь, пределы пропорциональности очень низки, так что отклонения от закона Гука можно заметить при низких растягивающих напряжениях.

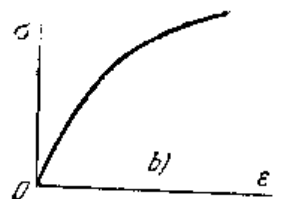
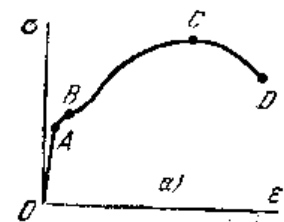
При исследовании механических свойств материалов за пределом пропорциональности зависимость между деформацией и соответствующим напряжением обычно изображают графически *диаграммой растяжения*. Рис. 4. изображает типичную диаграмму для строительной стали. Здесь удлинения отложены по горизонтальной оси, а соответствующие напряжения представлены ординатами кривой $OABCD$. От O до A напряжения и деформации пропорциональны; за A отклонение от закона Гука становится заметным; следовательно, напряжение в A есть *предел пропорциональности*.

По нагружению за этим пределом удлинения увеличиваются гораздо быстрее, и диаграмма становится кривой. У точки B имеет место внезапное удлинение стержня без заметного увеличения растягивающей силы. Это явление, называемое *текучестью* металла, показано на диаграмме почти горизонтальным участком кривой. Напряжение, соответствующее точке B , называется *пределом текучести*.

При дальнейшем растяжении стержня материал восстанавливает способность сопротивляться, и, как видно из диаграммы, растягивающая сила увеличивается с увеличением удлинения до точки C , где сила достигает своего наибольшего значения. Соответствующее напряжение называется *пределом прочности* материала.

За точкой C стержень продолжает удлиняться с уменьшением нагрузки, и окончательное разрушение происходит при нагрузке, соответствующей точке D диаграммы.

Необходимо заметить, что удлинение стержня сопровождается уменьшением поперечных размеров, но практически при вычислении предела текучести и предела прочности за расчетное поперечное сечение F принимают первоначальную площадь. Этот вопрос будет разобран более подробно ниже (см. часть II).



Диаграммы при испытании на растяжение

Рис. 4.

Рис. 4, б) представляет диаграмму растяжения для чугуна. Этот материал имеет очень низкий предел пропорциональности¹⁾ и не имеет определенного предела текучести.

При сжатии различных материалов можно также получить диаграммы, аналогичные таковым при растяжении, и удастся установить такие характеристики, как предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности. Механические свойства материалов при растяжении и сжатии будут разобраны более подробно ниже (см. часть II).

4. Допускаемое напряжение

Диаграмма растяжения дает очень ценные сведения о механических свойствах материалов. Зная предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности, можем установить для каждой частной технической задачи величину напряжения, которое можно рассматривать как *безопасное напряжение*. Это напряжение обычно называется *допускаемым напряжением*.

При выборе величины допускаемого напряжения для стали нужно принять во внимание, что при напряжениях ниже предела пропорциональности этот материал можно рассматривать как совершенно упругий, между тем как за этим пределом после разгрузки стержня обычно остается часть деформации, т. е. имеет место *остаточная деформация*. Для того чтобы иметь сооружение в упругом состоянии и исключить возможность появления остаточной деформации, практика обычно принимает допускаемое напряжение несколько ниже предела пропорциональности. При экспериментальном определении этого предела необходимы чувствительные измерительные инструменты (экстенсометры), так как величина этого предела зависит от степени точности, с которой сделаны измерения. Для того чтобы исключить это затруднение, обычно принимают *предел текучести* или *предел прочности* материала за основание для определения величины допускаемого напряжения. Обозначая через $[\sigma]$, σ_T и $\sigma_{пч}$ соответственно допускаемое напряжение, предел текучести и предел прочности материала, определим величину допускаемого напряжения из следующих уравнений:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{пч}}{k_1}. \quad (5)$$

Здесь k и k_1 — постоянные величины, называемые *коэффициентом безопасности* и определяющие величину допускаемого напряжения. В случае строительной стали логично принимать за основание для вычисления допускаемого напряжения предел текучести, так

¹⁾ Этот предел может быть установлен при измерении удлинений при помощи очень чувствительных экстенсометров, См. Grüneisen, Ver. deut. physik. Ges., 1906.

как при этом пределе имеет место значительная остаточная деформация, которая недопустима в инженерных сооружениях. В таком случае коэффициент безопасности $k = 2$ будет давать достаточную величину для допускаемого напряжения при условии, что на сооружение действуют только постоянные или статические нагрузки. В случаях внезапно приложенных нагрузок или переменных нагрузок, что бывает часто в частях машин, необходимо принимать больший коэффициент безопасности. Для хрупких материалов, как чугун, бетон или различного рода камни, и для таких материалов, как дерево, за основание для определения допускаемых напряжений обыкновенно принимается предел прочности.

Величина коэффициента безопасности зависит от точности, с которой определены действующие на сооружения внешние силы, от точности, с которой можно вычислить напряжения в частях сооружения, а также от однородности употребляемых материалов. Этот важный вопрос о допускаемых напряжениях будет обсужден более подробно ниже (см. часть II). Здесь мы дадим несколько простых примеров определения прочных размеров поперечного сечения стержней, полагая, что допускаемые напряжения даны.

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр d стальных колонн N пресса для наибольшей сжимающей силы $P = 40 \text{ т}$ (рис. 5), если допускаемое напряжение для стали в этом случае $[\sigma] = 600 \text{ кг/см}^2$. Определить полное удлинение колонн при наибольшей нагрузке, если длина между их головками $l = 1 \text{ м}$.

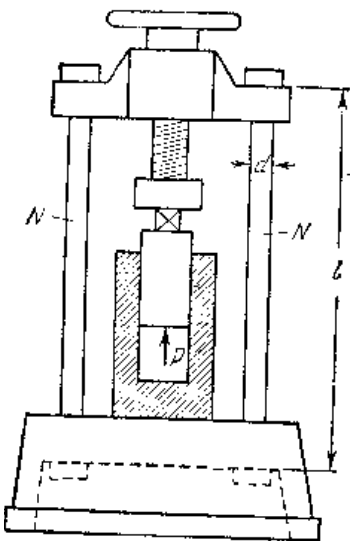


Рис. 5.

Решение. Необходимая площадь поперечного сечения, из уравнения (2), равняется

$$F = \frac{Pd^2}{4} = \frac{P}{2[\sigma]} = \frac{20000}{600} = 33,33 \text{ см}^2,$$

следовательно,

$$d = \sqrt{\frac{133,32}{\pi}} = 6,51 \text{ см}.$$

Полное удлинение из уравнений (3) и (4), равно

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{600 \cdot 100}{2 \cdot 10^8} = 0,03 \text{ см}.$$

2. Конструкция, состоящая из двух одинаковых стальных стержней (рис. 6) длиной 4,5 м с шарнирными концами, подвержена действию вертикальной нагрузки. Определить необходимую площадь поперечного сечения стержней и опускание точки B , если $P = 2 \text{ т}$, $[\sigma] = 500 \text{ кг/см}^2$ и первоначальный угол наклона стержней $\theta = 30^\circ$.

Решение. Из рис. 6, б, изображающего условие равновесия шарнира B , растягивающее усилие в стержнях получается

$$S = \frac{P}{2 \sin \theta}, \text{ для } \theta = 30^\circ \quad S = P = 2000 \text{ кг}.$$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{S}{[\sigma]} = \frac{2000}{500} = 4 \text{ см}^2.$$

Опускание BB_1 найдется из малого прямоугольного треугольника DBB_1 , в котором дуга BD радиуса, равного первоначальной длине стержней, рассматривается как перпендикуляр, опущенный на AB_1 , изображающую положение стержня AB после деформации. Тогда удлинение стержня будет

$$B_1D = \epsilon l = \frac{[\sigma] l}{E} = \frac{500 \cdot 450}{2 \cdot 10^8} = 0,11 \text{ см}$$

и опускание

$$BB_1 = \frac{B_1D}{\sin \theta} = 0,22 \text{ см}.$$

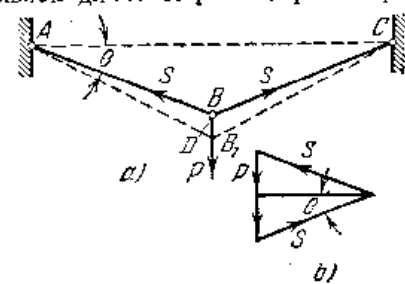


Рис. 6.

Видно, что изменение угла от опускания BB_1 очень мало, и прежнее вычисление S , основанное на предположении, что $\theta = 30^\circ$, достаточно точно.

3. Определить размеры поперечного сечения деревянной балки BC и стального стержня AB конструкции ABC , нагруженной в B , если допускаемое напряжение для сосны принято $[\sigma]_д = 10 \text{ кг/см}^2$ и для стали $[\sigma]_с = 600 \text{ кг/см}^2$. Груз

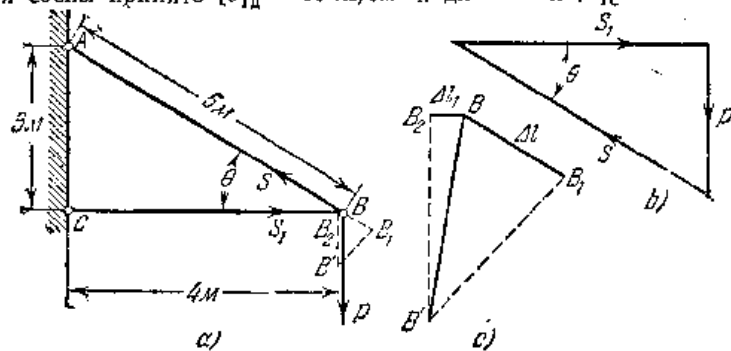


Рис. 7.

$P = 2,4 \text{ т}$. Размеры конструкции показаны на рис. 7. Определить вертикальную и горизонтальную составляющие перемещения точки B вследствие деформации стержней.

Решение. Из треугольника на рис. 7, б, представляющего условие равновесие шарнира B и подобного треугольнику ABC рис. 7, а, имеем

$$S = \frac{P \cdot 5}{3} = 4000 \text{ кг}.$$

$$S_1 = \frac{P \cdot 4}{3} = 3200 \text{ кг}.$$

Площади поперечного сечения стального стержня и деревянной балки равняются

$$F = \frac{S}{[\sigma]_с} = \frac{4000}{600} = 6,67 \text{ см}^2, \quad F_1 = \frac{S_1}{[\sigma]_д} = \frac{3200}{10} = 320 \text{ см}^2.$$

Полное удлинение стального стержня и полное укорочение деревянной балки будут

$$\Delta l = \frac{Sl}{E_c F} = \frac{4000 \cdot 500}{2 \cdot 10^6 \cdot 6,67} = 0,15 \text{ см.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_2 F_1} = \frac{3200 \cdot 400}{10^5 \cdot 320} = 0,04 \text{ см.}$$

Чтобы определить перемещение шарнира B вследствие деформации, описываем дуги из центров A и C (рис. 7, a) радиусами, соответственно равными длинам растянутого стержня и сжатой балки. Они пересекаются в новом положении B' шарнира B . Это показано в большом масштабе на рис. 7, c , где BB_1 есть удлинение стального стержня и BB_2 — укорочение деревянной балки. Пунктирные перпендикуляры заменяют упомянутые выше дуги. Следовательно, BB' является перемещением шарнира B . Составляющие этого перемещения легко можно получить из чертежа.

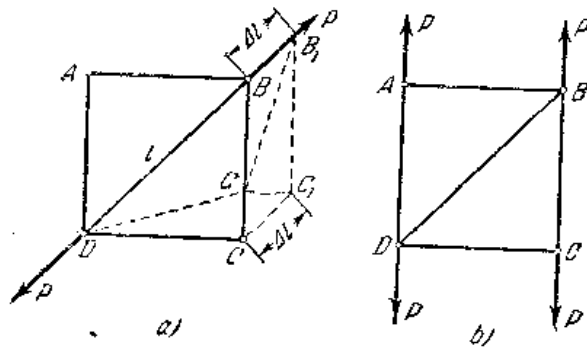


Рис. 8.

4. Определить в предыдущей задаче угол наклона стержня AB , чтобы вес его был наименьшим.

Решение. Если θ обозначает угол между стержнем и горизонтальной балкой и l_1 — длину балки, то длина стержня равняется $l = l_1 / \cos \theta$, растягивающее усилие в стержне равно $S = P / \sin \theta$ и необходимая площадь поперечного сечения $F = P / [\sigma]_c \sin \theta$. Объем стержня будет

$$lF = \frac{l_1 P}{[\sigma]_c \sin \theta \cos \theta} = \frac{2l_1 P}{[\sigma]_c \sin 2\theta}.$$

Видно, что объем и вес стержня получаются наименьшими при $\sin 2\theta = 1$ и $\theta = 45^\circ$.

5. Квадратная рама $ABCD$ (рис. 8, a), состоящая из пяти стальных стержней, площади поперечного сечения которых по 5 см^2 , подвержена действию двух сил $P = 4 \text{ т}$ в направлении диагонали. Определить величину изменения углов A и C вследствие деформации рамы. Насколько изменятся те же углы, если силы приложены, как указано на рис. 8, b .

Решение. В случае, указанном на рис. 8, a , диагональ будет воспринимать полную нагрузку P . Предполагая, что шарнир D не перемещается и направление диагонали не изменяется, найдем, что перемещение шарнира B по направлению диагонали будет равно удлинению диагонали $\Delta l = P / E F$. Определение нового положения C' шарнира C указано на рисунке пунктиром. Из малого прямоугольника CC_1C' видно, что $CC' = \Delta l / \sqrt{2}$. Тогда угол поворота стержня DC вследствие

деформации рамы будет

$$\frac{CC'}{DC} = \frac{\Delta l \sqrt{2}}{\sqrt{2} l} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} = 0,0004 \text{ радиана.}$$

Следовательно, увеличение угла C будет

$$2 \cdot 0,0004 = 0,0008 \text{ радиана.}$$

Решение задачи, указанной на рис. 8, b предоставляется учащемуся.

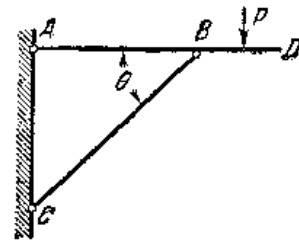


Рис. 9.

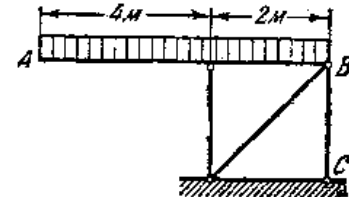


Рис. 10.

6. Определить положение груза P на балке ABD , при котором усилие в стержне BC будет наибольшим. Определить угол θ , при котором объем стержня BC будет наименьшим (рис. 9).

Ответ. Усилие в стержне BC получается наибольшим, когда груз занимает свое крайнее правое положение в точке D . Объем стержня будет наименьшим, когда $\theta = 45^\circ$.

7. Определить необходимую площадь поперечного сечения стального стержня BC (рис. 10), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$ и равномерно распределенная вертикальная нагрузка равняется $q = 1200 \text{ кг}$ на 1 пог. м балки AB .

Ответ. $F = 3,6 \text{ см}^2$.

8. Определить необходимые площади F и F_1 поперечных сечений стержней AB и BC системы, показанной на рис. 11, если $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $F = 16,0 \text{ см}^2$, $F_1 = 12,5 \text{ см}^2$.

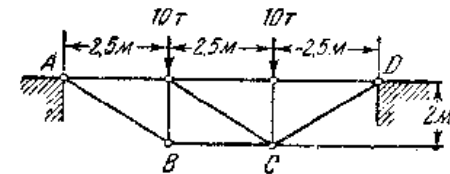


Рис. 11.

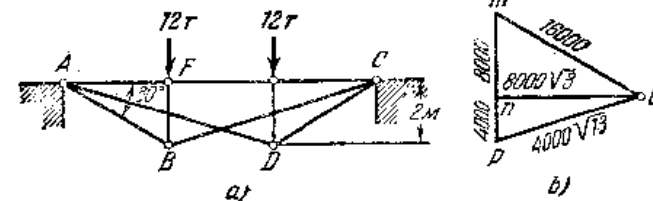


Рис. 12.

9. Определить необходимые площади F и F_1 поперечных сечений стержней AB и BC системы, показанной на рис. 12, a , если $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пусть треугольник mno на рис. 12, b представляет треугольник сил, действующих на шарнир B . Тогда, проведя горизонтальную линию on , мы можем заключить, что треугольники mno и npo геометрически подобны треугольникам BFA и FBC на рис. 12, a . Из этого подобия, как показано на рис. 12, b , по-

лучаются усилия в стержнях AB и BC и величины их горизонтальных и вертикальных проекций. Тогда требуемые площади будут

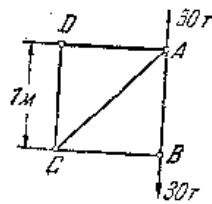


Рис. 13.

$$F = \frac{16000}{1000} = 16 \text{ см}^2, \quad F_1 = \frac{4000 \sqrt{13}}{1000} = 14,4 \text{ см}^2.$$

10. Найти площадь поперечного сечения стержня CD на рис. 11 и полное удлинение стержня, если его материалом является строительная сталь и $[\sigma] = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $F = 16 \text{ см}^2$, $\Delta l = 0,16 \text{ см}$.

11. Решить задачу 8, предполагая, что груз приложен только в одном узле верхнего пояса в расстоянии $2,5 \text{ м}$ от опоры A .

Ответ. $F = 10,67 \text{ см}^2$, $F_1 = 8,33 \text{ см}^2$.

12. Квадратная стальная рама нагружена, как показано на рис. 13. Найти полное удлинение каждого стержня, если площади поперечных сечений всех стержней одинаковы и равны 5 см^2 .

Ответ. Удлинения всех стержней, за исключением AB , равняются нулю. Для стержня AB $\Delta l = 0,3 \text{ см}$.

5. Напряжения и деформации при действии собственного веса

При рассмотрении растяжения стержня по рис. 1 принималась во внимание только нагрузка, приложенная на конце стержня. Если длина стержня велика, то собственный вес его может вызвать значительные дополнительные напряжения, которые необходимо принять в расчет. В этом случае наибольшие напряжения будут по поперечному сечению у заделанного конца. Обозначая через γ вес единицы объема бруса, найдем, что полный вес его будет γFl и наибольшее напряжение определится из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{P + \gamma Fl}{F} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (6)$$

Второй член правой части уравнения (6) представляет напряжение, вызываемое весом бруса.

Вес части бруса, находящейся ниже поперечного сечения mn в расстоянии x от нижнего конца (рис. 1), равняется γFx и напряжение по этому сечению определяется из уравнения

$$\sigma = \frac{P + \gamma Fx}{F}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (6) вместо σ_{\max} допускаемое напряжение $[\sigma]$, получим уравнение для вычисления необходимой площади поперечного сечения

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (8)$$

Интересно заметить, что с увеличением длины l вес бруса становится все более значительным, знаменатель правой части уравне-

ния (8) уменьшается и необходимая площадь F поперечного сечения увеличивается. Когда $\gamma l = [\sigma]$, т. е. напряжение только от собственного веса бруса получается равным допускаемому напряжению, то правая часть уравнения (8) становится бесконечностью. При таких обстоятельствах невозможно спроектировать призматический брус и необходимо прибегнуть к брусу переменного поперечного сечения.

Для вычисления полного удлинения призматического бруса, растягиваемого действующей на конце силой P и собственным его весом, рассмотрим сначала удлинение элемента длиной dx , вырезанного из бруса двумя смежными поперечными сечениями (см. рис. 1). Можно предположить, что по весьма малой длине dx растягивающее напряжение постоянно и определяется из уравнения (7). Тогда удлинение Δdx элемента будет

$$\Delta dx = \frac{\sigma dx}{E} = \frac{P + \gamma Fx}{EF} dx.$$

Полное удлинение бруса получится путем суммирования удлинений всех элементов. Тогда

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P + \gamma Fx}{EF} dx = \frac{l}{EF} \left(P + \frac{1}{2} \gamma Fl \right). \quad (9)$$

Сравнивая это с уравнением (1), видим, что полное удлинение, вызванное собственным весом бруса, равно удлинению, вызванному нагрузкой, равной половине его веса и приложенной на конце.

ЗАДАЧИ

1. Определить площадь поперечного сечения вертикального призматического стального бруса (рис. 1), имеющего на нижнем конце груз $P = 30 \text{ т}$, если длина бруса равна 200 м , допускаемое напряжение $[\sigma] = 700 \text{ кг/см}^2$, вес 1 куб. см стали равен $7,8 \text{ г}$. Определить полное удлинение бруса.

Решение. Площадь поперечного сечения из уравнения (8) равна

$$F = \frac{30000}{700 - 0,0078 \cdot 20000} = 55,15 \text{ см}^2.$$

Полное удлинение из уравнения (9) равно

$$\Delta l = \frac{20000}{2 \cdot 10^9} \left(544 + \frac{1}{2} \cdot 156 \right) = 6,22 \text{ см}.$$

2. Определить удлинение конического бруса под действием собственного веса (рис. 14), если длина бруса равна l , диаметр основания — d и вес единицы объема материала — γ .

Решение. Вес бруса равняется

$$Q = \gamma \frac{\pi d^2 l}{3}.$$

Для какого-либо поперечного сечения в расстоянии x от нижнего конца бруса растягивающее усилие, равное весу нижней части бруса, равняется

$$\frac{Qx^3}{l^3} = \gamma \frac{\pi d^2 x^3}{4 \cdot 3l^3}.$$

Полагая, что растягивающие напряжения равномерно распределены по поперечному сечению ¹⁾ и рассматривая элемент длиной dx как призматический брусок, находим удлинение этого элемента

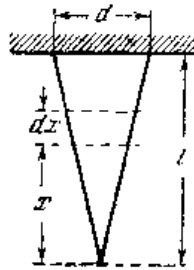


Рис. 14.

$$\Delta dx = \frac{\gamma x dx}{3E}$$

и полное удлинение бруса равняется

$$\Delta l = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l x dx = \frac{\gamma l^2}{6E}.$$

Это удлинение составляет одну треть от удлинения призматического бруса той же длины (см. уравнение (9)).

3. Вертикальная призматическая штанга шахтного насоса движется вверх и вниз с помощью колеччатого вала (рис. 15). Полагая, что материалом является сталь и допустимое напряжение равняется $[\sigma] = 500 \text{ кг/см}^2$, определить площадь поперечного сечения штанги, если сопротивление движению поршня вниз равно 100 кг, а движению вверх 1000 кг. Длина штанги равна 100 м. Определить необходимую длину радиуса r колена, если ход поршня равен 20 см.

Решение. Необходимая площадь поперечного сечения штанги определится из уравнения (8) подстановкой $P = 1000 \text{ кг}$. Тогда

$$F = \frac{1000}{500 - 0,0078 \cdot 10\,000} = 2,37 \text{ см}^2.$$

Разница между полным удлинением штанги при движении ее вверх и при движении вниз благодаря сопротивлению поршня будет равна

$$\Delta l_{\text{в}} - \Delta l_{\text{н}} = \frac{(1000 + 100) \cdot 10\,000}{2 \cdot 10^6 \cdot 2,37} = 2,32 \text{ см}.$$

Радиус колена должен быть

$$r = \frac{20 + 2,32}{2} = 11,16 \text{ см}.$$

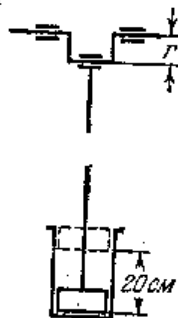


Рис. 15.

4. Стальная и алюминиевая проволоки подвешены вертикально. Определить для каждой проволоки длину, при которой напряжение от собственного веса равняется пределу прочности, если для стальной проволоки $\sigma_{\text{пр}} = 20\,000 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma = 7,8 \text{ г/см}^3$, а для алюминиевой проволоки $\sigma_{\text{пр}} = 3300 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma = 2,5 \text{ г/см}^3$.

Ответ. Для стали $l = 25\,640 \text{ м}$, а для алюминия $l = 13\,200 \text{ м}$.

5. В каком отношении увеличатся наибольшие напряжения, возникающие в призматическом бруске от собственного веса, если все размеры бруса увеличатся в отношении $n : 1$ (рис. 1)?

Ответ. Напряжения увеличатся в отношении $n : 1$.

6. Колонна, состоящая из двух призматических участков равной длины (рис. 16), центрально нагружена на верхнем конце сжимающей силой $P = 240 \text{ т}$,

Определить объем каменной кладки, если высота колонны равняется 36 м, объемный вес равен $1,5 \text{ т/м}^3$ и наибольшее сжимающее напряжение в каждом участке равняется 10 кг/см^2 . Сравнить объем этой колонны с объемом простой призматической колонны, спроектированной при тех же условиях.

Решение. Площадь поперечного сечения верхнего участка колонны из уравнения (8) равняется

$$F = \frac{240\,000}{10 - 0,0015 \cdot 1800} = 32\,880 \text{ см}^2 = 3,288 \text{ м}^2.$$

Для нижнего участка

$$F_1 = \frac{10 \cdot 32\,880}{10 - 0,0015 \cdot 1800} = 45\,050 \text{ см}^2 = 4,505 \text{ м}^2.$$

Полный объем каменной кладки равняется

$$V = (3,288 + 4,505) 18 = 140,274 \text{ м}^3.$$

Для призматической колонны

$$F = \frac{240\,000}{10 - 0,0015 \cdot 3600} = 52\,170 \text{ см}^2 = 5,217 \text{ м}^2,$$

$$V = 5,217 \cdot 36 = 187,812 \text{ м}^3.$$

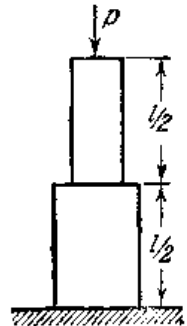


Рис. 16.

7. Решить предыдущую задачу, полагая, что колонна состоит из трех призматических участков равной длины.

Ответ. $F = 2,927 \text{ м}^2$, $F_1 = 3,570 \text{ м}^2$, $F_2 = 4,354 \text{ м}^2$, $V = 130,20 \text{ м}^3$.

8. Определить форму бруса на рис. 17 так, чтобы напряжение в каждом поперечном сечении равнялось $[\sigma]$. Форма бруса, удовлетворяющая этому условию, называется *формой равного сопротивления*.

Решение. Рассматривая элемент бруса, заштрихованный на рисунке, видим, что сжимающая сила в поперечном сечении $m_1 n_1$ больше таковой в сечении $m n$ на величину веса элемента. Но так как напряжение в обоих сечениях одно и то же и равно $[\sigma]$, то разница dF в площади поперечного сечения должна быть такой, чтобы компенсировать разницу в сжимающей силе. Следовательно,

$$dF [\sigma] = \gamma F dx, \quad (a)$$

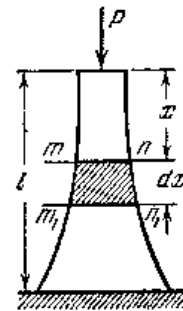


Рис. 17.

где правая часть уравнения представляет вес элемента. Разделив это уравнение на $F[\sigma]$ и проинте-

грировав, мы найдем

$$\int \frac{dF}{F} = \int \frac{\gamma dx}{[\sigma]},$$

откуда

$$\ln F = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C_1$$

и

$$F = C_2 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}. \quad (b)$$

где e есть основание натуральных логарифмов и $C = eC_1$. При $x = 0$ это уравнение дает площадь поперечного сечения на верш бруса

$$(F)_{x=0} = C.$$

¹⁾ Такое допущение справедливо, когда угол конуса мал,

Но площадь поперечного сечения на верху равна $\frac{P}{[\sigma]}$; следовательно $C = \frac{P}{[\sigma]}$ и уравнение (b) получается в таком виде

$$F = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} \quad (c)$$

Площадь поперечного сечения внизу бруса получается путем подстановки в уравнение (c) $x = l$, что дает

$$F_{\max} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} \quad (d)$$

9. Найти объем каменной кладки для бруса равного сопротивления при условиях, принятых в задаче 6.
Решение. Пользуясь уравнением (d), найдем разность площадей поперечных сечений вверху и внизу колонны

$$\frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - \frac{P}{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma]} (e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1)$$

Эта разность, умноженная на допускаемое напряжение $[\sigma]$, очевидно, дает вес колонны; следовательно, ее объем равняется

$$V = \frac{P}{\gamma} (e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1) = 114,56 \text{ м}^3$$

6. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии

Имеются случаи, когда продольные усилия, действующие в стержнях системы, не могут быть определены только из уравнений статики, но должна быть принята во внимание деформация системы. Такие системы называются статически неопределимыми системами.

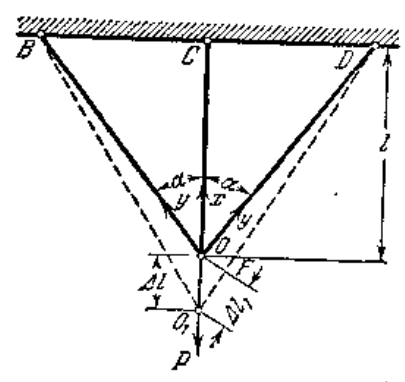


Рис. 18.

Простой пример такой системы показан на рис. 18. Груз P вызывает растяжение в стержнях OB , OC и OD , которые находятся в одной плоскости. Для определения трех неизвестных растягивающих усилий в стержнях статика дает два уравнения равновесия, для составления третьего уравнения необходимо рассмотреть деформацию системы. Положим для простоты, что система симметрична относительно вертикальной оси OC , что вертикальный стержень

стальной с площадью поперечного сечения F_c и модулем упругости материала E_c и что наклонные стержни — медные с площадью F_m и модулем E_m . Длина вертикального стержня равна l ,

а наклонных стержней $-\frac{l}{\cos \alpha}$. Обозначая через X растягивающее усилие в вертикальном стержне и через Y усилия в наклонных стержнях, найдем, что в этом случае, вследствие симметрии, неизвестных будет два, а статика дает лишь одно уравнение равновесия

$$X + 2Y \cos \alpha = P \quad (a)$$

Для того чтобы вывести второе уравнение, необходимое для определения неизвестных величин X и Y , нужно рассмотреть очертание деформированной системы, указанное на рисунке пунктиром. Пусть Δl будет полное удлинение вертикального стержня под действием груза P ; тогда удлинение Δl_1 наклонных стержней найдется из треугольника OFO_1 . Полагая, что эти удлинения весьма малы, можем заменить дугу окружности OF с центром D перпендикуляром и принять угол O_1 равным первоначальному углу α . Тогда

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \alpha$$

Относительные удлинения и напряжения вертикального и наклонных стержней соответственно будут

$$\epsilon_c = \frac{\Delta l}{l}; \quad \sigma_c = \frac{E_c \Delta l}{l} \quad \text{и} \quad \epsilon_m = \frac{\Delta l \cos^2 \alpha}{l}; \quad \sigma_m = \frac{E_m \Delta l \cos^2 \alpha}{l}$$

Тогда усилия в стержнях получатся путем умножения напряжений на площади поперечных сечений, а именно:

$$X = \sigma_c F_c = \frac{F_c E_c \Delta l}{l}, \quad Y = \sigma_m F_m = \frac{F_m E_m \Delta l \cos^2 \alpha}{l} \quad (b)$$

откуда

$$Y = X \cos^2 \alpha \frac{F_m E_m}{F_c E_c}$$

Вставляя в уравнение (a), получаем

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha \frac{F_m E_m}{F_c E_c}} \quad (10)$$

Видно, что усилие X зависит не только от угла наклона α , но также от площади поперечного сечения и от механических свойств материала стержней. В частном случае, когда все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и один и тот же модуль упругости, из уравнения (10) получим

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

Когда α приближается к нулю, $\cos \alpha$ приближается к единице и усилие в вертикальном стержне к $\frac{1}{3} P$. Когда α приближается к 90° ,

наклонные стержни становятся очень длинными и весь груз будет воспринят средним стержнем.

В качестве другого примера статически неопределимой системы рассмотрим призматический брус с заделанными концами под действием силы P , приложенной в промежуточном поперечном сечении mn (рис. 19) и действующей по оси бруса. Груз P будет уравниваться реакциями R и R_1 концов, поэтому

$$P = R + R_1. \quad (c)$$

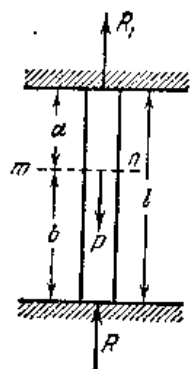


Рис. 19.

Для того чтобы составить второе уравнение для определения сил R и R_1 , необходимо рассмотреть деформацию бруса. Груз P совместно с силой R вызывает укорочение нижнего участка бруса, а с силой R_1 удлинение верхнего участка. Полное укорочение одного участка должно равняться полному удлинению другого. Тогда, пользуясь уравнением (1), получим

$$\frac{R_1 a}{EF} = \frac{R b}{EF},$$

следовательно,

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b}, \quad (d)$$

т. е. реакции R и R_1 обратно пропорциональны расстояниям их точек приложения от нагруженного поперечного сечения mn . Пользуясь уравнениями (c) и (d), легко можно вычислить величины этих реакций и напряжения в брус.

ЗАДАЧИ

1. Стальной цилиндр с диаметром d и медная трубка с внешним диаметром D сжимаются между плитами пресса (рис. 20). Определить напряжение в стали и меди, а также относительное укорочение, если $P = 40 \text{ т}$, $d = 10 \text{ см}$ и $D = 20 \text{ см}$.

Решение. Здесь опять уравнений статики недостаточно, а поэтому необходимо рассмотреть деформацию цилиндра и трубки, чтобы получить груз, воспринимаемый каждым из материалов. Относительные укорочения стали и меди должны быть равны; поэтому напряжения в материалах будут в таком же отношении, как их модули упругости (см. уравнение (4)), т. е. сжимающее напряжение в стали

будет составлять $\frac{20}{11}$ сжимающего напряжения в меди. Тогда величина напряжения меди σ_m найдется из уравнения статики

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \frac{20}{11} \sigma_m + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \sigma_m.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\sigma_m = 106 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_c = \frac{20}{11} \sigma_m = 193 \text{ кг/см}^2$$

и относительное укорочение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_m}{E_m} = 96,5 \cdot 10^{-6}.$$

2. Железобетонная колонна квадратного поперечного сечения сжимается продольной силой, $P = 24 \text{ т}$. Какая часть этой нагрузки будет воспринята бетоном

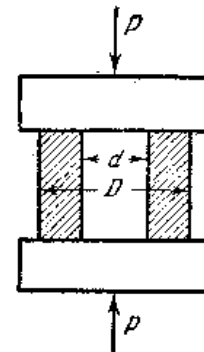


Рис. 20.

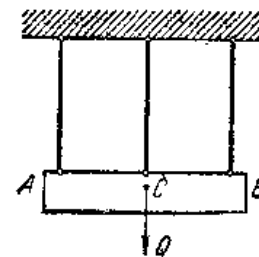


Рис. 21.

и какая часть железом, если площадь поперечного сечения железа составляет $\frac{1}{10}$ площади поперечного сечения бетона. Предположить, что железные стержни симметрично расположены относительно оси колонны.

Ответ. Нагрузка, воспринимаемая железом, составляет 0,77 нагрузки, воспринимаемой бетоном.

3. Твердое тело AB весом Q висит на трех вертикальных проволоках, симметрично расположенных относительно центра тяжести тела (рис. 21). Определить растягивающие усилия в проволоках, если средняя проволока стальная, а две другие медные. Площади поперечных сечений всех проволок равны.

Указание. Применить способ решения 1-й задачи.

4. Определить усилия в четырех ножках стола (рис. 22) от нагрузки P , приложенной в точке A . Крышка стола и пол предполагаются абсолютно твердыми, а ножки прикрепленными к полу, так что они могут сопротивляться как растяжению, так и сжатию.

Решение. Предполагая, что крышка стола займет новое положение, которое указано пунктирной линией mn , найдем, что укорочение ножки 2, а также 4 будет равно полусумме укорочений ножек 1 и 3. Следовательно,

$$2Y = X + Z$$

и так как

$$2Y + X + Z = P,$$

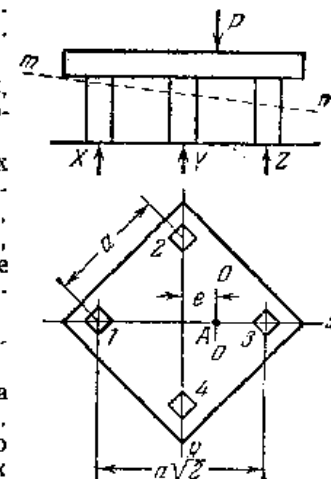


Рис. 22.

то

$$2Y = X + Z = \frac{1}{2} P. \quad (e)$$

Дополнительное уравнение для определения X и Z получится, если взять момент всех сил относительно горизонтальной оси $O-O$, параллельной y и проходящей через точку A . Тогда

$$X \left(\frac{1}{2} a \sqrt{2} + e \right) + \frac{1}{2} P e = Z \left(\frac{1}{2} a \sqrt{2} - e \right). \quad (f)$$

Из (e) и (f) получим

$$X = P \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{a \sqrt{2}} \right), \quad Y = \frac{P}{4}, \quad Z = P \left(\frac{1}{4} + \frac{e}{a \sqrt{2}} \right).$$

При $e > a \frac{\sqrt{2}}{4}$ X получается отрицательным. Это указывает на то, что в ножке l возникает растяжение.

5. Определить усилия в ножках выше указанного стола, если нагрузка приложена в точке с координатами

$$x = \frac{a}{4}, \quad y = \frac{a}{5}.$$

Указание. При решении этой задачи необходимо заметить, что если точка приложения груза P не находится на диагонали стола, то этот груз можно заменить двумя грузами, статически эквивалентными грузу P и приложенными в точках, лежащих на двух диагоналях. Усилия, возникающие в ножках от каждого из этих грузов, найдутся, как указано выше. Суммируя действия двух составляющих грузов, можем найти усилия в ножках для любого положения груза P .

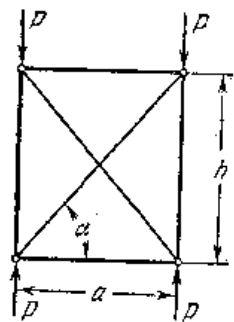


Рис. 23.

6. Прямоугольная рама с диагоналями подвергается действию сжимающих сил P (рис. 23). Определить усилия в стержнях, если все они изготовлены из одного и того же материала, площадь поперечного сечения вертикальных стержней равна F , а площадь остальных стержней — F_1 .

Решение. Пусть X будет сжимающее усилие в каждой вертикали, Y — сжимающее усилие в каждой диагонали и Z — растягивающее усилие в каждом горизонтальном стержне. Тогда из условия равновесия одного из шарниров имеем:

$$Y = \frac{P - X}{\sin \alpha}, \quad Z = Y \cos \alpha = (P - X) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (g)$$

Третье уравнение получится из того условия, что рама после деформации остается прямоугольной в силу симметрии; поэтому

$$(a^2 + h^2) \left(1 - \frac{Y}{EF_1} \right)^2 = h^2 \left(1 - \frac{X}{EF} \right)^2 + a^2 \left(1 + \frac{Z}{EF_1} \right)^2.$$

Из этого уравнения, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, мы получаем

$$\frac{(a^2 + h^2) Y}{EF_1} = \frac{h^2 X}{EF} - \frac{a^2 Z}{EF_1}. \quad (h)$$

Решая уравнения (g) и (h), получим следующее значение усилия в диагонали:

$$Y = \frac{P}{\frac{a^2 + h^2}{h^2} \frac{F}{F_1} + \frac{a^2}{h^2} \frac{F}{F_1} \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Усилия в других стержнях теперь можно легко определить из уравнений (g).

7. Решить предыдущую задачу, полагая $a = h$, $F = 5F_1$ и $P = 20m$.

8. Какие напряжения возникнут в стальном болте и медной трубке (рис. 24)

при повороте гайки на $\frac{1}{4}$ оборота, если длина болта $l = 75$ см, шаг нарезки болта $h = 0,3$ см, площадь поперечного сечения болта $F_c = 6$ см², а трубки $F_m = 12$ см²?

Решение. Пусть X означает неизвестное растягивающее усилие в болте и сжимающее усилие в трубке. Величина X определится из условия, что удлинение болта, сложенное с укорочением трубки, равняется перемещению гайки вдоль болта. В нашем случае, полагая длину трубки равной длине болта, получим

$$\frac{Xl}{E_c F_c} + \frac{Xl}{E_m F_m} = \frac{1}{4} h,$$

откуда

$$X = \frac{h E_c F_c}{\left(1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m} \right) 4.75 \left(1 + \frac{10}{11} \right)} = 6286 \text{ кг.}$$

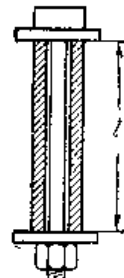


Рис. 24.

Растягивающее напряжение в болте равно $\sigma_c = \frac{X}{F_c} = 1048 \text{ кг/см}^2$. Сжимающее

напряжение в трубке равно $\sigma_m = \frac{X}{F_m} = 524 \text{ кг/см}^2$.

9. Как изменятся напряжения, вычисленные в предыдущей задаче, если к концам болта приложить растягивающие силы $P = 2m$?

Решение. Пусть X означает увеличение растягивающей силы в болте, а Y — уменьшение сжимающей силы в трубке. Тогда из условия равновесия получим

$$X + Y = P. \quad (i)$$

Второе уравнение можно написать на основании того, что относительные удлинения болта и трубки под действием сил P должны быть равны, т. е.

$$\frac{X}{E_c F_c} = \frac{Y}{E_m F_m}. \quad (j)$$

Из уравнения (i) и (j) легко можно вычислить силы X и Y и соответствующие напряжения.

10. Призматический брус с заделанными концами нагружен по направлению оси в двух промежуточных поперечных сечениях (рис. 25) силами P_1 и P_2 . Определить реакции R и R_1 .

Указание. Пользуясь уравнением (d) на стр. 28, можно вычислить реакции, вызываемые каждой силой в отдельности, и затем просуммировать эти реакции. Определить реакции, если $a = 0,3l$, $b = 0,3l$ и $P_1 = 2P_2 = 400$ кг.

Ответ. $R = 240$ кг. $R_1 = 360$ кг.

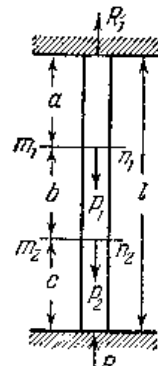


Рис. 25.

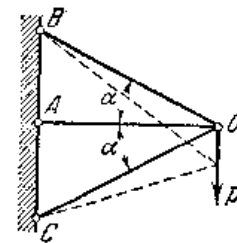


Рис. 26.

11. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 26, где OA есть ось симметрии.

Ответ. Растягивающее усилие в стержне OB равняется сжимающему усилию в стержне OC и равно $\frac{P}{2} \sin \alpha$. Усилие в горизонтальном стержне OA равно нулю.

12. Решить задачу 10, полагая, что площадь поперечного сечения нижнего участка бруса длиной c в два раза больше площади поперечного сечения двух верхних участков длиной a и b .

Ответ.

$$R = \frac{2P_1 a + 2P_2 (l - c)}{2l - c}, \quad R_1 = \frac{P_1 (2b + c) + P_2 c}{2l - c}.$$

7. Начальные и температурные напряжения

В статически неопределимой системе возможно существование некоторых начальных напряжений, возникающих в стержнях при сборке. Эти напряжения могут возникнуть благодаря неизбежной неточности в длинах стержней или благодаря намеренному отклонению от правильного значения этих длин и называются *начальными напряжениями сборки*. Такие напряжения будут существовать даже при отсутствии внешних сил и зависят только от геометрических соотношений системы, от механических свойств материалов и от величины неточности. Допустим, например, что система, представленная на рис. 18, имеет по ошибке длину вертикального стержня $l+a$ вместо l . Тогда, после сборки стержней BO и DO , вертикальный стержень можно вставить на место лишь после предварительного сжатия и вследствие этого в наклонных стержнях возникнет некоторое растягивающее усилие. Пусть X означает сжимающее усилие, которое возникнет в вертикальном стержне после сборки. Тогда соответствующее растягивающее усилие в каждом из наклонных стержней будет $\frac{X}{2 \cos \alpha}$ и перемещение шарнира O от удлинения этих стержней будет (см. уравнение (b), стр. 27)

$$\Delta l = \frac{Xl}{2E_M F_M \cos^3 \alpha}. \quad (a)$$

Укорочение вертикального стержня будет

$$\Delta l_1 = \frac{Xl}{E_c F_c}. \quad (b)$$

Из элементарных геометрических соображений следует, что перемещение шарнира O вместе с укорочением вертикального стержня должно быть равно величине a . Это дает следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Xl}{2E_M F_M \cos^3 \alpha} + \frac{Xl}{E_c F_c} = a,$$

откуда

$$X = \frac{a E_c F_c}{l \left(1 + \frac{E_c F_c}{2E_M F_M \cos^3 \alpha} \right)}. \quad (11)$$

Теперь можно вычислить начальные напряжения во всех стержнях.

Расширение стержней системы вследствие изменения температуры может иметь то же самое влияние, как и неточность в длине. Рассмотрим стержень с заделанными концами. Если температура стержня повышается от t_0 до t , а температурному расширению препятствуют реакции на концах, то в стержне возникнут сжимающие напряжения, величина которых может быть вычислена из условия, что длина остается неизменной. Пусть α обозначает коэффициент линейного расширения и σ — сжимающее напряжение, возникающее от изменения температуры. Тогда уравнение для определения σ будет

$$\alpha (t - t_0) = \frac{\sigma}{E},$$

откуда

$$\sigma = E \alpha (t - t_0). \quad (12)$$

В качестве второго примера рассмотрим систему, представленную на рис. 18, и положим, что вертикальный стержень нагрет от температуры t_0 при сборке до новой температуры t . Соответствующее температурное расширение будет частично задержано двумя другими стержнями системы, и в вертикальном стержне будут развиваться некоторые сжимающие напряжения, а в наклонных стержнях растягивающие напряжения. Величина сжимающего усилия в вертикальном стержне определится из уравнения (11), в которое вместо величины a нужно подставить температурное расширение $\alpha l (t - t_0)$ вертикального стержня.

ЗАДАЧИ

1. Трамвайные рельсы сварены между собой в стыках при 15°C . Каковы будут напряжения в этих рельсах при нагревании их солнцем до 55°C , если коэффициент линейного расширения стали равен $125 \cdot 10^{-7}$?

Ответ. $\sigma = 1000 \text{ кг/см}^2$.

2. Как изменятся напряжения в случае, представленном на рис. 24, при увеличении температуры от t_0 до t , если коэффициент линейного расширения стали равен α_s , а меди α_m ?

Решение. Так как $\alpha_m > \alpha_s$, то увеличение температуры вызовет сжатие в меди и растяжение в стали. Относительные удлинения меди и стали должны быть равны. Обозначая через X увеличение растягивающей силы в болте благодаря изменению температуры, получим

$$\alpha_s (t - t_0) + \frac{X}{E_c F_c} = \alpha_m (t - t_0) - \frac{X}{E_M F_M}$$

откуда

$$X = \frac{(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0)E_c F_c}{1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m}}$$

Изменение напряжений в болте и в трубке можно вычислить теперь обычным путем.

3. Медная пластинка спаяна с двумя стальными пластинками (рис. 27). Каковы будут напряжения в стали и меди при повышении температуры пластинок от t_0 до t ?

Решение. Нужно применить тот же способ, что и в предыдущей задаче.

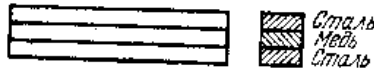


Рис. 27.

4. Каковы будут напряжения в стержнях системы, представленной на рис.

18, если температура всех стержней повысится от t_0 до t ?

Решение. Пусть X означает растягивающее усилие, вызванное в стальном стержне увеличением температуры. Тогда из условий равновесия шарнира O можно найти, что в медных стержнях действуют сжимающие усилия, равные;

$\frac{X}{2 \cos \alpha}$; следовательно, удлинение стального стержня получится

$$\Delta l = \alpha_c (t - t_0) l + \frac{Xl}{E_c F_c},$$

и удлинение медных стержней равно

$$\Delta l_1 = \alpha_m (t - t_0) \frac{l}{\cos \alpha} - \frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha}.$$

Кроме того, из предыдущих рассуждений (см. стр. 27) имеем

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \alpha,$$

Поэтому

$$\alpha_c (t - t_0) l + \frac{Xl}{E_c F_c} = \alpha_m (t - t_0) \frac{l}{\cos^2 \alpha} - \frac{Xl}{2E_m F_m \cos^2 \alpha},$$

откуда

$$X = \frac{(t - t_0) \left(\frac{\alpha_m}{\cos^2 \alpha} - \alpha_c \right) E_c F_c}{1 + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \frac{E_c F_c}{E_m F_m}}.$$

Напряжения в стали и меди получатся теперь из следующих уравнений:

$$\sigma_c = \frac{X}{F_c}, \quad \sigma_m = \frac{X}{2F_m \cos \alpha}.$$

5. Полагая, что в случае, показанном на рис. 20, приложена постоянная нагрузка $P = 40 \text{ т}$ при начальной температуре t_0 , определить, при каком увеличении температуры будет передаваться полностью нагрузка на медную трубку, если $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$.

Решение.

$$(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)E_m},$$

откуда $t - t_0 = 40^\circ \text{ С}$,

6. Стальной стержень, состоящий из двух участков длиной l_1 и l_2 и площадью поперечного сечения F_1 и F_2 , заделан на концах. Найти температурные напряжения, если температура повысится на 60° С . Положить $l_1 = l_2$, $F_1 = 2F_2$ и $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$.

Ответ. $\sigma_1 = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = 2000 \text{ кг/см}^2$.

7. Найти температурные напряжения в системе, показанной на рис. 27, если температура всех трех пластинок повысится на 100° С . Толщина каждой из трех пластинок одна и та же и коэффициенты линейного расширения равны $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$. Положить $E_m : E_c = 1 : 2$.

Ответ. Напряжения в медной пластинке сжимающие и равны $\sigma_m = 320 \text{ кг/см}^2$, а в стальных пластинках — растягивающие и равны $\sigma_c = 160 \text{ кг/см}^2$.

8. Температура системы, показанной на рис. 18, повысилась на 50° С . Найти температурные напряжения, если все три стержня — стальные и площади их поперечных сечений равны. Положить $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ и $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. Вертикальный стержень растянут и напряжение в нем равно

$$\sigma = \frac{2500 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 1} \text{ кг/см}^2,$$

наклонные стержни сжаты и напряжение в каждом из них равно

$$\sigma = \frac{1250 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 1} \text{ кг/см}^2.$$

9. Найти напряжения в проволоках системы, показанной на рис. 21, если площадь поперечного сечения каждой проволоки равна 1 см^2 , груз $Q = 2000 \text{ кг}$ и температура системы повысится после сборки на 10° С . Положить $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$, $E_m = 1 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $\sigma_c = 1040 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_m = 480 \text{ кг/см}^2$.

10. Найти напряжения, которые возникнут в системе, представленной на рис. 23, если температура верхней распорки повысится от t_0 до t градусов.

Ответ. Сжимающее усилие X в верхней распорке определится из уравнения

$$\alpha(t - t_0)a = X \left(\frac{2h \operatorname{tg}^2 \alpha}{EF} + \frac{2h}{EF_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{2a}{EF_1} \right).$$

8. Растяжение кругового кольца

Если по окружности тонкого кругового кольца действуют равномерно распределенные радиальные силы (рис. 28), то они вызовут равномерное удлинение кольца. Для того чтобы определить растягивающее усилие P в кольце, вообразим, что кольцо разрезано горизонтальным диаметрально сечением (рис. 28, б) и рассмотрим верхнюю часть как свободное тело. Если q означает равномерную нагрузку, приходящуюся на единицу длины оси кольца, и r — радиус оси, то действующая сила на элемент кольца, вырезанный двумя смежными сечениями, будет $qr d\varphi$, где $d\varphi$ — центральный угол, соответствующий элементу. Взяв сумму вертикальных составляющих всех сил, действующих на половину кольца, получим следующее уравнение равновесия

$$2P - 2 \int_0^{\pi/2} qr \sin \varphi d\varphi = 2qr,$$

откуда

$$P = qr, \quad (13)$$

Растягивающее напряжение в кольце получится путем деления усилия P на площадь поперечного сечения кольца ¹⁾.

В практических приложениях часто бывает необходимо определить растягивающие напряжения во вращающемся кольце. В этом

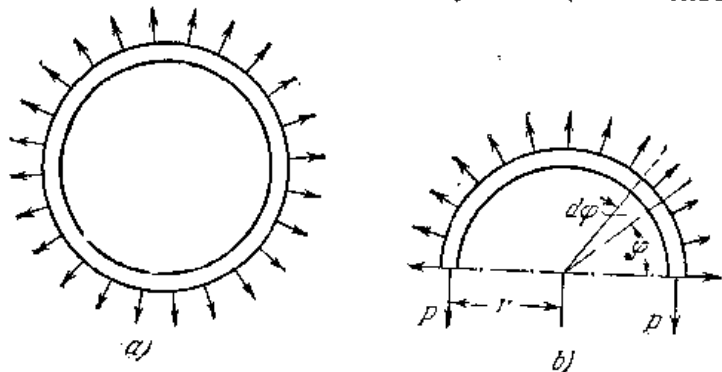


Рис. 28.

случае q представляет центробежную силу на единицу длины кольца и определяется из уравнения

$$q = \frac{Qv^2}{gr}, \quad (14)$$

в котором Q — вес единицы длины кольца, r — радиус оси, v — скорость точек кольца при радиусе r и g — ускорение силы тяжести. Подставляя это выражение вместо q в уравнение (13), получим

$$P = \frac{Qv^2}{g},$$

и соответствующее растягивающее напряжение будет

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{Qv^2}{Fg} = \frac{\gamma v^2}{g}. \quad (15)$$

Видно, что напряжения пропорциональны плотности $\frac{\gamma}{g}$ материала и квадрату окружной скорости ²⁾. Для стального кольца и для скорости $v = 30$ м/сек это напряжение будет равно 72 кг/см². Следовательно, для того же материала, но для другой скорости v_1 напряжение будет $0,08 v_1^2$ кг/см², если v_1 выражено в метрах в секунду.

¹⁾ Ниже будет показано (см. часть II), что в случае тонкого кольца справедливо предположить, что напряжения равномерно распределяются по поперечному сечению кольца.

²⁾ Для тонкого кольца скорость на оси можно принять равной окружной скорости.

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее растягивающее напряжение в стенке цилиндра прессы, показанного на рис. 5, если внутренний диаметр равен 25 см, а толщина стенки равна $2,5$ см.

Решение. Наибольшее гидростатическое давление p в цилиндре найдется из уравнения

$$p \frac{\pi 25^2}{4} = 40\,000 \text{ кг},$$

откуда $p = 81,5$ кг/см². Вырезая из цилиндра элементарное кольцо шириной 1 см по оси цилиндра и применяя уравнение (13), в котором для этого случая $q = p = 81,5$ кг/см и $r = 12,5$ см, получим

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{81,5 \cdot 12,5}{2,5 \cdot 1} = 407,5 \text{ кг/см}^2.$$

2. Медная трубка плотно надета на стальную трубку при высокой температуре t (рис. 29) таким образом, что при этой температуре никакого давления между трубками не существует. Определить напряжения, которые возникнут в меди и стали при охлаждении трубок до комнатной температуры t_0 , если внешний диаметр стальной трубки равен d , толщина стальной трубки h_c , а медной трубки — h_m .

Решение. Вследствие разницы в коэффициентах линейного расширения α_m и α_c при охлаждении возникнет давление между внешней и внутренней трубками. Пусть x означает давление на 1 см²; тогда растягивающее напряжение в медной трубке будет

$$\sigma_m = \frac{xd}{2h_m},$$

и сжимающее напряжение в стальной трубке будет

$$\sigma_c = \frac{xd}{2h_c}.$$

Давление x найдется из условия, что при охлаждении обе трубки имеют одно и то же относительное укорочение, следовательно,

$$\alpha_m(t - t_0) - \frac{xd}{2E_m h_m} = \alpha_c(t - t_0) + \frac{xd}{2E_c h_c},$$

откуда

$$\sigma = \frac{xd}{2h_m} = \frac{(\alpha_m - \alpha_c)(t - t_0) E_m}{1 + \frac{h_m E_m}{h_c E_c}}.$$

Таким же способом можно вычислить напряжение в стальной трубке.

3. Каково будет дополнительное напряжение в трубке, если подвергнуть ее внутреннему гидростатическому давлению $p = 6,6$ кг/см²? При этом внутренний диаметр $d_1 = 10$ см, $h_c = 0,3$ см и $h_m = \frac{20}{11} \cdot 0,3$ см (см. рис. 29).

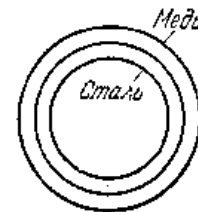


Рис. 29.

Решение. Вырезая из трубки элементарное кольцо шириною 1 см, найдем, что полное растягивающее усилие в кольце будет

$$P = \frac{\rho d_1}{2} = 33 \text{ кг.}$$

Вследствие того, что относительные удлинения по окружности в меди и стали одинаковы, напряжения будут пропорциональны модулям упругости, т. е. напряжение в меди будет составлять $\frac{11}{20}$ напряжения в стали. В то же самое время

площадь поперечного сечения меди равна $\frac{20}{11}$ площади стали; следовательно, усилие P будет поровну распределено между двумя металлами, и растягивающее напряжение в меди, вызываемое гидростатическим давлением, будет

$$\sigma_m = \frac{P}{2h_m} = \frac{33}{2 \cdot \frac{20}{11} \cdot 0,3} = 30,3 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в стали будет

$$\sigma_c = \frac{20}{11} \sigma_m = 55 \text{ кг/см}^2.$$

4. Составное кольцо состоит из внутреннего медного кольца и наружного стального кольца. Внутренний диаметр стального кольца меньше внешнего диаметра медного кольца на величину δ ; поэтому система собирается после предварительного нагрева стального кольца. При охлаждении стального кольца производится давление на медное кольцо (давление от усадки). Определить напряжения в стали и меди после сборки, если оба кольца имеют прямоугольные поперечные сечения с размерами h_c и h_m в радиальном направлении и размерами, равными единице в направлении, перпендикулярном плоскости кольца. Размеры h_c и h_m можно считать малыми по сравнению с диаметром d поверхности соприкасания двух колец.

Решение. Пусть x будет равномерно распределенное давление на 1 см² поверхности соприкасания колец; тогда сжимающее напряжение в меди и растягивающее напряжение в стали найдем из уравнений

$$\sigma_m = \frac{xd}{2h_m}, \quad \sigma_c = \frac{xd}{2h_c}. \quad (a)$$

Уменьшение внешнего диаметра медного кольца будет

$$\Delta d_m = \frac{\sigma_m}{E_m} d = \frac{xd^2}{2h_m E_m}.$$

Увеличение внутреннего диаметра стального кольца будет

$$\Delta d_c = \frac{\sigma_c}{E_c} d = \frac{xd^2}{2h_c E_c}.$$

Неизвестное давление x найдется из уравнения

$$\Delta d_m + \Delta d_c = \frac{xd^2}{2} \left(\frac{1}{h_m E_m} + \frac{1}{h_c E_c} \right) = \delta.$$

откуда

$$x = \frac{2\delta h_c E_c}{d^2 \left(1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m} \right)}.$$

Теперь найдем из уравнений (а) напряжения

$$\sigma_m = \frac{\delta h_c}{d h_m} \frac{E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m}}, \quad \sigma_c = \frac{\delta}{d} \frac{E_c}{1 + \frac{h_c E_c}{h_m E_m}}.$$

5. Определить напряжения, которые возникнут в составном кольце предыдущей задачи от вращения кольца с постоянной скоростью n оборотов в минуту.

Решение. Так как медь имеет большую плотность и меньший модуль упругости, чем сталь, то медное кольцо при вращении будет давить на стальное кольцо. Пусть x означает давление на 1 см² поверхности соприкасания между двумя кольцами. Тогда соответствующие напряжения определяются из уравнений (а) предыдущей задачи. В дополнение к этим напряжениям необходимо принять во внимание напряжения, возникающие от центробежных сил. Обозначая через γ_c и γ_m веса единицы объема стали и меди и пользуясь уравнением (15), получим

$$\sigma_c = \frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_c}{2} \right)^2, \quad \sigma_m = \frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2.$$

Складывая эти напряжения с напряжениями от давления x и замечая, что относительные удлинения объема колец должны быть одинаковы, получим следующее уравнение для определения x :

$$\frac{1}{E_c} \left[\frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_c}{2} \right)^2 + \frac{xd}{2h_c} \right] = \frac{1}{E_m} \left[\frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2 - \frac{xd}{2h_m} \right],$$

откуда можно вычислить x для каждого частного случая. Зная x , можно найти без затруднения полное напряжение в меди и стали.

6. Определить предельную окружную скорость медного кольца, если допустимое напряжение $[\sigma] = 200 \text{ кг/см}^2$ и $\gamma_m = 8,8 \text{ г/см}^3$.

Ответ. $v = 48,3 \text{ м/сек.}$

7. Определить напряжение в меди при комнатной температуре (см. задачу 2 и рис. 29), если $t - t_0 = 55^\circ \text{C}$, $\alpha_m - \alpha_c = 40 \cdot 10^{-7}$, $h_c = h_m$.

Ответ. $\sigma_m = 156,2 \text{ кг/см}^2$.

8. Определить в задаче 5 число оборотов n в минуту, при котором напряжения в медном кольце становятся равными нулю, если начальные напряжения при сборке в том же кольце были сжимающие и равные σ_0 , $h_m = h_c$ и $E_c = 2E_m$.

Решение. Число оборотов n определится из уравнения

$$3\sigma_0 = \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \left[\frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{d-h_m}{2} \right)^2 + \frac{\gamma_c}{g} \left(\frac{d-h_c}{2} \right)^2 \right].$$

9. Найти напряжения в составном кольце задачи 4, полагая $\delta = 0,003 \text{ см}$, $d = 10 \text{ см}$, $h_c = h_m$ и $\frac{E_c}{E_m} = 2$. Найти изменение этих напряжений, если температура колец увеличится после сборки на 10°C . Принять $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$ и $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$.

Ответ. $\sigma_m = \sigma_c = 200 \text{ кг/см}^2$. Величина изменения напряжений равна 27 кг/см^2 .

10. Найти в задаче 5 напряжения в стали и меди, если $n = 3000$ оборотов в минуту, $d = 60 \text{ см}$, $h_c = h_m = 1,2 \text{ см}$, $\gamma_c = 7,8 \text{ г/см}^3$ и $\gamma_m = 8,8 \text{ г/см}^3$.

ГЛАВА II

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

9. Напряжения по наклонным сечениям при простом растяжении и сжатии

При изучении напряжений в призматическом брусе, подверженном осевому растяжению силой P , мы ранее рассматривали (§ 2) только напряжения по поперечным сечениям, перпендикулярным к оси бруса. Остановимся теперь на случае, когда сечение pq (рис. 30, *a*), перпендикулярное плоскости фигуры, наклонено к оси. Вследствие того, что все продольные волокна имеют одно и то же удлинение (см. стр. 12), усилия, представляющие действие правой части бруса на левую, равномерно распределены по сечению pq . Левая часть бруса, изображенная отдельно на рис. 30, *b*, находится в равновесии под действием этих усилий и внешней силы, приложенной к левому концу. Следовательно, равнодействующая усилий, распределенных по сечению pq , равна P . Обозначая через F площадь сечения, перпендикулярного к оси бруса, и через φ угол между осью x и нормалью n к сечению pq , найдем, что площадь сечения pq будет равна $\frac{F}{\cos \varphi}$ и напряжение σ_φ по этому сечению будет

$$\sigma_\varphi = \frac{P \cos \varphi}{F} = \sigma_x \cos \varphi, \quad (16)$$

где $\sigma_x = \frac{P}{F}$ означает напряжение по сечению, перпендикулярному к оси бруса. Из формулы видно, что напряжение σ_φ по какому-либо наклонному сечению бруса меньше напряжения σ_x по сечению, нормальному к оси бруса, и что оно уменьшается с увеличением угла φ . Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ сечение pq параллельно оси бруса и на-

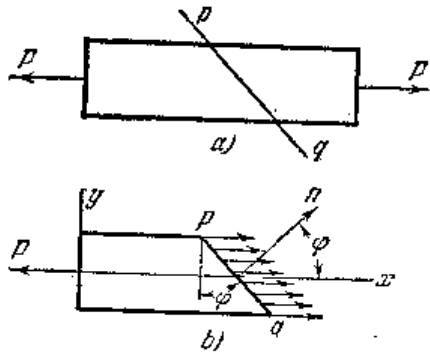


Рис. 30.

пряжение σ_φ делается равным нулю, что указывает на то, что между продольными волокнами бруса не имеется никакого давления.

Напряжение σ_φ , определяемое уравнением (16), имеет направление силы P и не перпендикулярно к сечению pq . В таких случаях полное напряжение обычно разлагают на два составляющих напряжения, как показано на рис. 31. Составляющая напряжения σ_n , перпендикулярная к сечению, называется *нормальным напряжением*. Его величина равна

$$\sigma_n = \sigma_\varphi \cos \varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi. \quad (17)$$

Тангенциальная составляющая τ называется *касательным напряжением* и его величина равна

$$\tau = \sigma_\varphi \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi \sin \varphi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \quad (18)$$

Чтобы отчетливо представить себе деформации, которые вызывает каждое составляющее напряжение, мы рассмотрим элемент, вырезанный из бруса двумя смежными параллельными сечениями pq и p_1q_1 (рис. 32, *a*).

Напряжения, действующие на этот элемент, показаны на рис. 32, *a*. Рисунки 32, *b* и 32, *c* получены путем разложения этих напряжений на нормальные и касательные составляющие, как указано выше, и изображают отдельно действие каждой из этих составляющих. Видно, что *нормальные напряжения* σ_n производят растяжение элемента в направлении нормали n к сечению pq и *касательные напряжения* производят сдвиг сечения pq относительно p_1q_1 .

Из уравнения (17) видно, что *наибольшее нормальное напряжение* действует по сечениям, перпендикулярным к оси бруса, и равно $(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x$. *Наибольшее касательное напряжение*, как видно из уравнения (18), действует по сечениям, наклоненным под углом 45° к оси бруса, где $\sin 2\varphi = 1$, и равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x. \quad (19)$$

Хотя наибольшее касательное напряжение равно половине наибольшего нормального напряжения, но иногда это напряжение является решающим фактором при рассмотрении предела прочно-

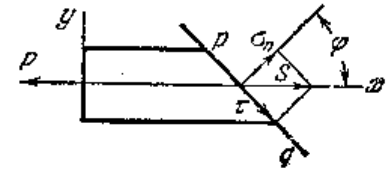


Рис. 31.

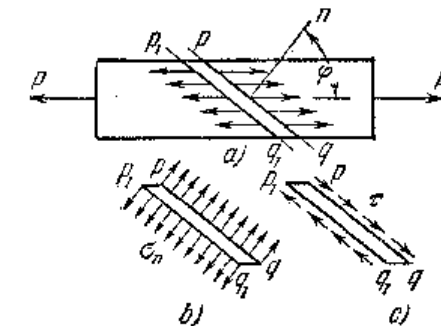


Рис. 32.

сти тех материалов, которые гораздо слабее при сдвиге, чем при растяжении.

Например, при испытании на растяжение образца из мягкой стали с отполированной поверхностью видимое течение металла происходит по наклонным линиям, так называемым линиям Людерса (рис. 33). Течение происходит по наклонным плоскостям, по которым касательные напряжения являются наиболь-

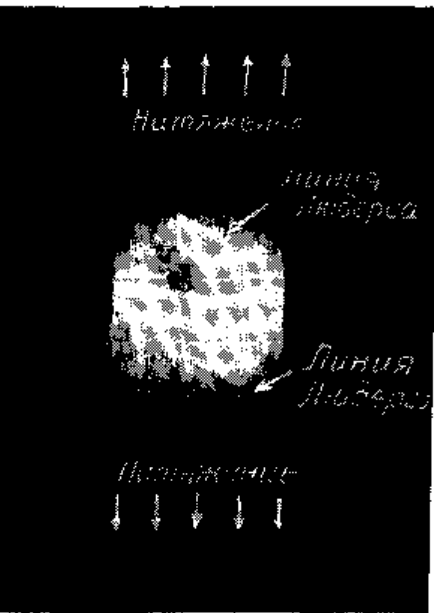


Рис. 33.

шими, и при величине силы P , которая соответствует точке B на рис. 4, а. Это указывает на то, что в случае мягкой стали разрушение происходит от наибольших касательных напряжений, хотя эти напряжения равны половине наибольшего нормального напряжения.

Формулы (17) и (18), выведенные для бруса, испытывающего растяжение, можно использовать также и в случае сжатия. Растягивающее напряжение принимается положительным, а сжимающее — отрицательным. Следовательно, для бруса, подвергнутого осевому сжатию, мы должны только взять σ_x с отрицательным знаком в формулах (17) и (18). Отрицательный знак у σ_n указывает на то, что на рис. 32, b мы получаем вместо растяжения сжимающее действие на элемент между смежными сечениями pq и p_1q_1 . Отрицательный знак у τ в формуле (18) указывает на то, что при сжатии бруса действие касательных напряжений на элемент имеет направление, противоположное тому, что показано на рис. 32, c .

Рисунок 34 иллюстрирует правило знаков для нормального и касательного напряжений, которым будем пользоваться. А именно, положительный знак для касательного напряжения принимаем в том случае, когда касательные напряжения образуют пару, вращающую по часовой стрелке, и отрицательный знак — в случае противоположного направления.

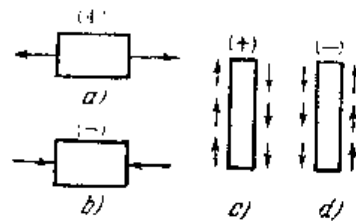


Рис. 34.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что пары, представленные на рис. 32, b и 32, c уравновешивают друг друга.

2. Призматический брус с площадью поперечного сечения F подвергается действию осевой сжимающей силы $P = 4 \text{ т}$. Найти σ_n и τ для площадки, наклоненной под углом 45° к оси бруса.

$$\text{Ответ. } \sigma_n = \pm \tau = -\frac{2000}{F} \text{ кг/см}^2.$$

3. Найти изменение расстояния между плоскостями pq и p_1q_1 на рис. 32, a , вызываемое силами $P = 12 \text{ т}$, если первоначальное расстояние между этими плоскостями равно 1 см, площадь поперечного сечения $F = 6 \text{ см}^2$ и $\varphi = 45^\circ$.

$$\text{Ответ. } \Delta l = 0,0005 \text{ см}.$$

4. Найти угол φ (рис. 32, a), определяющий положение плоскости pq , при котором 1) нормальное напряжение σ_n равно половине наибольшего напряжения σ_x , 2) касательное напряжение равно одной трети σ_x .

$$\text{Ответ. } 1) \varphi = \pm 45^\circ; 2) \varphi = \arctg \frac{1}{3}.$$

10. Круг Мора

Формулы (17) и (18) можно представить графически ¹⁾. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в точке O и с положительным направлением осей, как показано на рис. 35. Начнем с сечения pq , перпендикулярного к оси бруса. В этом случае мы имеем $\varphi = 0$ (см. рис. 31) и из формулы (17) и (18) находим $\sigma_n = \sigma_x$, $\tau = 0$. Выбирая определенный масштаб для напряжений и откладывая нормальные составляющие по горизонтальной оси и касательные составляющие по вертикальной оси, находим, что напряжение, действующее на площадке с углом $\varphi = 0$, будет представлено на рис. 35 точкой A , имеющей абсциссу, равную σ_x , и ординату, равную нулю. Взяв теперь площадку, параллельную оси бруса, мы имеем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и

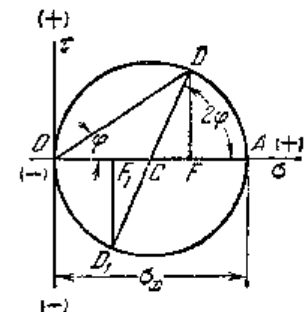


Рис. 35.

замечая, что обе составляющие напряжения равны нулю на такой площадке, мы заключаем, что начало координат O на рис. 35 соответствует этой площадке. Построив теперь круг на \overline{OA} , как на диаметре, можем легко доказать, что составляющие напряжения для какого-либо сечения pq с произвольно выбранным углом φ на рис. 31 будут представлены координатами точки этого круга. Для того чтобы получить точку на круге, соответствующую определенному углу φ , необходимо измерить от точки A в направ-

¹⁾ Это графическое представление принадлежит О. Мору, Civilingenieur, стр. 113, 1882; см. также Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin, стр. 219, 1906. В этой книге даны ссылки на другие опубликованные работы по этому же вопросу.

лении против движения часовой стрелки дугу, стягивающую угол, равный 2φ . Пусть D будет точка, полученная таким способом; тогда из фигуры имеем:

$$\overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi,$$

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi.$$

Сравнивая эти выражения для координат точки D с выражениями (17) и (18), видим, что эта точка представляет напряжения, действующие на площадке pq на рис. 31. В то время как сечение pq поворачивается против часовой стрелки около оси, перпендикулярной к плоскости рис. 31, и φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка D движется от A к O , так что верхняя половина круга определяет напряжения для всех значений φ в этих пределах.

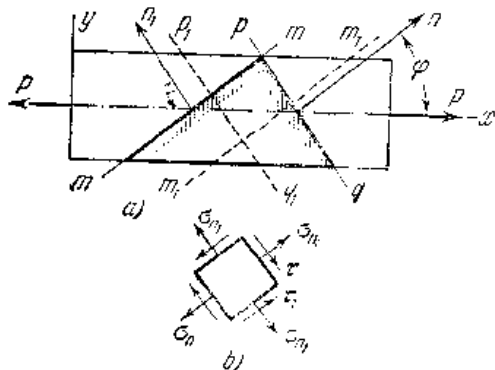


Рис. 36.

Если угол φ больше $\frac{\pi}{2}$, мы получим сечение, как показано на рис. 36, а, в результате разреза бруса плоскостью mt , внешняя

нормаль ¹⁾ n_1 к которой образует с осью x угол, больший $\frac{\pi}{2}$. Измеряя угол, равный 2φ , против часовой стрелки от точки A на рис. 35, мы получим теперь точку на нижней половине окружности.

Возьмем, например, случай, когда mt перпендикулярно к сечению pq , которое было рассмотрено ранее. В этом случае соответствующая точка на круге рис. 35 есть точка D_1 , так что угол DOD_1 равен π и DD_1 есть диаметр круга. Пользуясь координатами точки D_1 , находим составляющие напряжения σ_{n_1} и τ_1 для сечения mt :

$$\sigma_{n_1} = \overline{OF_1} = \overline{OC} - \overline{F_1C} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi, \quad (20)$$

$$\tau_1 = -\overline{F_1D_1} = -\overline{C_1D_1} \sin 2\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \quad (21)$$

Сравнивая эти результаты с выражениями (17) и (18), мы находим

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin^2 \varphi = \sigma_x, \quad (22)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (23)$$

¹⁾ Часть бруса, на которую действуют напряжения, показана штриховкой. Внешняя нормаль n_1 направлена внаружу от этой части.

²⁾ Знак минус взят потому, что точка D_1 находится на стороне отрицательных ординат.

Это указывает, что сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимным перпендикулярным площадкам, остается постоянной и равной σ_x . Касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, численно равны, но противоположны по знаку.

Если провести (рис. 36, а) сечения mt , m_1t_1 и p_1q_1 , параллельные mt и pq , то будет вырезан из бруса элемент, показанный на рис. 36, б; на этом же рисунке указаны и направления напряжений, действующих на этот элемент. Видно, что касательные напряжения, действующие по граням элемента, параллельным плоскости pq , создают пару, вращающую по часовой стрелке; следовательно, согласно принятому правилу (см. рис. 34, с), эти напряжения нужно считать положительными. Касательные напряжения, действующие по двум другим граням элемента, создают пару, вращающую против часовой стрелки; поэтому, согласно принятому правилу (см. рис. 34, д), эти напряжения являются отрицательными.

Круг, изображенный на рис. 35 и называемый *кругом напряжений* или *кругом Мора*, применяется для определения составляющих напряжений σ_n и τ по сечению pq , нормаль к которому образует угол φ с осью x (рис. 31). Подобное построение можно применить к решению обратной задачи, т. е. когда даны составляющие σ_n и τ и требуется найти растягивающее напряжение σ_x , действующее по оси, и угол φ . На рис. 35 мы видим, что угол между хордой OD и осью x равен φ . Следовательно, после построения точки D с координатами σ_n и τ мы получим угол φ путем проведения линии OD . Зная угол φ , можно провести радиус DC , образующий угол 2φ с осью OC , и получить центр C круга напряжений. Диаметр этого круга дает требуемое напряжение σ_x .

ЗАДАЧИ

1. Определить σ_n и τ аналитически и графически, если $\sigma_x = 1000 \text{ кг/см}^2$ и $\varphi = 30^\circ$ или 120° . Пользуясь углами 30° и 120° , вырезать элемент, как изображено на рис. 36, б, и показать стрелками направления напряжений, действующих на элемент.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что вместо растягивающего напряжения σ_x действует сжимающее напряжение той же величины. Следует заметить, что в этом случае диаметр круга (рис. 35) должен лежать на отрицательной стороне абсцисс.

3. По площадке pq (рис. 31) действуют нормальное напряжение $\sigma_n = 900 \text{ кг/см}^2$ и касательное напряжение $\tau = 300 \text{ кг/см}^2$. Найти угол φ и напряжение σ_x .

$$\text{Ответ. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \quad \sigma_x = \frac{\sigma_n}{\cos^2 \varphi} = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

4. На две перпендикулярные грани элемента, изображенного на рис. 36, б, действуют нормальные напряжения $\sigma_n = 800 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_{n_1} = 400 \text{ кг/см}^2$. Найти σ_x и τ .

$$\text{Ответ. } \sigma_x = 1200 \text{ кг/см}^2, \quad \tau = \pm 564 \text{ кг/см}^2.$$

5. Найти наибольшее касательное напряжение для случая задачи 1.

Ответ. $\tau_{\max} = 500 \text{ кг/см}^2$.

6. Определить угол наклона сечений, при котором нормальное и касательное напряжения численно равны.

Ответ. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

11. Растяжение или сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям

Имеются случаи, когда материал конструкции подвергается действию растяжения или сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В качестве примера такого напряженного состояния рассмотрим напряжения в цилиндрической стенке котла, подвергнутого внутреннему давлению $p \text{ кг/см}^2$ ¹⁾. Вырежем эле-

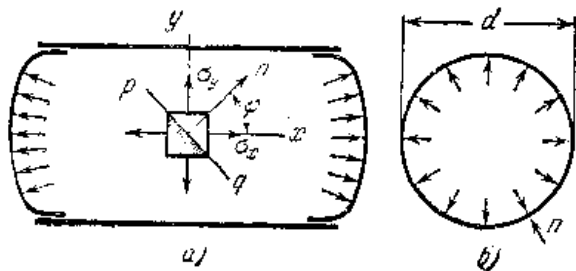


Рис. 37.

мент из цилиндрической стенки котла двумя смежными продольными сечениями и двумя поперечными сечениями (рис. 37, а). Вследствие внутреннего давления цилиндр будет растягиваться и в поперечном и в продольном направлениях. Растягивающие напряжения σ_y в поперечном (по окружности) направлении определяются таким же способом, как и в случае кругового кольца (параграф 8). Обозначая внутренний диаметр котла через d и толщину его стенки через h , найдем величину этого напряжения

$$\sigma_y = \frac{pd}{2h}. \quad (24)$$

При вычислении растягивающих напряжений σ_x в осевом направлении вообразим котел, разрезанный плоскостью, перпендикулярной к оси x . Рассматривая равновесие одной части котла, видим, что растягивающее усилие, вызывающее продольное растяжение котла, равно давлению на днище котла, т. е. равно

$$P = p \frac{\pi d^2}{4}.$$

¹⁾ Точнее, p означает разность внутреннего и внешнего атмосферного давлений.

Площадь поперечного сечения стенки котла равняется¹⁾

$$F = \pi dh.$$

Следовательно,

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{pd}{4h}. \quad (25)$$

Видно, что элемент стенки подвергается действию растягивающих напряжений σ_x и σ_y в двух взаимно перпендикулярных направлениях²⁾. В этом случае растягивающие напряжения σ_y в направлении по окружности в два раза больше напряжений σ_x в осевом направлении.

Для общего случая мы рассмотрим теперь напряжения по сечению pq (рис. 37, а), перпендикулярному к плоскости xy , и нормаль n к которому образует угол φ с осью x . Пользуясь формулами (17) и (18) предыдущего параграфа, мы заключаем, что растягивающее напряжение σ_n , действующее в осевом направлении, вызывает по площадке pq нормальное и касательное напряжения, соответственно равные

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2 \varphi, \quad \tau' = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi. \quad (a)$$

Для того чтобы вычислить составляющие напряжения, вызванные по этой же площадке pq растягивающим напряжением σ_y , заметим, что угол между σ_y и нормалью n (рис. 37, а) равняется $\frac{\pi}{2} - \varphi$ и измеряется по часовой стрелке от оси y , в то время как φ измеряется против часовой стрелки от оси x . Из этого мы заключаем, что, пользуясь уравнениями (17) и (18), мы должны подставить в этом случае σ_y вместо σ_x и $-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ вместо φ . Это дает

$$\sigma''_n = \sigma_y \sin^2 \varphi, \quad \tau'' = -\frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\varphi. \quad (b)$$

Складывая эти составляющие напряжения (а) и (b), вызванные соответственно напряжениям σ_x и σ_y , получим полное нормальное и полное касательное напряжения по наклонной площадке для случая растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi, \quad (26)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi \quad (27)$$

¹⁾ Предполагается, что толщина стенок мала по сравнению с диаметром, поэтому для площади поперечного сечения применяется приближенная формула.

²⁾ Имеется также давление на внутреннюю цилиндрическую поверхность элемента, но это давление мала по сравнению с σ_x и σ_y , поэтому при дальнейшем рассмотрении им пренебрегают.

12. Круг Мора при сложном напряженном состоянии

Поступая так же, как в параграфе 10, при помощи круга Мора или круга напряжений легко можно получить графическое представление формул (26) и (27). Полагая опять, что абсциссы и ординаты представляют в некотором масштабе соответственно нормальные и касательные составляющие напряжения, мы заключаем, что точки A и B на рис. 38 с абсциссами, равными σ_x и σ_y , представляют напряжения, действующие по граням элемента на рис. 37, a , соответственно перпендикулярным оси x и оси y . Для того чтобы получить составляющие напряжения по наклонной площадке, определяемой углом φ на рис. 37, a , мы должны лишь построить круг на AB , как на диаметре, и провести радиус CD , образующий угол ACD , измеряемый против часовой стрелки от точки A и равный 2φ . Из рисунка мы заключаем, что

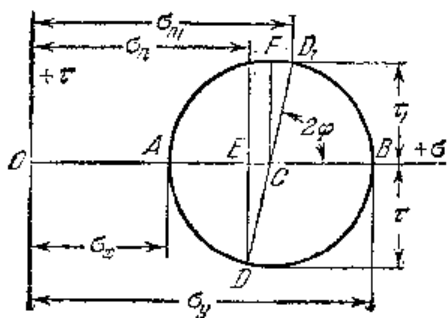


Рис. 38.

ляемой углом φ на рис. 37, a , мы должны лишь построить круг на AB , как на диаметре, и провести радиус CD , образующий угол ACD , измеряемый против часовой стрелки от точки A и равный 2φ . Из рисунка мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OC} - \overline{CE} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}) - \frac{1}{2} (\overline{OB} - \overline{OA}) \cos 2\varphi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Это указывает на то, что абсцисса \overline{OE} точки D круга, измеренная в принятом масштабе, даст нормальную составляющую напряжения согласно уравнению (26).

Ордината точки D равняется

$$\overline{DE} = \overline{CD} \sin 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi.$$

Замечая, что эта ордината должна быть взята с отрицательным знаком, мы заключаем, что ордината точки D , взятая с надлежащим знаком, даст касательную составляющую напряжения τ согласно уравнению (27).

Если площадку rq вращать против часовой стрелки относительно оси, перпендикулярной плоскости xy (см. рис. 37, a), соответствующая точка D будет смещаться против часовой стрелки по контуру круга напряжений на рис. 38, так что для каждого начения угла φ соответствующие значения составляющих σ_n и τ получаются как координаты точки D .

Из этого графического представления формул (26) и (27) сразу видно, что наибольшее нормальное напряжение в данном случае¹⁾ равняется σ_y , а наибольшее касательное напряжение, представленное радиусом \overline{CF} круга на рис. 38, равняется

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \quad (28)$$

и имеет место при $\sin 2\varphi = -1$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Такой же величины касательное напряжение, но с отрицательным знаком действует по площадке, для которой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Взяв две перпендикулярные площадки, определяемые углами φ и $\frac{\pi}{2} + \varphi$, которые составляют с осью x нормали n и n_1 , найдем, что соответствующие напряжения дают координаты точек D и D_1 на рис. 38, и мы заключаем, что

$$\sigma_n + \sigma_{n_1} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (29)$$

$$\tau_1 = -\tau. \quad (30)$$

Это указывает на то, что сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, остается по-

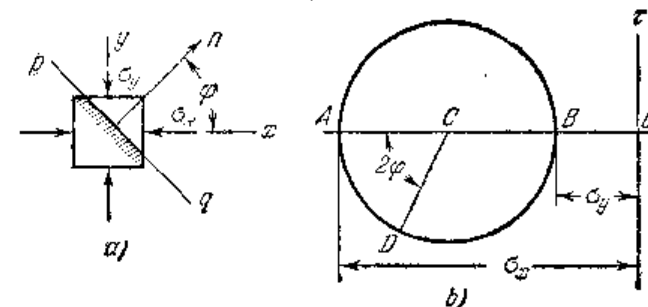


Рис. 39.

стоянной, в то время как угол φ изменяется. Касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, численно равны, но противоположны по знаку.

Круг напряжений, подобный кругу на рис. 38, можно построить также и в том случае, если одно или оба напряжения σ_x и σ_y являются сжимающими. Необходимо лишь откладывать сжимающие напряжения на отрицательной стороне оси абсцисс. Полагая, например, что напряжения, действующие на элемент, показаны на рис. 39, a , найдем, что соответствующим кругом будет изображенный на рис. 39, b . Составляющие напряжения, действующие по площадке rq с нормалью n , даны на диаграмме координатами точки D .

¹⁾ Мы рассматриваем только площадки, перпендикулярные к плоскости xy . Более общий случай см. параграф 18.

ЗАДАЧИ

1. Котел, показанный на рис. 37, имеет $d = 2,0 \text{ м}$, $h = 1 \text{ см}$. Определить σ_x и σ_y , если $p = 6 \text{ кг/см}^2$. Вырезать элемент плоскостями, для которых $\varphi = 30^\circ$ и 120° , и показать величину и направление составляющих напряжений, действующих по боковым граням элемента.

2. Определить напряжения σ_n , σ_{n_1} , τ и τ_1 , если (см. рис. 39, а) $\sigma_x = 1000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_y = -500 \text{ кг/см}^2$ и $\varphi = 30^\circ$, $\varphi_1 = 120^\circ$.

Ответ. $\sigma_n = 625 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_{n_1} = -125 \text{ кг/см}^2$, $\tau = -\tau_1 = 650 \text{ кг/см}^2$.

3. Определить σ_n , σ_{n_1} , τ и τ_1 в предыдущей задаче, если угол выбран так, что τ является наибольшим.

Ответ. $\sigma_n = \sigma_{n_1} = 250 \text{ кг/см}^2$, $\tau = -\tau_1 = 750 \text{ кг/см}^2$.

13. Главные напряжения

В предыдущем параграфе было показано, что при растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и y одно из двух напряжений σ_x или σ_y является наибольшим, а другое наименьшим нормальным напряжением. Для всех наклонных площадок, подобных площадкам pq на рис. 37, а и 39, а, значение нормального напряжения находится между этими предельными значениями. В то же самое время по всем наклонным площадкам действуют не только нормальные напряжения σ_n , но также и касательные напряжения τ . Такие напряжения, как σ_x и σ_y , одно из которых является наибольшим, а другое наименьшим нормальным напряжением, называются *главными напряжениями*, а две перпендикулярные площадки, по которым они действуют, называются *главными площадками*. По главным площадкам касательные напряжения не действуют.

В примере предыдущего параграфа (рис. 37) главные напряжения σ_x и σ_y были найдены из очень простых соображений, и требовалось найти выражения для нормального и касательного напряжений, действующих по какой-либо наклонной площадке, подобной площадке pq на рис. 37, а. В нашем дальнейшем изложении будут случаи обратной задачи (см. стр. 114), в которой по заданным касательным и нормальным напряжениям, действующим по двум перпендикулярным площадкам, требуется найти величину и направление главных напряжений. Наиболее просто решается эта задача при помощи круга напряжений, как сделано на рис. 38. Положим, что напряжения, действующие на элементарный прямоугольный параллелепипед $abcd$, показаны на рис. 40, а. Напряжения σ_x и σ_y не являются главными напряжениями, так как по площадкам, перпендикулярным к осям x и y , действуют не только нормальные, но и касательные напряжения. Для того чтобы построить круг напряжений в этом случае, мы сначала используем составляющие напряжения σ_x , σ_y и τ и построим точки D и D_1 , как показано на рис. 40, б. Так как эти точки представляют напряжения, действующие по двум перпендикулярным площадкам, то длина

DD_1 представляет диаметр круга напряжений. Точка пересечения этого диаметра с осью x дает центр C круга, так что круг можно легко построить. Точки A и B , где круг пересекает ось x , определяют величину наибольшего и наименьшего нормальных напряже-

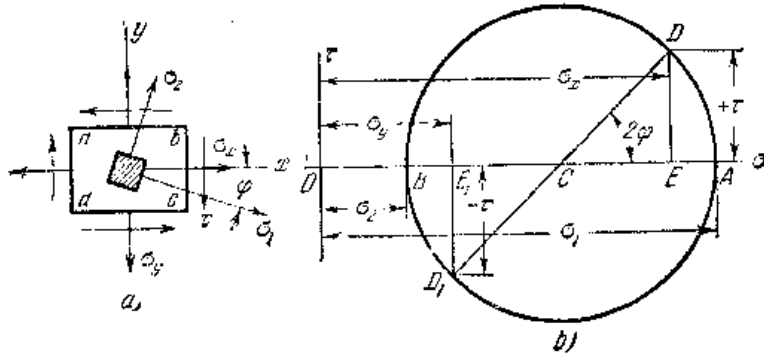


Рис. 40.

ний, которые являются главными напряжениями и обозначаются через σ_1 и σ_2 . Пользуясь кругом, можно легко получить формулы для вычисления σ_1 и σ_2 .

Из рисунка мы имеем:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}, \tag{31}$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CD} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \tag{32}$$

Направления главных напряжений также можно получить из рисунка. Мы знаем, что угол DCA есть удвоенный угол между напряжением σ_1 и осью x , и так как 2φ измерено от D к A по часовой стрелке, то направление σ_1 должно быть такое, как указано на рис. 40, а. Если мы выделим элемент, заштрихованный на рисунке, с гранями, перпендикулярными и параллельными σ_1 , то по его граням будут действовать только нормальные напряжения σ_1 и σ_2 . Для определения числового значения угла φ из рисунка мы имеем

$$|\operatorname{tg} 2\varphi| = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}.$$

Что же касается знака угла φ , то он должен быть взят отрицательным, так как угол измерен от оси x по часовой стрелке (рис. 40, а). Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = - \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = - \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{33}$$

Наибольшее касательное напряжение определяется величиной

радиуса круга напряжений, и мы имеем

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (34)$$

При помощи уравнений (31) — (34) полностью решается задача об определении наибольшего нормального и наибольшего касательного напряжений, когда даны нормальные и касательные напряжения, действующие по двум перпендикулярным площадкам.

ЗАДАЧИ

1. Элемент подвергается действию напряжений $\sigma_x = 500 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_y = 300 \text{ кг/см}^2$, $\tau = 100 \text{ кг/см}^2$. Определить величину и направление главных напряжений σ_1 и σ_2 (рис. 40, а).

Решение. При помощи формул (31) и (32) получим

$$\sigma_1 = \frac{500+300}{2} + \sqrt{\left(\frac{500-300}{2}\right)^2 + 100^2} = 400 + 141,4 = 541,4 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = 400 - 141,4 = 258,6 \text{ кг/см}^2.$$

Из формулы (33) имеем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -1, \quad 2\varphi = -45^\circ, \quad \varphi = -22 \frac{1}{2}^\circ.$$

Знак минус указывает на то, что φ измеряется от оси x по часовой стрелке, как показано на рис. 40, а.

2. Определить направление главных напряжений в предыдущей задаче, если

$$\sigma_x = -500 \text{ кг/см}^2.$$

Решение. Соответствующий круг напряжений показан на рис. 41, $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{4}$,

$2\varphi = 14^\circ 2'$. Следовательно, угол, который составляет наибольшее сжимающее напряжение с осью x , равен $7^\circ 1'$ и измеряется против часовой стрелки от оси x .

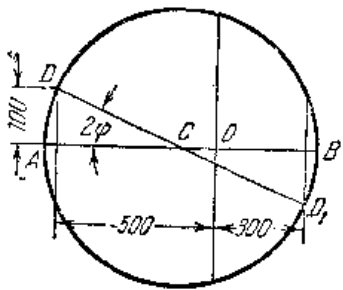


Рис. 41.

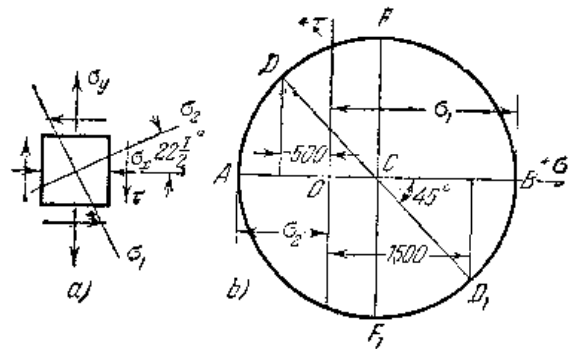


Рис. 42.

3. Найти круг напряжений для случая двух равных растягивающих напряжений $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и для двух равных сжимающих напряжений $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma$. В обоих случаях $\tau = 0$.

Ответ. Круги станутся точками, лежащими на горизонтальной оси, с абсциссами, соответственно равными σ и $-\sigma$.

4. На гранях элемента, показанного на рис. 42, а, действуют напряжения $\sigma_x = -500 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_y = 1500 \text{ кг/см}^2$, $\tau = 1000 \text{ кг/см}^2$. Найти, пользуясь кругом

напряжений, величину нормального и касательного напряжений: 1) на главных площадках, 2) на площадках, где действуют наибольшие касательные напряжения.

Решение. Соответствующий круг напряжений показан на рис. 42, б. Точки D и D_1 представляют напряжения, действующие по граням элемента рис. 42, а, перпендикулярным к осям x и y . \overline{CB} и \overline{CA} представляют главные напряжения. Их величины соответственно равны $\sigma_1 = 1914 \text{ кг/см}^2$ и $\sigma_2 = -914 \text{ кг/см}^2$. Направление наибольшего сжимающего напряжения σ_2 составляет с осью x угол $22 \frac{1}{2}^\circ$, этот угол измеряется от оси x против часовой стрелки, как показано на рис. 42, а. Точки F и F_1 представляют напряжения, действующие по площадкам, подверженным наибольшему сдвигу. Величина этих касательных напряжений равняется 1414 кг/см^2 . OC представляет нормальное напряжение, равное 500 кг/см^2 , действующее по той же площадке.

5. Решить предыдущую задачу, если $\sigma_x = -1000 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_y = 600 \text{ кг/см}^2$, $\tau = 200 \text{ кг/см}^2$.

14. Поперечное сужение

В параграфе 2 было рассмотрено удлинение стержня по оси при растяжении. опыты показывают, что такое продольное удлинение всегда сопровождается поперечным сужением стержня и что в пределах упругости отношение относительного поперечного сужения к относительному продольному удлинению постоянно для данного материала. Эта постоянная обозначается буквой μ и называется коэффициентом Пуассона по имени французского математика, который определил этот коэффициент аналитически при помощи молекулярной теории строения вещества. Для материалов, которые имеют одни и те же упругие свойства по всем направлениям, так называемых *изотропных материалов*, Пуассон нашел $\mu = \frac{1}{4}$. Экспериментальные исследования поперечного укорочения в строительных металлах ¹⁾ показывают, что μ обычно близко к значению, вычисленному Пуассоном. Например, в случае строительной стали можно принять значение $\mu = 0,30$. Зная коэффициент Пуассона материала, можно вычислить изменение объема стержня при растяжении. Длина стержня будет увеличиваться в отношении $(1 + \epsilon) : 1$. Поперечные размеры уменьшаются в отношении $(1 - \mu\epsilon) : 1$. Следовательно, площадь поперечного сечения уменьшается в отношении $(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$. Тогда объем стержня изменится в отношении $(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2 : 1$, которое становится равным $(1 + \epsilon - 2\mu\epsilon) : 1$, если мы припомним, что ϵ — малая величина, и степенями ее пренебрежем. Тогда *относительное увеличение объема* равняется $\epsilon(1 - 2\mu)$. Невероятно, чтобы у каких-либо материалов при растяжении объем их уменьшался, поэтому μ должно быть меньше 0,50. Для таких материалов, как каучук и парафин, μ приближается к указанному пределу, и объем этих материалов при растяжении приблизительно

¹⁾ Эти материалы можно считать изотропными (см. часть II).

остаётся постоянным. С другой стороны, бетон имеет малую величину μ ($\mu = \frac{1}{8} \div \frac{1}{12}$), а для пробки μ можно принять равным нулю.

Приведенные выше рассуждения о поперечном сужении при растяжении можно применить с соответствующими изменениями к случаю сжатия. Продольное укорочение сопровождается поперечным расширением, и для вычисления этого расширения применяется то же значение для μ , как и в случае растяжения.

ЗАДАЧИ

1. Определить относительное увеличение объема бруса при растяжении, если $[\sigma] = 400 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Относительное увеличение объема равняется

$$\epsilon(1 - 2\mu) = \frac{[\sigma]}{E}(1 - 2\mu) = \frac{400}{2 \cdot 10^6}(1 - 0,6) = 80 \cdot 10^{-6}.$$

2. Определить увеличение объема бруса под действием силы P , приложенной на конце, и веса бруса (см. параграф 5).

Ответ. Увеличение объема равняется $\frac{Fl(1 - 2\mu)}{E} \left(\frac{P}{F} + \frac{\gamma l}{2} \right)$.

3. Круглый стальной стержень подвергается действию осевой растягивающей силы P такой величины, что начальный диаметр 10 см уменьшается на 0,002 см. Найти P .

Ответ. 104,7 т.

4. Стальной брус предыдущей задачи растягивается силой $P = 40 \text{ т}$. Найти уменьшение площади поперечного сечения.

Ответ. 0,012 см².

15. Деформации в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям

Если брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, растягивается усилиями, действующими по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и y (рис. 37), то удлинение в одном из этих направлений будет зависеть не только от растягивающих напряжений в этом направлении, но также от напряжений в перпендикулярном направлении. Относительное удлинение в направлении оси x от растягивающих напряжений σ_x будет $\frac{\sigma_x}{E}$. Растягивающие напряжения σ_y будут вызывать поперечное укорочение в направлении x , равное $\frac{\mu\sigma_y}{E}$. Следовательно, если действуют одновременно оба напряжения σ_x и σ_y , то относительное удлинение в направлении x будет

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (35)$$

Подобно этому для направления y получим

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (36)$$

Укорочение параллелепипеда в направлении z будет

$$\epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

В частном случае, когда два растяжения одинаковы, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, получим

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sigma}{E}(1 - \mu). \quad (37)$$

Из уравнений (35) и (36) напряжения σ_x и σ_y можно получить как функции относительных деформаций ϵ_x и ϵ_y , а именно:

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \mu\epsilon_y)E}{1 - \mu^2}, \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \mu\epsilon_x)E}{1 - \mu^2}. \quad (38)$$

В случае, показанном на рис. 37, а, удлинение ϵ_x в направлении оси и удлинение ϵ_y в направлении по окружности измеряются при помощи экстензометра, после чего из уравнений (38) можно найти соответствующие напряжения σ_x и σ_y .

ЗАДАЧИ

1. Определить увеличение объема цилиндрического стального котла под действием внутреннего давления (см. рис. 37), пренебрегая деформациями дна и принимая $\sigma_y = 400 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пользуясь уравнениями (35) и (36), находим

$$\epsilon_x = \frac{200}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{400}{2 \cdot 10^6} = \frac{80}{2 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-5},$$

$$\epsilon_y = \frac{400}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{200}{2 \cdot 10^6} = \frac{340}{2 \cdot 10^6} = 17 \cdot 10^{-5}.$$

Объем котла увеличится в отношении

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)^2 : 1 = (1 + \epsilon_x + 2\epsilon_y) : 1 = 1,00038 : 1.$$

2. Бетонный кубик сжимается по двум взаимно перпендикулярным направлениям при помощи приспособления, показанного на рис. 43. Определить уменьшение объема кубика, если сторона его равна 10 см, сжимающие усилия равномерно распределены по граням, $\mu = 0,1$, $P = 8000 \text{ кг}$, $E = 2,6 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Пренебрегая трением в шарнирах и рассматривая равновесие каждого шарнира (рис. 43, а), можно показать, что кубик подвергается одинаковому сжатию в двух перпендикулярных направлениях и что сжимающее усилие равно $P\sqrt{2} = 11280 \text{ кг}$. Соответствующая деформация из уравнения (37) равна

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{11280}{100 \cdot 2,6 \cdot 10^6}(1 - 0,1) = -0,000391.$$

В направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, имеет место расширение кубика, которое равно

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = 0,2 \frac{11280}{100 \cdot 2,6 \cdot 10^8} = 0,0000868.$$

Относительное уменьшение объема кубика будет

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -2 \cdot 0,000391 + 0,0000868 = -0,000695.$$

3. Определить увеличение цилиндрической боковой поверхности котла, рассмотренного выше в задаче 1.

Ответ. Относительное увеличение боковой поверхности $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y = -21 \cdot 10^{-6}$.

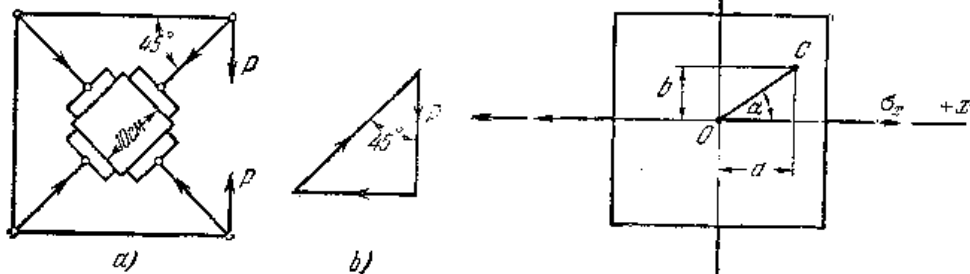


Рис. 43.

Рис. 44.

4. Определить относительное удлинение в направлении σ_1 стального стержня, если его напряженное состояние такое, как указано в задаче 1 на стр. 52.

Решение. $\epsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^8} (541,4 - 0,3 \cdot 258,6) = 231,9 \cdot 10^{-6}$.

5. Под действием осевых растягивающих напряжений $\sigma_x = 2000 \text{ кг/см}^2$ стержень имеет относительное удлинение $\epsilon_x = 0,001$, а отношение относительного изменения объема к относительному изменению площади поперечного сечения равно $\frac{3}{4}$. Найти E и μ .

Ответ. $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $\mu = \frac{2}{7}$.

6. Прямоугольный параллелепипед подвергается растяжению в двух перпендикулярных направлениях, как показано на рис. 44. Найти относительное удлинение ϵ в направлении \overline{OC} .

Решение. Координаты точки C после деформации будут $a(1+\epsilon_x)$ и $b(1+\epsilon_y)$, а длина OC после деформации будет

$$\sqrt{a^2(1+2\epsilon_x)+b^2(1+2\epsilon_y)} \approx \sqrt{a^2+b^2} \left(1 + \frac{a^2\epsilon_x}{a^2+b^2} + \frac{b^2\epsilon_y}{a^2+b^2} \right).$$

Вычитая из этого первоначальную длину $\sqrt{a^2+b^2}$ и разделив на первоначальную длину, получим $\epsilon = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha$.

У) Это уравнение подобно уравнению (26). Следовательно, для графического представления деформаций можно воспользоваться кругом деформаций подобно кругу Мора для напряжений.

16. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Модуль упругости при сдвиге. Рассмотрим частный случай, когда нормальные напряжения действуют по двум взаимно перпендикулярным направлениям, причем растягивающее напряжение σ_x в горизонтальном направлении численно равняется сжимающему напряжению в вертикальном направлении (рис. 45, а). Соответствующий круг напряжений показан на рис. 45, б. Точка D этого круга представляет напряжения, действующие по площадкам

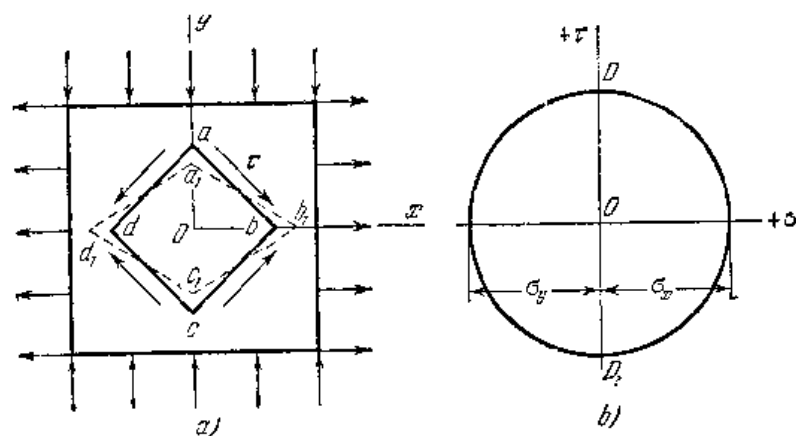


Рис. 45.

ab и cd , перпендикулярным к плоскости xy и наклоненным под углом 45° к оси x . Точка D_1 представляет напряжения, действующие по площадкам ad и bc , перпендикулярным к ab и cd . Из круга напряжений видно, что нормальные напряжения по каждой из этих площадок равны нулю, а касательные напряжения по этим площадкам, изображаемые радиусом круга, численно равны нормальным напряжениям σ_x , так что

$$\tau = \sigma_x = -\sigma_y. \quad (a)$$

Если мы выделим из бруса элемент $abcd$, то он будет находиться в равновесии под действием только касательных напряжений, как показано на рис. 45, а. Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. Можно заключить, что чистый сдвиг эквивалентен напряженному состоянию, вызываемому растяжением в одном направлении и равным сжатием в перпендикулярном направлении. Если квадратный элемент, подобный элементу $abcd$ на рис. 45, а, выделить плоскостями, которые уже не входят под углом 45° к оси x , то по граням такого элемента будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. Величину этих напряжений можно получить обычным путем из круга напряжений (рис. 45, б).

Рассмотрим теперь деформацию элемента $abcd$. Так как по граням этого элемента нормальные напряжения не действуют, то длины ab , ad , bc и cd не изменяются при деформации, но горизонтальная диагональ bd удлинится, а вертикальная диагональ ac укоротится, вследствие чего квадрат $abcd$ превратится в ромб, как указано на рисунке пунктиром. Угол при b , который до деформации был равен $\frac{\pi}{2}$, теперь становится меньше $\frac{\pi}{2}$, скажем $\frac{\pi}{2} - \gamma$, и в то же время угол при a увеличивается и делается равным $\frac{\pi}{2} + \gamma$. Малый угол γ определяет искажение элемента $abcd$ и называется *относительным сдвигом*.

Относительный сдвиг можно отчетливо представить следующим образом: повернем на 45° против часовой стрелки элемент $abcd$

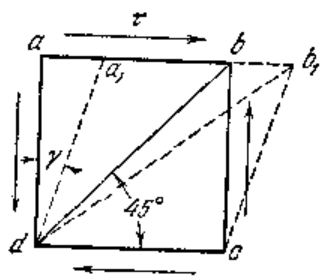


Рис. 45.

рис. 45, a , и поместим его в положение, показанное на рис. 46. После искажения, вызванного касательными напряжениями τ , тот же элемент займет положение, указанное пунктиром. Относительный сдвиг, представляемый величиной малого угла γ , можно принять равным отношению $\frac{aa_1}{ad}$, т. е. горизонтальному сдвигу aa_1 грани ab относительно грани dc , деленному на расстояние между этими двумя гранями. Если материал подчиняется закону Гука,

то этот сдвиг пропорционален напряжению τ , и мы можем выразить зависимость между касательным напряжением и относительным сдвигом уравнением

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (39)$$

в котором G есть величина постоянная и зависящая от механических свойств материала. Уравнение (39) аналогично уравнению (4), которое было установлено для простого растяжения, а постоянная G называется *модулем упругости при сдвиге* или *модулем поперечной упругости*.

Так как искажение элемента $abcd$ (рис. 46) вполне определяется удлинением диагонали bd и укорочением диагонали ac и так как эти деформации можно вычислить при помощи уравнений предыдущего параграфа, то можно заключить, что модуль G может быть выражен в зависимости от модуля упругости E при растяжении и коэффициента Пуассона μ . Для того чтобы установить эту зависимость, рассмотрим треугольник Oab (рис. 45, a). Удлинение стороны Ob и укорочение стороны Oa этого треугольника при деформации

найдутся при помощи уравнений (35) и (36). В зависимости от ϵ_x и ϵ_y мы имеем

$$Ob_1 = Ob(1 + \epsilon_x), \quad Oa_1 = Oa(1 + \epsilon_y)$$

и из треугольника Oa_1b_1 находим

$$\operatorname{tg}(Ob_1a_1) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{Oa_1}{Ob_1} = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_x}, \quad (B)$$

Для малого угла γ мы имеем также

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}, \quad (C)$$

Замечая, что в случае чистого сдвига

$$\sigma_x = -\sigma_y = \tau, \\ \epsilon_x = -\epsilon_y = \frac{\sigma_x(1 + \mu)}{E} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E},$$

и приравняв выражения (B) и (C), получаем

$$\frac{1 - \frac{\tau(1 + \mu)}{E}}{1 + \frac{\tau(1 + \mu)}{E}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

откуда

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E}$$

или

$$\gamma = \frac{2\tau(1 + \mu)}{E}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (39), мы заключаем, что

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (40)$$

Мы видим, что модуль упругости при сдвиге можно легко вычислить, если известны модуль упругости при растяжении E и коэффициент Пуассона μ . Например, в случае стали

$$G = \frac{2 \cdot 10^9}{2(1 + 0,30)} = 7,7 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2.$$

Необходимо заметить, что приложение равномерно распределенных касательных напряжений к граням бруска, как предпола-

гается на рис. 46, очень трудно осуществить, поэтому состояние чистого сдвига обычно получают путем кручения цилиндрической трубы (рис. 47). Вследствие малого поворота одного конца трубы относительно другого, образующие, начерченные на цилиндрической поверхности, становятся наклонными к оси цилиндра, и элемент $abcd$, образованный двумя образующими и двумя смежными круговыми поперечными сечениями, подвергается чистому сдвигу подобно тому, как показано на рис. 46.

Вопрос о кручении будет разобран ниже (см. главу X), где будет показано, как можно вычислить касательные напряжения τ

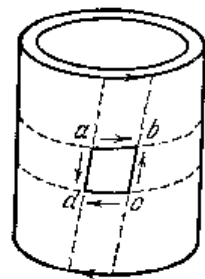


Рис. 47.

и относительный сдвиг γ элемента $abcd$, если известны крутящий момент и соответствующий угол закручивания вала. Если τ и γ найдены из такого испытания на кручение, то значение модуля G можно вычислить из уравнения (39). Имея это значение G и зная E из испытания на растяжение, мы можем вычислить коэффициент Пуассона μ из уравнения (40). Непосредственное определение μ путем измерения поперечного укорочения при испытании на растяжение более сложно вследствие того, что это укорочение весьма мало, и необходи-

дим чрезвычайно чувствительный инструмент, чтобы измерить его с достаточной точностью.

ЗАДАЧИ

1. Брусок $abcd$ (рис. 46) сделан из материала, для которого $E = 0,7 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и $\mu = 0,25$. Найти γ и относительное удлинение диагонали bd , если $\tau = 700 \text{ кг/см}^2$.
 Ответ. $\gamma = 0,0025$, $\epsilon = 0,00125$.

2. Найти для предыдущей задачи сдвиг aa_1 грани ab относительно грани cd , если диагональ $bd = 5 \text{ см}$.

Ответ. $aa_1 = 2,5\sqrt{2}\gamma$.

3. Доказать, что изменение объема бруска $abcd$ на рис. 46 равно нулю, если рассматривать только первые степени составляющих деформации ϵ_x и ϵ_y .

4. Доказать, что в случае чистого сдвига (рис. 46) относительное удлинение диагонали bd равно половине относительного сдвига γ .

5. Найти относительное удлинение сторон элемента $abcd$ на рис. 45, если принять во внимание малые величины второй степени.

Решение. Обозначая через l первоначальную длину сторон элемента $abcd$, найдем, что после деформации $Oa_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1 - \epsilon_x)$ и $Ob_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}(1 + \epsilon_x)$. Тогда

$$a_1b_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \epsilon_x)^2 + (1 + \epsilon_x)^2} = l \sqrt{1 + \epsilon_x^2} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon_x^2\right).$$

Относительное удлинение сторон элемента $abcd$ равняется $\frac{1}{2} \epsilon_x^2$.

17. Допускаемые напряжения при сдвиге

Подвергая материал чистому сдвигу (см. рис. 47), мы можем установить опытным путем зависимость между касательным напряжением и относительным сдвигом. Такая зависимость обыкновенно изображается диаграммой (рис. 48), на которой абсцисса представляет относительный сдвиг, а ордината — касательное напряжение. Эта диаграмма подобна диаграмме растяжения, и мы можем отметить на ней предел пропорциональности A и предел текучести B . Опыты показывают, что для таких материалов, как строительная сталь, предел текучести при сдвиге τ_t составляет лишь приблизительно $(0,55 \div 0,60) \sigma_t$. Так как при пределе текучести имеет место значительная деформация без заметного изменения напряжения, логично принимать за допускаемое напряжение при сдвиге лишь часть напряжения, соответствующего пределу текучести, так что

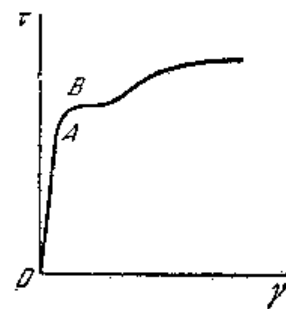


Рис. 48.

$$[\tau] = \frac{\tau_t}{k}, \quad (41)$$

где k — коэффициент безопасности. Взяв этот коэффициент такой же величины, что и при растяжении или сжатии, мы получим

$$[\tau] = (0,55 \div 0,60) [\sigma],$$

что указывает на то, что допускаемое напряжение при сдвиге нужно принимать гораздо меньше допускаемого напряжения при растяжении.

Уже было указано, что в практических приложениях мы обычно не встречаем равномерного распределения касательных напряжений по граням бруска, как было предположено на рис. 46, и что чистый сдвиг осуществляется в случае кручения. Ниже мы увидим, что чистый сдвиг имеет место также при изгибе балок. Имеется много практических задач, в которых решение получается при до-

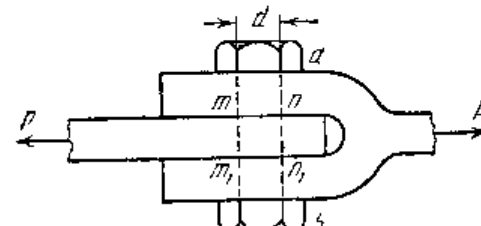


Рис. 49.

пущении, что мы имеем дело с чистым сдвигом, хотя это допущение является грубым приближением. Возьмем, например, соединение на рис. 49. Очевидно, что, если диаметр болта ab недостаточно большой, соединение может разрушиться вследствие сдвига по поперечным сечениям mn и m_1n_1 . Хотя более строгое изучение вопроса

показывает, что касательные напряжения неравномерно распределяются по этим поперечным сечениям и что болт подвергается не только сдвигу, но также и изгибу, тем не менее для определения грубо приближенного значения необходимого диаметра болта принимается допущение, что касательные напряжения равномерно распределяются по плоскостям mn и m_1n_1 . Следовательно, касательные напряжения τ получаются путем деления силы P на сумму площадей поперечных сечений mn и m_1n_1 , т. е.

$$\tau = \frac{2P}{\pi d^2},$$

и требуемый диаметр болта получается из уравнения

$$[\tau] = \frac{2P}{\pi d^2}. \quad (42)$$

Другой пример такого упрощенного решения задач на сдвиг мы имеем в случае заклепочных соединений (рис. 50). Так как

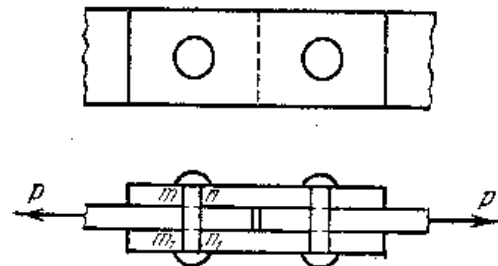


Рис. 50.

головки заклепок образуются при высокой температуре, то заклепки после охлаждения вызывают значительное сжатие листов¹⁾. Если приложены растягивающие силы P , то относительному движению листов будет препятствовать трение, вызванное сжатием листов. Только после того, как трение будет преодолено, заклепки начнут работать на сдвиг, и, если диаметр заклепок недостаточен, может произойти разрушение, вследствие сдвига по плоскостям mn и m_1n_1 . Видно, что вопрос определения напряжений в заклепочных соединениях является весьма сложным. Обычно получают грубо приближенное решение задачи, пренебрегая трением и полагая, что касательные напряжения равномерно распределяются по поперечным сечениям mn и m_1n_1 . Тогда надлежащий диаметр заклепок получится при помощи уравнения (42), как в предыдущем примере.

¹⁾ Опыты показывают, что растягивающие напряжения в заклепках обычно приближаются к пределу текучести материала, из которого сделаны заклепки. См. С. В а с h, Z. Ver. dent. Ing., 1912.

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр болта в соединении, показанном на рис. 49, если $P = 8 \text{ т}$ и $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $d = 2,53 \text{ см}$.

2. Найти необходимую длину $2l$ соединения двух прямоугольных деревянных брусьев (рис. 51), подверженных растяжению, если $P = 4 \text{ т}$, $[\tau] = 10 \text{ кг/см}^2$

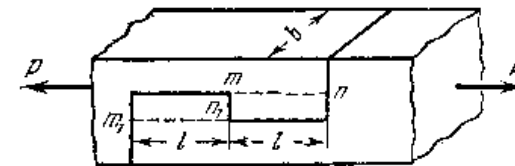


Рис. 51.

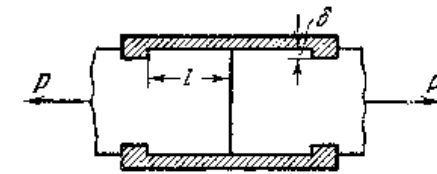


Рис. 52.

на скалывание вдоль волокон и $b = 20 \text{ см}$. Определить необходимую глубину врубки mn_1 , если допускаемое напряжение на сжатие дерева вдоль волокон равно 80 кг/см^2 .

Ответ. $2l = 40 \text{ см}$, $mn_1 = 2,5 \text{ см}$.

3. Найти диаметр заклепок на рис. 50, если $[\tau] = 800 \text{ кг/см}^2$ и $P = 5 \text{ т}$.

Ответ. $d = 2 \text{ см}$.

4. Определить размеры l и δ в соединении двух брусьев помощью двух стальных накладок (рис. 52), если силы, размеры и допускаемые напряжения те же, что и в задаче 2.

Ответ. $l = 10 \text{ см}$, $\delta = 1,25 \text{ см}$.

5. Определить размер a , который необходимо назначить в конструкции, показанной на рис. 53, если допускаемое касательное напряжение то же, что и в задаче 2, и размеры поперечных сечений всех брусьев равны $10 \times 20 \text{ см}$. Влиянием трения пренебречь.

Ответ. $a = 20 \text{ см}$.

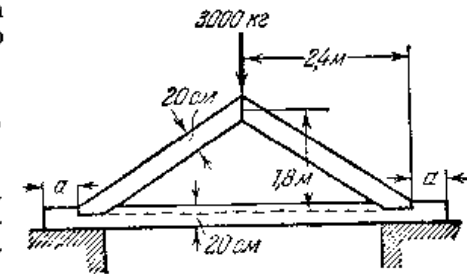


Рис. 53.

18. Растяжение или сжатие по трем взаимно перпендикулярным направлениям

Если брус, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, подвергается действию равномерно распределенных сил P_x , P_y и P_z (рис. 54), то нормальные напряжения по сечениям, перпендикулярным к осям x , y , и z , соответственно будут

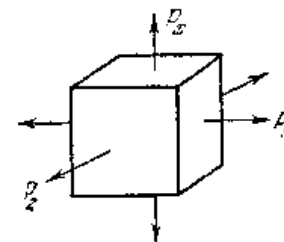


Рис. 54.

$$\sigma_x = \frac{P_x}{F_x}, \quad \sigma_y = \frac{P_y}{F_y}, \quad \sigma_z = \frac{P_z}{F_z}.$$

Ниже предполагается, что $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$.

Анализируя действие сил P_x , P_y и P_z , можно заключить, что по сечению, проходящему через ось z , напряжения вызывают только силы P_x и P_y , а поэтому эти напряжения можно вычислить из уравнений (26) и (27) и представить графически при помощи

круга Мора. На рис. 55 круг напряжений с диаметром AB изображает эти напряжения. Таким же способом напряжения по какому-либо сечению, проходящему через ось x , можно представить кругом, имеющим диаметром BC . Круг с диаметром AC изображает напряжения по какому-либо сечению, проходящему через ось y . Три круга Мора представляют напряжения по трем сериям сечений, проходящих через оси x , y и z . Для какого-либо сечения, наклоненного к осям x , y и z , составляющие напряжений суть координаты точки, находящейся в заштрихованной площади рис. 55¹⁾. На основании этого можно заключить, что наибольшее касательное напряжение изображается радиусом наибольшего из трех кругов и определяется из уравнения $\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$. Оно действует по сечению, проходящему через ось y и делящему пополам угол между осями x и z .

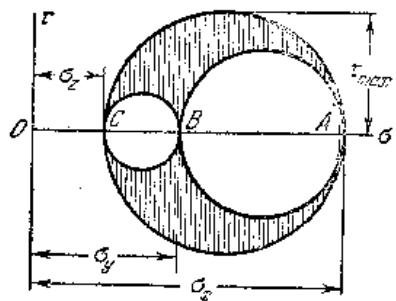


Рис. 55.

Уравнение для вычисления относительных удлинений по направлению осей x , y и z можно получить путем сложения действия P_x , P_y и P_z точно так же, как при растяжении или сжатии по двум взаимно перпендикулярным направлениям (см. параграф 15). Таким образом получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_z), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \right\} (43)$$

Объем бруса увеличивается в отношении

$$(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) : 1,$$

или, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, получим

$$(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) : 1.$$

Видно, что относительное объемное расширение равно

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (44)$$

Зависимость между относительным объемным расширением и напряжениями, действующими по граням бруса, получится путем

¹⁾ Доказательство этого положения можно найти в книге А. Фöрри, Technische Mechanik, т. 5, стр. 18, 1918 г.; см. также Н. М. Westergaard, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 520, 1924.

сложения уравнений (43). Таким образом получим

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (45)$$

В частном случае равномерного гидростатического давления имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Тогда из уравнений (43)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E} (1 - 2\mu), \quad (46)$$

и из уравнений (45)

$$\Delta = -\frac{3(1 - 2\mu)}{E} p, \quad (47)$$

или, пользуясь обозначением

$$\frac{E}{3(1 - 2\mu)} = K, \quad (48)$$

получим

$$\Delta = -\frac{p}{K}. \quad (49)$$

Относительное объемное сжатие пропорционально сжимающему напряжению и обратно пропорционально величине K , которая называется *объемным модулем упругости*.

ЗАДАЧИ

1. Определить уменьшение объема сплошного стального шара диаметром 10 см, подверженного равномерному гидростатическому давлению $p = 1000 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Из уравнения (49) имеем

$$\Delta = -\frac{p}{K} = -\frac{1000 \cdot 3(1 - 2 \cdot 0,3)}{2 \cdot 10^6} = -\frac{6}{10^4}.$$

Поэтому уменьшение объема будет $\frac{6}{10^4} \frac{\pi d^3}{6} = 0,314 \text{ см}^3$.

2. Каучуковый цилиндр A сжимается в стальном цилиндре B силой P (см. рис. 56). Определить давление между каучуком и сталью, если $P = 400 \text{ кг}$, $d = 5 \text{ см}$, коэффициент Пуассона для каучука $\mu = 0,45$. Трением между каучуком и сталью пренебречь.

Решение. Пусть p означает сжимающие напряжения по какому-либо сечению, перпендикулярному оси цилиндра и q — давление между каучуком и внутренней поверхностью стального цилиндра. Сжимающие напряжения той же величины будут действовать по боковой поверхности продольных волокон каучукового цилиндра, из которого мы выделим элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными оси цилиндра (см. рис. 56). Этот элемент находится в равновесии под действием сжимающих напряжений q по боковым граням и сжимающих напряжений p , направленных по оси цилиндра. Полагая, что сталь-

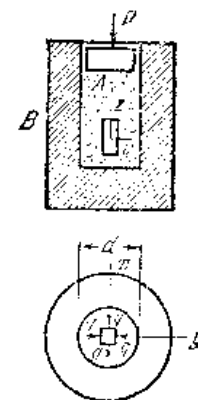


Рис. 56.

ной цилиндр абсолютно твердый и, следовательно, поперечное расширение каучука в направлении x и y должно быть равно нулю, получим из уравнений (43)

$$0 = \frac{q}{E} - \frac{\mu}{E} (p + q)$$

откуда

$$q = \frac{\mu p}{1 - \mu} = \frac{0,45}{1 - 0,45} \frac{400 \cdot 4}{\pi \cdot 5^2} = 16,7 \text{ кг/см}^2.$$

3. Бетонная колонна заключена в стальную трубу (рис. 57). Определить давление между сталью и бетоном и растягивающее напряжение в трубе по окружности, полагая, что трения между бетоном и сталью нет и что все размеры, а также и продольное сжимающее давление известны.

Решение. Пусть p означает продольное, а q — поперечное сжимающее давление, d — внутренний диаметр и h — толщина трубы, E_c — модуль упругости стали, E_b, μ_b — модуль упругости и коэффициент Пуассона для бетона. Расширение бетона в поперечном направлении на основании уравнений (43) будет

$$\epsilon_x = -\frac{q}{E_b} + \frac{\mu_b}{E_b} (p + q). \quad (a)$$

Это расширение равняется расширению по окружности трубы (см. уравнение 13)

$$\epsilon = \frac{qd}{2hE_c}. \quad (b)$$

Из уравнений (a) и (b) получаем

$$\frac{qd}{2hE_c} = -\frac{q}{E_b} + \frac{\mu_b}{E_b} (p + q),$$

откуда

$$q = p \frac{\mu_b}{\frac{d E_b}{2h E_c} + 1 - \mu_b}.$$

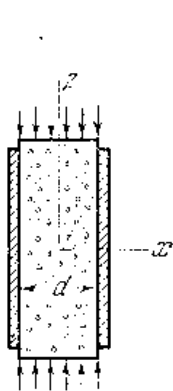


Рис. 57.

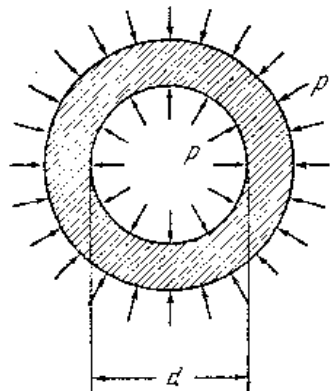


Рис. 58.

Растягивающее напряжение по окружности в трубе теперь может быть вычислено из уравнения

$$\sigma = \frac{qd}{2h}.$$

4. Определить наибольшее касательное напряжение в бетонной колонне предыдущей задачи, полагая, что $p = 60 \text{ кг/см}^2$, $\mu_b = 0,10$, $\frac{d}{2h} = 7,5$, $E_b = 2,8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $E_c = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

$$\text{Решение } \tau_{\max} = \frac{p - q}{2} = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{0,1}{1,9}\right) = 28,4 \text{ кг/см}^2.$$

5. Стальная сферическая оболочка (рис. 58) подвергается равномерному внутреннему и наружному давлению p . Найти уменьшение δ внутреннего диаметра. Построить круги Мора, как на рис. 55.

Ответ. $\delta = \frac{pd(1 - 2\mu)}{E}$, в этом случае все три круга обращаются в точку с абсциссой $\sigma = -p$.

ГЛАВА III

ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ И ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА

19. Типы балок

В этой главе мы рассмотрим простейшие типы балок, имеющих вертикальную плоскость симметрии, проходящую через продольную ось, и опертых, как показано на рис. 59. Предположим, что все приложенные силы вертикальны и действуют в плоскости симметрии, так что изгиб происходит в этой же плоскости. Рис. 59, а изображает балку со свободно опертыми концами. Точки опор A и B представляют шарниры, так что концы балки при изгибе могут свободно поворачиваться. Предположим также, что одна из опор находится на катках и может свободно двигаться в горизонтальном направлении. Рис. 59, б изображает консоль. Конец A этой балки заделан в стену и не может поворачиваться при изгибе, в то время как конец B является совершенно свободным. Рис. 59, в изображает консольную балку со свешивающимся концом. Эта балка имеет шарнирно-неподвижную опору на конце A и покоится на подвижной опоре в точке C .

Все три предыдущих случая представляют статически определимые балки, так как реакции опор, вызываемые данной нагрузкой, могут быть определены из уравнений статики. Например, рассматривая свободно опертую балку, несущую вертикальный груз P (рис. 59, а), мы видим, что реакция R_2 конца B должна быть вертикальна, так как этот конец может свободно двигаться в горизонтальном направлении. Тогда из уравнения статики $\sum X = 0$ следует, что реакция R_1 также вертикальна. Величины R_1 и R_2 определяются из уравнений моментов. Приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно точки B , мы получим

$$R_1 l - Pb = 0,$$

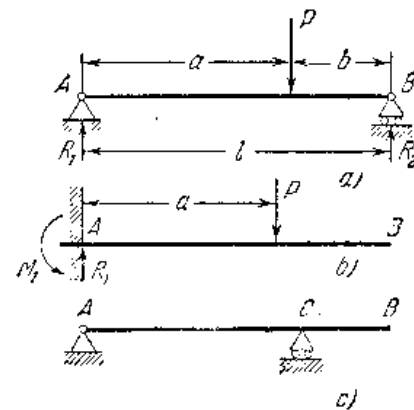


Рис. 59.

ткуда

$$R_1 = \frac{Pb}{l}.$$

Подобным образом, рассматривая моменты относительно точки A , мы получим

$$R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Реакции для консольной балки (рис. 59, c) можно вычислить тем же способом.

В случае консоли (рис. 59, b) груз P уравновешивается реактивными силами, действующими в заделанном конце. Из уравнений статики $\sum X=0$ и $\sum Y=0$ мы заключаем, что реактивная сила R_1 должна быть вертикальная и равна P . Из уравнения моментов $\sum M=0$ следует, что момент M_1 реактивных сил относительно точки A равен Pa и действует против часовой стрелки, как показано на рисунке.

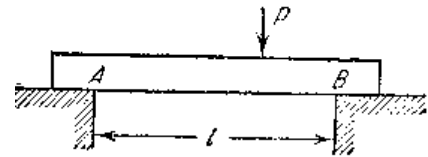


Рис. 60.

Реакции, вызываемые какого-либо другого рода нагрузкой, лежащей на балках выше указанных типов, могут быть вычислены подобным же способом.

Необходимо заметить, что специальные устройства, обеспечивающие свободный поворот концов и свободное перемещение опоры, применяются лишь в балках больших пролетов, каковые имеют место в мостах. В балках малого пролета опоры обычно устраиваются так, как изображено на рис. 60. При изгибе такой балки или трения между опорными поверхностями и балкой будут таковы, что они будут препятствовать горизонтальному движению концов балки. Эти силы могут иметь некоторое значение в случае гибких стержней и тонких металлических полос (см. стр. 159), но в случае жесткой балки, для которой прогиб очень мал по сравнению с длиной пролета l , этими силами можно пренебречь, и реакции можно вычислить как для балки, свободно опертой (рис. 59, a).

20. Изгибающий момент и поперечная сила

Рассмотрим теперь балку со свободно опертыми концами, а которую действуют вертикальные силы P_1 , P_2 и P_3 (рис. 61, a). Предположим, что балка имеет продольную плоскость симметрии и что грузы действуют в этой плоскости. Тогда на основании симметрии мы заключаем, что изгиб должен происходить в этой же плоскости. В большинстве практических случаев это условие симметрии выполняется, так как обычные формы поперечных сечений

балок: круг, прямоугольник, двутавровые и тавровые сечения симметричны. Более общий случай несимметричного поперечного сечения будет разобран ниже (см. главу 8).

Для того чтобы исследовать усилия, возникающие в балке при изгибе, мы воспользуемся методом, который уже применяли при отыскании усилий, возникающих в стержне при простом растяжении (рис. 1). Вообразим, что балка AB разрезана на две части сечением m , взятым на каком-либо расстоянии x от левой опоры A (рис. 61, a), и что правая часть балки отброшена. При рассмотрении равновесия оставшейся левой части балки (рис. 61, b), мы должны учитывать не только внешние силы, такие, как грузы P_1 , P_2 и реакции R_1 , но также и внутренние силы, которые распределяются по сечению m и которые представляют действие правой части балки на левую. Эти внутренние силы должны быть такой величины, чтобы уравновесить упомянутые выше внешние силы P_1 , P_2 и R_1 .

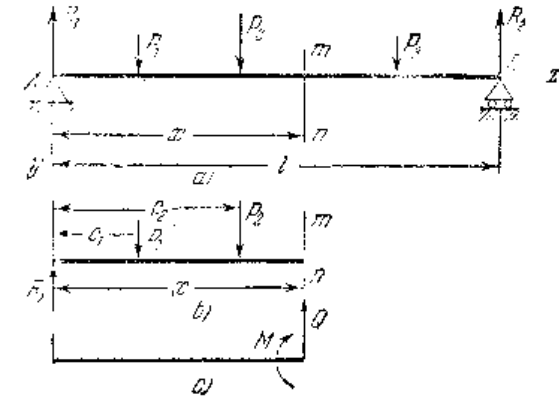


Рис. 61.

Для последующих рассуждений будет удобно привести действительную систему внешних сил к упрощенной эквивалентной системе. Из статики мы знаем, что система параллельных сил может быть заменена одной силой, равной алгебраической сумме данных сил, и одной парой сил. В нашем частном случае мы можем заменить силы P_1 , P_2 и R_1 вертикальной силой Q , действующей в плоскости поперечного сечения m , и парой сил M . Величина силы равна

$$Q = R_1 - P_1 - P_2 \quad (a)$$

и величина момента пары сил равна

$$M = R_1 x - P_1(x - c_1) - P_2(x - c_2). \quad (b)$$

Сила Q , которая равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения m , называется *поперечной силой* в сечении m . Момент пары сил M , который равен алгебраической сумме моментов внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения m , относительно центра тяжести этого сечения, называется *изгибающим моментом* в сечении m . Таким образом, система внешних сил, расположенных слева от поперечного сечения m , может быть заменена статически эквивалентной системой, состоящей из поперечной силы Q , действующей в плоскости

поперечного сечения, и парой сил M (рис. 61, *с*). Усилия, которые распределяются по поперечному сечению mn и которые представляют собой действие правой части балки на ее левую часть, должны быть таковы, чтобы уравновесить изгибающий момент M и поперечную силу Q .

Если на балку вместо сосредоточенных сил действует распределенная нагрузка, то можно применить те же рассуждения, что и в предыдущем случае. Возьмем, например, равномерно нагруженную балку, показанную на рис. 62, *а*. Обозначая нагрузку на единицу длины через q , найдем, что реакции в этом случае равны

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2}.$$

Чтобы исследовать усилия, распределенные по поперечному сечению mn , мы опять рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 62, *б*). Внешними силами, действующими на эту часть балки, являются реакция R_1 и нагрузка, равномерно распределенная по длине x . Эта последняя нагрузка имеет, конечно, равнодействующую, равную qx . Следовательно, алгебраическая сумма всех сил, расположенных слева от сечения mn , равняется $R_1 - qx$. Алгебраическая сумма моментов всех сил, расположенных слева от сечения

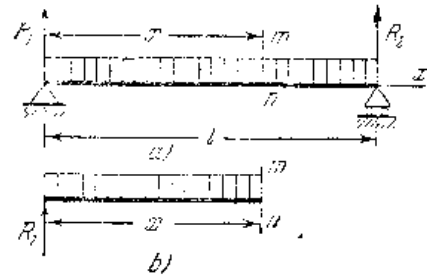


рис. 62

mn , относительно центра тяжести этого сечения получится путем вычитания момента равнодействующей распределенной нагрузки из момента $R_1 x$ реакции. Момент распределенной нагрузки, очевидно, равняется

$$qx \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Таким образом мы получаем для алгебраической суммы моментов выражение

$$R_1 x - \frac{qx^2}{2}.$$

Все силы, действующие на левую часть балки, можно теперь заменить одной силой, действующей в плоскости поперечного сечения mn и равной

$$Q = R_1 - qx = q \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad (с)$$

и парой сил, равной

$$M = R_1 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} (l - x). \quad (d)$$

Выражения (с) и (d) представляют соответственно поперечную силу и изгибающий момент в сечении mn .

В приведенных выше примерах рассматривалось равновесие левой части балки. Если рассматривать правую часть балки, то алгебраическая сумма сил, расположенных справа от сечения, и алгебраическая сумма моментов тех же сил будут иметь те же



рис. 63.

величины, которые были найдены ранее, но противоположны по направлению. Это следует из того, что грузы, действующие на балку, вместе с реакциями R_1 и R_2 представляют систему сил, находящихся в равновесии, и момент всех этих сил относительно любой точки плоскости, так же, как и их алгебраическая сумма, должны равняться нулю. Следовательно, момент сил, действующих на левую часть балки, относительно центра тяжести сечения mn должен быть равен, но противоположен моменту относительно той же точки сил, действующих на правую часть балки. Также алгебраическая сумма сил, действующих на левую часть балки, должна быть равна, но противоположна алгебраической сумме сил, действующих на правую часть.

При последующем изложении изгибающий момент и поперечная сила в сечении mn принимаются положительными, если при рассмотрении левой части балки получают такие направления, как

указано на рис. 61, *с*. Чтобы отчетливо представить условие относительно знака для изгибающих моментов, вырежем двумя смежными поперечными сечениями mn и m_1n_1 элемент балки (рис. 63). Если изгибающие моменты в этих сечениях положительны, то силы слева от сечения mn дают момент по часовой стрелке, а силы справа от сечения m_1n_1 дают момент против часовой стрелки, как показано на рис. 63, *а*. Таким образом, видно, что направления моментов таковы, что происходит изгиб балки выпуклостью вниз. Если изгибающие моменты в поперечных сечениях mn и m_1n_1 отрицательны, то происходит изгиб балки выпуклостью вверх, как показано на рис. 63, *б*. Следовательно, на участках балки, где

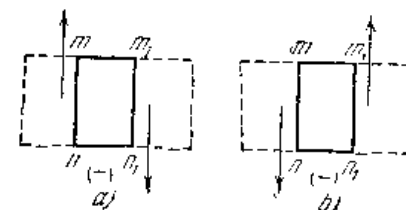


рис. 64.

изгибающий момент положителен, изогнутая ось балки обращена выпуклостью вниз, в то время как на участках, где изгибающий момент отрицателен, изогнутая ось балки обращена выпуклостью вверх.

Правило знаков для поперечной силы представлено на рис. 64.

ЗАДАЧИ

1. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении, отстоящем на расстоянии 4 м от левого конца балки, изображенной на рис. 59, а, если $a = 6$ м, $l = 10$ м и $P = 10$ т.

Ответ. $Q = 4$ т, $M = 16$ тм.

2. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении, отстоящем на расстоянии 2 м от левого конца балки, изображенной на рис. 59, в, если $a = 8$ м, $P = 12$ т.

Ответ. $Q = 12$ т, $M = -72$ тм.

3. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент M в сечении m_1 балки, изображенной на рис. 61, а, если $P_1 = P_2 = 12$ т, $P_3 = 0$, $c_1 = 2$ м, $c_2 = 4$ м, $x = 6$ м, $l = 12$ м.

Ответ. $Q = -6$ т, $M = 36$ тм.

4. Найти поперечную силу Q и изгибающий момент в середине балки, изображенной на рис. 62, а, если $q = 1 \frac{т}{м}$ и $l = 8$ м.

Ответ. $Q = 0$, $M = 8$ тм.

21. Зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой

Рассмотрим элемент балки, вырезанный двумя смежными поперечными сечениями m_1 и m_2 , отстоящими на расстоянии dx друг от друга (рис. 65). Предполагая, что в поперечном сечении m_1

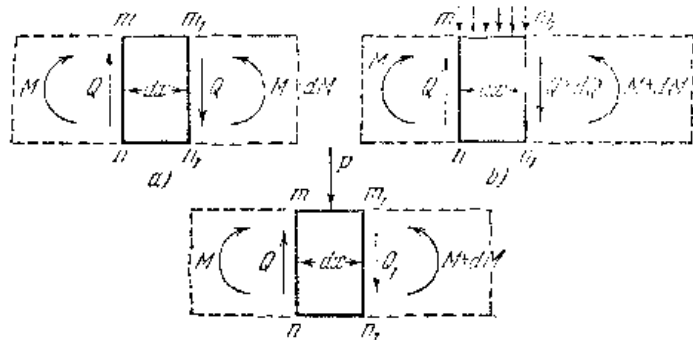


Рис. 65.

имеется положительный изгибающий момент и положительная поперечная сила, можем действие левой части балки на элемент представить силой Q и парой сил M , как указано на рис. 65, а. Таким же образом, предполагая, что в сечении m_2 , изгибающий

момент и поперечная сила положительны, можем действие правой части балки на элемент представить указанными парой сил и силой. Если между сечениями m_1 и m_2 на балку никакие силы не действуют (рис. 65, а), то поперечные силы в этих двух сечениях будут равны¹⁾. Что же касается изгибающих моментов, то из условий равновесия элемента вытекает, что они не равны в двух смежных сечениях и что приращение dM изгибающего момента равняется моменту пары сил, представленной двумя равными и противоположно направленными силами Q , т. е.

$$dM = Q dx \quad \text{и} \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (50)$$

Итак, во всех частях балки между грузами поперечная сила равна производной от изгибающего момента по x .

Рассмотрим теперь случай, когда между поперечными сечениями m_1 и m_2 действует распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 65, б). Тогда полная нагрузка, действующая на элемент, равняется $q dx$. Принимая q положительной, если нагрузка действует вниз, можем заключить из условий равновесия элемента, что поперечная сила в сечении m_2 отличается от поперечной силы в сечении m_1 на величину

$$dQ = -q dx,$$

откуда следует, что

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (51)$$

Итак, производная от поперечной силы по x равняется интенсивности нагрузки, взятой с отрицательным знаком.

Взяв момент всех сил, действующих на элемент, получим

$$dM = Q dx - q dx \frac{dx}{2}.$$

Пренебрегая вторым членом правой части, как малой величиной второго порядка, приходим снова к уравнению (50) и заключаем, что в случае распределенной нагрузки производная от изгибающего момента равняется поперечной силе.

Если между смежными поперечными сечениями m_1 и m_2 действует сосредоточенная нагрузка P (рис. 65, в), то происходит внезапное изменение величины поперечной силы. Пусть Q означает поперечную силу в сечении m_1 и Q_1 в сечении m_2 . Тогда из условий равновесия элемента $m_1 m_2$ находим

$$Q_1 = Q - P.$$

Следовательно, величина поперечной силы изменяется на величину

¹⁾ Весом элемента балки здесь пренебрегаем.

P при переходе через точку приложения нагрузки. Тогда из уравнения (50) можно заключить, что в точке приложения сосредоточенной силы происходит внезапное изменение величины производной $\frac{dM}{dx}$.

22. Эюры изгибающих моментов и поперечных сил

Из предыдущих рассуждений следует, что усилия, действующие по поперечному сечению m балки, таковы, что они уравновешивают изгибающий момент M и поперечную силу Q в том же сечении.

Таким образом, величины M и Q в каком-либо поперечном сечении определяют величину усилий, действующих по этому поперечному сечению. Для того чтобы упростить исследование вопроса о распределении напряжений в балке, удобно графически изображать изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки. В таком изображении абсцисса указывает положение поперечного сечения, а ордината представляет значение изгибающего момента или поперечной силы, которые действуют в этом сечении, причем положительные значения откладываются выше горизонтальной оси, а отрицательные — ниже оси. Такие графические изображения называются соответственно *эюрами изгибающих моментов и поперечных сил*.

Рассмотрим, например, свободно лежащую балку с сосредоточенной нагрузкой P (рис. 66)¹⁾. Реакции в этом случае будут

$$R_1 = \frac{Pb}{l} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Взяв сечение m слева от P , можем заключить, что в этом сечении

$$Q = \frac{Pb}{l} \quad \text{и} \quad M = \frac{Pb}{l} x. \quad (a)$$

Поперечная сила и изгибающий момент имеют те же направления, что и на рис. 63, a и 64, a , и поэтому положительны. Из уравнения (a) видно, что поперечная сила остается постоянной на участке балки слева от груза и что изгибающий момент изменяется пропорционально x . При $x = 0$ момент равен нулю и при $x = a$, т. е. в поперечном сечении, где приложена нагрузка, момент равен $P \frac{ab}{l}$.

Соответствующие участки эюр поперечной силы и изгибающего момента показаны соответственно на рис. 66, b и 66, c прямыми линиями ac и a_1c_1 . Для поперечного сечения, расположенного справа от

¹⁾ В последующих рисунках для простоты катки под подвижными опорами обычно будут опускаться.

груза P , мы получаем

$$Q = \frac{Pb}{l} - P \quad \text{и} \quad M = \frac{Pb}{l} x - P(x - a), \quad (b)$$

где x всегда будет расстояние от левого конца балки. Поперечная сила для этого участка балки остается постоянной и отрицательной. На рис. 66, b эта сила представлена линией $c'b$, параллельной оси x . Изгибающий момент есть линейная функция от x , который при $x = a$ равняется $\frac{Pab}{l}$ и при $x = l$ равняется нулю. Он на всем протяжении балки положителен и его изменение на правом участке балки представлено на рис. 66, c прямой линией c_1b_1 . Ломаные ли-

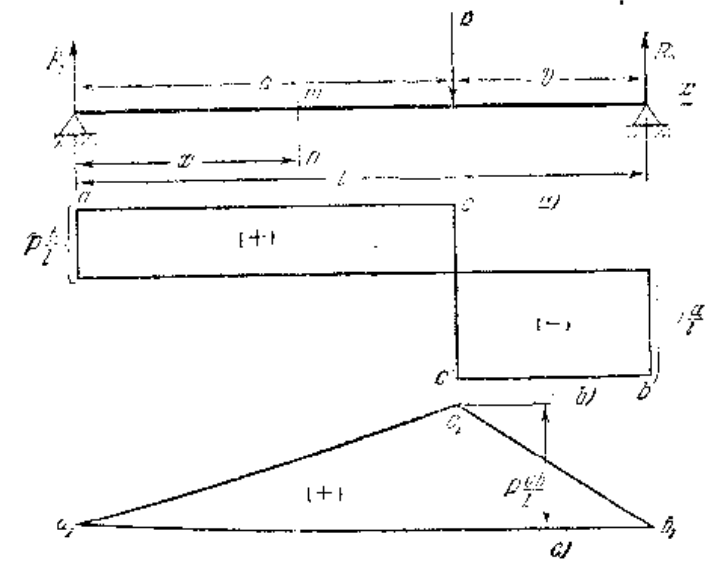


Рис. 66.

нии $acc'b$ и $a_1c_1b_1$ на рис. 66, b и 66, c представляют соответственно эюры поперечных сил и изгибающих моментов по всей длине балки. Под грузом P происходит резкое изменение величины поперечной силы от положительного значения $\frac{Pb}{l}$ к отрицательному значению $-\frac{Pa}{l}$ и резкое изменение угла наклона линии на эюре изгибающих моментов.

При выводе выражений (b) для поперечной силы и изгибающего момента мы рассматривали левый участок балки, т. е. участок, на котором действуют две силы R_1 и P . В этом случае было бы проще рассматривать правый участок балки, где действует только реакция $\frac{Pa}{l}$. Поступая таким образом и пользуясь правилом зна-

ков, указанным на рис. 63 и 64, мы получаем

$$Q = -\frac{Pa}{l} \quad \text{и} \quad M = \frac{Pa}{l}(l-x). \quad (c)$$

Ранее полученные выражения (b) могут быть приведены к этому более простому виду, если заметить, что $a = l - b$.

Интересно отметить, что эпюра поперечных сил состоит из двух прямоугольников с равными площадями. Принимая во внимание противоположные знаки этих площадей, мы заключаем, что полная площадь эпюры поперечных сил равняется нулю. Этот результат не является случайным. Интегрируя уравнение (50), мы имеем

$$\int_A^B dM = \int_A^B Q dx, \quad (d)$$

где пределы A и B указывают, что интегрирование производится по всей длине балки от конца A до конца B . Следовательно, правая часть уравнения (d) представляет полную площадь эпюры поперечных сил. Левая часть того же уравнения после интегрирования дает разность $M_B - M_A$ изгибающих моментов на концах B и A . В случае свободно лежащей балки моменты на концах обращаются в нуль. Поэтому полная площадь эпюры поперечных сил равна нулю.

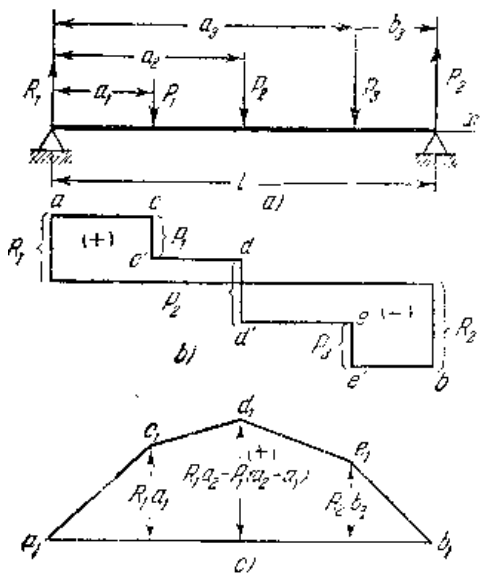


Рис. 67.

Если на балку действует несколько сил (рис. 67), то балка разделяется на несколько участков, и для каждого участка должны быть составлены выражения для Q и M . Измеряя x от левого конца балки и принимая $x < a_1$, мы получаем для первого участка балки

$$Q = R_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x. \quad (e)$$

Для второго участка балки, т. е. для $a_1 < x < a_2$, мы получаем

$$Q = R_1 - P_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x - P_1(x - a_1). \quad (f)$$

Для третьего участка балки, т. е. для $a_2 < x < a_3$, удобнее рассматривать правую часть балки, чем левую. В таком случае мы получаем

$$Q = -(R_2 - P_1)$$

и

$$M = R_2(l-x) - P_1(l-x-b_1). \quad (g)$$

Наконец, для последнего участка балки мы получаем

$$Q = -R_2, \quad M = R_2(l-x). \quad (h)$$

Из выражений (e) — (h) мы видим, что на каждом участке балки поперечная сила остается постоянной. Поэтому эпюра поперечных сил получается такой, как показано на рис. 67, b. Изгибающий момент на каждом участке балки является линейной функцией от x . Поэтому на соответствующем участке эпюры он представлен наклонной прямой линией. Чтобы начертить эти линии, мы замечаем из выражений (e) и (h), что на концах балки $x = 0$ и $x = l$ моменты равны нулю. Моменты под грузами получаются подстановкой в выражения (e), (f) и (h) соответственно $x = a_1$, $x = a_2$ и $x = a_3$. Таким образом мы получаем для вышеупомянутых моментов следующие значения:

$$M = R_1 a_1, \quad M = R_1 a_2 - P_1(a_2 - a_1), \quad M = R_2 b_2.$$

Пользуясь этими значениями, мы легко можем построить эпюру изгибающих моментов, как показано на рис. 67, c.

В практических приложениях важно найти поперечные сечения, в которых изгибающий момент имеет наибольшее или наименьшее значение. В случае сосредоточенных грузов, только что рассмотренных на рис. 67, наибольший изгибающий момент имеет место под грузом P_2 . Этот груз соответствует на эпюре изгибающих моментов точке d_1 , в которой тангенс угла наклона эпюры меняет знак. Далее, из уравнения (50) мы знаем, что тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов в какой-либо точке равен поперечной силе. Поэтому изгибающий момент имеет свое наибольшее или наименьшее значение в том сечении, где поперечная сила меняет свой знак. Если по длине балки поперечная сила изменяется от положительного значения к отрицательному, как, например, под грузом P_2 на рис. 67, то тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов также изменяется от положительного значения к отрицательному. Следовательно, в этом сечении мы имеем максимум изгибающего момента. Изменение Q от отрицательного значения к положительному указывает на минимум изгибающего момента. В общем случае эпюра поперечных сил может пересекать горизонтальную ось в нескольких местах. Тогда каждой такой точке пересечения будет соответствовать максимум или минимум на эпюре изгибающих моментов. Необходимо исследовать числовые значения всех этих максимумов и минимумов, чтобы найти численно наибольший изгибающий момент.

Рассмотрим теперь случай равномерно распределенной нагрузки (рис. 68). Из наших предыдущих рассуждений (стр. 70)

мы имеем для поперечного сечения, находящегося на расстоянии x от левой опоры,

$$Q = q \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad \text{и} \quad M = \frac{qx}{2} (l - x). \quad (i)$$

Мы видим, что в этом случае эпюра поперечных сил представляет наклонную прямую линию, для которой ординаты при $x = 0$ и $x = l$ соответственно равны $\frac{ql}{2}$ и $-\frac{ql}{2}$, как показано на рис. 68, б. Из выражения (i) можно видеть, что в этом случае изгибающий момент

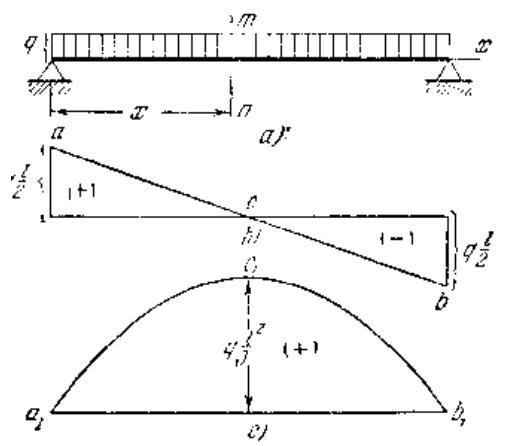


Рис. 68

представляет параболу с вертикальной осью в середине пролета балки (рис. 68, в). Моменты на концах, т. е. при $x = 0$ и $x = l$, равны нулю, а наибольшее значение момент имеет в середине пролета, где поперечная сила меняет знак. Этот максимум получается подстановкой $x = \frac{l}{2}$ в выражение (i), которое дает

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Если равномерная нагрузка q покрывает только часть пролета (рис. 69), то мы должны рассмотреть отдельно три участка длиной a , b и c . Для определения реакций R_1 и R_2 мы заменяем равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей qb . Из уравнений статики для моментов относительно B и A мы получаем

$$R_1 = \frac{qb}{l} \left(c + \frac{b}{2} \right) \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{qb}{l} \left(a + \frac{b}{2} \right).$$

Поперечная сила и изгибающий момент для ненагруженного левого участка балки ($0 < x < a$) будут

$$Q = R_1 \quad \text{и} \quad M = R_1 x. \quad (j)$$

Для поперечного сечения m , взятого на нагруженном участке балки, поперечная сила получается путем вычитания из реакции R_1 нагрузки $q(x-a)$, расположенной слева от этого сечения. Изгибающий момент в том же поперечном сечении получается путем вычитания из момента реакции момента нагрузки, расположенной слева от этого сечения. Таким образом, мы находим

$$Q = R_1 - q(x-a) \quad \text{и} \quad M = R_1 x - q(x-a) \frac{x-a}{2}. \quad (k)$$

Для ненагруженного правого участка балки, рассматривая силы справа от какого-либо сечения, мы находим

$$Q = -R_2 \quad \text{и} \quad M = R_2 (l - x). \quad (l)$$

Пользуясь выражениями (j), (k) и (l), мы можем легко построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюра поперечных сил (рис. 69, б) состоит из горизонтальных отрезков $a_1 c_1$ и $d_1 b_1$, соответствующих ненагруженным участкам балки, и наклонной линии $c_1 d_1$, соответствующей равномерно нагруженному участку. Эпюра изгибающих моментов (рис. 69, в) состоит из двух наклонных линий $a_2 c_2$ и $b_2 d_2$, соответствующих ненагруженным участкам, и параболической кривой $c_2 e_2 d_2$ с вертикальной осью, соответствующей нагруженному участку балки. Наибольший изгибающий момент будет в точке e_2 , которая соответствует точке e_1 , где поперечная сила меняет знак. В точках c_1 и d_1 парабола касается соответственно наклонных линий $a_2 c_2$ и $d_2 b_2$. Это следует из того, что в точках c_1 и d_1 эпюры поперечных сил не происходит резкого изменения величины поперечной силы. Следовательно, на основании уравнения (50), не может быть резкого изменения наклона эпюры изгибающих моментов в соответствующих точках c_2 и d_2 .

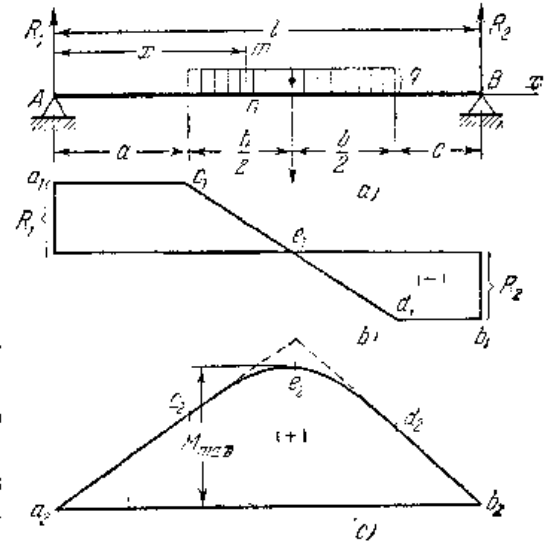


Рис. 69.

В случае консоли (рис. 70) для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов применяется тот же метод, как и для свободно лежащей балки. Измеряя x от левого конца балки и рассматривая участок, расположенный слева от груза P_2 ($0 < x < a$), получаем

$$Q = -P_1 \quad \text{и} \quad M = -P_1 x.$$

Знак минус в этих выражениях следует из правила знаков, указанного на рис. 63, б и 64, в. Для правого участка балки ($a < x < l$) мы получаем

$$Q = -P_1 - P_2 \quad \text{и} \quad M = -P_1 x - P_2 (x - a).$$

Соответствующие эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 70, б и 70, в. Полная площадь эпюры поперечных

сил в этом случае не равна нулю, а равна $-P_1l - P_2b$, что выражает изгибающий момент M_B в конце B балки. Эпюра изгибающих моментов состоит из двух наклонных линий a_1c_2 и c_2b_2 , тангенсы углов наклона которых равны значениям поперечной силы на соответствующих участках консоли. Численно наибольший изгибающий момент имеет место в заделанном конце B балки.

Если консоль несет равномерно распределенную нагрузку (рис. 71), то поперечная сила и изгибающий момент на расстоянии x равняются:

$$Q = -qx \quad \text{и} \quad M = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Эпюра поперечной силы представлена на рис. 71, b наклонной линией ab и изгибающий момент на рис. 71, c параболой a_1b_1 , которая

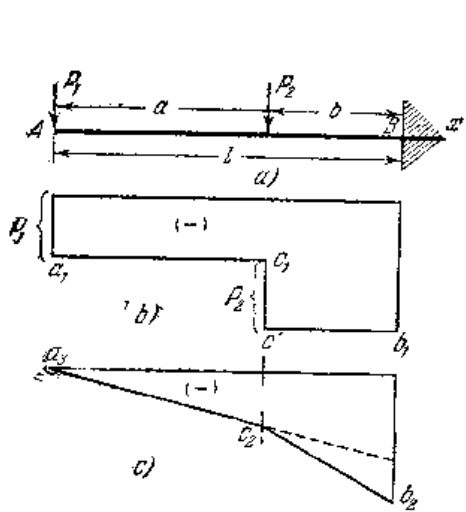


Рис. 70.

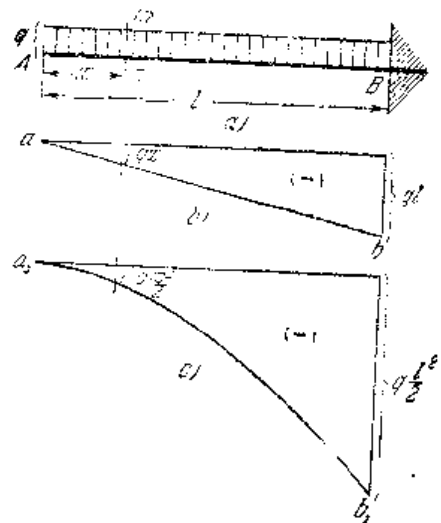


Рис. 71.

имеет вертикальную ось и касается горизонтальной оси в точке a_1 , где поперечная сила равна нулю. Численно наибольшие значения изгибающего момента и поперечной силы имеют место в конце B балки.

Если на балку одновременно действуют сосредоточенные и распределенные нагрузки, то удобно строить эпюры отдельно для каждого рода нагрузки, и путем сложения соответствующих ординат двух отдельных эпюр получить полные значения Q и M в любом поперечном сечении. Если, например, мы имеем сосредоточенные грузы P_1 , P_2 и P_3 (рис. 67), действующие одновременно с равномерной нагрузкой (рис. 68), то изгибающий момент в каком-либо сечении получается путем сложения соответствующих ординат эпюр, изображенных на рис. 67, c и 68, c .

ЗАДАЧИ

1. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для балок, показанных на рис. 72.

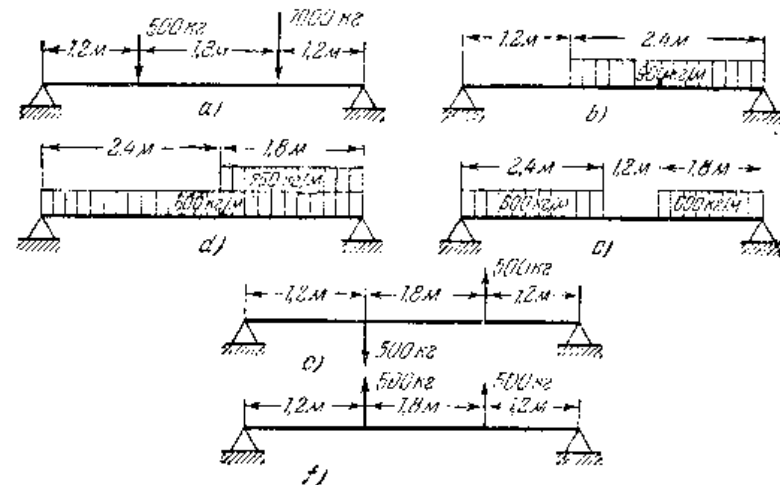


Рис. 72.

2. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для консолей, показанных на рис. 73.

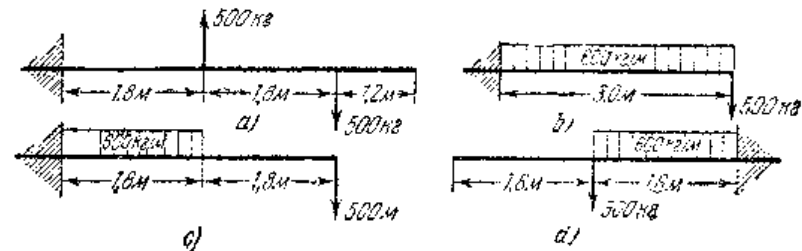


Рис. 73.

3. Консоль, заделанная на правом конце, несет полную нагрузку P , интенсивность которой равномерно возрастает от нуля на левом конце, как показано наклонной линией AC на рис. 74. a . Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение. Поперечная сила в сечении mn , отстоящем на расстоянии x от левого конца консоли, численно равна заштрихованной части нагрузки. Так как полная нагрузка P представлена площадью треугольника ACB , то заштрихованная часть равняется $P \frac{x^2}{l^2}$. Пользуясь ранее принятым правилом знаков (рис. 64), мы получаем

$$Q = -P \frac{x^2}{l^2}.$$

Таким образом, эпюра поперечных сил изображается на рис. 74, b параболой ab с вертикальной осью в точке a . Изгибающий момент в сечении mn получится,

если взять момент заштрихованной части нагрузки относительно центра тяжести поперечного сечения m . Следовательно,

$$M = -P \frac{x^2}{l^2} \frac{x}{3}.$$

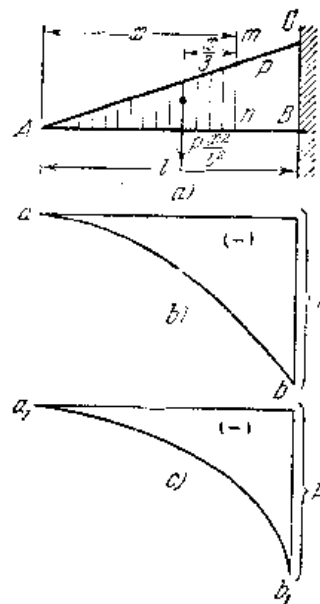


Рис. 74.

Этот момент представлен кривой a_1b_1 на рис. 74, с.

4. Балка длиной l несет на концах два равных груза P (рис. 75), уравновешенные равномерно распределенной реакцией. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. Эпюры получаются из рис. 68, б и 68, с путем подстановки $-2P$ вместо ql .

5. Балка длиной $l=12$ м несет в середине длины сосредоточенный груз $P=1000$ кг (рис. 76) и имеет равномерную по всей длине реакцию. Найти численно наибольший изгибающий момент. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $M_{\max}=1500$ кгм. Требуемые эпюры для каждой половины балки подобны эпюрам, изображенным на рис. 71, б и 71, с.

6. Свободно лежащая балка длиной l несет полную распределенную нагрузку P , интенсивность которой равномерно возрастает от нуля на левом конце, как показано на рис. 77, а. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, если $P=12$ т и $l=12$ м.

Решение. Реакции опор в этом случае будут $R_1 = \frac{1}{3}P = 4$ т и $R_2 = 8$ т. Поперечная сила в

сечении m получается путем вычитания заштрихованной части нагрузки из реакции R_1 . Следовательно,

$$Q = R_1 - P \frac{x^2}{l^2} = P \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Эпюра поперечных сил изображена параболической кривой acb на рис. 77, б. Изгибающий момент в сечении m равняется

$$M = R_1x - P \frac{x^2}{l^2} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}Px \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Этот момент представлен кривой $a_1c_1b_1$ на рис. 77, с. Наибольший момент имеет место в точке c_1 , где поперечная сила меняет свой знак, т. е. при $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

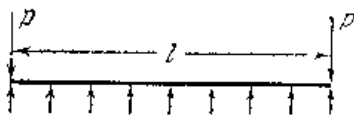


Рис. 75.

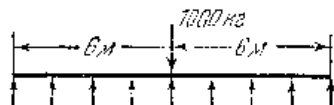


Рис. 76.

7. Свободно лежащая балка AB несет распределенную нагрузку, интенсивность которой представлена линией ACB (рис. 78). Найти выражения для поперечной силы и изгибающего момента в сечении m .

Решение. Предполагая, что полная нагрузка P приложена в центре тяжести площади треугольника ACB , найдем, что реакции опор будут

$$R_1 = P \frac{l+b}{3l} \quad \text{и} \quad R_2 = P \frac{l+a}{3l}.$$

Полная нагрузка делится на две части, которые представлены треугольниками ACD и CBD и величина которых соответственно равна Pa/l и Pb/l . Заштрихованная часть нагрузки равняется $P \frac{a}{l} \frac{x^2}{a^2} = P \frac{x^2}{al}$. Тогда для поперечной силы и изгибающего момента в сечении m мы получим

бающего момента в сечении m мы получим

$$Q = R_1 - P \frac{x^2}{al} \quad \text{и} \quad M = R_1x - P \frac{x^2}{al} \frac{x}{3}.$$

Подобным образом можно получить поперечную силу и изгибающий момент для какого-либо сечения на участке DB балки.

8. Найти M_{\max} в предыдущей задаче, если $l=12$ м, $b=3$ м, $P=12$ т.

Ответ. $M_{\max}=22,4$ тм.

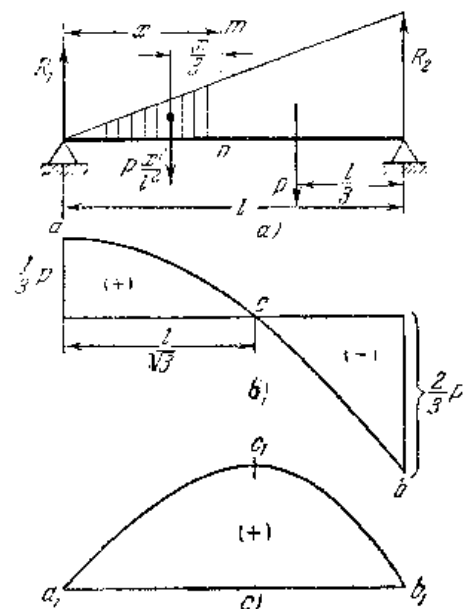


Рис. 77.

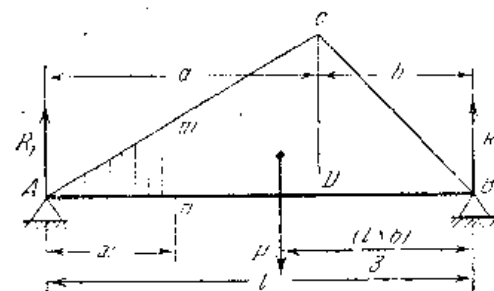


Рис. 78.

9. Построить в некотором масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и найти значения наибольших положительных и отрицательных поперечных сил и изгибающих моментов для балок с консолями (рис. 79).

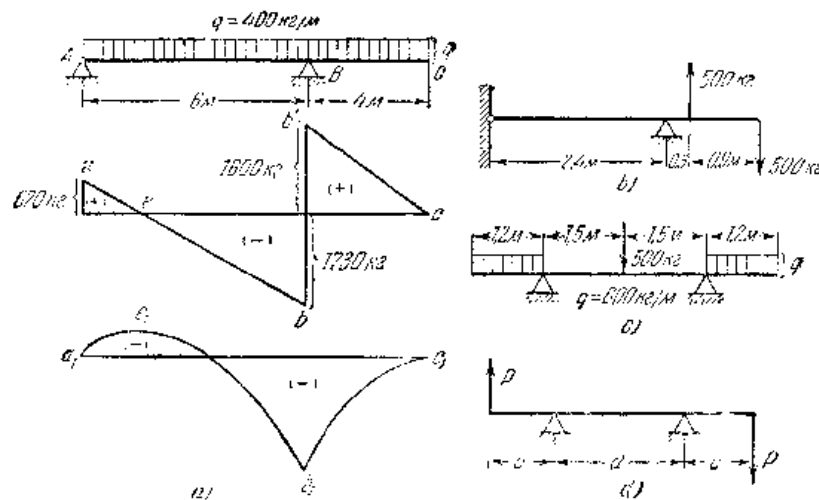


Рис. 79.

Решение. В случае, показанном на рис. 79, а, реакции равны 670 кг и 3300 кг. Поперечная сила для левого участка балки равняется $Q = 670 - 400x$. Она

изображена на рисунке наклонной линией ab . Поперечная сила для правого участка балки найдется как для консоли и показана наклонной линией $b's$. Изгибающий момент для левого участка балки равняется $M = 670x - 400 \frac{x^2}{2}$. Он изображен параболой $a_1e_1b_1$. Наибольший момент имеет место в точке e_1 и соответствует точке e ,

где поперечная сила меняет свой знак. Эюра изгибающих моментов для правого участка такая же, как и для консоли, и изображена параболой b_1c_1 , касающейся горизонтальной оси в точке e_1 .

10. Балка с двумя равными консолями (рис. 80), нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, имеет длину l . Найти расстояние d между опорами

так, чтобы изгибающий момент в середине балки численно равнялся изгибающим моментам на опорах. Построить для этого случая эюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $d = 0,586 l$.



Рис. 80.

ГЛАВА IV

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННЫХ СИММЕТРИЧНЫХ БАЛКАХ

23. Чистый изгиб

В предыдущей главе было упомянуто, что величина напряжений в каком-либо поперечном сечении балки определяется величиной поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении. Определение напряжений мы начнем со случая, когда поперечная сила равняется нулю и имеется только изгибающий момент. Этот случай называется *чистым изгибом*. Пример такого изгиба показан на рис. 81. Из условий симметрии мы заключаем, что реакции в этом случае равны P . Рассматривая равновесие части балки, находящейся слева от поперечного сечения mn , мы можем заключить, что внутренние усилия, распределенные по поперечному сечению mn и представляющие действие отброшенной правой части балки на левую, должны быть статически эквивалентны паре сил, равной и направленной противоположно изгибающему моменту Pa . Чтобы найти закон распределения этих внутренних усилий по поперечному сечению, необходимо рассмотреть деформацию балки. В простом случае балки, имеющей продольную плоскость симметрии с внешними парами изгиба, действующими в этой плоскости, изгиб будет происходить в этой же плоскости. Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение и на ее гранях нанесены две смежные вертикальные линии mn и pp , то непосредственный опыт показывает, что эти линии при изгибе остаются прямыми и поворачиваются так, что остаются нормальными к продольным волокнам балки (рис. 82). Излагаемая ниже теория изгиба основана на предположении, что не только проведенные на гранях линии, как mn , остаются прямыми, но что все поперечное сечение балки, перво-

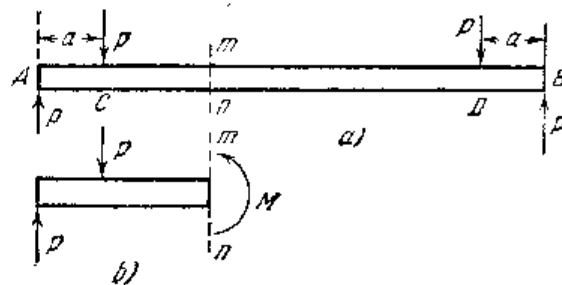


Рис. 81.

воначально прямое, при изгибе деформируется. В простом случае балки, имеющей продольную плоскость симметрии с внешними парами изгиба, действующими в этой плоскости, изгиб будет происходить в этой же плоскости. Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение и на ее гранях нанесены две смежные вертикальные линии mn и pp , то непосредственный опыт показывает, что эти линии при изгибе остаются прямыми и поворачиваются так, что остаются нормальными к продольным волокнам балки (рис. 82). Излагаемая ниже теория изгиба основана на предположении, что не только проведенные на гранях линии, как mn , остаются прямыми, но что все поперечное сечение балки, перво-

начально плоское, остается и после изгиба плоским и нормальным к продольным волокнам балки. Опыт показывает, что теория, основанная на этом предположении, дает очень точные результаты для прогиба балок и деформации продольных волокон. Из вышеуказанного предположения следует, что при изгибе поперечные сечения mm и pp поворачиваются относительно друг друга около оси, перпендикулярной к плоскости изгиба, так что продольные волокна на выпуклой стороне испытывают растяжение, а на вогнутой стороне — сжатие. Линия nn_1 есть след пересечения боковой

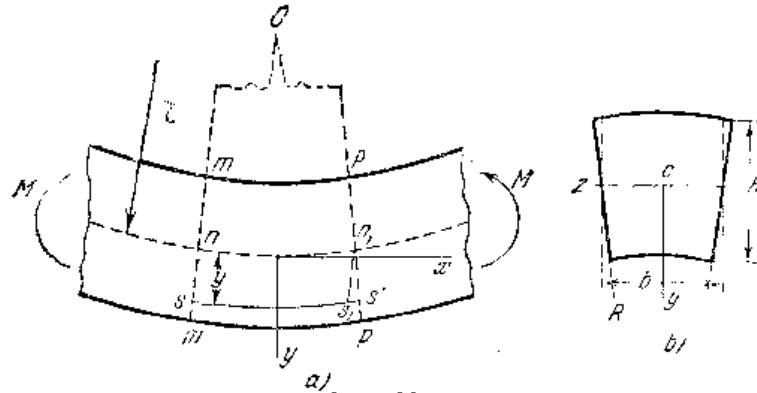


Рис. 82.

грани с поверхностью, по которой волокна не претерпевают изменения длины при изгибе. Эта поверхность называется *нейтральным слоем*, а линия ее пересечения с каким-либо поперечным сечением называется *нейтральной осью*. Удлинение $s's_1$ какого-либо волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, получится, если провести линию ns_1 параллельно mm (рис. 82, а). Обозначая через r радиус кривизны изогнутой оси¹⁾ балки и пользуясь подобием треугольников non_1 и $s_1n_1s_1'$, находим относительное удлинение волокна ss_1'

$$\epsilon_x = \frac{s's_1}{nn_1} = \frac{y}{r}. \quad (52)$$

Из этого уравнения видно, что деформации продольных волокон пропорциональны расстоянию y от нейтрального слоя и обратно пропорциональны радиусу кривизны.

Опыты показывают, что продольное растяжение волокон на выпуклой стороне балки сопровождается *поперечным сжатием* и продольное сжатие на вогнутой стороне — *поперечным расширением* такой же величины, как в случае простого растяжения или сжатия (см. параграф 14). В результате этого изменяется форма

¹⁾ Осью балки называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений балок. O означает центр кривизны оси балки.

поперечного сечения, вертикальные стороны прямоугольного сечения становятся наклонными друг к другу, как показано на рис. 82, б. Относительная деформация в поперечном направлении равна

$$\epsilon_z = -\mu \epsilon_x = -\mu \frac{y}{r}, \quad (53)$$

где μ — коэффициент Пуассона. Благодаря этому искажению все прямые линии в поперечном сечении, параллельные оси z , искривляются так, что остаются нормальными к боковым сторонам сечения. Их радиус кривизны R будет больше r во столько раз, во сколько ϵ_x численно больше ϵ_z (см. уравнение 53), и мы получаем

$$R = \frac{1}{\mu} r. \quad (54)$$

Из деформаций продольных волокон на основании закона Гука определяются соответствующие напряжения (уравнение 4):

$$\sigma_x = \frac{E y}{r}. \quad (55)$$

Закон распределения этих напряжений показан на рис. 83. Напряжение в каком-либо волокне пропорционально расстоянию его от нейтральной оси и радиус кривизны r — две неизвестные в уравнении (55) — можно теперь определить из того условия, что силы, распределенные по какому-либо поперечному сечению балки, должны дать *сопротивляющуюся пару*, которая уравновесит внешнюю пару M (рис. 81).

Пусть dF означает элементарную площадку поперечного сечения, расположенную на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 83). Усиле, действующее на эту элементарную площадку, равно

произведению напряжения (уравнение 55) на площадь dF , т. е. $\frac{E y}{r} dF$.

Вследствие того, что все такие усилия, распределенные по поперечному сечению, представляют систему сил, эквивалентную паре сил, равнодействующая этих усилий должна быть равна нулю, и мы получаем

$$\int \frac{E y}{r} dF = \frac{E}{r} \int dF \cdot y = 0,$$

т. е. статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси равен нулю. Следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения*.

Момент усилия, приходящегося на элементарную площадку dF , относительно нейтральной оси равен $\frac{E y}{r} dF \cdot y$. Суммируя все

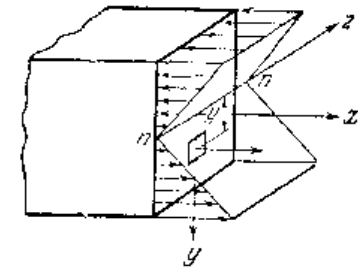


Рис. 83.

такие моменты по поперечному сечению и полагая равнодействующую равной моменту M внешних сил, получаем следующее уравнение для определения радиуса кривизны r :

$$\int \frac{E}{r} dF \cdot y^2 = \frac{EJ_z}{r} = M \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (56)$$

в котором

$$J_z = \int dF \cdot y^2$$

есть *момент инерции* поперечного сечения относительно нейтральной оси z (см. приложение, стр. 350). Из уравнения (56) видно, что кривизна изменяется прямо пропорционально изгибающему моменту и обратно пропорционально величине EJ_z , которая называется *жесткостью балки при изгибе*. Исключая r из уравнений (55) и (56), мы получаем следующее уравнение для определения напряжений:

$$\sigma_x = \frac{My}{J_z}. \quad (57)$$

В этом уравнении момент M положителен, если вызывает деформацию изгиба выпуклостью вниз, как на рис. 82; ордината y положительна при направлении вниз.

Предыдущее рассуждение было приведено для случая прямоугольного поперечного сечения. Оно остается справедливым также и для бруса какой-либо иной формы поперечного сечения, который имеет продольную плоскость симметрии и изгибается парами сил, действующими в этой плоскости и приложенными на концах бруса. В таких случаях изгиб происходит в плоскости действия пар, и поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к продольным волокнам и после изгиба.

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения имеют место в крайних волокнах, и в прямоугольном или в каком-либо другом поперечном сечении, которое имеет центр тяжести по середине высоты h , они будут при $y = \pm \frac{h}{2}$. Тогда при положительном M мы получаем

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mh}{2J_z} \quad \text{и} \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mh}{2J_z}. \quad (58)$$

Для упрощения мы воспользуемся следующим обозначением:

$$W_z = \frac{2J_z}{h}. \quad (59)$$

Тогда

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{M}{W_z}. \quad (60)$$

Величина W_z называется *моментом сопротивления* площади сече-

ния. В случае прямоугольного поперечного сечения (рис. 82, б) мы имеем

$$J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Для кругового поперечного сечения диаметра d

$$J_z = \frac{\pi d^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для сечений различных профилей, применяемых на практике, например, для двутавровых балок, швеллеров и т. д., величины J_z и W_z заводских размеров даются в таблицах справочников. В приложении даны таблицы для таких сечений.

Если центр тяжести поперечного сечения находится не по середине высоты, как, например, в случае тавровой балки, и если h_1 и h_2 соответственно означают расстояния от нейтральной оси до нижнего и верхнего крайних волокон, то при положительном изгибающем моменте мы получим

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mh_1}{J_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mh_2}{J_z}. \quad (61)$$

При отрицательном изгибающем моменте мы получим

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{Mh_2}{J_z}, \quad (\sigma_x)_{\min} = \frac{Mh_1}{J_z}. \quad (62)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее напряжение в паровой оси (рис. 84), если $c = 33,75$ см, диаметр оси $d = 25$ см, и нагрузка P , передаваемая рессорой на шейку оси, равна 10 400 кг.

Решение. Изгибающий момент, действующий в средней части оси, равен $M = Pc = 10\,400 \cdot 33,75$ кгсм. Наибольшее напряжение, по формуле (60), равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 10\,400 \cdot 33,75}{\pi \cdot 25^3} = 230 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить радиус кривизны r и прогиб оси в предыдущей задаче, если материалом является сталь и расстояние между центрами шеек равняется 147,5 см.

Решение. Радиус кривизны r определяется из уравнения (55) подстановкой

$$y = \frac{d}{2} = 12,5 \text{ см}, \quad (\sigma_x)_{\max} = 230 \text{ кг/см}^2. \quad \text{Тогда}$$

$$r = \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{d}{2} = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot 12,5}{230} = 108\,700 \text{ см.}$$

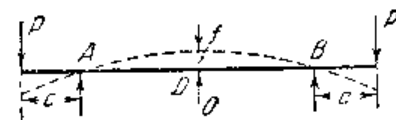


Рис. 84.

При вычислении f (рис. 84) заметим, что изогнутая ось представляет дугу окружности радиуса r и DB есть катет прямоугольного треугольника DOB , где O — центр окружности. Поэтому

$$\overline{DB}^2 = r^2 - (r - f)^2 = 2rf - f^2;$$

f весьма мало по сравнению с радиусом r , и в этом уравнении величиной f^2 можно

презирать. Тогда

$$f = \frac{DB^2}{2r} = \frac{147,5^2}{8 \cdot 148700} = 0,025 \text{ см}$$

3. Деревянная балка квадратного поперечного сечения $25 \times 25 \text{ см}$ опирается в A и B (рис. 84) и нагружена силами P , приложенными на концах. Определить величину P и прогиб f в середине, если $AB = 180 \text{ см}$, $c = 30 \text{ см}$, $(\sigma_x)_{\max} = 67 \text{ кг/см}^2$ и $E = 10^6 \text{ кг/см}^2$. Весом балки пренебрегается. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Ответ. $P = 5816 \text{ кг}$, $f = 0,217 \text{ см}$.

4. Двутавровая балка высотой 75 см опирается, как указано на рис. 85, и нагружена на консолях равномерно распределенной нагрузкой 13300 кг/м . Определить наибольшее напряжение в средней части балки и прогиб в середине балки, если $J_z = 357400 \text{ см}^4$.

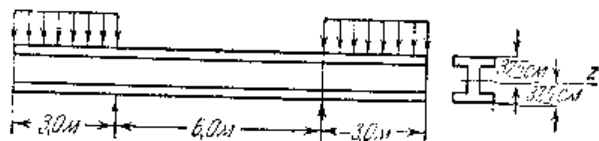


Рис. 85.

Решение. Изгибающий момент для средней части балки будет $M = 13300 \cdot 3 \times 150 = 5985000 \text{ кгсм}$.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{5985000 \cdot 37,5}{357400} = 628 \text{ кг/см}^2, \quad f = 0,377 \text{ см}.$$

5. Определить наибольшее напряжение, возникающее в стальной проволоке диаметра $d = 0,08 \text{ см}$, при навивании ее на круглый барабан диаметра $D = 50 \text{ см}$.

Решение. Наибольшее удлинение от изгиба по формуле (52) равняется

$$\varepsilon = \frac{d}{D+d} = \frac{0,08}{50}$$

и соответствующее растягивающее напряжение равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = E\varepsilon = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,08}{50} = 3200 \text{ кг/см}^2.$$

6. Стальная линейка, имеющая поперечное сечение $0,08 \times 5 \text{ см}$ и длину $= 25 \text{ см}$, изгибается парами сил, приложенными по концам по дуге круга 60° . Определить наибольшее напряжение и прогиб.

Решение. Радиус кривизны r определяется из уравнения $l = \frac{2\pi r}{6}$, откуда $= 23,9 \text{ см}$, и наибольшее напряжение по формуле (55) будет

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \cdot 0,08}{2r} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,08}{2 \cdot 23,9} = 3350 \text{ кг/см}^2.$$

Прогиб, вычисленный как для дуги круга, получится

$$f = r(1 - \cos 30^\circ) = 3,2 \text{ см}.$$

7. Определить наибольшее напряжение и величину пар сил, приложенных к концам линейки в предыдущей задаче, если наибольший прогиб в середине равен $2,5 \text{ см}$.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = 2560 \text{ кг/см}^2$, $M = 6,83 \text{ кгсм}$.

8. Определить кривизну, вызываемую в свободно лежащей стальной балке прямоугольного поперечного сечения неравномерным нагреванием по высоте h поперечного сечения. Температура в какой-либо точке на расстоянии y от срединной плоскости xz балки (рис. 82) определяется из уравнения

$$t = \frac{t_1 + t_0}{2} + \frac{(t_1 - t_0)y}{h},$$

где t_1 есть температура внизу балки, t_0 — температура сверху, $t_1 - t_0 = 70^\circ \text{ С}$ и коэффициент линейного расширения $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$. Каковы будут напряжения, если концы балки заделаны.

Решение. Температура срединной плоскости xz постоянна, $\frac{t_1 + t_0}{2}$, и изменение температуры других волокон пропорционально y . Соответствующие относительные удлинения и укорочения от температуры будут также пропорциональны y , т. е. они будут следовать тому же закону, как и деформации, определяемые уравнением (52). Результатом этого неравномерного расширения волокон является изгиб балки, и радиус кривизны r найдется из уравнения (52), где вместо ε_x будет $\frac{\alpha_c(t_1 - t_0)y}{2}$ и вместо y будет $\frac{h}{2}$. Тогда

$$r = \frac{h}{\alpha_c(t_1 - t_0)} = 1143 h.$$

Если концы балки заделаны, то на концах будут вызваны реактивные пары сил такой величины, что они уничтожат в месте заделки кривизну от неравномерного нагревания. Отсюда

$$M = \frac{EJ_z}{r} = \frac{EJ_z}{1143 h}.$$

Подставляя это в уравнение (57), мы получаем

$$\sigma_x = \frac{Ey}{1143 h}$$

и наибольшее напряжение равно

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E}{2 \cdot 1143} = 875 \text{ кг/см}^2.$$

9. Решить задачи 6 и 7, если дуга соответствует 10° и материалом является медь.

10. Решить задачу 4, предполагая, что балка — деревянная, имеет квадратное поперечное сечение $30 \times 30 \text{ см}$ и интенсивность распределенной нагрузки равна 1300 кг/м . Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

24. Различные формы поперечных сечений балок¹⁾

Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что наибольшие растягивающие или сжимающие напряжения в балке при чистом изгибе пропорциональны расстояниям наиболее удаленных волокон от нейтральной оси поперечного сечения.

¹⁾ Весьма подробное рассмотрение различных форм поперечных сечений балок дано Bagné de Saint-Venant в его приложениях к книге «Navier, Résistance des corps solides», 3-е издание, стр. 122—62, 1864.

Поэтому, если материал одинаково сопротивляется и растяжению и сжатию, будет логичным выбирать такие формы поперечного сечения, в которых центр тяжести находится по середине высоты балки. Таким образом, получится один и тот же коэффициент безопасности для растянутых и сжатых волокон. Эта мысль является основанием для выбора сечений, симметричных относительно нейтральной оси, для таких материалов, как строительная сталь, которая имеет один и тот же предел текучести как при растяжении, так и при сжатии. Если сечение не симметрично относительно нейтральной оси, например, сечение рельса, то материал распределяется по сечению так, чтобы иметь центр тяжести по середине его высоты.

Для материалов с низким сопротивлением растяжению и высоким сопротивлением сжатию, как в случае чугуна или бетона, благоприятным поперечным сечением балки будет несимметричное относительно нейтральной оси, и при этом такое, в котором расстояния h_1 и h_2 от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон будут пропорциональны допускаемым напряжениям материала на растяжение и сжатие. Таким образом получится сечение одинакового сопротивления растяжению и сжатию. Например, в тавровом сечении центр тяжести может быть помещен в нужном месте по

высоте сечения путем надлежащего подбора размеров ребра и полки.

Для данного изгибающего момента наибольшее напряжение зависит от момента сопротивления, и интересно отметить, что имеются случаи, когда увеличение площади не дает уменьшения этого напряжения. Например, брус квадратного поперечного сечения, изгибаемый парами сил, действующими в вертикальной плоскости, проходящей через диагональ поперечного сечения (рис. 86), будет иметь меньшее напряжение, если срезать заштрихованные на рисунке углы. Пусть a означает длину стороны квадрата, тогда момент инерции квадрата относительно оси z (см. приложение) равен $J_z = a^4/12$ и соответствующий момент сопротивления равен

$$W_z = \frac{J_z \sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Срежем теперь углы так, чтобы $mp = am$, где a есть дробь, определяемая ниже. Новое поперечное сечение состоит из квадрата mm_1m_2 со сторонами $a(1-\alpha)$ и двух параллелограммов mm_1m_3 . Момент инерции этого нового поперечного сечения относительно оси z

равняется

$$J'_z = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} - 2 \frac{aa^4 \sqrt{2}}{3} \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{1/2} \right]^3 = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} (1+3\alpha)$$

и соответствующий момент сопротивления будет

$$W'_z = \frac{J'_z \sqrt{2}}{a(1-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1-\alpha)^3 (1+3\alpha).$$

Если теперь мы определим значение α так, чтобы сделать этот момент сопротивления наибольшим, то найдем $\alpha = 1/9$. Вставив это значение α в выражение для W'_z , найдем, что срезыванием углов наибольшее напряжение при изгибе уменьшаем приблизительно на 5%.

Этот результат легко сразу понять, если принять во внимание, что момент сопротивления есть частное от деления момента инерции на половину высоты поперечного сечения. Срезыванием углов момент инерции поперечного сечения уменьшается в меньшей степени, чем высота, следовательно, момент сопротивления увеличивается и $(\sigma_x)_{\max}$ уменьшается. Подобный результат можно получить в других случаях. Для прямоугольника с узкими выступающими частями (рис. 87, а) момент сопротивления, при некоторых условиях, увеличивается срезыванием этих частей. Для кругового поперечного сечения (рис. 87, б) момент сопротивления увеличивается на 0,7% срезыванием двух заштрихованных сегментов высотой $\delta = 0,011d$. В случае треугольного сечения (рис. 87, в) момент сопротивления можно увеличить срезыванием заштрихованного угла.

При проектировании балки, испытывающей чистый изгиб, необходимо удовлетворить не только условиям прочности, но также и условиям экономии в весе самой балки. Из двух поперечных сечений, имеющих один и тот же момент сопротивления, т. е. удовлетворяющих условиям прочности с одинаковым коэффициентом безопасности, сечение с меньшей площадью будет более экономичным. Для сравнения различных форм поперечных сечений мы рассмотрим сначала прямоугольник высотой h и шириною b . Момент сопротивления равняется

$$W_z = \frac{bh^3}{6} = \frac{1}{6} Fh, \tag{a}$$

где F означает площадь поперечного сечения. Видно, что прямоугольное поперечное сечение становится более экономичным

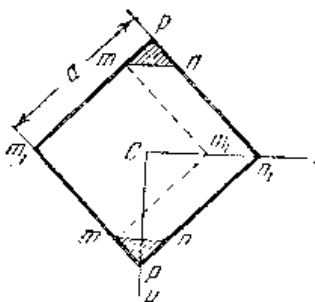


Рис. 86.



Рис. 87.

с увеличением его высоты h . Однако имеется предел такого увеличения. Когда сечение становится очень узким, то возникает вопрос об устойчивости балки. Разрушение балки очень узкого прямоугольного сечения может произойти не от преодоления сопротивления материала, а от бокового выпучивания (см. том II).

В случае кругового поперечного сечения имеем

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} Fd. \quad (b)$$

Сравнивая круговое и квадратное поперечные сечения одинаковой площади, находим, что сторона h квадрата будет $h = d \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и тогда уравнение (a) дает

$$W_z = 0,147 Fd.$$

Сравнение этого значения W_z с (b) показывает, что квадратное поперечное сечение является более экономичным, чем круговое.

Исследование закона распределения напряжений по высоте поперечного сечения (рис. 83) приводит к заключению, что при экономичном проектировании необходимо большую часть материала балки располагать по возможности дальше от нейтральной оси. Наиболее благоприятный случай для данного поперечного сечения площадью F и высотой h будет тот, когда каждая половина площади будет сосредоточена на расстоянии $h/2$ от нейтральной оси. Тогда

$$J_z = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Fh^2}{4}; \quad W_z = \frac{1}{2} Fh. \quad (c)$$

Это есть предел, к которому можно приближаться на практике, пользуясь двутавровым сечением с наибольшей частью материала в полках. Вследствие необходимости включения части материала в стенку балки указанное условие (c) никогда не может быть осуществлено, и для стандартных двутавровых прокатных профилей мы имеем приближенно

$$W_z \approx 0,30 h. \quad (d)$$

Сравнение (d) с (a) показывает, что двутавровое сечение значительно экономичнее прямоугольного сечения той же высоты. Кроме того, благодаря своим широким полкам двутавровая балка будет всегда более устойчивой по отношению к боковому выпучиванию, чем балка прямоугольного сечения той же высоты и того же момента сопротивления. Этим объясняется причина того, что двутавровые балки находят широкое применение в стальных конструкциях.

ЗАДАЧИ

1. Определить ширину x полки чугунной балки, имеющей сечение, показанное на рис. 88, так, чтобы наибольшее растягивающее напряжение составляло одну треть наибольшего сжимающего напряжения. Высота балки $h = 10$ см, толщина стенки и полки $t = 2,5$ см.

Решение. Для того чтобы удовлетворить условиям задачи, необходимо для балки иметь такие размеры, чтобы расстояние c от центра тяжести до крайней



Рис. 88.

нижней грани равнялась $\frac{1}{4} h$. Теперь, пользуясь рис. 88, получаем уравнение

$$c = \frac{ht \frac{h}{2} + (x-t) \frac{t^2}{2}}{ht + (x-t)t} = \frac{h}{4},$$

откуда

$$x = t + \frac{ht^2}{h - 2t} = 2,5 + \frac{100}{10 - 5} = 22,5 \text{ см.}$$

2. Определить отношение $(\sigma_x)_{\max} : (\sigma_x)_{\min}$ для швеллера, показанного на рис. 89, если $t = 5$ см, $h = 25$ см, $b = 60$ см.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} : (\sigma_x)_{\min} = 3:7$.



Рис. 89.

3. Определить условие, при котором уменьшение высоты h_1 сечения, показанного на рис. 90, сопровождается увеличением момента сопротивления.

Решение. $W_z = \frac{bh^3}{6h_1} + \frac{dh_1^3}{6}; \quad \frac{dW_z}{dh_1} = -\frac{bh^3}{6h_1^2} + \frac{dh_1^2}{3}$.

Условием для увеличения W_z с уменьшением h_1 является

$$\frac{bh^3}{6h_1^2} > \frac{dh_1^2}{3} \quad \text{или} \quad \frac{b}{2d} > \frac{h^3}{h_1^3}.$$

4. Определить, насколько нужно срезать угол равно- стороннего треугольника поперечного сечения (рис. 87, c) для того, чтобы получить наибольший W_z .

5. Определить отношение весов трех балок одинаковой длины с одинаковым M и $(\sigma_x)_{\max}$ и имеющими соответственно поперечные сечения: круглое, квадратное и прямоугольное с отношением $h = 2b$.

Ответ. 1,12:1:0,793.

6. Сделать сравнение моментов сопротивления для двух балок одинакового веса, если первая является сплошной цилиндрической балкой диаметра d , а вторая представляет цилиндрическую трубу наружного диаметра D и внутреннего диаметра D_1 .

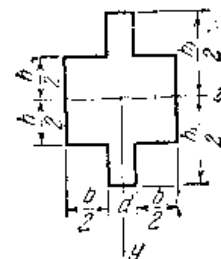


Рис. 90.

Решение. Площади поперечных сечений обеих балок $F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (D^2 - D_1^2)}{4}$.

Для сплошной балки $W = \frac{Fd}{8}$, для трубчатой балки $W_1 = \frac{\pi (D^4 - D_1^4)}{32D}$
 $= \frac{Fd}{8} \left(1 + \frac{D^2}{D_1^2}\right)$. Замечая, что $D_1^2 = D^2 - \frac{4F}{\pi}$, находим для трубчатой балки
 $W_1 = \frac{FD}{8} \left(2 - \frac{4F}{\pi D^2}\right)$, так что
 $\frac{W_1}{W} = \frac{D}{d} \left(2 - \frac{4F}{\pi D^2}\right)$.

Таким образом, для очень толстых труб D приближается к d и W_1 к W . Для очень тонких труб D велико по сравнению с d и отношение $W_1 : W$ приближается к значению $\frac{2D}{d}$.

25. Общий случай изгиба поперечно нагруженных симметричных балок

В общем случае изгиба балок, поперечно нагруженных в плоскости симметрии, напряжения, распределенные по поперечному сечению балки, должны уравнивать поперечную силу и изгибающий момент в этом сечении. Вычисление напряжений обычно производят в два этапа, сначала определяют напряжения, вызываемые изгибающим моментом и называемые *нормальными напряжениями*, а затем определяют *касательные напряжения*, возникающие от поперечной силы. В этом параграфе мы ограничимся вычислением нормальных напряжений; вопрос о касательных напряжениях будет обсужден в следующем параграфе. При вычислении нормальных напряжений мы предполагаем, что эти напряжения распределяются таким же образом, как и в случае чистого изгиба, и формулы для определения напряжений, выведенные в параграфе 23, будут справедливы. (Более полное обсуждение вопроса о распределении напряжений вблизи точек приложения сосредоточенных сил дано в томе II.)

Вычисление нормальных напряжений обычно производят для поперечных сечений, в которых изгибающий момент имеет наибольшее положительное или отрицательное значение. Имея численно наибольший изгибающий момент и величину допускаемого напряжения $[\sigma_n]$ при изгибе, получим необходимые размеры поперечного сечения из уравнения

$$[\sigma_n] = \frac{M_{\max}}{W}. \quad (63)$$

Приложение этого уравнения покажем теперь на числовых примерах.

ЗАДАЧИ

1. Определить необходимые размеры прокатной двутавровой балки, свободно лежащей на двух опорах с распределенной нагрузкой 500 кг/м , как показано на рис. 91, если допускаемое напряжение $[\sigma_n] = 1400 \text{ кг/см}^2$. Принять во внимание только нормальные напряжения и весом балки пренебречь.

Решение. Чтобы получить сечение, соответствующее наибольшему изгибающему моменту, нужно построить эпюру поперечных сил (рис. 91, б). Реакция левой опоры равна

$$R_1 = \frac{4 \cdot 500 \cdot 5 + 2 \cdot 500 \cdot 1}{7} = 1570 \text{ кг.}$$

Поперечная сила для какого-либо сечения участка AC балки равняется

$$Q = R_1 - qx = 1570 - 500x.$$

Эта сила равна нулю при $x = \frac{1570}{500} = 3,14 \text{ м}$. Для этого сечения изгибающий момент будет наибольший:

$$M_{\max} = 1570 \cdot 3,14 - 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,14^2 = 2465 \text{ кгм} = 246\,500 \text{ кг см.}$$

Необходимый момент сопротивления $W_z = \frac{246\,500}{1400} = 176 \text{ см}^3$. Этому условию удовлетворяет двутавровая балка ¹⁾ № 20 с моментом сопротивления $W_z = 184 \text{ см}^3$.

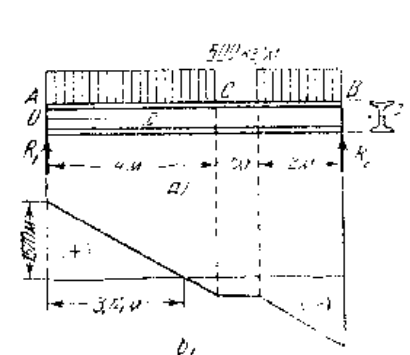


Рис. 91.

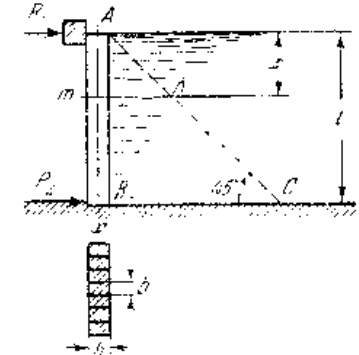


Рис. 92.

2. Деревянная плотина (рис. 92) состоит из вертикальных брусьев, подобный AB , прямоугольного поперечного сечения размером $h = 30 \text{ см}$, опертых на концах. Определить $(\sigma_n)_{\max}$, если длина брусьев $l = 6 \text{ м}$ и весом брусьев пренебрегается.

Решение. Если b есть ширина бруса, то полное гидростатическое давление на брус, изображенное трехгранной призмой ABC , равняется $H = \frac{1}{2} bl^2$. Реакция в A равняется $R_1 = \frac{1}{3} H = \frac{1}{6} bl^2$ и поперечная сила в каком-либо сечении

¹⁾ Здесь и на стр. 99, 100, 101, 102 и 274 номера и размеры американских двутавровых балок заменены номерами и размерами, установленными в СССР ГОСТом 8239—56. (Прим. перев.).

та равно реакции R_1 минус вес призмы Amn воды, т. е.

$$Q = R_1 - H \frac{x^2}{l^2} = H \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Положение поперечного сечения, соответствующего M_{\max} , найдется из условия $Q = 0$ или

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} = 0,$$

откуда $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 3,46 \text{ м}$.

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении m равняется моменту от реакции R_1 минус момент от распределенной нагрузки, изображенной трехгранной призмой Amn . Следовательно,

$$M = R_1 x - \frac{Hx^2}{l^2} \frac{x}{3} = \frac{Hx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Подставляя найденные выше значения $\frac{x^2}{l^2} = \frac{1}{3}$ и $x = 3,46 \text{ м}$, получаем

$$M_{\max} = \frac{1}{9} bl^2 = 3,46 \text{ тм};$$

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{3460}{100^2} = 92,3 \text{ кг/см}^2.$$

3. Определить величину M_{\max} в балке, нагруженной треугольной нагрузкой ADB , равной $P = 4800 \text{ кг}$, если $l = 4 \text{ м}$ и $d = 1 \text{ м}$ (рис. 93).

Решение. Расстояние c до вертикали, проходящей через центр тяжести S , от опоры B в случае треугольника равняется

$$c = \frac{1}{3}(l + d) = \frac{5}{3} \text{ м}.$$

Реакция опоры A равна

$$R_1 = \frac{Pc}{l} = \frac{4800 \cdot 5}{4 \cdot 3} = 2000 \text{ кг}.$$

Поперечная сила в каком-либо сечении m равняется реакции R_1 минус вес нагрузки, представленной площадью Amn . Так как нагрузка, представленная площадью ADE , равняется

$$\frac{P(l-d)}{l} = \frac{3}{4} P,$$

то получаем

$$Q = R_1 - \frac{3}{4} P \frac{x^2}{(l-d)^2}.$$

Положение сечения, для которого момент имеет максимальное значение, найдется из условия

$$R_1 - \frac{3}{4} P \frac{x^2}{(l-d)^2} = 0$$

или

$$\frac{x^2}{(l-d)^2} = \frac{4R_1}{3P} = \frac{5}{9},$$

откуда $x = 2,24 \text{ м}$.

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении m равен моменту от реакции R_1 минус момент от нагрузки Amn . Следовательно,

$$M = R_1 x - \frac{3}{4} P \frac{x^2}{(l-d)^2} \frac{x}{3}.$$

Вставляя $x = 2,24 \text{ м}$, получаем $M_{\max} = 2910 P \text{ кгм}$.

4. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 94, а, и определить необходимые размеры двутаврового сечения, если $a = c = \frac{l}{4} = 1,8 \text{ м}$, $P = 800 \text{ кг}$, $q = 500 \text{ кг/м}$, $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$. Весом балки можно пренебречь.

Решение. На рис. 94, б и 94, с показаны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от распределенной нагрузки. К ним необходимо добавить моменты и поперечные силы от нагрузки P . Наибольший изгибающий момент будет посередине пролета и равняется

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{32} + \frac{Pl}{4} = 2250 \text{ кгм}.$$

Необходимый момент сопротивления равняется

$$W_z = \frac{2250 \cdot 100}{1400} = 160 \text{ см}^3.$$

Двутавровая балка № 18а с площадью

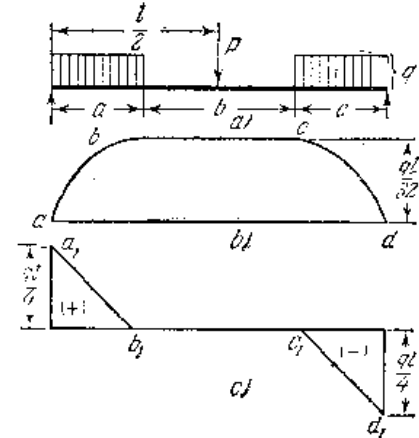


Рис. 94.

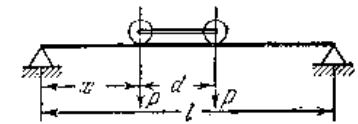


Рис. 95.

поперечного сечения $25,4 \text{ см}^2$ и моментом сопротивления $W_z = 159 \text{ см}^3$ является ближайшей, удовлетворяющей условиям прочности.

5. Определить наиболее невыгодное положение тележки подъемного крана, которая перемещается на балке, как показано на рис. 95. Найти M_{\max} , если давление на колесо равно $P = 4000 \text{ кг}$, $l = 7,2 \text{ м}$, $d = 1,8 \text{ м}$. Весом балки можно пренебречь.

Решение. Если x есть расстояние левого колеса от левой опоры балки, то изгибающий момент под этим колесом равняется

$$\frac{2P \left(l - x - \frac{1}{2} d \right) x}{l}.$$

Этот момент получит наибольшее значение при

$$x = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}.$$

Следовательно, для того чтобы получить наибольший изгибающий момент под левым колесом, необходимо переместить тележку из среднего положения на расстояние $\frac{d}{4}$ к правой опоре. То же значение изгибающего момента можно получить под правым колесом перемещением тележки на $\frac{d}{4}$ из среднего положения к левой опоре,

$$M_{\max} = \frac{2P \left(\frac{l}{2} - \frac{d}{4} \right)^2}{l} = 11\,025 \text{ кгм.}$$

6. Путь подъемного крана (рис. 96) уложен на двух двутавровых балках. Определить наиболее выгодное положение крана, соответствующее M_{\max} , и размеры двутавровых балок, если $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$, $l = 10 \text{ м}$, $a = 4 \text{ м}$, $d = 2 \text{ м}$, вес

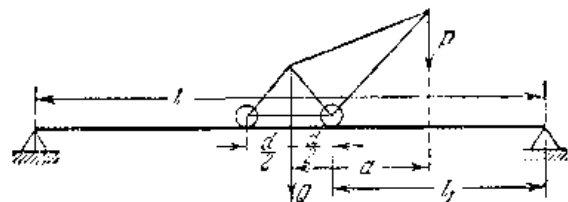


Рис. 96.

крана $Q = 4 \text{ т}$ и груз, поднимаемый краном, $P = 0,8 \text{ т}$. Нагрузки расположены посередине между двумя балками и распределяются поровну между ними.

Решение. Наибольший изгибающий момент будет под правым колесом, когда расстояние этого колеса от правой опоры равняется $l_1 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{1}{6} d \right)$;

$M_{\max} = 1\,121\,000 \text{ кгсм}$. Считая, что момент поровну распределяется между двумя балками, находим необходимый момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = 400 \text{ см}^3.$$

Нужно взять двутавровую балку № 27а с площадью поперечного сечения $43,2 \text{ см}^2$ и моментом сопротивления $W_z = 407 \text{ см}^3$.

7. Круглая деревянная балка, опертая в точке С и прикрепленная к основанию в точке А (рис. 97), несет нагрузку $q = 400 \text{ кг/м}$, равномерно распределенную на части ВС. Построить эпюру изгибающих моментов и определить необходимый диаметр d , если $[\sigma] = 80 \text{ кг/см}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

Решение. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 97, б. Численно наибольший изгибающий момент будет в точке С и равняется $80\,000 \text{ кгсм}$. Тогда из уравнения (63) получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M}{\pi [\sigma]}} \approx 22 \text{ см.}$$

8. Деревянная плотина состоит из горизонтальных досок, поддерживаемых вертикальными стойками, заделанными нижним концом (рис. 98). Определить раз-

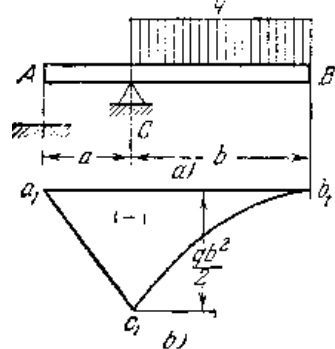


Рис. 97.

меры квадратного поперечного сечения стоек, если $l = 2 \text{ м}$, $d = 1 \text{ м}$ и $[\sigma] = 40 \text{ кг/см}^2$. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Решение. Полное боковое давление H на одну стойку представлено весом трехгранной призмы ABC воды. В каком-либо сечении mn поперечная сила и изгибающий момент будут

$$Q = -\frac{Hx^2}{2}, \quad M = -\frac{Hx^2}{2} \frac{x}{3}.$$

При определении знаков Q и M предполагается, что рис. 98 повернут на 90° против часовой стрелки, так что оси x и y совпадают с теми же осями рис. 61. Необходимый размер b найдется из уравнения (63)

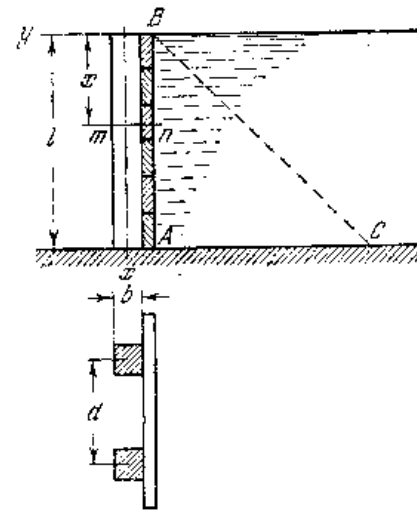


Рис. 98.

$$W_z = \frac{b^3}{6} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1 \cdot 2^2}{2} \frac{2 \cdot 100\,000}{3 \cdot 40},$$

откуда $b = 27,1 \text{ см}$.

Построение эпюр предоставляется читателю.

9. Определить необходимые размеры консольной балки двутаврового сечения, которая несет равномерную нагрузку $q = 200 \text{ кг/м}$

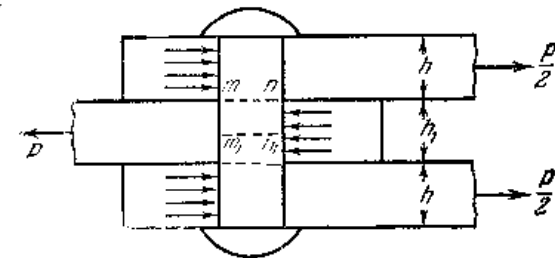


Рис. 99.

и сосредоточенную нагрузку $P = 300 \text{ кг}$ на конце, если длина $l = 1,5 \text{ м}$ и $[\sigma] = 1400 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $W_z = \frac{(300 \cdot 1,5 + \frac{200 \cdot 1,5^2}{2}) \cdot 100}{1400} = 48,2 \text{ см}^3.$

Необходимо взять двутавровое сечение № 12 с моментом сопротивления $W_z = 58,4 \text{ см}^3$.

10. Определить напряжения от изгиба в заклепке, предполагая, что силы, действующие на заклепку, распределяются, как указано на рис. 99. Диаметр заклепки $d = 2 \text{ см}$, $h = 0,6 \text{ см}$, $h_1 = 1 \text{ см}$, $P = 4 \text{ т}$.

Решение. Изгибающий момент в поперечном сечении mn равняется $\frac{P}{2} \frac{h}{2}$. Изгибающий момент в среднем поперечном сечении m_1n_1 равняется

$$\frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right).$$

Этот последний момент является наибольшим, и его нужно принять для вычисления напряжений. Тогда

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right) \cdot \frac{\pi d^3}{32} = \frac{4P}{\pi d^3} \frac{2h + h_1}{4} = 1400 \text{ кг/см}^2.$$

11. Определить необходимые моменты сопротивления и необходимые размеры балок двутаврового сечения для случаев, показанных на рис. 72, а, 72, с и 73, б, приняв допускаемое напряжение равным 1600 кг/см^2 .

Ответ. $W_1 = 64 \text{ см}^3$, $W_2 = 88 \text{ см}^3$; $W_3 = 262 \text{ см}^3$. Необходимо взять соответственно следующие номера профилей: 14, 16 и 24.

12. Определить необходимый момент сопротивления и необходимые размеры свободно лежащей балки двутаврового сечения, несущей равномерную нагрузку 400 кг/м и сосредоточенную нагрузку $P = 4 \text{ т}$ в середине пролета. Длина балки $l = 5 \text{ м}$ и допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $W_z = 390 \text{ см}^3$. Необходимо взять двутавровое сечение № 27а с моментом сопротивления $W_z = 407 \text{ см}^3$.

13. Швеллер с поперечным сечением, показанным на рис. 89, свободно опирается на концах и несет сосредоточенную нагрузку посередине пролета. Вычислить наибольшее значение нагрузки, которую балка может нести, если допускаемое напряжение на растяжение равно 70 кг/см^2 и на сжатие — 140 кг/см^2 , $t = 5 \text{ см}$, $h = 25 \text{ см}$, $b = 60 \text{ см}$ и длина $l = 3 \text{ м}$.

Ответ. $P = 2780 \text{ кг}$.

26. Касательные напряжения при изгибе

В предыдущем параграфе было указано, что когда балка изгибается поперечными нагрузками, то в каком-либо поперечном сечении mn балки (рис. 100) возникают не только нормальные напряжения σ_x , но также и касательные напряжения τ . Рассматривая правую часть балки (рис. 100), мы можем заключить из условий

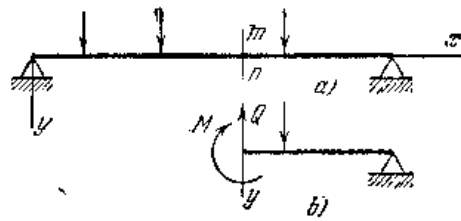


Рис. 100.

равновесия, что величина этих касательных напряжений такова, что их сумма дает поперечную силу Q . При исследовании закона распределения этих касательных напряжений по площади поперечного сечения мы начнем с простого случая прямоугольного поперечного сечения $mnop$ (рис. 101). В этом случае естественно предположить, что касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения параллельно поперечной силе Q , т. е. параллельно сторонам mn поперечного сечения. Мы обозначаем в этом случае напряжения через τ_{yx} . Значок y при τ_{yx} указывает на то, что касательное напряжение параллельно оси y , а значок x , что напряжение действует в плоскости, перпендикулярной оси x . В качестве второго допущения предполагаем равномерное распределение касательных напряжений по ширине балки cc_1 . Эти два допущения дают возможность найти закон распределения касательных напряжений. Более точное исследование поставленной задачи показывает, что резуль-

таты, получаемые путем приближенного решения, достаточно точны и для узкого прямоугольника (h велико по сравнению с b , рис. 101) практически совпадают с результатами точного решения¹⁾.

Если из балки вырезать двумя смежными поперечными сечениями и двумя смежными плоскостями, параллельными нейтральному слою, элемент $acdea_1c_1d_1e_1$ (рис. 101, б), то, согласно нашим допущениям, по вертикальной грани acc_1a_1 имеем равномерное распределение касательных напряжений τ_{yx} . Эти напряжения дают момент $(\tau_{yx} b dy) dx$ относительно нижнего заднего ребра ee_1 , элемента, который должен уравниваться моментом $(\tau_{xy} b dx) dy$ от

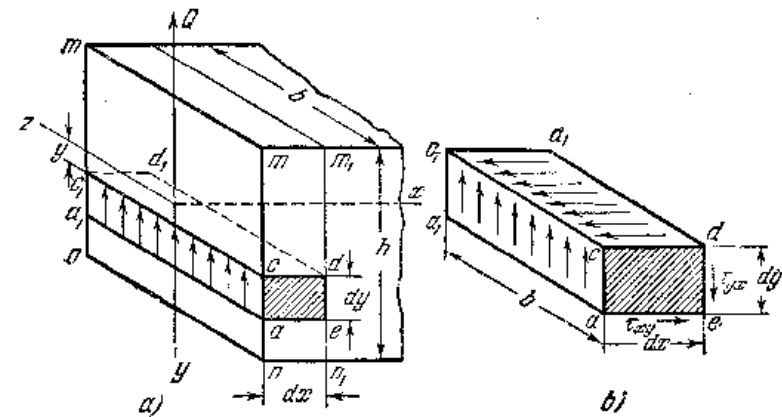


Рис. 101.

касательных напряжений, распределенных по горизонтальной грани cdd_1c_1 элемента. Тогда

$$\tau_{yx} b dy dx = \tau_{xy} b dx dy \quad \text{и} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy},$$

т. е. касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным граням элемента, равны между собой²⁾. Тот же вывод был сделан прежде, при простом растяжении (см. стр. 40), а также при растяжении или сжатии по двум перпендикулярным направлениям (см. стр. 45).

Существование касательных напряжений в плоскостях, параллельных нейтральному слою, можно показать на простом опыте. Возьмем два равных прямоугольных бруса, положенных вместе

¹⁾ Точное решение этой задачи принадлежит St.-Venant'у, J. math. (Ljouville), 1856. Оценка этой знаменитой работы St.-Venant'a дана Гольдхунтер и Персон, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, 1886—1893. Приближенное решение, данное в этом параграфе, принадлежит Журавскому. Французский перевод этой работы см. Appl. ponts et chaussées, 1856. Точная теория показывает, что когда высота балки мала по сравнению с шириной, разница между точной и приближенной теориями становится значительной.

²⁾ Мы рассматриваем здесь только абсолютное значение этих напряжений.

свободно на опорах, как показано на рис. 102, и изгибаемых сосредоточенной нагрузкой P . Если нет трения между брусками, то изгиб каждого бруса будет происходить независимо от другого; каждый будет иметь сжатие верхних и растяжение нижних продольных волокон, и они примут вид, показанный на рис. 102, *b*. Нижние продольные волокна верхнего бруса скользят по верхним волокнам нижнего бруса. В цельном бруске высотой $2h$ (рис. 102, *a*) по нейтральному слою mn должны появиться касательные напряжения такой величины, чтобы они смогли помешать скольжению верхней части бруса относительно нижней, как показано¹⁾ на рис. 102, *b*. Благодаря такому воспрепятствованию скольжению один брусок высотой $2h$ гораздо жестче и прочнее, чем два бруска, каждый высотой h . Для того чтобы помешать скольжению, на практике иногда

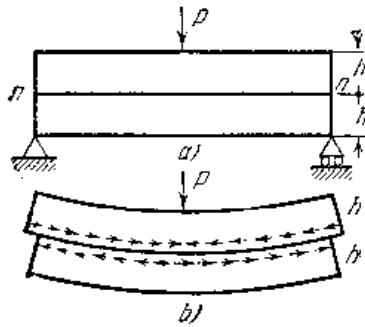


Рис. 102.

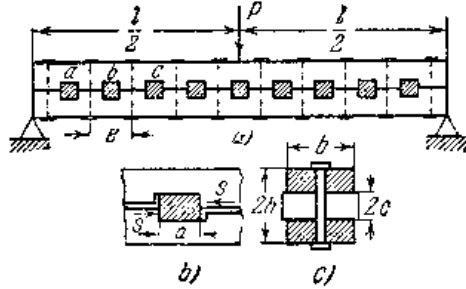


Рис. 103.

применяют в составных деревянных балках шпонки, подобно *a, b, c, ...* (рис. 103, *a*). Наблюдения над зазорами у шпонок (рис. 103, *b*) дают возможность определить направление скольжения в случае составной балки и, следовательно, направление касательных напряжений, действующих по нейтральному слою в цельной балке²⁾.

Преыдушие рассуждения показывают, что касательные напряжения τ_{xy} в какой-либо точке поперечного сечения действуют в плоскости сечения и численно равны горизонтальным касательным напряжениям τ_{yx} , действующим в плоскости, параллельной нейтральному слою и проходящей через ту же точку. Это последнее напряжение легко может быть вычислено из условия равновесия элемента $pp_1n_1n_2$, вырезанного из балки двумя смежными поперечными сечениями mn и m_1n_1 и плоскостью pp_1 , параллельной нейтральному слою (рис. 104, *a*) и (104, *b*). Воздействиями на этот эле-

1) Верхний ряд стрелок указывает действие нижней половины балки на верхнюю половину, нижний ряд стрелок показывает действие верхней половины балки на нижнюю.

2) О расчете составных деревянных балок см. статью F. Stussi, Schwere Notbrücke mit verdübelten Balken, Gesellschaft für militärische Bautechnik, Zürich.

мент в направлении оси x , будут касательные напряжения τ_{xy} по грани pp_1 и нормальные напряжения σ_x по граням pn и p_1n_1 . Если изгибающие моменты в поперечных сечениях mn и m_1n_1 равны, т. е. в случае чистого изгиба, то нормальные напряжения σ_x по граням pn и p_1n_1 будут равны и взаимно уравновесятся. Тогда касательные напряжения τ_{xy} будут равны нулю.

Рассмотрим теперь более общий случай переменного изгибающего момента, обозначая через M и $M+dM$ соответственно моменты в поперечных сечениях mn и m_1n_1 . Тогда нормальное усилие, дейст-

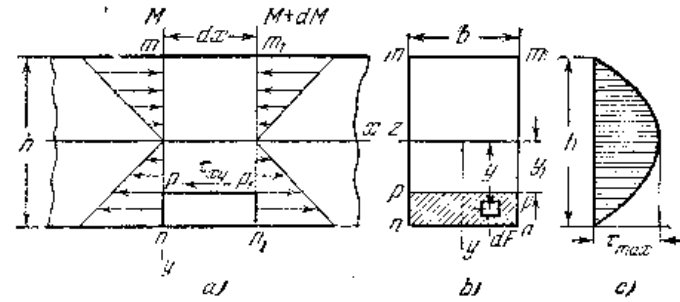


Рис. 104.

вующее на элементарную площадку dF грани $pp_1n_1n_2$, будет (уравнение (57)).

$$\sigma_x dF = \frac{My}{J_z} dF.$$

Сумма всех этих усилий, распределенных по грани $pp_1n_1n_2$ элемента, равняется

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{J_z} dF. \tag{a}$$

Таким же образом сумма нормальных усилий, действующих по грани $p_1r_1r_2n_2$, равняется

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{J_z} dF. \tag{b}$$

Равнодействующая касательных напряжений τ_{xy} , действующих по верхней грани pp_1 элемента, равняется

$$\tau_{xy} b dx. \tag{c}$$

Усилия, определяемые уравнениями (a), (b) и (c), должны удовлетворять уравнению $\sum X=0$, поэтому

$$\tau_{xy} b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{J_z} dF - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{J_z} dF,$$

откуда

$$\tau_{xy} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{bJ_z} \int_{y_1}^{h/2} y dF,$$

или, пользуясь уравнением (50), получаем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{bJ_z} \int_{y_1}^{h/2} y dF. \quad (64)$$

В этом уравнении интеграл представляет выражение для статического момента заштрихованной части поперечного сечения, рис. 104, б, относительно нейтральной оси z . Для рассматриваемого прямоугольного сечения

$$dF = b dy,$$

и интеграл получается

$$\int_{y_1}^{h/2} by dy = \left| \frac{by^2}{2} \right|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (d)$$

Тот же результат можно получить умножением площади $b \left[\left(\frac{h}{2} \right) - y_1 \right]$ заштрихованной части на расстояние

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right) + y_1 \right]$$

ее центра тяжести от нейтральной оси.

Подставляя (d) в уравнение (64), получаем для прямоугольного сечения

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (65)$$

Видно, что касательные напряжения неравномерно распределяются по площади поперечного сечения. Наибольшее значение τ_{xy} получается при $y_1 = 0$, т. е. для точек, расположенных по нейтральной оси. Из уравнения (65) получаем

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{Qh^2}{8J_z}$$

или, так как $J_z = \frac{bh^3}{12}$,

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}. \quad (66)$$

Итак, наибольшее касательное напряжение в балке прямоугольного поперечного сечения на 50% больше среднего значения касательного

напряжения, полученного путем деления величины поперечной силы на площадь поперечного сечения.

В предыдущем выводе мы брали элемент ppr, n_1 из нижней части балки. Тот же результат получится, если взять элемент из верхней части балки.

Для верхних и нижних точек поперечного сечения $y_1 = \pm \frac{h}{2}$ и уравнение (65) дает $\tau_{xy} = 0$. График уравнения (65) (рис. 104, c) показывает, что касательные напряжения изменяются по высоте балки по параболическому закону. Заштрихованная площадь, ограниченная параболой и умноженная на ширину b балки, дает $\frac{2}{3} (\tau_{xy})_{\max} hb = Q$, как это и должно быть.

Естественным следствием действия касательных напряжений является сдвиг, который заставляет поперечные сечения, первоначально плоские, искривляться. Это искривление можно легко продемонстрировать путем изгиба приложенной на конце силой прямоугольного бруска из резины (рис. 105),

на боковых гранях которого нанести предварительные линии. После изгиба линии не остаются прямыми, как указано пунктиром, а искривляются, так что наибольший сдвиг имеет место около нейтрального слоя. В точках m', m_1', n', n_1' сдвига нет, и в этих точках касательные к кривым $m'n'$ и $m_1'n_1'$ останутся нормальными к верхней и нижней поверхностям бруска и после изгиба. У нейтрального слоя углы между касательными к кривым $m'n'$ и $m_1'n_1'$ и нормальными сечениями равны $\gamma = (\tau_{xy})_{\max} / G$. Пока поперечная сила остается постоянной по длине балки, искривление всех поперечных сечений будет одинаково, так что $mm' = m_1m_1', nn' = n_1n_1'$, и не будет влиять на деформации растяжения или сжатия продольных волокон, вызываемые изгибающим моментом. Это обстоятельство объясняет законность применения здесь уравнения (57), которое было выведено для чистого изгиба и основано на допущении, что поперечные сечения бруса остаются плоскими при изгибе.

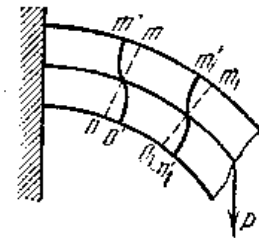


Рис. 105.

Более точное исследование задачи¹⁾ показывает, что в случае, если на балку действует распределенная нагрузка и, следовательно, величина поперечной силы непрерывно меняется по длине балки, то искривление поперечных сечений также не оказывает существенного влияния на деформации продольных волокон от действия

¹⁾ См. W. Voigt, Göttingen Abhandl., т. 34, 1887; J. H. Michell, Quart. J. Math., т. 32, стр. 63, 1901; L. N. G. Filon, Trans. Roy. Soc. (London) A, т. 201, 1903, и Proc. Roy. Soc. (London), т. 72, 1904. См. также Th. Kármán, Abhandl. Aerodyn. Inst., Tech. Hochschule (Aachen), т. 7, 1927.

изгибающего момента. В случае сосредоточенных грузов распределение напряжений вблизи точек приложения грузов следует более сложному закону, но это отклонение от прямолинейного закона имеет местное значение (см. том II).

ЗАДАЧИ

1. Определить предельные значения грузов P , действующих на деревянную прямоугольную балку (рис. 106), если $b = 20$ см, $h = 25$ см, $[\sigma] = 60$ кг/см², $[\tau] = 15$ кг/см², $c = 0,5$ м.

Решение. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил даны на рисунке 106.

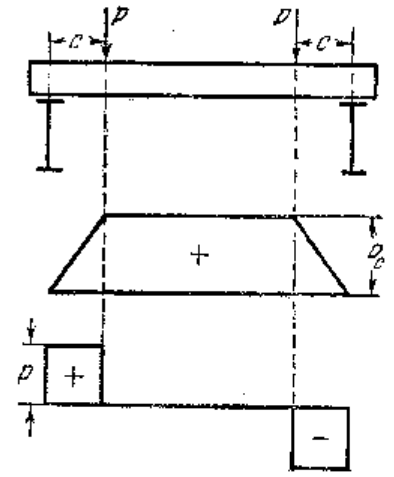
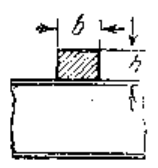


Рис. 106.



$$Q_{\max} = P, \quad M_{\max} = Pc.$$

Из уравнений

$$\frac{Pc}{W_z} = [\sigma] \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = [\tau]$$

получаем

$$P = 2500 \text{ кг} \quad \text{и} \quad P = 5000 \text{ кг}.$$

Следовательно, $P = 2500$ кг есть предельное значение груза.

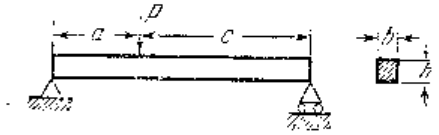


Рис. 107.

2. Определить наибольшее нормальное и наибольшее касательное напряжения в балке, изображенной на рис. 107, если $a = 0,6$ м, $c = 1,2$ м, $b = 20$ см, $h = 25$ см и $P = 2,5$ т.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = 48$ кг/см² и $(\tau_{xy})_{\max} = 5$ кг/см².

3. Определить наибольшее касательное напряжение, действующее по нейтральному слою равномерно нагруженной балки, если длина балки $l = 2$ м, нагрузка на погонный метр $q = 1300$ кг/м, высота поперечного сечения $h = 25$ см и ширина $b = 20$ см.

Ответ. $\tau_{\max} = 3,9$ кг/см².

4. Определить наибольшее касательное напряжение в вертикальных брусках AB задачи 2 параграфа 25.

27. Распределение касательных напряжений в случае кругового поперечного сечения

При выводе закона распределения напряжений по круговому сечению (рис. 108) нет никакого основания предполагать, что касательные напряжения все параллельны поперечной силе Q . В самом деле, мы можем легко показать, что в точках p и n контура поперечного сечения касательные напряжения направлены по касатель-

ной к контуру. Рассмотрим бесконечно малый элемент $abcd$ (рис. 108, *а*) в форме прямоугольного параллелепипеда с гранью $adfg$ на поверхности балки и гранью $abcd$ в плоскости yz поперечного сечения. Если касательное напряжение, действующее по грани $abcd$ элемента, имеет направление τ , то оно может быть разложено на два составляющих: τ_{xy} в радиальном направлении и τ_{xz} в направлении по касательной к контуру. На основании условий равновесия прежде было доказано (см. стр. 103), что если по какой-либо элементарной площадке действует касательное напряжение τ , то по элементарной площадке, перпендикулярной к данной, будет действовать такое же касательное напряжение. Применяя этот вывод в данном случае, мы должны заключить, что если на элементе $abcd$ в радиальном направлении действует касательное напряжение τ_{xy} , то должно действовать касательное напряжение, равное τ_{xy} , и по грани $adfg$ элемента, совпадающей с поверхностью балки. Если боковая поверхность свободна от касательных напряжений, то радиальная составляющая τ_{xy} касательного напряжения τ должна быть равна нулю, т. е. τ должно быть направлено по касательной к контуру поперечного сечения балки. В середине n хорды pp симметрия требует, чтобы касательное напряжение имело направление поперечной силы Q . Тогда направления касательных напряжений в точках p и n будут пересекаться в некоторой точке O на оси y (рис. 108, *б*). Полагая теперь, что касательное напряжение в какой-либо другой точке линии pp также направлено к точке O , имеем вполне определенные направления касательных напряжений. В качестве второго допущения принимаем, что вертикальные составляющие касательных напряжений для всех точек линии pp одинаковы¹⁾. Так как это допущение вполне совпадает с тем, что было сделано в случае прямоугольного поперечного сечения, то можем воспользоваться для вычисления этой составляющей уравнением (64). В этом случае b означает длину хорды pp . Зная направление полного касательного напряжения и его вертикальную составляющую, можем легко вычислить его величину для любой точки поперечного сечения.

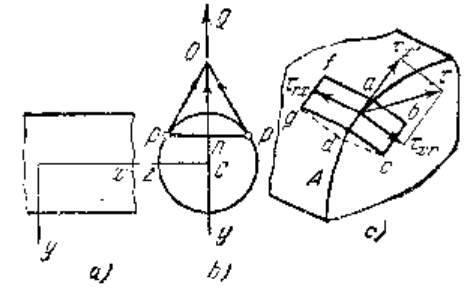


Рис. 108.

¹⁾ Приближенная теория, основанная на двух вышеуказанных допущениях, дает удовлетворительную точность, и сравнение с точной теорией показывает, что ошибка в величине наибольшего касательного напряжения составляет около 5%, что невелико для практических приложений. См. St. Venant, цитир. на стр. 103. См. также А. Е. Н. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4 изд., стр. 346, 1927.

Вычислим теперь величину касательных напряжений по линии pp поперечного сечения (рис. 109). Для того чтобы применить уравнение (64) к определению вертикальной составляющей τ_{yx} этих напряжений, нужно найти статический момент площади кругового сегмента, ограниченного линией pp , относительно оси z . Элементарная полоска mn имеет длину $2\sqrt{R^2 - y^2}$ и ширину dy . Площадь равна $dF = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$. Момент этой полоски относительно Cz есть $y dF$ и полный момент всего сегмента равен

$$\int_{y_1}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} y dy = \frac{2}{3} (R^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя это в уравнение (64) и принимая b равным $2\sqrt{R^2 - y_1^2}$, получаем значение вертикальной составляющей касательного напряжения

$$\tau_{yx} = \frac{Q(R^2 - y_1^2)}{3J_z}, \quad (67)$$

и полное касательное напряжение в точках p (рис. 109) равняется

$$\tau = \frac{\tau_{yx} R}{\sqrt{R^2 - y_1^2}} = \frac{QR\sqrt{R^2 - y_1^2}}{3J_z}.$$

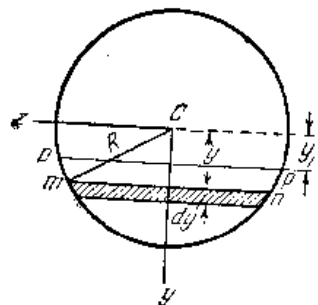


Рис. 109.

Отсюда видно, что максимум τ получается при $y_1 = 0$, т. е. у нейтральной оси поперечного сечения. Тогда, подставляя $J_z = \frac{\pi R^4}{4}$, получим

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}. \quad (68)$$

Следовательно, в случае кругового поперечного сечения наибольшее касательное напряжение на 33% больше среднего значения, полученного путем деления поперечной силы на площадь поперечного сечения.

28. Распределение касательных напряжений в двутавровых балках

При выводе закона распределения касательных напряжений в стенке двутавровой балки (рис. 110) делаются те же допущения, что и для прямоугольного поперечного сечения, а именно, что касательные напряжения параллельны поперечной силе Q и равномерно распределяются по толщине b_1 стенки. Тогда для вычисления напряжений τ_{xy} можно воспользоваться уравнением (64). Для то-

чек линии pp , отстоящих на расстоянии y_1 от нейтральной оси, где ширина поперечного сечения равна b_1 , момент заштрихованной части относительно нейтральной оси z равняется

$$\int_{y_1}^{h/2} y dF = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right).$$

Подставляя в уравнение (64), получаем

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right]. \quad (69)$$

Отсюда видно, что напряжения τ_{yx} изменяются по высоте балки по параболическому закону. Наибольшее и наименьшее значения τ_{yx} в стенке балки получаются подстановкой в уравнение (69) $y_1 = 0$ и $y_1 = \frac{h_1}{2}$:

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right], \quad (70)$$

$$(\tau_{yx})_{\min} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right). \quad (71)$$

Когда b_1 очень мало по сравнению с b , то нет большой разницы между $(\tau_{yx})_{\max}$ и $(\tau_{yx})_{\min}$ и практически можно считать, что касательные напряжения по площади поперечного сечения стенки распределяются равномерно.

Хорошее приближение для $(\tau_{yx})_{\max}$ получается путем деления полной поперечной силы Q на площадь поперечного сечения только одной стенки. Это следует из того, что касательные напряжения, распределенные по поперечному сечению стенки, дают силу, которая почти равна Q , что означает, что стенка воспринимает почти всю поперечную силу, а полки — лишь незначительную часть ее. Чтобы доказать это, вычислим сумму

$$Q_1 = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \tau_{yx} b_1 dy.$$

Подставляя выражение (69) вместо τ_{yx} , получаем

$$Q_1 = \frac{Q}{b_1 J_z} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right] b_1 dy$$

и после интегрирования находим

$$Q_1 = \frac{Q}{J_z} \left[\frac{b(h - h_1)h + h_1 h_1}{2} + \frac{b_1 h_1^3}{12} \right]. \quad (a)$$

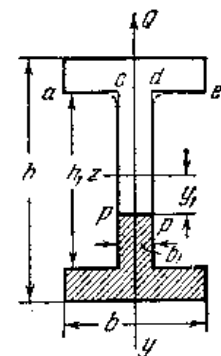


Рис. 110.

Для малой толщины полков, т. е. когда h_1 приближается к h , момент инерции J_z с достаточной точностью выражается уравнением

$$J_z = \frac{b(h-h_1)(h+h_1)^2}{2} + \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad (b)$$

в котором первый член представляет площадь поперечного сечения полков, умноженную на квадрат расстояния $(h+h_1)/4$ их центра тяжести до оси z , что приблизительно равно моменту инерции площади поперечного сечения полков. Второй член есть момент инерции площади поперечного сечения стенки. Сравнивая (a) и (b), мы видим, что, когда h_1 приближается к h , сила Q_1 по величине приближается к Q и, следовательно, поперечная сила будет восприниматься почти только одной стенкой.

При выводе закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению полков не может быть сделано допущение, что напряжения не изменяются по ширине сечения. Например, на уровне ae (рис. 110) по нижней грани полки ac и de касательные напряжения τ_{yx} должны быть равны нулю, так как соответственно равны им напряжения τ_{yx} на свободной нижней поверхности полки равны нулю (см. стр. 105, а также рис. 108, c). Однако в части cd касательные напряжения не равны нулю, но имеют значения, вычисленные выше для $(\tau_{yx})_{\min}$ в стенке. Это указывает на то, что в месте cd , при сопряжении стенки и полки, распределение касательных напряжений следует более сложному закону, чем можно вывести на основании элементарного анализа. Для того чтобы уменьшить концентрацию напряжений в точках c и d , острые углы обычно заменяют выкружками, как указано на рисунке 110 пунктирными линиями. Более подробное исследование распределения касательных напряжений в полках будет дано ниже (см. том II).

ЗАДАЧИ

1. Определить $(\tau_{yx})_{\max}$ и $(\tau_{yx})_{\min}$ в поперечном сечении стенки двутавровой балки (рис. 110), если $b=12$ см, $b_1=1,2$ см, $h=30$ см, $h_1=26$ см, $Q=12$ т. Определить часть поперечной силы Q_1 , воспринимаемую стенкой.

Ответ. $(\tau_{yx})_{\max} = 390$ кг/см², $(\tau_{yx})_{\min} = 300$ кг/см², $Q_1 = 0,94 Q$.

2. Определить наибольшее касательное напряжение в стенке тавровой балки (рис. 111), если $h=20$ см, $h_1=17,5$ см, $b=10$ см, $b_1=2,5$ см и $Q=400$ кг.

Ответ. Пользуясь методом, принятым для двутавровой балки, находим $(\tau_{yx})_{\max} \approx 11,5$ кг/см².

3. Определить наибольшее касательное напряжение в задачах 1 и 6 параграфа 25. Применить балку двутаврового сечения и предположить, что вся поперечная сила равномерно распределяется по поперечному сечению стенки.

4. Определить наибольшее касательное напряжение в швеллере задачи 2 стр. 95, если $Q=4,8$ т.

Ответ. $(\tau_{yx})_{\max} \approx 23,4$ кг/см².

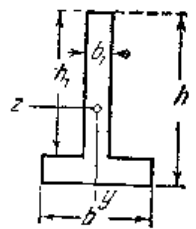


Рис. 111.

29. Главные напряжения при изгибе

При помощи уравнений (57) и (64) можно вычислить нормальное напряжение σ_x и касательное напряжение τ_{xy} для любой точки поперечного сечения, если известны изгибающий момент M и поперечная сила Q для этого сечения. Наибольшее численное значение σ_x будет в волокне, наиболее удаленном от нейтральной оси, и наибольшее значение τ_{xy} — обычно у нейтральной оси. В большинстве случаев при проектировании пользуются лишь наибольшими значениями σ_x и τ_{xy} , полученными приведенным выше способом, и размеры поперечных сечений балок принимают такими, чтобы удовлетворить условиям

$$(\sigma_x)_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{и} \quad (\tau_{xy})_{\max} \leq [\tau].$$

Здесь предполагается, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию и что $[\sigma]$ имеет одно значение. В противном случае условия прочности при растяжении и сжатии должны быть удовлетворены отдельно, и тогда получаем

$(\sigma_x)_{\max} \leq [\sigma]$ при растяжении; $|(\sigma_x)_{\min}| \leq [\sigma]$ при сжатии.

Однако имеются случаи, когда необходимо сделать более подробный анализ напряжений и вычислить главные напряжения. Покажем такое вычисление для балки, свободно опертой и нагруженной посередине (рис. 112). Для точки A , лежащей ниже нейтральной оси в поперечном сечении mn , величины напряжений σ_x и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ определяются по уравнениям (57) и (64). На рис. 112, b эти напряжения показаны действующими на бесконечно малый элемент, вырезанный из балки у точки A ; их значения легко определяются по значениям M и Q . Для бесконечно малого элемента можно пренебречь изменениями напряжений σ_x и τ_{xy} в различных точках, и можно допустить, что элемент находится в однородном напряжен-

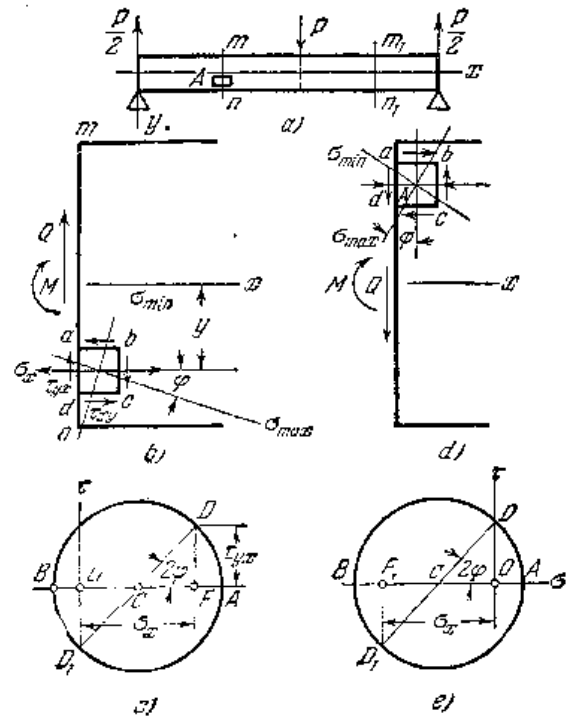


Рис. 112.

ном состоянии, т. е. что величины σ_x и τ_{xy} постоянны по всем граням элемента. Такое напряженное состояние элемента конечных размеров изображено на рис. 40, а.

Из предыдущих выводов (см. стр. 47) мы знаем, что напряжения по граням элемента, вырезанного из напряженного тела, изменяются с изменением направления этих граней и что можно так повернуть элемент, что будут существовать лишь нормальные напряжения (см. стр. 50). Такие направления граней называются главными направлениями, а соответствующие напряжения — *главными напряжениями*. Значения этих напряжений в данном случае можно найти из уравнений (31) и (32) подстановкой в эти уравнения $\sigma_y = 0$. Тогда мы получим

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (72)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (73)$$

Необходимо заметить, что σ_{\max} — растягивающее напряжение, а σ_{\min} — сжимающее. Зная главные напряжения, наибольшее касательное напряжение в любой точке получим из уравнения (34) (см. стр. 51):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (74)$$

Для определения направлений главных напряжений можно воспользоваться кругом Мора. Для элемента у точки A (рис. 112, б) соответствующий круг Мора показан на рис. 112, с. Взяв расстояние $\overline{OF} = \sigma_x$ и $\overline{DF} = \tau_{xy}$, получим точку D , определяющую напряжения, действующие по граням bc и ad элемента. Отрезок \overline{OF} отложен в положительном направлении σ , \overline{DF} вверх, так как σ_x есть растягивающее напряжение, а касательные напряжения τ_{xy} , действующие по граням bc и ad , дают пару, вращающую по часовой стрелке (см. стр. 71). Точка D_1 определяет напряжения, действующие по граням ab и dc элемента, по которым нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения отрицательны. Окружность, построенная на диаметре DD_1 , определяет $\sigma_{\max} = \overline{OA}$ и $\sigma_{\min} = -\overline{OB}$. Из того же построения определяется угол 2φ , и направление σ_{\max} на рис. 112, б получается измерением φ от оси x по направлению движения часовой стрелки. Конечно, σ_{\min} перпендикулярно σ_{\max} .

Взяв сечение m_1n_1 справа от груза P (рис. 112, а) и рассмотрев точку A , расположенную выше нейтральной оси, найдем, что напряжения, действующие на элемент $abcd$ у точки A , будут направлены так, как указано на рис. 112, д. Соответствующий круг Мора показан на рис. 112, е. Точка D определяет напряжения для граней ab и cd элемента $abcd$ и точка D_1 — напряжения по граням ad и bc .

Угол φ , определяющий направление σ_{\max} , должен быть измерен по направлению движения часовой стрелки от внешней нормали к грани ab или cd , как показано на рис. 112, д.

Если возьмем точку на нейтральном слое, то σ_x получается равным нулю. Элементу у этой точки будет находиться в состоянии чистого сдвига. Главные напряжения будут направлены под углом 45° к осям x и y .

Можно построить две системы ортогональных кривых, касательные к которым в любой точке будут иметь направления главных напряжений в этой точке. Такие кривые называются *траекториями напряжений*. Рис. 113 показывает траектории напряжений для консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной на конце. Все эти кривые пересекают нейтральный слой под углом 45° и имеют горизонтальное и вертикальное направление в точках, где касательные напряжения τ_{xy} равны нулю, т. е. у верхней и нижней

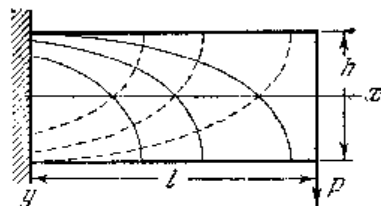


Рис. 113.

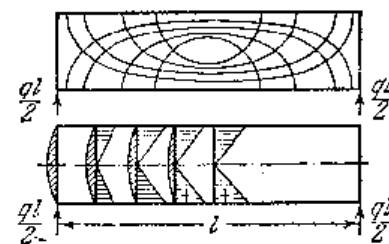


Рис. 114.

поверхностей балки. Траектории, дающие направления $(\sigma_x)_{\max}$ (растяжение), изображены сплошными линиями, а пунктирные траектории определяют направления σ_{\min} . На рис. 114 изображены траектории и эпюры распределения напряжений для σ_x и τ_{xy} по нескольким поперечным сечениям свободно опертой прямоугольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Ясно видно, что σ_x имеет наибольшее значение в середине, где изгибающий момент M является наибольшим, а τ_{xy} — наибольшее на опорах, где действует наибольшая поперечная сила¹⁾.

При проектировании балок имеет значение численно наибольшая величина σ . Из уравнения (72) можно видеть, что для наиболее удаленных растянутых волокон, где сдвига нет, продольное нормальное напряжение σ_x становится главным напряжением, т. е. $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_{\max}$. Для волокон, близких к нейтральной оси, продольные напряжения σ_x меньше, чем для крайних волокон. Однако здесь действует еще касательное напряжение τ_{xy} , и напряжения σ_x и τ_{xy} , действующие вместе в этой точке, могут дать главное напряжение,

¹⁾ Несколько примеров построения траекторий напряжений разобрано L. Wagner' ом Z. Österr. Ing. u. Architekt. Ver., стр. 615, 1911.

определяемое уравнением (72), которое численно может быть больше напряжения в крайнем волокне. В балках прямоугольного или круглого поперечных сечений, в которых касательное напряжение τ_{xy} изменяется постепенно по высоте балки, этого обычно не бывает, и напряжение $(\sigma_x)_{\max}$, вычисленное для наиболее удаленного волокна в сечении с наибольшим изгибающим моментом, есть наибольшее напряжение, действующее в балке. Однако в некоторых балках, например, двутаврового сечения, в которых происходит резкое изменение величины касательного напряжения в месте сопряжения полки и стенки (см. стр. 111) главное напряжение, вычисленное в этом месте из уравнения (72), может быть больше напряжения $(\sigma_x)_{\max}$ в наиболее удаленном волокне и должно быть принято в расчет при проектировании. Для иллюстрации рассмотрим представленную на рис. 112, а балку двутаврового сечения с теми же размерами, как и в задаче 1-й, стр. 112, и при этом длина пролета $l = 0,6$ м и $P = 24$ т. Тогда $M_{\max} = 360\,000$ кг см и $Q_{\max} = 12$ т. По формуле (57) растягивающее напряжение в наиболее удаленном волокне равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{360\,000 \cdot 15}{11\,200} = 482 \text{ кг/см}^2.$$

Для точки в месте сопряжения полки и стенки получаем следующие значения нормального и касательного напряжений:

$$\sigma_x = \frac{482 \cdot 26}{30} = 417,7 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_{xy} = 300 \text{ кг/см}^2.$$

Тогда из уравнения (72) главное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = 575 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда видно, что σ_{\max} в месте сопряжения полки и стенки больше растягивающего напряжения наиболее удаленного волокна, и поэтому оно должно быть принято при проектировании.

ЗАДАЧИ

1. Определить σ_{\max} и σ_{\min} в точке, находящейся на 5 см ниже нейтральной оси, в сечении, отстоящем на 1 м от нагруженного конца консоли (рис. 113), если высота $h = 20$ см, ширина $b = 10$ см и $P = 800$ кг. Определить угол между направлением σ_{\max} в этой точке и осью x .

Ответ. $\sigma_x = -60$ кг/см², $\tau_{xy} = 4,5$ кг/см², $\sigma_{\max} = 0,34$ кг/см², $\sigma_{\min} = -60,34$ кг/см². Угол между направлением σ_{\max} и осью x равняется $85^\circ 44'$, считая по направлению движения часовой стрелки.

2. Определить σ_{\max} и σ_{\min} на нейтральной оси в поперечном сечении, отстоящем на 0,3 м от левой опоры, для балки прямоугольного сечения, равномерно нагруженной и свободно опертой по концам (рис. 114). Размеры поперечного сечения те же, что и в предыдущей задаче: $q = 1300$ кг/м, $l = 3$ м.

Ответ. $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = 11,7$ кг/см².

3. Определить длину двутавровой балки, рассмотренной на стр. 116, при которой $(\sigma_x)_{\max}$ будет равняться σ_{\max} в месте сопряжения полки и стенки.

Ответ. $l = 102$ см.

30. Напряжения в составных балках

В инженерной практике часто применяют составные балки, и напряжения в них обычно рассчитывают в предположении, что их части жестко соединены. Тогда расчет будет заключаться в: а) проектировании балки, как цельной балки, и б) проектировании и расположении элементов, которые соединяют части балки. В первом случае применяются формулы для цельных балок, а влияние ослаблений заклепочными и болтовыми отверстиями, прорезами для шпонок и т. д. учитывается путем уменьшения сечений. Проиллюстрируем теперь расчет шпонок и заклепок.

Рассмотрим сначала составную деревянную балку, показанную на рис. 103. Предполагается, что шпонки, поставленные между двумя брусками, составляющими балку, достаточно прочны для того, чтобы сопротивляться срезающим усилиям S (рис. 103, б). Тогда для определения величины σ_x можно будет применить уравнение (57). Для того чтобы учесть ослабление сечения шпоночными канавками и болтовыми отверстиями, необходимо ввести в расчет только заштрихованную часть сечения, указанную на рис. 103, с. Тогда

$$J_z = \frac{b-d}{12} [(2h)^3 - (2c)^3].$$

При нахождении срезающего усилия S , действующего на каждую шпонку, предполагаем, что это усилие равно равнодействующей касательных напряжений, распределенных в цельной балке на площади be нейтрального слоя, где b есть ширина балки и e — расстояние между осями шпонок (рис. 103, а). Тогда, пользуясь уравнением (66) и считая в этом случае высоту балки равной $2h$, получаем

$$S = be \cdot \frac{3}{2} \frac{Q}{2hb} = \frac{3}{2} \frac{Qe}{2h}. \quad (75)$$

Размеры шпонок и расстояние e между ними должны быть выбраны так, чтобы обеспечить прочное сопротивление шпонок срезуванию и смятию по боковым граням, а также смятию торцевых площадок брусков в шпоночных канавках. При таких расчетах обычно делают грубое допущение, что касательные напряжения равномерно распределяются по среднему сечению ab шпонки и что давление на боковых гранях шпонок равномерно распределяется по площади cb . Тогда, обозначая через $[\tau]$ допускаемое напряжение на срез шпонок и через $[\sigma_{cm}]$ допускаемое напряжение на поперечное смятие деревянных шпонок или шпоночных канавок, получим следующие уравнения для определения размеров шпонок:

$$\frac{S}{ab} \leq [\tau], \quad \frac{S}{bc} \leq [\sigma_{cm}].$$

Необходимо также обеспечить достаточную сопротивляемость скалыванию деревянной балки вдоль волокон между двумя шпонками. Скалывающее усилие опять будет равно S и воспринимающая его площадь равна $b(e-a)$. Обозначая через $[\tau']$ допускаемое напряжение на скалывание материала балки вдоль волокон, получим условие прочности:

$$\frac{S}{b(e-a)} \leq [\tau'].$$

В дополнение к шпонкам имеются болты (рис. 103), соединяющие части балки. При стягивании их возникает между частями балки трение. При расчетах этим трением обычно пренебрегают и полагают, что вся поперечная сила воспринимается шпонками. Опыты показывают, что такие составные деревянные балки слабее цельных балок тех же размеров¹⁾.

При вычислении напряжений σ_x в составных стальных балках или сплошных фермах влияние ослабления сечения заклепочными отверстиями обычно принимают во внимание, полагая, что все отверстия находятся в одном и том же поперечном сечении балки²⁾ (рис. 115, а), и вычисляют для уравнения (57) J_z площади, ослабленной отверстиями.

При вычислении наибольшего касательного напряжения τ_{xy} на практике также принимают в расчет ослабление сечения заклепочными отверстиями. Можно видеть, что площадь поперечного сечения стенки благодаря отверстиям уменьшается в отношении $(e-d)/e$, где e есть расстояние между центрами отверстий и d — диаметр отверстий. Поэтому для вычисления τ_{xy} в стенке двутавровых балок в правую часть уравнения (64) обычно вставляется множитель $e/(e-d)$. При этом необходимо заметить, что этот способ учета влияния ослабления заклепочными отверстиями является грубым приближением. Действительное же распределение напряжений около отверстий весьма сложно. Рассмотрение концентрации напряжений у краев отверстия будет приведено ниже (см. том II).

Для определения перерезывающей силы, действующей на заклепку, например A (рис. 115, б), рассмотрим два поперечных сечения m_1 и m_2 . Вследствие разности изгибающих моментов в этих двух сечениях нормальные напряжения σ_x в сечениях m_1 и m_2 будут различны, и пояс балки, заштрихованный на рис. 115, с, будет стремиться скользить по стенке. Этому скольжению препят-

ствуют силы трения и заклепка A . Если пренебречь влиянием трения, то сила, действующая на заклепку, получается равной разности нормальных усилий, действующих на сечения m_1 и m_2 пояса.

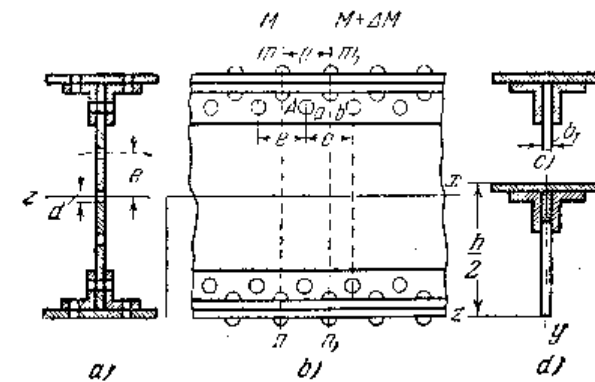


Рис. 115.

Усилие, действующее на пояс в поперечном сечении m_1 , равняется (см. уравнение (а), стр. 105)

$$\frac{M}{J_z} \int y dF,$$

где интегрирование должно быть распространено на заштрихованную площадь поперечного сечения пояса. Таким же образом в поперечном сечении m_2 получаем

$$\frac{(M+\Delta M)}{J_z} \int y dF.$$

Тогда усилие, передаваемое заклепкой A от пояса к стенке, будет равно

$$S = \frac{\Delta M}{J_z} \int y dF. \quad (а)$$

Пользуясь уравнением (50) и подставляя вместо dx расстояние e между заклепками, получаем

$$\Delta M = Qe,$$

где Q есть поперечная сила в поперечном сечении балки, проходящем через заклепку A . Вставляя в уравнение (а), получаем

$$S = \frac{Qe}{J_z} \int y dF. \quad (76)$$

Интеграл, входящий в это уравнение, представляет статический момент заштрихованной площади поперечного сечения (рис. 115, с) пояса относительно оси z .

Легко видеть, что для того, чтобы происходило скольжение пояса по стенке, заклепка должна быть срезана по двум поперечным

¹⁾ Опыты, произведенные проф. E. Kidwell'ом в Мичиганском горном колледже, показывают, что составные деревянные балки имеют около 75% прочности по сравнению с цельными тех же размеров.

²⁾ Отверстия в вертикальной стенке имеются в сечениях, где приклепаны к балке уголки жесткости.

сечениям. Полагая, что сила S равномерно распределяется по этим сечениям, получаем касательное напряжение в заклепке

$$\tau = \frac{S}{2 \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2Qe}{\pi d^2 J_z} \int y dF. \quad (77)$$

Сила S иногда вызывает значительные касательные напряжения в стенке балки по длине ab (см. рис. 115, b), что должно быть принято во внимание. Полагая, что эти напряжения равномерно распределены, и разделив S на площадь $b_1(e-d)$, получаем

$$\tau' = \frac{Q}{b_1 J_z} \frac{e}{e-d} \int y dF. \quad (b)$$

В добавление к этому напряжению, возникающему от усилия S , передаваемого от поясов, будет действовать в той же плоскости ab касательное напряжение τ'' , возникающее от изгиба стенки. Величина этих напряжений получится из вышеуказанного уравнения (b) посредством подстановки, вместо $\int y dF$, статического момента относительно нейтральной оси z части прямоугольного поперечного сечения стенки, расположенной выше плоскости ab . Таким образом, мы приходим к следующему уравнению для касательных напряжений τ_{yx} в стенке по площади ab :

$$\tau_{yx} = \tau' + \tau'' = \frac{Q}{b_1 J_z} \frac{e}{e-d} \int y dF, \quad (78)$$

в котором интеграл распространяется на заштрихованную площадь поперечного сечения, показанную на рис. 115, d . Зная σ_x и τ_{yx} , можем вычислить σ_{\max} и σ_{\min} для точек площади ab из уравнений (72) и (74), как было указано в предыдущем параграфе, а также определить направления главных напряжений.

Из предыдущих рассуждений видно, что при определении напряжений в составных двутавровых балках для упрощения вычислений сделано несколько допущений. Это до некоторой степени уменьшает точность вычисления напряжений, что должно быть принято во внимание при выборе допускаемых напряжений для составных балок¹⁾.

¹⁾ Опыты показывают, что разрушение двутавровых балок обычно происходит вследствие вынуживания сжатых поясов или стенки (см. H. F. Moore, Univ. of Illinois. Bull. No 68, 1913).

Этот вопрос о вынуживании будет рассмотрен ниже. Влияние изгиба заклепок на распределение напряжений в двутавровых балках рассмотрен I. Atiyev-Leyl в Z. Architekt. u. Ingenieurw., стр. 57, 1910. Он нашел, что вследствие этого изгиба напряжения для обычных соотношений в балках увеличиваются приблизительно на 6%.

ЗАДАЧИ

1. Деревянная балка (рис. 103) состоит из двух брусьев прямоугольного поперечного сечения, соединенных шпонками.

Определить срезывающую силу, действующую на шпонку, касательное напряжение τ в шпонке и давление на единицу площади ее боковых граней, если нагрузка $P = 2т$, ширина балки $b = 12,5$ см, высота $2h = 40$ см, ширина шпонки $a = 7,5$ см, высота шпонки $2c = 6$ см и расстояние между центрами шпонок $e = 27,5$ см.

$$\text{Ответ. } S = \frac{3}{2} \cdot \frac{1000 \cdot 27,5}{40} = 1031 \text{ кг.}$$

Касательное напряжение в шпонке будет

$$\tau = \frac{S}{ab} = \frac{1031}{7,5 \cdot 12,5} = 11 \text{ кг/см}^2.$$

Давление на единицу площади боковой грани равняется

$$\sigma = \frac{S}{bc} = \frac{1031}{12,5 \cdot 3} = 27,5 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить касательное напряжение по нейтральному слою балки, стенка которой имеет толщину 2 см и высоту 1,25 м, пояса состоят из двух нар уголков $150 \times 150 \times 12$ мм, если полная поперечная сила в сечении равняется 60 т. Определить также касательные напряжения в заклепках, прикрепляющих пояса к стенке, если диаметр этих заклепок равен 2,5 см и шаг $e = 10$ см (рис. 115).

Решение. Для данных размеров имеем:

$$J_z = \frac{2 \cdot 125^3}{12} + 4(745 + 34,9 \cdot 58,35^2) = 803\,600 \text{ см}^4.$$

Статический момент половины сечения относительно нейтральной оси равен

$$\int_0^{\frac{h}{2}} y dF = 2 \frac{125}{2} \cdot \frac{125}{4} + 2 \cdot 34,9 \cdot 58,35 = 7980 \text{ см}^3.$$

В этом вычислении $34,9 \text{ см}^2$ есть площадь поперечного сечения уголка, 745 см^4 есть момент инерции площади сечения уголка относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно нейтральной оси балки, $58,35$ см — расстояние центра тяжести каждого уголка от нейтральной оси z балки. Все числовые данные можно взять из справочника. Теперь из уравнения (64) получаем

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{60\,000 \cdot 7980}{2 \cdot 803\,600} = 298 \text{ кг/см}^2.$$

Если примем во внимание ослабление стенки заклепочными отверстиями, то

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{e}{e-d} \cdot 298 = \frac{10}{7,5} \cdot 298 = 397 \text{ кг/см}^2.$$

Усилие S , передаваемое на одну заклепку, по уравнению (76) будет

$$S = \frac{60\,000 \cdot 10 \cdot 4073}{803\,600} = 3040 \text{ кг.}$$

Касательные напряжения в заклепке находим по уравнению (77)

$$\tau = \frac{3040 \cdot 2}{3,14 \cdot 2,5^2} = 310 \text{ кг/см}^2.$$

3. Определить σ_{\max} в точках сечения ab , отстоящего (рис. 115) на расстоянии 55 см от нейтральной оси, если размеры балки те же, что в предыдущей задаче, $Q=60\ 000$ кг и изгибающий момент $M=3 \cdot 10^6$ кгсм.

Решение. Из уравнения (78) имеем

$$\tau_{yx} = \frac{60\ 000}{2 \cdot 803\ 600} \cdot \frac{10}{7,5} (4073 + 881) = 246 \text{ кг/см}^2.$$

$$\sigma_x = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 55}{803\ 600} = 205 \text{ кг/см}^2.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2} = 369 \text{ кг/см}^2.$$

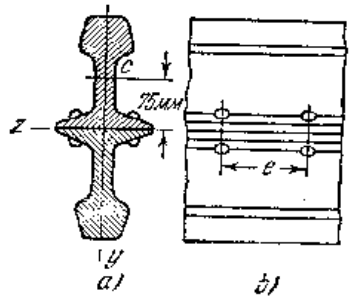


Рис. 116.

4. Определить срезывающую силу в заклепках, соединяющих два рельса, показанных на рис. 116, если площадь поперечного сечения одного рельса $F=62,5$ см², расстояние от подошвы рельса до центра тяжести его поперечного сечения $c=7,5$ см, момент инерции площади поперечного сечения рельса относительно оси, проходящей через его центр тяжести s и параллельной оси z , равен 1562 см⁴, расстояние между заклепками $e=15$ см и поперечная сила $Q=2$ т.

Ответ: $S = \frac{1}{2} \frac{2000 \cdot 15 \cdot 62,5 \cdot 7,5}{(1562 + 62,5 \cdot 56,25)} = 692$ кг.

ГЛАВА V ИЗОГНУТАЯ ОСЬ БАЛКИ

31. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

При расчете балок инженер обычно интересуется не только напряжениями, возникающими от действующих нагрузок, но также и прогибами, вызываемыми этими нагрузками. Кроме того, во многих случаях ставится условие, чтобы наибольший прогиб не превосходил некоторой небольшой части пролета.

Пусть кривая AmB на рис. 117 изображает форму оси балки после изгиба. Изгиб имеет место в плоскости симметрии вследствие того,

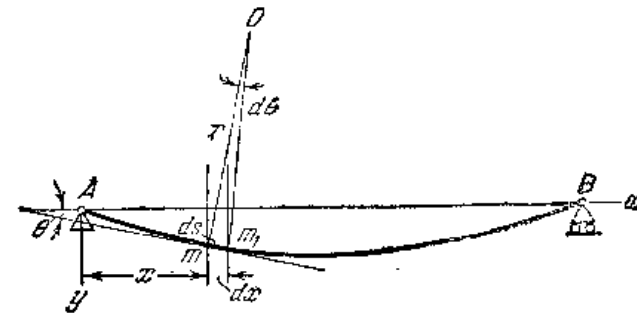


Рис. 117.

что поперечные силы действуют в этой же плоскости. Эта кривая называется *изогнутой осью балки*. Для того чтобы вывести дифференциальное уравнение этой кривой, возьмем координатные оси, как показано на рисунке, и предположим, что кривизна изогнутой оси в любой точке зависит только от величины изгибающего момента M в этой точке¹⁾. В таком случае зависимость между кривизной и изгибающим моментом будет та же, что и в случае чистого изгиба (см. уравнение (5б)), и мы получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_z}. \quad (a)$$

¹⁾ Влияние поперечной силы на кривизну будет рассмотрено ниже (см. параграф 39). Будет показано, что это влияние мало и им можно пренебречь.

Чтобы вывести выражение, устанавливающее зависимость между кривизной и формой кривой, мы рассмотрим две смежных точки m и m_1 , находящиеся на изогнутой оси на расстоянии ds одна от другой. Если угол, который касательная в точке m образует с осью x , обозначить через θ , то угол между нормальными к кривой в точках m и m_1 будет $d\theta$. Точка O пересечения этих нормалей дает центр кривизны и определяет длину r радиуса кривизны. Тогда

$$ds = r d\theta \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|; \quad (b)$$

линейки указывают, что мы рассматриваем только численное значение кривизны. Относительно знака следует заметить, что изгибающий момент в уравнении (a) принимается положительным, если он вызывает искривление, направленное вогнутостью вверх (см. стр. 65). Следовательно, кривизна положительна, когда центр кривизны находится выше кривой, как на рис. 117. Однако легко видеть, что при такой кривизне угол θ уменьшается при перемещении точки m по кривой от A к B . Следовательно, положительному приращению ds соответствует отрицательное $d\theta$. Таким образом, чтобы иметь надлежащий знак, уравнение (b) необходимо написать в таком виде:

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\theta}{ds}. \quad (c)$$

В практических приложениях допускают лишь очень малые прогибы, и изогнутая ось балки является весьма пологой кривой. В таком случае мы можем положить с достаточной точностью, что

$$ds \approx dx \quad \text{и} \quad \theta \approx \text{tg } \theta = \frac{dy}{dx}. \quad (d)$$

Подставляя эти приближенные значения вместо ds и θ в уравнение (c), получаем

$$\frac{1}{r} = - \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (e)$$

Тогда из уравнения (a) находим

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (79)$$

Это есть дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, и чтобы найти деформации балки, его нужно проинтегрировать в каждом частном случае.

Необходимо заметить, что знак в уравнении (79) зависит от направления координатных осей. Например, если мы примем y положительным вверх, то необходимо положить

$$\theta \approx - \frac{dy}{dx}$$

вместо уравнения (d), и мы получаем в правой части уравнения (79) плюс вместо минуса.

В случае весьма гибких стержней, в которых прогибы могут быть большие, нельзя пользоваться упрощениями (d), и мы должны прибегнуть к помощи точного выражения

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Тогда

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\theta}{ds} = - \frac{d \text{arc tg} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx} \frac{dx}{ds} = - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (f)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (e), мы можем заключить, что упрощения, показанные в уравнении (d), равнозначны допущению, что величина $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ в знаменателе точной формулы (f) мала по сравнению с единицей и поэтому ею можно пренебречь¹⁾.

Дифференцируя уравнение (79) по x и пользуясь уравнениями (50) и (51), получаем

$$EJ_z \frac{d^3y}{dx^3} = -Q$$

и

$$EJ_z \frac{d^4y}{dx^4} = q. \quad (80)$$

Последнее уравнение иногда применяется при определении прогибов балок, несущих распределенную нагрузку.

32. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой

В случае *свободно опертой и равномерно нагруженной балки* (рис. 68) изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении m , отстоящем на расстоянии x от левой опоры, равняется

$$M = \frac{qix}{2} - \frac{qx^2}{2},$$

и дифференциальное уравнение (79) получается

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{qix}{2} + \frac{qx^2}{2}.$$

¹⁾ Точное выражение (f) для кривизны применялось первыми исследователями изогнутой оси. Оно применялось, например, Л. Эйлером в его знаменитой работе *Elastic Curves*, английский перевод которой был опубликован в *Isis*, том 20 стр. 1, Ноябрь 1933 г.; см. также С. П. Тимошенко, *История науки о сопротивлении материалов*, перевод, 1957, стр. 46.

Умножая обе части уравнения на dx и интегрируя, получаем

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C, \quad (a)$$

где C есть постоянная интегрирования, которая определяется так, чтобы удовлетворить условиям этой частной задачи. Мы замечаем, что угол наклона касательной к кривой посередине пролета вследствие симметрии равен нулю. Полагая $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = \frac{l}{2}$, мы таким образом получаем

$$C = \frac{ql^3}{24},$$

и уравнение (a) будет

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}. \quad (b)$$

Второе интегрирование дает

$$EJ_z y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{24} + C_1. \quad (c)$$

Новая постоянная интегрирования определяется из условия, что прогиб на опорах равен нулю. Подставляя в уравнение (c) $y=0$ и $x=0$, находим $C_1 = 0$. Тогда уравнение (c) получается в таком виде

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (l^3x - 2lx^2 + x^4). \quad (81)$$

Это есть уравнение оси свободно опертой и равномерно нагруженной балки. Наибольший прогиб этой балки имеет место, очевидно, посередине пролета. Подставляя в уравнение (81) $x=l/2$, мы таким образом находим

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z}. \quad (82)$$

Наибольший угол наклона касательной к кривой имеет место на левом конце балки, где путем подстановки в уравнение (b) $x=0$ получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \frac{ql^2}{24EJ_z}. \quad (83)$$

В случае *равномерно нагруженной консоли* (рис. 118, a) изгибающий момент в поперечном сечении mn , отстоящем на расстоянии x от левого конца, равняется

$$M = -\frac{qx^2}{2},$$

и уравнение (79) получается в таком виде:

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Первое интегрирование дает

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C. \quad (d)$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что угол наклона касательной к кривой в заделанном конце равен нулю, т. е. $dy/dx = 0$ при $x=l$. Подставляя эти значения в уравнение (d), находим

$$C = -\frac{ql^3}{6}.$$

Второе интегрирование дает

$$EJ_z y = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{6} + C_1. \quad (e)$$

Постоянная C_1 найдется из условия, что прогиб в заделанном конце равен нулю. Таким образом, подставляя в уравнение (e) $x=l, y=0$, получаем

$$C_1 = \frac{ql^4}{8}.$$

Подставляя это значение в уравнение (e), находим

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (x^4 - 4l^3x + 3l^4). \quad (84)$$

Это уравнение представляет изогнутую ось равномерно нагруженной консоли.

Если вместо правого конца будет заделан левый, как показано на рис. 118, b, то уравнение изогнутой оси, очевидно, получится путем подстановки в уравнение (84) $l \rightarrow x$ вместо x . Таким образом, мы находим

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2). \quad (85)$$

ЗАДАЧИ

1. Равномерно нагруженная стальная двутавровая балка, опертая на концах, имеет прогиб посередине пролета $f = 0,8$ см, а угол наклона касательной к кривой на конце равняется $\theta = 0,01$ радиана. Найти высоту h балки, если наибольшее нормальное напряжение при изгибе равняется $\sigma = 1200$ кг/см².

Решение. Воспользуемся известными формулами

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}, \quad \theta = \frac{ql^2}{24EJ_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{ql^2}{8} \frac{h}{J_z}.$$

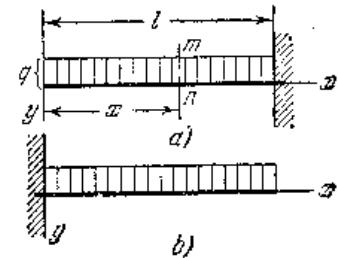


Рис. 118.

Из первых двух формул мы находим

$$\frac{5}{16} l = \frac{f}{\theta} = 0,8 \cdot 100 \text{ и } l = 256 \text{ см.}$$

Тогда вторая формула дает

$$\frac{ql^2}{8J_z} = \frac{3E\theta}{l} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 0,01}{256}.$$

Подставляя это в третью формулу, получаем

$$h = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 256}{3 \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 0,01} = 10,2 \text{ см.}$$

2. Свободно опертая и равномерно нагруженная деревянная балка квадратного поперечного сечения имеет пролет $l = 3 \text{ м}$. Найти наибольший прогиб, если $(\sigma_x)_{\max} = 70 \text{ кг/см}^2$, $E = 10^9 \text{ кг/см}^2$ и $q = 500 \text{ кг/м}$.

Ответ. $f = 0,78 \text{ см}$.

3. Определить высоту h равномерно нагруженной и свободно опертой стальной двутавровой балки, имеющей пролет 3 м , если наибольшее нормальное напряжение равно 1200 кг/см^2 и наибольший прогиб $f = 0,25 \text{ см}$.

Ответ. $h = 45 \text{ см}$.

4. Равномерно нагруженная консоль пролета l имеет прогиб на конце, равный $0,01 l$. Каков угол наклона касательной к изогнутой оси на конце?

Ответ. $\theta = 0,0133$ радиана.

5. Какова длина равномерно нагруженной консоли, если прогиб на свободном конце равен $2,5 \text{ см}$ и угол наклона касательной к изогнутой оси в той же точке равен $0,01$?

Ответ. $l = 3,33 \text{ м}$.

33. Прогиб свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенным грузом

В этом случае имеются два различных выражения для изгибающего момента (см. параграф 22), соответствующих двум участкам балки (рис. 119). Поэтому уравнение (79) для изогнутой оси должно быть написано для каждого участка. Таким образом, мы получаем

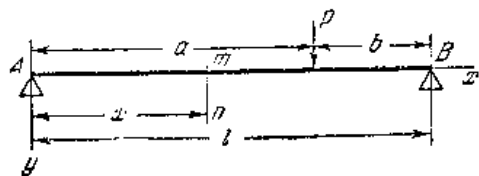


Рис. 119.

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x \quad \text{при } x \leq a$$

$$\text{и} \quad EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pb}{l}x + P(x-a) \quad \text{при } x \geq a.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + C \quad \text{при } x \leq a$$

и

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_1 \quad \text{при } x \geq a. \quad (a)$$

Так как обе ветви изогнутой оси должны иметь общую касательную в точке приложения груза P , вышеприведенные выражения (а) для угла наклона должны быть равны при $x=a$. Из этого мы заключаем, что постоянные интегрирования равны между собой, т. е. $C=C_1$. Выполняя второе интегрирование и подставляя C вместо C_1 , получаем

$$\left. \begin{aligned} EJ_z y &= -\frac{Pbx^3}{6l} + Cx + C_2 \quad \text{при } x \leq a, \\ EJ_z y &= -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{E(x-a)^3}{6} + Cx + C_2 \quad \text{при } x \geq a. \end{aligned} \right\} (b)$$

и

Так как обе ветви изогнутой оси имеют общий прогиб в точке приложения груза, то два выражения (b) должны быть идентичны при $x=a$. Из этого следует, что $C_2=C_2$. Окончательно нам необходимо определить только две постоянные C и C_2 , а для этого мы имеем два условия, а именно, прогиб на каждом из двух концов балки равен нулю. Подставляя в первое из выражений (b) $x=0$ и $y=0$, находим

$$C_2=C_2=0. \quad (c)$$

Подставляя во второе из выражений (b) $y=0$ и $x=l$, получаем

$$C = \frac{Pbl}{6} - \frac{Pb^3}{6l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}. \quad (d)$$

Подставляя значения (c) и (d) постоянных в уравнения (b) для изогнутой оси, получаем

$$EJ_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) \quad \text{при } x \leq a \quad (86)$$

и

$$EJ_z y = \frac{Pbx}{6l} (l^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad \text{при } x \geq a. \quad (87)$$

Первое из этих уравнений дает прогибы для левого участка балки, а второе дает прогибы для правого участка.

Подставляя значение (d) в уравнения (a), получаем

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) \quad \text{при } x \leq a \quad (e)$$

и

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pb}{6l} (l^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad \text{при } x \geq a.$$

Из этих уравнений можно легко вычислить угол наклона в любой точке изогнутой оси. Часто нам нужны значения углов наклона на концах балки. Подставляя $x=0$ в первое из уравнений (e), $x=l$

во второе и обозначая углы наклона на соответствующих концах через θ_1 и θ_2 , получаем ¹⁾

$$\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EJ_z}, \quad (88)$$

$$\theta_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{Pab(l+a)}{6EJ_z}. \quad (89)$$

Наибольший прогиб имеет место в точке, где касательная к изогнутой оси горизонтальна. Если $a > b$, как на рис. 119, то наибольший прогиб будет, очевидно, на левом участке балки. Мы можем найти положение этой точки, приравняв первое из выражений (e) нулю. Тогда получим

$$l^2 - b^2 - 3x^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}. \quad (f)$$

Это есть расстояние от левой опоры до точки, соответствующей наибольшему прогибу. Для того чтобы найти наибольший прогиб, мы подставляем выражение (f) в уравнение (86), которое дает

$$y_{\max} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}EJ_z}. \quad (g)$$

Если груз P приложен посередине пролета, то наибольший прогиб будет, очевидно, также посередине пролета. Его величина получится подстановкой $b = \frac{l}{2}$ в уравнение (g), которое дает

$$\left(y \right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48EJ_z}. \quad (90)$$

Из уравнения (f) можно заключить, что в случае одной сосредоточенной силы наибольший прогиб находится всегда близко к середине пролета балки. Когда $b = \frac{l}{2}$, он — посередине пролета; в предельном случае, когда b весьма мало и P находится близко к опоре, расстояние x , определяемое при помощи уравнения (f), равняется $\frac{l}{\sqrt{3}}$, и точка, соответствующая наибольшему прогибу,

¹⁾ Для плавных кривых, которые мы имеем в большинстве случаев, углы наклона θ_1 и θ_2 можно принять численно равными углам поворота концов балки при изгибе, причем углы считаются положительными, если поворот происходит по часовой стрелке.

отстоят от середины пролета лишь на расстоянии

$$\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} = 0,077 l.$$

Вследствие этого прогиб посередине пролета приблизительно равен наибольшему прогибу. Чтобы получить прогиб посередине пролета, подставляем в уравнение (86) $x = \frac{l}{2}$ и находим

$$\left(y \right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pb}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2). \quad (91)$$

Разность прогибов, определяемых по формулам (g) и (91) в наиболее неблагоприятном случае, т. е. когда b приближается к нулю, составляет лишь около 2,5% наибольшего прогиба.

ЗАДАЧИ

1. Найти положение груза P (рис. 119), если отношение численных значений углов наклона на концах балки равняется $\left| \frac{\theta_1}{\theta_2} \right| = \frac{3}{4}$.

Ответ. $a = \frac{5}{7} l$.

2. Найти разность наибольшего прогиба и прогиба посередине пролета балки (рис. 119), если $b = 2a$.

Ответ. $0,0046 \frac{Pl^3}{27EJ_z}$.

3. Найти наибольший прогиб балки, показанной на рис. 119, если балка имеет двутавровое сечение с высотой 20 см и площадью поперечного сечения 35,5 см²; $a = 3,6$ м, $b = 2,4$ м и $P = 800$ кг.

4. Каков будет наибольший прогиб, если двутавровую балку в предыдущей задаче заменить деревянной балкой, имеющей поперечное сечение 25 × 25 см². Модуль упругости для дерева можно принять $E = 10^9$ кг/см².

34. Определение прогибов при помощи эпюры изгибающих моментов

Графоаналитический метод. В предыдущих параграфах было показано, как можно получить изогнутую ось балки путем интегрирования дифференциального уравнения (79). Однако во многих случаях, в особенности, когда нам нужно знать скорее прогиб в определенной точке, чем общее уравнение изогнутой оси балки, вычисление можно значительно упростить при помощи эпюры изгибающих моментов. Ниже следует изложение этого метода ¹⁾.

¹⁾ Применение эпюры изгибающих моментов к вычислению прогибов балок было разработано О. Mohr'ом, см. Z. Architekt. u. Ing.-Ver. (Hannover), стр. 10, 1868; см. также его Abhandlungen, стр. 294; цитирующая на стр. 43. Подобный метод был разработан независимо профессором С. E. Green'ом, Univ. of Michigan, 1874. Кажется, что впервые этот метод был предложен St. Venant'ом. См. его замечания в книге Navier, стр. 72 и 79, цитированные на стр. 103.

На рис. 120 AB представляет часть изогнутой оси балки и a_1b_1 — соответствующий участок эпюры изгибающих моментов. Два смежных поперечных сечения балки на расстоянии ds одно от другого будут пересекаться после изгиба под углом $d\theta$, и из уравнения (56) имеем

$$d\theta = \frac{1}{r} ds = \frac{M}{EJ_z} ds.$$

Для балок, применяемых в сооружениях, кривизна очень мала, и мы можем принять dx вместо ds . Тогда

$$d\theta = \frac{M}{EJ_z} dx. \quad (a)$$

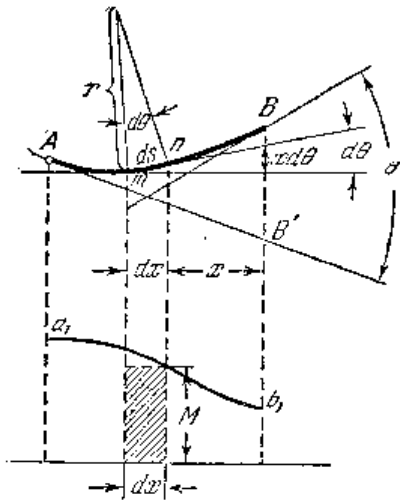


Рис. 120.

С графической точки зрения это означает, что элементарный угол $d\theta$ между двумя последовательными радиусами или двумя последовательными касательными к изогнутой оси равняется заштрихованной элементарной площади Mdx эпюры изгибающих моментов, поделенной на жесткость при изгибе¹⁾. Это будет справедливо для каждого элемента и, следовательно, угол между касательными в A и B получится суммированием элементов, определяемых уравнением (a). Тогда

$$\theta = \int_A^B \frac{1}{EJ_z} M dx, \quad (92)$$

т. е. угол между касательными в двух точках A и B изогнутой оси равняется площади эпюры изгибающих моментов между соответствующими вертикалями, разделенной на жесткость при изгибе балки.

Рассмотрим теперь расстояние точки B изогнутой оси от касательной AB' в точке A . Припоминая, что изогнутая ось балки есть плоская кривая, указанное выше расстояние мы можем измерить по вертикали BB' . Отклонение, произведенное на этом расстоянии изгибом элемента mn балки и заключенное между двумя последовательными касательными в m и n , равняется,

$$x(d\theta) = x \frac{M dx}{EJ_z}.$$

Графически это означает момент заштрихованной площади $M dx$

¹⁾ Проверив размерность, получаем: $d\theta$ — радианов, т. е. отвлеченное число, $M dx$ — в кг см см, EJ_z — в (кг/см²) см⁴.

относительно вертикали, проходящей через B , поделенный на EJ_z . Интегрирование дает полный прогиб BB' :

$$\overline{BB'} = f = \int_A^B \frac{1}{EJ_z} xM dx, \quad (93)$$

т. е. расстояние B от касательной в A равняется моменту площади эпюры изгибающих моментов между A и B относительно вертикали, проходящей через B , поделенному на жесткость при изгибе EJ_z . При помощи уравнений (92) и (93) в каждом частном случае легко можно вычислить угол наклона касательной к изогнутой оси и величину прогиба в любом поперечном сечении. Сначала мы вычисляем абсолютные значения θ и f . Затем, взяв положительные направления координатных осей, как указано на рис. 122, мы считаем поворот

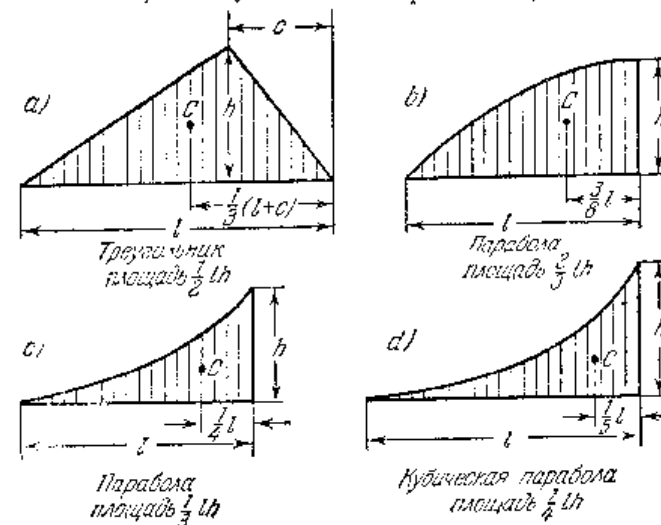


Рис. 121.

касательной к изогнутой оси положительным, если он происходит по направлению движения часовой стрелки, и прогиб балки положительным, если он совпадает с положительным направлением оси y . Этот метод вычисления деформаций балки называется *графоаналитическим методом*.

Вычисление интегралов в уравнениях (92) и (93) часто можно упростить при помощи известных формул, по которым определяются площади и центры тяжести их. Несколько формул, которые встречаются в приложениях, дано на рис. 121.

35. Определение прогиба консоли графоаналитическим методом

В случае консоли с сосредоточенным грузом на конце (рис. 122, а) эпюра изгибающих моментов показана на рис. 122, б. Так как касательная в заделанном конце A остается неизменной, то

расстояния точек изогнутой оси от этой касательной являются действительными прогибами. Угол θ_b , который составляет касательная к изогнутой оси в B с касательной в A , согласно уравнению (92) ¹⁾ равняется

$$\theta_b = Pl \frac{1}{2} \frac{1}{EJ_z} = \frac{Pl^2}{2EJ_z}. \quad (94)$$

Прогиб f вычисляется из уравнения (93) как момент площади aba_1 относительно оси bb_1 , разделенный на EJ_z . Тогда

$$f = Pl \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l \frac{1}{EJ_z} = \frac{Pl^3}{3EJ_z}. \quad (95)$$

Для какого-либо поперечного сечения mn угол поворота относительно оси x есть площадь $m'n'aa_1$, рис. 122, b , деленная на EJ_z . В случае пологой кривой, как, например, изогнутая ось балки,

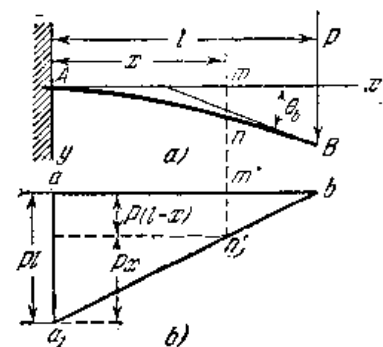


Рис. 122.

угол поворота может быть принят равным тангенсу угла наклона касательной к кривой, и мы получаем

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EJ_z} \left[1 - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right]. \quad (96)$$

Прогиб y в том же поперечном сечении есть момент площади $m'n'aa_1$ относительно $m'n'$, разделенный на EJ_z (см. уравнение (93)). Разбивая эту площадь на прямоугольник и треугольник, как указано на рисунке, получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left[P(l-x) \frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2} \frac{2x}{3} \right] = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (97)$$

Для консоли с сосредоточенным грузом P в поперечном сечении, отстоящем на расстоянии c от опоры (рис. 123, a), эпюра изгибающих моментов показана на рис. 123, b . Угол наклона и прогиб для какого-либо сечения слева от точки приложения груза определяются из уравнений (96) и (97) с заменой c вместо l . Для какого-либо сечения справа от груза изгибающий момент и кривизна равны нулю; следовательно, эта часть балки остается прямой. Угол наклона является постоянным и равным углу наклона в D , т. е. на основании уравнения (94), $Pc^2/2EJ_z$. Прогиб в каком-либо поперечном сечении mn равняется моменту площади треугольника aa_1d относительно вертикали $m'n'$, разделенному на EJ_z , что дает

$$y = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pc^2}{2} \left(x - \frac{1}{3} c \right). \quad (98)$$

¹⁾ Он принимается положительным, так как вращение происходит по часовой стрелке.

В случае консоли с равномерной нагрузкой интенсивностью q (рис. 124, a), изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn на расстоянии x_1 от заделанного конца равняется

$$M = -\frac{q(l-x_1)^2}{2},$$

и изображается параболой a_1db на рис. 124, b . Угол наклона в

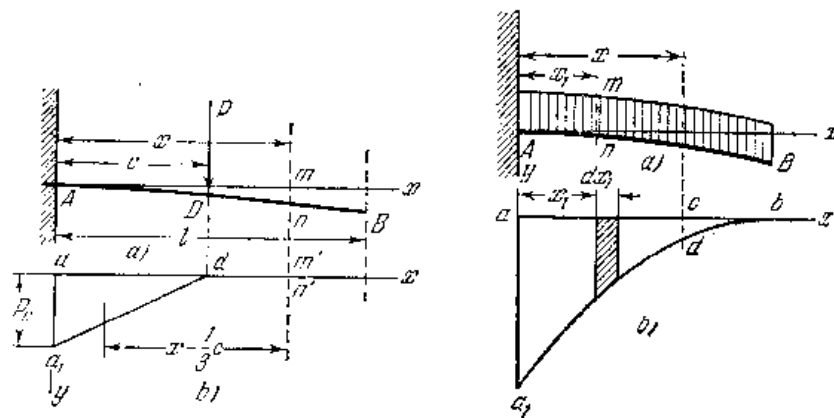


Рис. 123.

Рис. 124.

каком-либо поперечном сечении на расстоянии x от опоры, из уравнения (92), равняется

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^x \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1 = \frac{q}{2EJ_z} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right). \quad (99)$$

Угол наклона на конце получится путем подстановки в указанное уравнение l вместо x

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{ql^3}{6EJ_z}. \quad (100)$$

Прогиб в каком-либо сечении на расстоянии x от заделанного конца равняется моменту площади aa_1cd относительно вертикали cd , разделенному на EJ_z (рис. 124, b). Момент элементарной площадки, заштрихованной на чертеже, равняется

$$(x-x_1) \frac{q(l-x_1)^2}{2} dx_1,$$

и полный момент есть интеграл этого выражения от $x_1=0$ до $x_1=x$. Следовательно,

$$y = \frac{1}{EJ_z} \frac{q}{2} \int_0^x (x-x_1)(l-x_1)^2 dx_1.$$

Тогда после интегрирования прогиб в какой-либо точке на расстоянии x от опоры равняется

$$y = \frac{q}{2EJ_z} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right). \quad (101)$$

Для прогиба на конце, т. е. при $x=l$, имеем

$$f = (y)_{x=l} = \frac{ql^4}{8EJ_z} \quad (102)$$

Та же задача может быть решена методом сложения действия сил. Равномерную нагрузку можно рассматривать как систему бесконечно малых грузов $q dx$, указанных на рис. 140, стр. 145.

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб верхнего конца стойки, изображенной на рис. 98.

Решение. Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении m на расстоянии x от верха равен

$$M = -\frac{Hx^2}{3l^2},$$

где $H = \frac{1}{2} dl^2 \cdot 1000 \text{ кг}$ есть полное гидростатическое давление, приходящееся на одну стойку. Пользуясь уравнением (93), находим прогиб верха стойки

$$f = \frac{H}{EJ_z} \int_0^l \frac{x^4 dx}{3l^2} = \frac{Hl^3}{15EJ_z} = \frac{1 \cdot 2^3 \cdot 1000 \cdot 2^3 \cdot 100^3 \cdot 12}{2 \cdot 15 \cdot 10^8 \cdot 27 \cdot 1^4} = 0,22 \text{ см.}$$

2. Определить прогиб и угол наклона на конце консоли, изогнутой парой сил M (рис. 125).

Ответ:

$$(y)_{x=l} = -\frac{Ml^2}{2EJ_z}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Ml}{EJ_z}.$$

3. Две деревянные прямоугольные балки, зажатые на левом конце (рис. 126), изгибаются путем натяжения болта на правом конце. Определить диаметр d болта

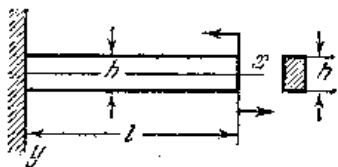


Рис. 125.

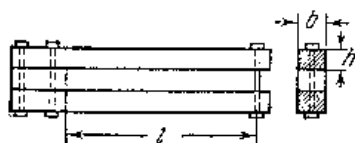


Рис. 126.

таким образом, чтобы коэффициенты безопасности для деревянных балок и для стального болта были одинаковы. Длина балок $l=1 \text{ м}$, высота $h=20 \text{ см}$, ширина $b=15 \text{ см}$, допустимое напряжение для стали $[\sigma]=800 \text{ кг/см}^2$, для дерева $[\sigma]=80 \text{ кг/см}^2$. Определить прогиб балок, если растягивающее напряжение в болте 800 кг/см^2 .

Решение. Если P есть сила, действующая в болте, то уравнение для определенной d будет

$$\frac{4P}{\pi d^3} \cdot \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{800}{80} = 10,$$

откуда

$$d = 1,13 \text{ см} \quad \text{и} \quad P = 800 \cdot \frac{\pi d^3}{4} = 800 \text{ кг.}$$

Тогда, взяв $E=10^9 \text{ кг/см}^2$, получим из уравнения (95) прогиб $f=0,267 \text{ см}$.

4. Каково должно быть уравнение оси бруса до изгиба, если движущийся по брусу груз P остается на одном и том же уровне (рис. 127).

Ответ.

$$y = -\frac{Px^2}{3EJ_z}.$$

5. Определить допустимый прогиб балки, показанной на рис. 125, если дано допустимое напряжение $[\sigma]$. Определить также прогиб для консоли, нагруженной на конце (рис. 122).

$$\text{Ответ. 1) } f = \frac{[\sigma] l^2}{Eh}, \quad 2) f = \frac{2}{3} \frac{[\sigma] l^2}{Eh}.$$

6. Круглый диск N радиуса R (рис. 128) вызывает в тонкой стальной полоске толщиной h притяжение магнитными силами, равномерно распределенными с интенсивностью $q \text{ кг/см}^2$. Определить длину l свободной части AC полоски и наибольшее напряжение в ней, если $h=0,025 \text{ см}$, $R=7,5 \text{ см}$ и $q=1 \text{ кг/см}^2$.

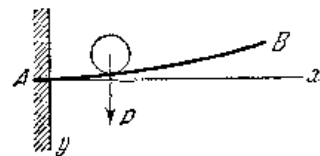


Рис. 127.

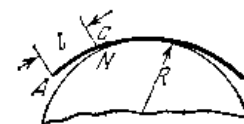


Рис. 128.

Решение. Длину свободной части полоски можно определить из условия, что в точке C кривизна, вызываемая равномерно распределенной нагрузкой q , должна быть равна $\frac{1}{R}$. Поэтому

$$\frac{ql^2}{2} = \frac{EJ_z}{R},$$

откуда

$$l = \sqrt{\frac{2EJ_z}{qR}} = 0,83 \text{ см.}$$

Наибольшее напряжение определится из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{2R} = 3333 \text{ кг/см}^2.$$

36. Определение прогиба свободно опертой балки графоаналитическим методом

Рассмотрим случай свободно опертой балки с грузом, приложенным в точке F (рис. 129). Эпюра изгибающих моментов представляет треугольник $a_1 b_1 f_1$ (рис. 129. б). Его площадь равна $\frac{Fub}{2}$ и его центр тяжести C находится на расстоянии $\frac{l+b}{3}$ от вертикали Vb_1 . Вертикальное расстояние f конца B до линии Ab' , которая является касательной к изогнутой оси в A , получается из уравнения (93)

и равняется

$$\bar{f} = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3} = \frac{Pab(l+b)}{6EJ_z}.$$

Пользуясь этим значением, найдем угол наклона θ_1 левого конца балки, а именно

$$\theta_1 = \frac{\bar{f}}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_z}, \quad (a)$$

что совпадает с ранее полученной формулой (88)¹⁾. При вычислении угла поворота θ_2 конца B балки (рис. 129, а) мы замечаем, что

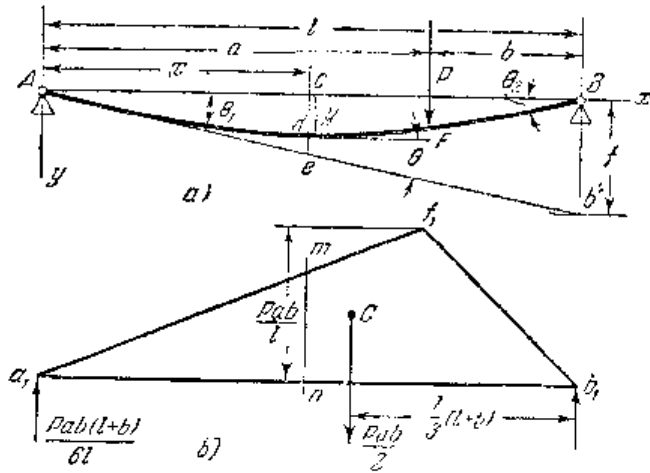


Рис. 129.

поворот конца B относительно конца A на основании уравнения (92) равняется

$$\theta = \frac{Pab}{2EJ_z}.$$

Следовательно,

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_z} - \frac{Pab}{2EJ_z} = -\frac{Pab(l+a)}{6lEJ_z}. \quad (b)$$

Можно дать простое толкование формулам (а) и (b), если рассмотреть a_1b_1 на рис. 129, б, как свободно опертую балку, несущую треугольную нагрузку, представленную треугольником $a_1f_1b_1$. Реакция левой опоры a_1 этой воображаемой балки равняется

$$R_1 = \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3} \frac{1}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6l}.$$

Подобно этому

$$R_2 = \frac{Pab(l+a)}{6l}.$$

¹⁾ Заметить, что $a=l-b$.

Сравнивая эти результаты с формулами (а) и (b), можем заключить, что углы поворота θ_1 и θ_2 концов действительной балки AB получаются путем деления поперечных сил на концах воображаемой балки a_1b_1 на жесткость при изгибе EJ_z . Воображаемая балка a_1b_1 называется *фиктивной балкой*.

Чтобы вычислить угол наклона в какой-либо точке d изогнутой оси (рис. 129, а), необходимо вычесть из угла θ_1 на опоре угол θ между касательными в A и d . Пользуясь уравнением (92) для вычисления угла θ , из рис. 129, б мы получаем

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 - \theta = \frac{1}{EJ_z} (R_1 - \Delta a_1mn).$$

Первый член в скобках представляет реакцию левой опоры фиктивной балки a_1b_1 , а второй — нагрузку на этой балке слева от поперечного сечения mn . Поэтому выражение в скобках представляет поперечную силу в сечении mn фиктивной балки. Следовательно, угол наклона действительной балки в точке d можно получить делением поперечной силы в соответствующем сечении фиктивной балки на жесткость при изгибе EJ_z .

Рассматривая прогиб y в точке d , мы можем видеть из рис. 129, а, что

$$y = \bar{ce} - \bar{de}. \quad (c)$$

Из треугольника Ace мы получаем

$$\bar{ce} = \theta_1 x = \frac{R_1 x}{EJ_z}, \quad (d)$$

где R_1 есть реакция левой опоры фиктивной балки. Второй член правой части уравнения (с) представляет расстояние точки d изогнутой оси до касательной Ae и оно получается из уравнения (93)

$$\bar{de} = \frac{1}{EJ_z} (\text{площадь } \Delta a_1mn) \frac{x}{3}, \quad (e)$$

Подставляя выражения (d) и (e) в уравнение (с), получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(R_1 x - \text{пл. } \Delta a_1mn \frac{x}{3} \right). \quad (f)$$

Видно, что выражение в скобках представляет изгибающий момент в поперечном сечении mn фиктивной балки. Таким образом, прогиб в какой-либо точке свободно опертой балки получается делением изгибающего момента в соответствующем поперечном сечении фиктивной балки на жесткость при изгибе EJ_z . Подставляя в уравнение (f) значение R_1 и замечая, что

$$\text{площадь } \Delta a_1mn = \frac{Pbx^2}{2l},$$

получаем

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pabx(l+b)}{6l} - \frac{Pbx^2}{6l} \right] = \frac{Pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6lEJ_z}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (86), которое было ранее получено интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси. Прогиб для точки, находящейся справа от груза P , можно вычислить подобным образом. Результат будет, конечно, такой же, какой дает уравнение (87). Видно, что при помощи графоаналитического метода мы исключаем процесс интегрирования, который был применен в параграфе 33.

В случае равномерно нагруженной балки (рис. 130, а), мы рассматриваем фиктивную балку ab (рис. 130, б), нагруженную параболическим сегментом acb , который в этом случае представляет эпюру изгибающих моментов. Полная фик-

тивная нагрузка на фиктивную балку равняется

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} l,$$

и каждая реакция равна $\frac{ql^2}{24}$. Тогда угол наклона в конце действительной балки получится делением этой реакции на EJ_z . Чтобы вычислить прогиб в середине, мы находим изгибающий момент в середине фиктивной балки, который равняется

$$\frac{ql^2}{24} \left(\frac{l}{2} - \frac{3l}{16} \right) = \frac{5ql^4}{384}.$$

Тогда прогиб получится делением этого момента на EJ_z . В случае свободно опертой балки AB с парой сил M , действующей на конце (рис. 131), эпюра изгибающих моментов представляет треугольник abd , изображенный на рис. 131, б. Рассматривая ab

как фиктивную балку, находим, что полная фиктивная нагрузка равна $\frac{MI}{2}$. Тогда реакции на концах фиктивной балки будут равны

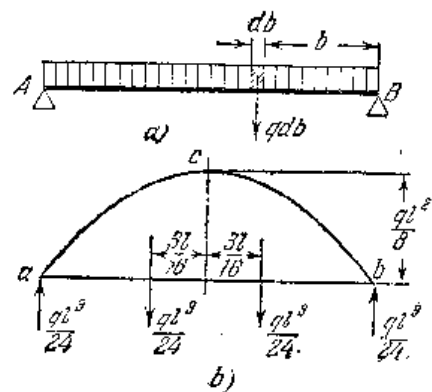


Рис. 130.

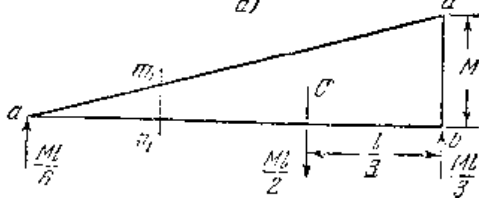
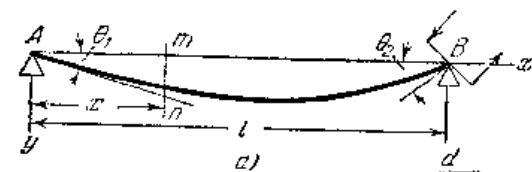


Рис. 131.

$\frac{MI}{6}$ и $\frac{MI}{3}$. Следовательно, углы поворота концов действительной балки равняются

$$\theta_1 = \frac{MI}{6EJ_z} \quad (103)$$

и

$$\theta_2 = -\frac{MI}{3EJ_z}. \quad (104)$$

Прогиб в поперечном сечении m балки получается делением изгибающего момента в соответствующем поперечном сечении m, n , фиктивной балки на EJ_z , что дает

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{MI}{6} x - \frac{MI x^2}{2 l^2} \frac{x}{3} \right) = \frac{MIx}{6EJ_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (105)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить углы поворота концевых сечений и прогибы под грузами и в середине балки, показанной на рис. 132.

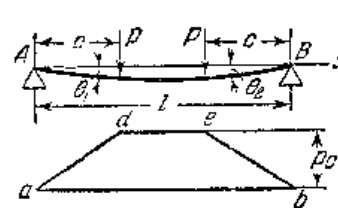


Рис. 132.

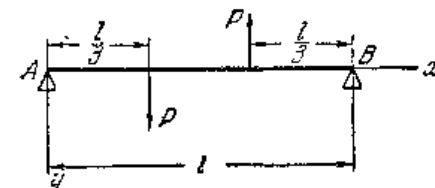


Рис. 133.

Решение. Фиктивная балка будет нагружена трапецией $adcb$, площадь которой равна $Pc(l-c)$. Углы поворота на концах будут

$$\theta_1 = -\theta_2 = \frac{1}{EJ_z} \frac{Pc(l-c)}{2}.$$

Прогиб под грузом равняется

$$(y)_{x=c} = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{Pc^2(l-c)}{2} - \frac{Pc^2 c}{2 \cdot 3} \right] = \frac{Pc^2}{EJ_z} \left(\frac{l}{2} - \frac{2}{3} c \right).$$

Прогиб в середине из уравнения (91) равняется

$$(y)_{x=l/2} = \frac{Pc}{24EJ_z} (3l^2 - 4c^2).$$

2. Определить углы наклона касательных на концах балки, показанной на рис. 92.

$$\text{Ответ. } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{7Hl^2}{180EJ_z}, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -\frac{2Hl^2}{45EJ_z},$$

где H — полное давление на балку.

3. Свободно опертая балка AB нагружена, как показано на рис. 133. Найти прогиб в середине балки и наибольший прогиб; определить углы наклона касательных на концах балки.

Ответ. $(f)_{x=0} = 0$; $(f)_{\max} = \frac{2\sqrt{2}Pl^3}{27^2\sqrt{3}EJ_z}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{Pl^2}{8EJ_z}$.

4. Определить углы θ_1 и θ_2 и прогиб в каком-либо поперечном сечении m, n балки, свободно опертой на концах и изгибаемой парой сил Pc (рис. 134).

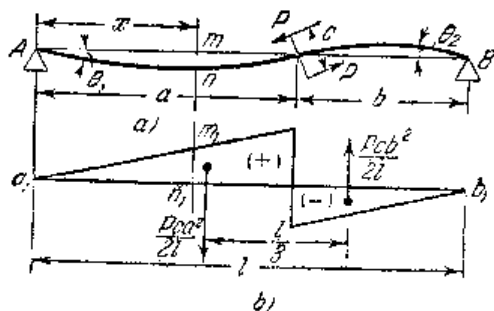


Рис. 134.

Решение. Нагрузка фиктивной балки указана на рис. 134, б. Реакции в a_1 и b_1 равняются

$$R_a = \frac{1}{l} \left[\frac{Pca^2}{2l} \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{Pcb^2}{2l} \cdot \frac{2}{3} b \right],$$

$$R_b = \frac{1}{l} \left[\frac{Pca^2}{2l} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{Pcb^2}{2l} \left(a + \frac{b}{3} \right) \right].$$

Следовательно, углы поворота θ_1 и θ_2 равны

$$\theta_1 = \frac{Pc}{2l^2EJ_z} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right] = \frac{Pc}{2lEJ_z} \left(\frac{l^3}{3} - b^3 \right),$$

$$\theta_2 = -\frac{Pc}{2l^2EJ_z} \left[\frac{2}{3} a^3 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right] = \frac{Pc}{2lEJ_z} \left(\frac{l^3}{3} - a^3 \right).$$

Если $a = b = \frac{l}{2}$, мы получаем

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pcl}{2AEJ_z}.$$

Если $a > \frac{l}{3}$, то угол θ_2 меняет свой знак, и прогибы везде будут направлены вниз. Изгибающий момент в поперечном сечении m, n фиктивной балки равняется

$$R_a x - \frac{Pca^2}{2l} \frac{x^2}{a^2} \frac{x}{3} = \frac{Pcx}{2l^2} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right] - \frac{Pcx^3}{6l}.$$

Следовательно, уравнение изогнутой оси для левой части действительной балки будет

$$y = \frac{Pcx}{2l^2EJ_z} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right] - \frac{Pcx^3}{6lEJ_z}.$$

5. Балка изгибается двумя парами сил, как показано на рис. 135. Определить отношение $M_1 : M_2$, если точка перегиба находится на расстоянии $l/3$ от левой опоры. Ответ. $M_2 = 2M_1$.

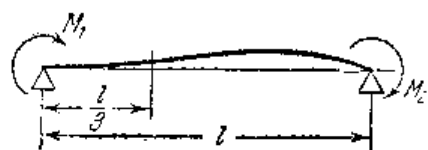


Рис. 135.



Рис. 136.

6. Две доски разной толщины h_1 и h_2 , лежащие одна на другой, несут равномерно распределенную нагрузку, как показано на рис. 136. Определить отношение наибольших напряжений, возникающих в каждой,

Решение. Обе доски имеют одну и ту же изогнутую ось и кривизну; поэтому их изгибающие моменты находятся в таком же отношении, как и моменты инерции их поперечных сечений, т. е. в отношении $h_1^3 : h_2^3$.

Моменты сопротивления находятся в отношении $h_1^3 : h_2^3$, следовательно, наибольшие напряжения относятся как $h_1 : h_2$.

7. Стальной стержень AB имеет такую первоначальную кривизну, что при выпрямлении его силами P (рис. 137) возникает равномерно распределенное давление по длине твердой плоскости MN. Определить силы P, необходимые для выпрямления стержня, и наибольшие напряжения, возникающие в нем, если $l = 50$ см, $f = 0,25$ см и поперечное сечение стержня представляет квадрат со стороной 2,5 см.



Рис. 137.

Решение. Чтобы получить равномерно распределенное давление, первоначальная кривизна стержня должна быть такой же, как и у свободно опертой балки, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $\frac{2P}{l}$. Тогда мы получим

$$M_{\max} = \frac{2Pl^2}{8} = \frac{Pl}{4}, \quad (g)$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{2Pl^3}{lEJ_z}. \quad (h)$$

Наибольшие напряжения будут

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Plh}{8J_z}. \quad (i)$$

Теперь из (h) и (i)

$$\sigma_{\max} = \frac{24Efh}{3l^2} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,25 \cdot 2,5}{5 \cdot 50^2} = 2400 \text{ кг/см}^2$$

и из (i)

$$P = 500 \text{ кг.}$$

8. Определить прогиб f в середине деревянной балки, изображенной на рис. 72, а, если поперечное сечение ее имеет размеры 25×25 см. Найти наибольшее нормальное напряжение.

Ответ. $f = 0,52$ см, $\sigma_{\max} = 39$ кг/см².

9. Пользуясь той же балкой, что и в предыдущей задаче, найти наибольшее нормальное напряжение и прогиб в середине пролета при условии загрузки, показанного на рис. 72, б.

Ответ. $f = 0$, $\sigma_{\max} = 9,5$ кг/см².

37. Метод сложения действия сил

Из рассмотрения графоаналитического метода видно, что прогибы балки вполне определяются эпюрой изгибающих моментов. Из определения понятия изгибающего момента (параграф 20) следует, что изгибающий момент, вызванный в каком-либо поперечном сечении балки несколькими одновременно действующими поперечными грузами, равняется сумме изгибающих моментов, вызванных в том же поперечном сечении каждым грузом, действующим отдельно. Из этого следует, что прогиб, вызванный в какой-либо точке

балки системой одновременно действующих поперечных грузов, можно получить суммированием прогибов, вызванных в этой точке каждым грузом отдельно. Имея, например, уравнения изогнутых осей для случаев, изображенных на рис. 123 и 119, мы можем получить простым суммированием прогибы для консоли

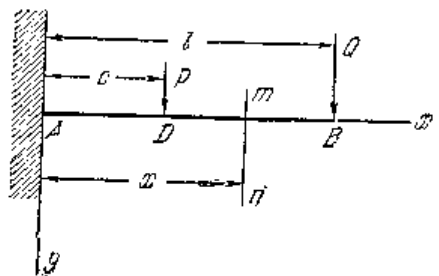


Рис. 138.

или свободно опертой балки, несущей какую-либо поперечную нагрузку.

Взяв в качестве примера случай, показанный на рис. 138, и воспользовавшись уравнениями (97) и (98), мы заключаем, что прогиб в B равняется

$$f_b = \frac{Pl^3}{3EJ_z} + \frac{Pc^3}{2EJ_z} \left(l - \frac{c}{3} \right).$$

Подобно этому прогиб в D равняется

$$f_D = \frac{Q}{EJ_z} \left(\frac{lc^2}{2} - \frac{c^3}{6} \right) + \frac{Pc^3}{3EJ_z}.$$

Прогиб в каком-либо поперечном сечении *m-m* для части *DB* консоли будет

$$y = \frac{Pc^2}{2EJ_z} \left(x - \frac{c}{3} \right) + \frac{Q}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

В случае распределенной нагрузки суммирование будет естественно заменено интегрированием. В качестве примера мы возьмем случай свободно опертой балки, несущей равномерно распределенную нагрузку (рис. 130), и вычислим углы наклона на концах и прогиб в середине балки. Из уравнения (а) параграфа 36 следует, что приращение угла наклона *dh*, вызываемое на левом конце балки элементарным грузом *qdb*, показанным на рис. 130, равняется

$$dh_1 = \frac{qab(l+b)db}{6lEJ_z} = \frac{qb(l^2 - b^2)db}{6lEJ_z}.$$

Тогда угол наклона θ_1 , вызываемый всей нагрузкой, равняется сумме приращений угла наклона, вызываемых всеми элементами *qdb* от *b* = 0 до *b* = *l*. Следовательно,

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{qb(l^2 - b^2)db}{6lEJ_z} = \frac{ql^3}{24EJ_z}. \quad (a)$$

Прогиб в середине получается из уравнения (91), которое было выведено на основании предположения, что груз расположен справа от середины. Какой-либо элементарный груз *qdb*, распо-

ложенный справа от середины, вызывает в середине прогиб

$$(dy)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{qb db}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Суммируя прогибы, вызываемые всеми такими элементарными грузами, расположенными справа от середины, и замечая, что нагрузка на левой половине балки вызывает такой же прогиб в середине, как и нагрузка на правой половине, получаем для полного прогиба

$$f = (y)_{x=\frac{l}{2}} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{qbd b}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}. \quad (b)$$

Результаты (а) и (б) совпадают с формулами (83) и (82), ранее полученными интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси.

Метод сложения действия сил особенно пригоден, если распределенная нагрузка покрывает лишь часть пролета, как на рис. 139. Пользуясь выражением, выведенным выше для $(dy)_{x=\frac{l}{2}}$, найдем, что прогиб,



Рис. 139.

вызванный в середине нагрузкой, расположенной справа от середины, равняется

$$f_1 = \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{qb db}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

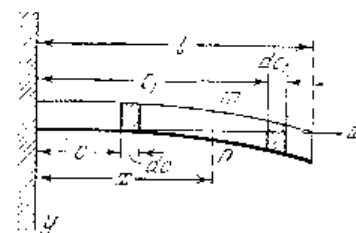


Рис. 140.

Нагрузка, расположенная слева от середины, вызывает прогиб

$$f_2 = \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qb db}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Следовательно, полный прогиб в середине равняется

$$f = f_1 + f_2 = \int_d^{\frac{l}{2}} \frac{qb db}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2) + \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{qb db}{48EJ_z} (3l^2 - 4b^2).$$

Рассмотрим теперь равномерно нагруженную консоль (рис. 140). Прогиб, вызываемый в каком-либо поперечном сечении *m-m* каждым элементарным грузом *qdc*, расположенным слева от сечения, можно найти из уравнения (98) подстановкой *qdc* вместо *P*. Прогиб *y*, вызываемый полной нагрузкой, расположенной слева от *m-m*, равняется сумме прогибов, вызываемых всеми такими элементарными

грузами; при этом c изменяется от $c = 0$ до $c = x$:

$$y_1 = \frac{1}{EJ_z} \int_0^x \frac{qc^2}{2} \left(x - \frac{1}{3}c\right) dc = \frac{q}{2EJ_z} \frac{x^4}{4}.$$

Прогиб, вызываемый в каком-либо поперечном сечении mn элементарным грузом qdc , расположенным справа от сечения, найдется из уравнения (97) подстановкой qdc вместо P и c вместо l . Прогиб y_2 , вызываемый полной нагрузкой, расположенной справа от сечения, равняется сумме прогибов, вызываемых всеми такими элементарными грузами; при этом c_1 изменяется от $c_1 = x$ до $c_1 = l$:

$$y_2 = \frac{1}{EJ_z} \int_x^l q \left(\frac{c_1 x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) dc_1 = \frac{q}{2EJ_z} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 l^2}{2} - \frac{l x^3}{3}\right).$$

Тогда полный прогиб в сечении mn будет равен

$$y = y_1 + y_2 = \frac{q}{2EJ_z} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{l x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right),$$

что согласуется с ранее найденным уравнением (101).

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб в середине балки AB , показанной на рис. 141, если $J_z = 3570 \text{ см}^4$, $q = 700 \text{ кг/м}$, $l = 7,2 \text{ м}$, $a = 3,6 \text{ м}$, $b = 2,4 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$.

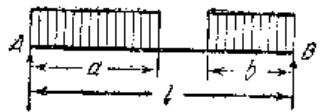


Рис. 141.

Решение. Вследствие того, что $a = \frac{l}{2}$, прогиб, вызываемый в середине нагрузкой, действующей на левой половине балки, на основании уравнения (82) равняется

$$(y_1)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Прогиб, вызываемый в середине нагрузкой, расположенной на правой половине балки, равняется

$$(y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \int_0^b \frac{qc \, dc}{48EJ_z} (3l^2 - 4c^2) = \frac{25}{48 \cdot 162} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Полный прогиб равняется

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = (y_1)_{x=\frac{l}{2}} + (y_2)_{x=\frac{l}{2}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{384} + \frac{25}{48 \cdot 162}\right) \frac{ql^4}{EJ_z} = 2,55 \text{ см}.$$

2. Определить прогиб в середине балки, показанной на рис. 95, когда груз находится в положении, при котором имеет место наибольший изгибающий момент.

Указание. Прогиб можно получить при помощи уравнения (91) и метода сложения действия сил, подставляя в это уравнение $b = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$ для одного груза и $b = \frac{l}{2} - \frac{3}{4}d$ для другого.

3. Определить прогибы в середине и углы поворота концевых сечений балок, показанных на рис. 72, б и 72, д. Принять для этих вычислений двутавровую балку с $J_z = 2500 \text{ см}^4$.

Ответ. Для балки, изображенной на рис. 72, б, $f = 0,3 \text{ см}$, $\theta_1 = 0,00241$ радиана и $\theta_2 = -0,00276$ радиана.

4. Балка со свободно опертыми концами изгибается двумя парами сил M_1 и M_2 , приложенными на концах (рис. 142). Определить углы поворота концевых сечений и положение поперечного сечения, в котором прогиб является наибольшим.

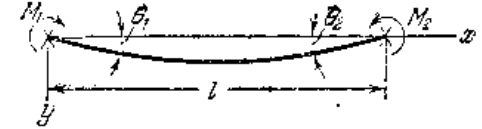


Рис. 142.

Решение. Абсолютные значения углов из уравнений (103) и (104) будут

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3EJ_z} + \frac{M_2 l}{6EJ_z}, \quad |\theta_2| = \frac{M_2 l}{3EJ_z} + \frac{M_1 l}{6EJ_z}.$$

При помощи уравнения (105) находим уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{M_1 l (l-x)}{6EJ_z} \left[1 - \left(\frac{l-x}{l}\right)^2\right] + \frac{M_2 l x}{6EJ_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

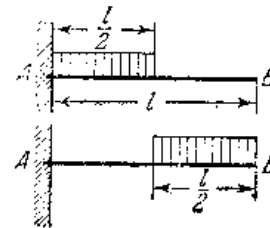


Рис. 143.

Положение наибольшего прогиба можно найти из этого уравнения, если первую производную приравнять нулю.

5. Каково отношение прогибов на концах консолей, показанных на рис. 143, если интенсивность равномерной нагрузки одна и та же в обоих случаях?

Ответ: 7 : 41.

6. Определить прогибы на концах консолей, показанных на рис. 73, предполагая, что материалом является сталь, высота каждой балки равняется 25 см и наибольшее нормальное напряжение равно 1400 кг/см². Воспользоваться методом сложения действия сил.

Решение. Взяв, например, случай, представленный на рис. 73, б, и заметив, что полная распределенная нагрузка равняется $ql = 1800 \text{ кг}$, а груз на конце равняется

$$P = 500 \text{ кг} = \frac{5}{18} ql, \text{ мы имеем}$$

$$f = \frac{ql^4}{8EJ_z} + \frac{Pl^3}{3EJ_z} = \frac{47ql^4}{216EJ_z}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h}{2J_z} = \frac{h}{2J_z} \left(Pl + \frac{q l^2}{2}\right) = \frac{7ql^2 h}{18J_z}.$$

Исключая J_z , получаем

$$f = \frac{47P^2 \sigma_{\max}}{84Eh} = \frac{47 \cdot (300)^2 \cdot 1400}{84 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 25} = 1,41 \text{ см}.$$

Подобным образом могут быть решены другие три задачи.

7. Найти прогиб f конца B консоли AB , нагруженной треугольной нагрузкой ACB (рис. 144).

Решение. Применяя метод сложения действия сил и пользуясь уравнением (102) и результатом задачи 1 параграфа 3б, получаем

$$f = \frac{ql^4}{8EJ_z} + \frac{ql^4}{30EJ_z} = \frac{11ql^4}{120EJ_z}.$$

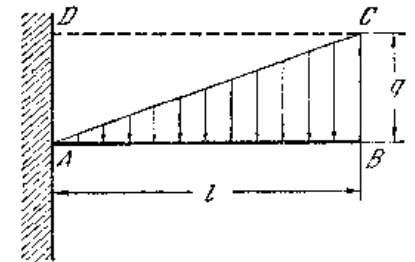


Рис. 144.

38. Прогиб балок с консолями

Балка с консолью может быть разделена на две части: часть между опорами, которая может быть рассматриваема как балка с опертыми концами, и свешивающаяся часть, которая может быть рассматриваема как консоль. Для иллюстрации мы рассмотрим изгиб балки с консолью под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 145). Балка разделена на две части AB и BC

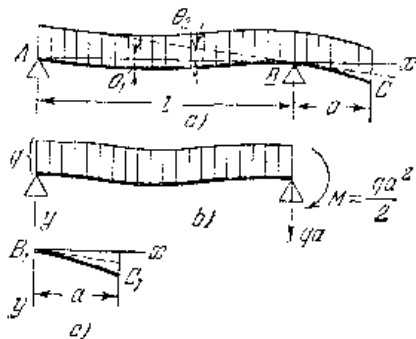


Рис. 145.

и действие консоли на часть балки между опорами заменено поперечной силой qa и парой сил $M = qa^2/2$. Мы находим, что поперечная сила непосредственно передается на опору и что необходимо рассмотреть только пару сил $qa^2/2$. Тогда прогиб в каком-либо поперечном сечении между опорами получится вычитанием прогиба, вызываемого парой сил $qa^2/2$, из прогиба, вызываемого равномерно распределенной нагрузкой b (рис. 145, б). Пользуясь уравнениями (81) и (105), мы получаем

$$y = \frac{q}{24EJ_z} (l^3x - 2lx^2 + x^3) - \frac{qa^2lx}{12EJ_z} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Угол поворота поперечного сечения в точке B получается при помощи уравнений (83) и (104), из которых, считая поворот положительным в направлении движения часовой стрелки, мы получаем

$$\theta_2 = \frac{qa^2l}{6EJ_z} - \frac{ql^3}{24EJ_z}.$$

Прогиб в каком-либо поперечном сечении свешивающегося конца (рис. 145, в) получится теперь путем сложения прогиба консоли (уравнение (101)) с прогибом

$$\theta_2 x = \left(\frac{qa^2l}{6EJ_z} - \frac{ql^3}{24EJ_z} \right) x,$$

вследствие поворота поперечного сечения B .

ЗАДАЧИ

1. Определить прогиб и угол наклона конца C балки, показанной на рис. 147, а.

Ответ. Прогиб $f = \frac{Fa^2(l+a)}{3EJ_z}$; угол $\theta = \frac{Pa(2l+3a)}{6EJ_z}$.

2. Определить прогиб в конце C , а также в середине между опорами балки, показанной на рис. 146.

Решение. Часть балки между опорами будет находиться в условиях балки, нагруженной силой P и парами сил P_1a и P_2b на опорах. Согласно уравнениям (91)

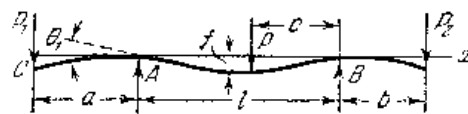


Рис. 146.

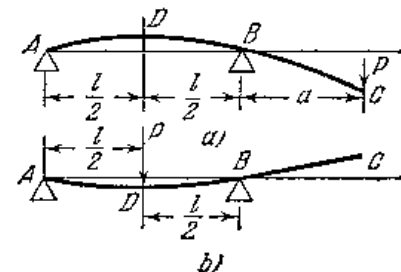


Рис. 147.

и (105) и методу сложения действия сил прогиб в середине равняется

$$f = \frac{Pc}{48EJ_z} (3l^2 - 4c^2) - \frac{P_1al^2}{16EJ_z} - \frac{P_2bl^2}{16EJ_z}.$$

Угол θ_1 на опоре A получается из уравнений (88), (103) и (104)

$$\theta_1 = \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EJ_z} - \frac{P_1al}{3EJ_z} - \frac{P_2bl}{6EJ_z}.$$

Из уравнения (95) прогиб на конце C равняется

$$\frac{P_1a^3}{3EJ_z} - a\theta_1.$$

3. Балка с консолью изгибается в одном случае силой P , приложенной на конце (рис. 147, а), а в другом случае той же силой, приложенной в середине пролета (рис. 147, б). Доказать, что прогиб в точке D в первом случае равен прогибу на конце C во втором случае.

Ответ. В каждом случае прогиб равен

$$\frac{Pl^2a}{16EJ_z}.$$

4. Балка длиной l с двумя равными консолями нагружена двумя равными силами P на концах (рис. 148). Определить отношение, x/l , при котором: 1) про-

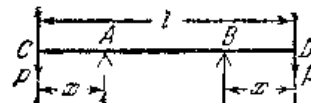


Рис. 148.



Рис. 149.

гиб в середине равен прогибу на любом конце, 2) прогиб в середине имеет наибольшую величину.

Ответ. 1) $x = 0,152l$; 2) $x = l/6$.

5. Деревянная балка круглого поперечного сечения, опертая в C с концом, прикрепленным в A , несет равномерно разделенную нагрузку q на консоли CD (рис. 149). Определить диаметр поперечного сечения и прогиб в D , если $l = 1$ м, $a = 2$ м, $q = 400$ кг/м и $[\sigma] = 80$ кг/см².

Решение. Диаметр найдется из уравнения

$$\frac{qa^2}{2} + \frac{\pi d^3}{32} = [\sigma].$$

Тогда прогиб на конце D найдется из уравнения

$$f = \frac{qa^4}{8EJ_z} + \frac{qa^3l}{6EJ_z} = \frac{qa^3}{24EJ_z} (3a + 4l).$$

6. Балка длиной l несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q (рис. 150). Определить длину консолей так, чтобы численно наибольший изгибающий момент был насколько возможно меньшим. Определить прогиб в середине при этом условии.

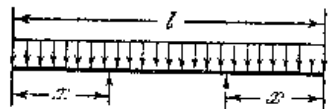


Рис. 150.

Решение. Полагая численные значения изгибающих моментов в середине и на опорах равными, мы получаем

$$x = 0,207l.$$

Прогиб в середине определится из уравнения

$$f = \frac{5}{384} \frac{q(l-2x)^4}{EJ_z} - \frac{qx^2(l-2x)^2}{16EJ_z},$$

в котором первый член правой части представляет прогиб, вызываемый нагрузкой, лежащей между опорами (уравнение (82)), а второй — прогиб, вызываемый нагрузкой, лежащей на консолях (уравнение (105)).

7. Определить прогибы на концах консолей для балок, представленных на рис. 79, а, б, в. Для вычислений принять балку двутаврового сечения $J_z = 2500 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. Если l — длина балки между опорами и a — длина консоли, то

$$f_a = \frac{qa^4}{8EJ_z} + \left(\frac{qa^2l}{6EJ_z} - \frac{ql^3}{24EJ_z} \right) a,$$

$$f_b = \frac{Pa^2l}{4EJ_z} - \frac{117Pa^3}{384EJ_z},$$

$$f_c = \frac{qa^3}{8EJ_z} (a + 2l) - \frac{Pl^2a}{16EJ_z}.$$

39. Влияние поперечных сил на прогиб балок

Выше (стр. 118) при рассмотрении прогибов было принято во внимание лишь действие изгибающего момента. Дополнительный прогиб будет вызван поперечной силой при взаимном сдвиге смежных поперечных сечений одного относительно другого. В результате неравномерного распределения касательных напряжений поперечные сечения, прежде плоские, становятся искривленными, как на рис. 151, на котором показан изгиб только от сдвига¹⁾. Элементы поперечных сечений в центрах тяжести остаются вертикальными и скользят один по другому. Поэтому угол наклона касательной к изогнутой оси только от сдвига равен в каждом поперечном сечении отношению сдвига в центре тяжести этого сечения. Обозначая через y_1 прогиб от сдвига, мы получаем для какого-либо поперечного сечения следующее

выражение для угла наклона:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{y=0}}{G} = \frac{\alpha Q}{FG}, \quad (a)$$

где Q/F есть среднее касательное напряжение τ_{xy} , G — модуль упругости при сдвиге и α — численный коэффициент, на который нужно умножить среднее касательное напряжение для того, чтобы получить касательное напряжение в центре тяжести поперечного сечения. Для прямоугольного поперечного сечения $\alpha = 3/8$ (см. уравнение (66)); для круглого поперечного сечения $\alpha = 3/8$ (см. уравнение (68)). При непрерывной нагрузке на балке поперечная сила Q есть непрерывная функция, которую можно дифференцировать по x . Тогда кривизна, вызываемая только сдвигом, будет

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\alpha}{FG} \frac{dQ}{dx} = -\frac{\alpha}{FG} q,$$

где q — интенсивность нагрузки. Сумма этой кривизны и кривизны, вызываемой изгибающим моментом (см. уравнение (79)), дает полное выражение для кривизны:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EJ_z} \left(M + \frac{\alpha EJ_z}{FG} q \right). \quad (106)$$

Во всех случаях, в которых при определении прогиба нужно принять во внимание влияние поперечной силы, необходимо пользоваться этим уравнением вместо уравнения (79)²⁾. Зная M и q , как функции x , можем легко проинтегрировать уравнение (106) таким же образом, как было указано в параграфе 32.

В этом случае с большим успехом может быть применен графоаналитический метод, причем интенсивность фиктивной нагрузки будет

$$M \leftarrow \alpha \frac{EJ_z}{FG} q \quad (b)$$

вместо одного M (см. стр. 139).

Рассмотрим, например, случай балки, свободно лежащей на двух опорах, с равномерно распределенной нагрузкой (рис. 152). Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении x равен

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}. \quad (c)$$

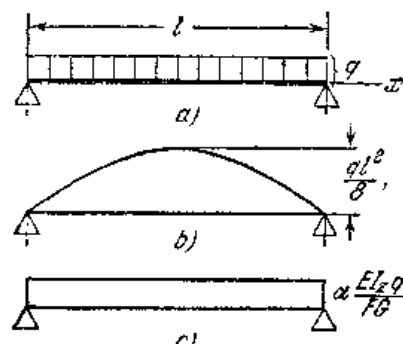


Рис. 152.

Фиктивная нагрузка на балке состоит из двух частей: 1) нагрузки, представленной первым членом уравнения (b) и определяемой параболической эпюрой изгибающих моментов (рис. 152, b) и 2) нагрузки, представленной вторым членом уравнения (b), т. е. $\alpha(EJ_z/FG)q$. Так как q постоянно, то это есть равномерно распределенная нагрузка, показанная на рис. 152, c.

Дополнительный прогиб в каком-либо сечении от поперечной силы равен изгибающему моменту, вызываемому в этом сечении фиктивной балки, показанной на рис. 152, c нагрузкой, разделенной на EJ_z . Следовательно, в середине балки дополнительный прогиб равен

$$f_1 = \frac{1}{EJ_z} \left(\alpha \frac{EJ_z}{FG} q \right) \frac{l^2}{8} = \frac{\alpha l^2 q}{8FG}.$$

¹⁾ Другой способ определения дополнительного прогиба вследствие сдвига рассмотрен на стр. 270.

Складывая это с прогибом от изгибающего момента (уравнение (82)), получаем полный прогиб

$$f = \frac{5ql^4}{384EJ_z} + \frac{\alpha l^2 q}{8FG} = \frac{5ql^4}{384EJ_z} \left(1 + \frac{48\alpha l^2}{5} \frac{E}{l^2 G} \right), \quad (d)$$

где $t_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$ есть радиус инерции поперечного сечения относительно оси z .

Для прямоугольного поперечного сечения высотой h $t_z^2 = \frac{1}{12} h^2$, $\alpha = \frac{3}{2}$. Полагая $\frac{E}{G} = 2(1 + \mu) = 2,6$, получаем из (d)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} \left(1 + 3,12 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Можно видеть, что при $\frac{l}{h} = 10$ влияние поперечной силы на прогиб составляет около 3%. Если отношение $\frac{l}{h}$ уменьшается, то это влияние увеличивается.

Коэффициент α обычно бывает больше 2 для двутавровых балок, и если эти балки коротки, то влияние поперечной силы может быть сравнительно велико. Пользуясь уравнением (70) и рис. 110, мы получаем

$$\frac{\alpha Q}{F} = \frac{Q}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^3}{8} - \frac{h_1^3}{8} (b - b_1) \right],$$

откуда

$$\alpha = \frac{F}{b_1 J_z} \left[\frac{bh^3}{8} - \frac{h_1^3}{8} (b - b_1) \right]. \quad (e)$$

Например, положим $h = 60$ см, $F = 175$ см², $J_z = 91060$ см⁴, $b = 18$ см, $b_1 = 1,7$ см, $h_1 = 35,6$ см, $l = 6h$. Тогда уравнение (e) дает $\alpha = 1,99$. Подставляя в уравнение (d), находим

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z} \left(1 + \frac{48}{5} \cdot 1,99 \frac{91060}{175 \cdot 360^2} \cdot 2,6 \right) = 1,203 \frac{5ql^4}{384EJ_z}.$$

Дополнительный прогиб от сдвига в этом случае равен 20,3% от прогиба, вызываемого изгибающим моментом, и поэтому должен быть принят во внимание.

В случае сосредоточенной нагрузки P (рис. 153) последняя может рассматриваться как предельный случай нагрузки, распределенной по очень короткой части e балки. Величина фиктивной нагрузки P_1 на балке $A_1 B_1$ соответственно второму члену в выражении (b) будет

$$P_1 = \alpha \frac{EJ_z}{FG} P. \quad (f)$$

Дополнительный прогиб от поперечной силы получается делением на EJ_z изгибающего момента, вызываемого в балке фиктивной сосредоточенной нагрузкой, определяемой

$$f_1 = \frac{\alpha Pl}{FG} \frac{1}{4}. \quad (g)$$

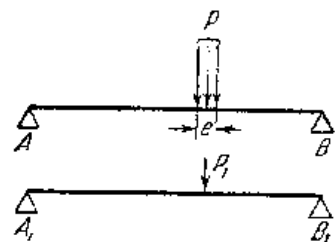


Рис. 153.

уравнением (f). Например, для центральной нагрузки балки изгибающий момент в середине фиктивной балки, возникающий от нагрузки (f), будет $\alpha(EJ_z/FG)Pl/4$, и дополнительный прогиб в середине от поперечной силы равен

Складывая этот прогиб с прогибом, вызываемым только изгибающим моментом (уравнение (90)), получим следующее уравнение для полного прогиба:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} + \frac{\alpha}{FG} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left(1 + \frac{12\alpha l^2}{l^2} \frac{E}{G} \right).$$

Для балки прямоугольного поперечного сечения высотой h имеем

$$\frac{l^2}{l^2} = \frac{h^2}{12l^2}; \quad \alpha = \frac{3}{2},$$

и мы получаем

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left(1 + 3,90 \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (h)$$

При $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ дополнительный прогиб от поперечной силы составляет около 4% от прогиба от изгибающего момента.

Во всех приведенных выше рассуждениях предполагалось, что поперечные сечения балки могут свободно искривляться, как показано на рис. 151. Равномерно нагруженная балка представляет случай, в котором это условие приблизительно удовлетворяется. Поперечная сила в середине такой балки равна нулю и здесь нет никакого искривления. Искривление постепенно увеличивается с увеличением поперечной силы по длине балки от середины к левому и правому концам. Следовательно, условие симметрии деформации относительно середины удовлетворяется. Рассмотрим теперь изгиб сосредоточенной нагрузкой посередине. Из условия симметрии среднее поперечное сечение балки должно остаться плоским. В то же самое время смежные поперечные сечения справа и слева от нагрузки воспринимают поперечную силу, равную $P/2$, и должны иметь место искривление поперечных сечений, вызванное этими поперечными силами. Однако из условий непрерывности деформаций не может быть резкого изменения от плоского среднего сечения к искривленным смежным сечениям. Должно быть непрерывное увеличение искривления по длине балки в любом направлении от середины, и только в некотором расстоянии от нагрузки искривление может быть таким, какое производит поперечная сила $P/2$ при условиях свободы искривлений. Из этих рассуждений необходимо заключить, что вблизи среднего поперечного сечения распределение напряжений будет не таким, как указано элементарной теорией изгиба (см. стр. 187). Искривление будет частично задержано, и дополнительный прогиб от поперечной силы будет несколько меньше того, что найдено выше (см. уравнение (g)). Более подробное исследование¹⁾ показывает, что в случае сосредоточенной нагрузки в середине прогиб там же равняется

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ_z} \left[1 + 2,85 \frac{h^2}{l^2} - 0,84 \left(\frac{h}{l} \right)^3 \right]. \quad (i)$$

Аналогичное условие мы имеем в случае консольной балки. Если заделанное поперечное сечение может свободно искривляться, как показано на рис. 154.a, то

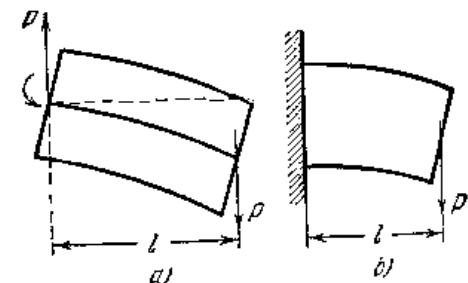


Рис. 154.

¹⁾ См. L. N. G. Filon, цитирован на стр. 107; S. Timoshenko, Phil. Mag., т. 47, стр. 1095, 1924; см. также Th. Kármán, Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolimitanarum, 1923 и автора Theory of Elasticity стр. 95, 1934.

условия будут такими, какие предполагались при выводе уравнения (h). Прогиб консоли прямоугольного поперечного сечения получится подстановкой l вместо $l/2$ и P вместо $P/2$ в это уравнение, т. е.

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} \left(1 + 0,98 \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (j)$$

Когда заделанное поперечное сечение полностью препятствует искривлению (рис. 154, б), условия будут теми же, что предполагались при выводе уравнения (i), и прогиб станет

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} \left[1 + 0,71 \frac{h^2}{l^2} - 0,10 \left(\frac{h}{l} \right)^3 \right], \quad (k)$$

что меньше прогиба, данного уравнением (j).

ГЛАВА VI

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ИЗГИБЕ

40. Лишние закрепления

В предыдущих параграфах были рассмотрены три типа балок: 1) консоль, 2) балка, свободно опертая на концах и 3) консольная балка (со свешивающимися концами). Во всех трех случаях реакции могли быть определены из основных уравнений статики; следовательно, эти задачи — *статически определимы*. Рассмотрим теперь задачи на изгиб балок, в которых уравнений статики недостаточно, чтобы определить все реакции опор, так что необходимо вывести

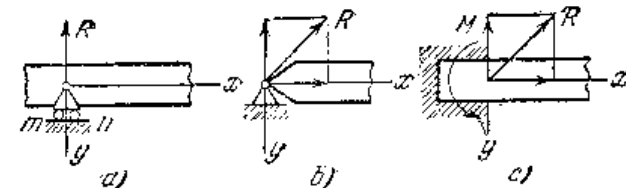


Рис. 155.

дополнительные уравнения, основанные на рассмотрении деформаций балок. Такие задачи называются *статически неопределимыми*.

Рассмотрим различные типы опор, которые может иметь балка. Опора, изображенная на рис. 155, а, называется *шарнирно-подвижной опорой*. Если пренебречь трением в шарнире и в катках, то очевидно, что в этом типе опор реакция должна проходить через центр шарнира и быть перпендикулярной к плоскости mn , по которой передвигаются катки. Следовательно, мы знаем точку приложения реакции и ее направление. Остается только один неизвестный элемент — величина реакции.

На рис. 155, б показана *шарнирно-неподвижная опора*. В этом случае реакция должна проходить через центр шарнира, но может иметь любое направление в плоскости рисунка. Мы имеем два неизвестных элемента, которые нужно определить из уравнений статики, а именно: направление реакции и ее величину, или иначе: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции.

На рис. 155, в представлен заделанный конец. В этом случае не только неизвестны направление и величина реакции, но также и

точка приложения. Реактивные силы, распределенные по заделанному сечению, могут быть заменены силой R , приложенной в центре тяжести сечения, и парой сил M . В таком случае мы имеем три неизвестные, которые нужно определить из уравнений статики, а именно: две составляющих реактивной силы R и величину пары M .

Для балок, нагруженных поперечными силами в плоскости симметрии, мы имеем для определения опорных реакций три уравнения статики, а именно:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0. \quad (a)$$

Если балка оперта так, что имеются лишь три неизвестных *реактивных элемента*, то они могут быть определены из уравнений (а), и, следовательно, задача статически определима. Эти три элемента как раз достаточны, чтобы обеспечить неподвижность балки. Когда число реактивных элементов больше трех, мы говорим, что имеются *лишние закрепления*, и задача является статически неопределимой.

Консоль опирается заделанным концом. В этом случае, как было выяснено выше, число неизвестных реактивных элементов — три и они могут быть определены из уравнений статики (а). Для балок, свободно лежащих на опорах, и балок со свешивающимися концами обычно предполагают, что одна из опор имеет неподвижный, а другая — подвижный шарнир. В таком случае мы опять имеем три неизвестных реактивных элемента, которые могут быть определены из уравнений статики.

Если балка имеет неподвижные шарниры на обоих концах (рис. 156), задача становится статически неопределимой. На каждом конце мы имеем по два неизвестных реактивных



Рис. 156.

элементов, являющихся составляющими каждой реакции. Для определения этих четырех неизвестных мы имеем лишь три уравнения (а). Следовательно, мы имеем одно лишнее закрепление, и для определения реакций необходимо рассмотреть деформацию балки. Вертикальные составляющие реакции можно вычислить из уравнений статики. В случае вертикальной нагрузки можно заключить также из статики, что горизонтальные составляющие H равны, но противоположны по направлению. Чтобы найти величину H , рассмотрим удлинение оси балки при изгибе. Приближенное значение этого удлинения можно получить при допущении, что изогнутая ось балки является параболой¹⁾, уравнение которой представляет

$$y = -\frac{4fx(l-x)}{l^2}, \quad (b)$$

¹⁾ Точное выражение для изогнутой оси балки будет дано ниже (см. том II).

где f есть прогиб посередине. Длина кривой равняется

$$S = 2 \int_0^{l/2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_0^{l/2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (c)$$

В случае пологой кривой величина $(dy/dx)^2$ мала по сравнению с единицей и, пренебрегая малыми величинами порядка выше второго, мы получаем приблизительно

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение (с) и пользуясь уравнением (b), находим длину кривой

$$S = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2}\right).$$

Разность между длиной кривой и расстоянием l между опорами представляет полное осевое удлинение балки и равняется $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l)$. Тогда относительное удлинение будет $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l^2)$. Зная его и обозначая через E модуль упругости материала балки и через F площадь поперечного сечения балки, мы получаем горизонтальную реакцию из уравнения

$$H = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} EF. \quad (d)$$

Необходимо отметить, что для большинства балок на практике прогиб f весьма мал по сравнению с длиной l и растягивающие напряжения $\left(\frac{8}{3}\right)(f^2/l^2)E$, вызываемые силами H , обычно малы по сравнению с напряжениями от изгиба, и ими можно пренебречь. Это оправдывает обычную практику расчета балок с опертыми концами, когда предполагают, что одна из двух опор представляет подвижный шарнир, хотя специальные приспособления для возможности свободного движения шарнира в действительности применяются только в случае больших пролетов, например мостов.

В случае изгиба гибких стержней и тонких металлических пластинок, где прогиб f уже не очень мал по сравнению с l , растягивающими напряжениями, вызываемыми продольными силами H , пренебрегать нельзя. Такие задачи будут разобраны в дальнейшем (см. том II).

В последующем изложении для решения статически неопределимых задач изгиба будет применен метод сложения действия сил. Решения будут получены комбинацией вышеследованных статически определимых случаев таким образом, чтобы удовлетворить условиям на опорах.

41. Балка, заделанная одним концом и опертая другим

В этом случае мы имеем три неизвестных реактивных элемента на одном конце и один неизвестный на другом конце. Следовательно, задача однажды статически неопределима. Начиная со случая одного сосредоточенного груза P (рис. 157, *a*), примем за лишнее закрепление то, которое препятствует левому концу A балки поворачиваться при изгибе. Отбрасывая это закрепление, мы получаем статически определимую задачу, показанную на рис. 157, *b*. Изгиб, вызываемый статически неопределимой парой M_a , теперь будет разобран отдельно, как показано на рис. 157, *c*¹⁾. Очевидно, что изгиб балки, изображенный на рис. 157, *a*, можно получить сложением случаев (*b*) и (*c*). Необходимо лишь величину пары M_a на опоре подобрать таким образом, чтобы удовлетворить условию

$$\theta_1 = -\theta'_1. \quad (a)$$

Таким образом, поворот левого конца балки от силы P будет уничтожен реактивным моментом M_a и будет удовлетворено условие в заделанном конце, а именно, угол наклона здесь равен нулю. Чтобы получить статически неопределимую пару M_a , необходимо лишь вставить в уравнение (а) известные значения для углов θ_1 и θ'_1 из уравнений (88) и (104). Тогда

$$\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EJ_z} = -\frac{M_a l}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_a = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2}. \quad (107)$$

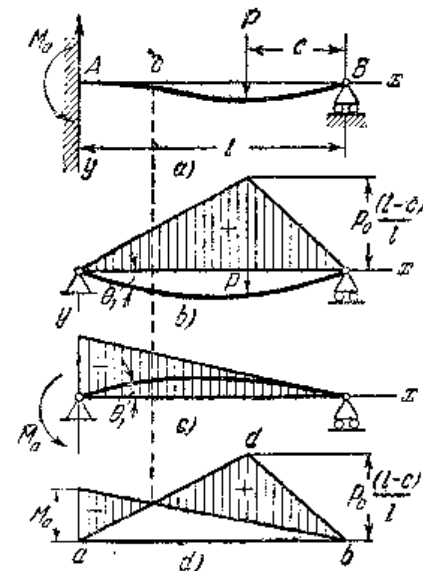


Рис. 157.

Эпюра изгибающих моментов теперь может быть получена сложением эпюр для случаев (*b*) и (*c*), как показано заштрихованной площадью на рис. 157, *d*. Наибольший изгибающий момент будет либо в a , либо в d .

Прогиб в какой-либо точке легко можно получить вычитанием прогиба, вызываемого парой M_a (рис. 157, *c*), из прогиба в этой точке, вызываемого сосредоточенным грузом P (рис. 157, *b*). Уравнения изогнутых осей для обоих этих случаев уже были даны в (86) и (87) стр. 129 и в (105), стр. 141. Возьмем, например, случай $c < \frac{1}{2}l$

¹⁾ Изогнутая ось балки и эпюры изгибающих моментов показаны вместе.

и вычислим прогиб f в середине пролета. Из уравнений (91) и (105) имеем

$$f = \frac{Pc}{48EJ_z}(3l^2 - 4c^2) + \frac{M_a l^2}{16EJ_z},$$

или, при помощи уравнения (107),

$$f = \frac{Pc}{96EJ_z}(3l^2 - 5c^2).$$

В точке c , где изгибающий момент получается равным нулю, кривизна изогнутой оси балки также равна нулю, и мы имеем точку перегиба, т. е. точку, где кривизна изменяет знак.

Из уравнения (107) можно видеть, что изгибающий момент в заделанном конце зависит от положения груза P . Если мы приравняем нулю производную от уравнения (107) по c , мы найдем, что момент M_a имеет численно наибольшее значение при $c = l/\sqrt{3}$. Тогда

$$|M_a|_{\max} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0,192Pl. \quad (108)$$

Изгибающий момент под грузом, из рис. 157, *d*, равняется

$$M_d = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{c}{l} \frac{Pc(l^2 - c^2)}{2l^2} = \frac{Pc}{2l^2}(l-c)^2(2l+c). \quad (b)$$

Если мы возьмем производную от (b) по c и приравняем ее нулю, то мы найдем, что M_d получается наибольшим при

$$c = \frac{l}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0,366l.$$

Подставляя это в уравнение (b), мы получаем

$$(M_d)_{\max} = 0,174Pl.$$

Сравнивая это с уравнением (108), мы находим, что в случае подвижной нагрузки наибольшие нормальные напряжения σ_x будут в заделанном сечении и при условии, что

$$c = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

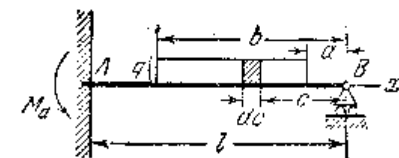


Рис. 158.

Имея решение для одного сосредоточенного груза и пользуясь методом сложения действия сил, можно решить задачу для других типов поперечной нагрузки при помощи изложенной выше теории. Возьмем, например, случай, изображенный на рис. 158. Момент на опоре A , возникающий от элементарной нагрузки qdc , получится из уравнения (107) подстановкой qdc вместо P .

Полный момент M_a на опоре будет

$$M_a = - \int_a^b \frac{qc \, dc (l^2 - c^2)}{2l^2} = - \frac{q}{2l^2} \left[\frac{l^2 (b^2 - a^2)}{2} - \frac{b^4 - a^4}{4} \right]. \quad (c)$$

Если нагрузка распределена по всей длине балки (рис. 159, а), то, подставляя в уравнение (с) $a = 0$, $b = l$, получаем

$$M_a = - \frac{ql^2}{8}. \quad (109)$$

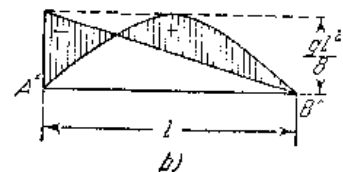
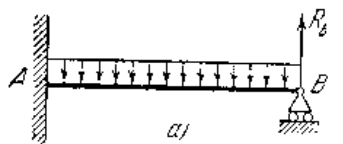


Рис. 159.

Эпюра изгибающих моментов получится вычитанием треугольной эпюры от пары M_a (рис. 159) из параболической эпюры от равномерной нагрузки. Можно видеть, что наибольшие нормальные напряжения от изгиба будут в заделанном сечении. Прогиб в какой-либо точке балки получится вычитанием прогиба в этой точке от пары M_a (уравнение (105))

из прогиба в той же точке от равномерной нагрузки (уравнение (81)). Тогда для середины пролета мы получим

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} - \frac{M_a l^2}{16EJ_z} = \frac{ql^4}{192EJ_z}. \quad (110)$$

ЗАДАЧИ

1. Построить эпюры поперечных сил для случаев, показанных на рис. 157 и 159.

2. Определить наибольший прогиб для случая равномерно распределенной нагрузки, показанной на рис. 159.

Решение. Складывая уравнения (81) и (105), получаем следующие уравнения для изогнутой оси:

$$y = \frac{q}{48EJ_z} (3l^2 x^2 - 5lx^3 + 2x^4). \quad (d)$$

Полагая производную dy/dx равной нулю, мы находим точку наибольшего прогиба при $x = (l/16) (15 - \sqrt{33}) = 0,579l$. Подставляя в (d), получаем

$$f_{\max} = \frac{ql^4}{185EJ_z}.$$

3. Определить реакцию правой опоры балки, показанной на рис. 159, считая эту реакцию за лишнюю неизвестную.

Решение. Отбрасывая опору B, находим, что прогиб этого конца балки, рассматриваемой как консоль, из уравнения (84) будет $ql^4/8EJ_z$. Реакция B должна быть, такова, чтобы уничтожить указанный прогиб. Тогда, пользуясь уравнением (95), получаем уравнение

$$\frac{ql^4}{8EJ_z} - \frac{Bl^3}{3EJ_z} = 0$$

из которого

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

4. Балка нагружена, как показано на рис. 160. Определить момент M_a и реакции A и B опор.

Ответ.

$$-M_a = \frac{ql^2}{8} + \frac{7}{120} q_1 l^2,$$

$$A = \frac{5}{8} ql + \frac{9}{40} q_1 l, \quad B = \frac{3}{8} ql + \frac{11}{40} q_1 l.$$

5. Определить реакцию B опоры равномерно нагруженной балки, показанной на рис. 159, если опора B упруга, так что направленная вниз сила величиной k понижает опору на единицу длины.

Решение. Пользуясь тем же методом, что и в задаче 3, найдем уравнение для определения B:

$$\frac{ql^4}{8EJ_z} - \frac{Bl^3}{3EJ_z} = \frac{B}{k},$$

из которого

$$B = \frac{3}{8} ql \frac{1}{1 + \frac{3EJ_z}{kl^3}}.$$

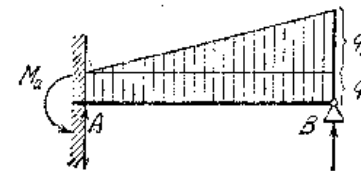


Рис. 160.

6. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для равномерно нагруженной балки, опертой в середине и на концах.

Указание. Из условий симметрии среднее поперечное сечение не поворачивается при изгибе и каждая половина балки будет находиться в условиях балки, заделанной одним концом и свободно опертой другим.

7. Определить прогиб конца C балки, показанной на рис. 161.

Решение. Заменяя действие свешивающегося конца парой Pa, получим изгиб балки между опорами сложением случаев б) и в) на рис. 161. Пользуясь формулами (103) и (104), мы найдем статический неопределимую пару M_a из уравнения $\theta_1 = -\theta'_1$ или

$$\frac{Pal}{6EJ_z} = \frac{M_a l}{3EJ_z},$$

откуда $M_a = Pa/2$. Прогиб в C будет

$$f = \frac{Pa^3}{3EJ_z} + a(\theta_1 - \theta'_1) = \frac{Pa^3}{3EJ_z} + \frac{Pa^2 l}{4EJ_z}.$$

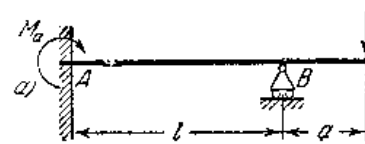


Рис. 161.

8. Определить дополнительное давление балки AB на опору B (рис. 157) от неравномерного нагревания балки при условии, что температура изменяется от t_0 внизу до t вверху балки по линейному закону ($t > t_0$).

Решение. Если опора B отброшена, то неравномерное нагревание вызовет изгиб оси балки по дуге круга. Радиус этого круга может быть определен из уравнения $1/r = \alpha(t - t_0)/h$, в котором h есть высота балки и α — коэффициент линейного расширения. Соответствующий прогиб в B может быть найден, как в задан-

2 на стр. 90, и равен

$$f = \frac{P^2}{2r} = \frac{P\alpha(t-t_0)}{2h}.$$

Этот прогиб должен быть уничтожен реакцией опоры B . Пусть B означает эту реакцию; тогда мы получим

$$\frac{Bl^3}{3EJ_z} = \frac{P\alpha(t-t_0)}{2h},$$

откуда

$$B = \frac{3EJ_z}{2hl} \alpha(t-t_0).$$

9. Консоль AB (рис. 162), нагруженная на конце B , опирается на короткую консоль CD такого же поперечного сечения, как и консоль AB . Определить давление X между двумя балками в точке C .

Решение. Давление X будет найдено из условия, что в точке C обе консоли имеют один и тот же прогиб. Пользуясь уравнением (95) для нижней консоли и уравнением (97) вместе с уравнением (95) для верхней, мы получаем



$$\frac{Xl_1^3}{3EJ_z} - \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{l_1^3}{2} - \frac{l_1^3}{6} \right) - \frac{Xl_1^3}{3EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{3P}{4} \left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3} \right).$$

Рис. 162

Из рассмотрения эпюры изгибающих моментов для верхней и нижней консолью можно заключить, что в точке C верхняя консоль имеет больший угол наклона, чем нижняя. Это указывает на то, что соприкосание между двумя консолями будет только в точках C и D .

10. Решить задачу 7, полагая, что вместо сосредоточенного груза равномерная нагрузка интенсивностью q распределяется: 1) по длине a свешивающегося конца и 2) по всей длине балки. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для этих двух случаев.

11. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для случая, показанного на рис. 158, если $a = 1,2$ м, $b = 3,6$ м, $l = 4,5$ м и $q = 500$ кг/м.

42. Балка с двумя заделанными концами

В этом случае (рис. 163) мы имеем шесть реактивных элементов (три на каждом конце), т. е. задача имеет три статически неопределимых элемента. Однако для обыкновенных балок горизонтальными составляющими реакций можно пренебречь (см. стр. 155), что уменьшает число статически неопределимых величин до двух. Прием моменты M_a и M_b на опорах за статически неопределимые величины. Тогда для случая одной сосредоточенной силы P (рис. 163, a) решение можно получить сложением двух статически определимых задач, показанных на рис. 163, b и 163, c . Очевидно, что условия в заделанных концах балки AB будут удовлетворены, если пары M_a и M_b подобраны таким образом, чтобы сделать

$$\theta_1 = -\theta'_1, \quad \theta_2 = -\theta'_2. \quad (a)$$

Из этих двух уравнений получаются статически неопределимые пары. Пользуясь уравнениями (88) и (89) для сосредоточенной силы и уравнениями (103) и (104) для пар, получаем из уравнения (a)

$$-\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6EJ_z} = \frac{M_a l}{3EJ_z} + \frac{M_b l}{6EJ_z},$$

$$-\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EJ_z} = \frac{M_a l}{6EJ_z} + \frac{M_b l}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_a = -\frac{Pc^2(l-c)}{l^2}, \quad M_b = -\frac{Pc(l-c)^2}{l^2}. \quad (111)$$

Оба опорных момента отрицательны и вызывают изгиб выпуклостью вверх. Складывая эпюры изгибающих моментов для случаев b) и c), получаем эпюру, показанную на рис. 163, d . Мы видим, что наибольший положительный изгибающий момент для случая, показанного на рис. 163, a , находится под силой в точке C . Его величина может быть найдена из рис. 163, d и выражена следующей формулой:

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} + \frac{M_a c}{l} + \frac{M_b(l-c)}{l} = \frac{2Pc^2(l-c)^2}{l^3}. \quad (112)$$

Из рис. 163, d можно видеть, что численно наибольший изгибающий момент будет или в точке C , или на ближайшей опоре. Для подвижной нагрузки, т. е. когда c изменяется, при $c < l/2$ наибольшее численное значение M_c получается подстановкой $c = l/3$ в уравнение (111). Этот максимум равен $4Pl/27$. Изгибающий момент под грузом будет наибольшим, когда $c = l/2$, и этот максимум из уравнения (112) равен $Pl/8$. Следовательно, для подвижной нагрузки наибольший момент будет на конце.

Пользуясь методом сложения действия сил, прогиб в какой-либо точке балки можно получить сложением прогиба от силы P с прогибами от пар M_a и M_b .

Имея решение для одного сосредоточенного груза P , какой-либо иной тип поперечной нагрузки легко можем исследовать при помощи метода сложения действия сил.

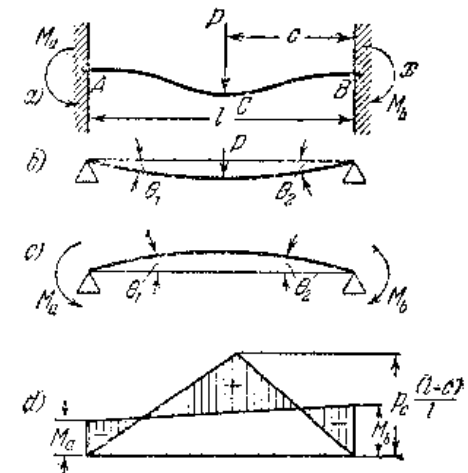


Рис. 163.

ЗАДАЧИ

1. Построить эпюру поперечных сил для случая, показанного на рис. 163, а, если $P = 400$ кг, $l = 3,6$ м и $c = 1,2$ м.
2. Найти моменты на концах балки, нагруженной в точках, отстоящих на $1/3$ длины балки от опор (рис. 164). Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Ответ. $M_a = M_b = -\frac{2}{9} Pl$.

3. Решить предыдущую задачу, когда сила в точке D имеет противоположное направление.

Ответ. $M_a = -M_b = -\frac{2}{27} Pl$.

4. Построить эпюру изгибающих моментов для равномерно нагруженной балки с заделанными концами (рис. 165).

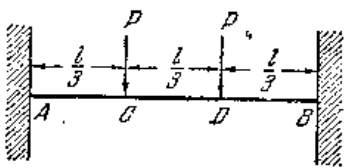


Рис. 164.

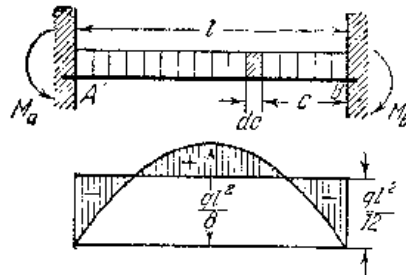


Рис. 165.

Решение. Момент в A , вызываемый элементарным грузом qdc (рис. 165, а), по уравнению (111), равняется

$$dM_a = -\frac{qc^2(l-c)dc}{l^2}.$$

Тогда момент, вызываемый нагрузкой, лежащей по всему пролету, равняется

$$M_a = -\int_0^l \frac{qc^2(l-c)dc}{l^2} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Момент на опоре B будет иметь ту же величину. Складывая параболическую эпюру изгибающих моментов, вызываемых равномерной нагрузкой, с прямоугольной эпюрой моментов от двух равных пар, приложенных на концах, мы получим эпюру, показанную на рис. 165, б заштрихованной площадью.

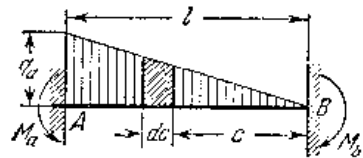


Рис. 166.

5. Определить моменты на опорах балки с заделанными концами и нагруженной треугольной нагрузкой, показанной на рис. 166.

Решение. Интенсивность нагрузки в расстоянии c от опоры B равняется qa^2/l , а нагрузка, изображенная заштрихованной элементарной нагрузкой, на основании уравнения (111) будет

$$dM_a = -\frac{qa^2c^2(l-c)dc}{l^3}, \quad dM_b = -\frac{qa^2c^2(l-c)^2dc}{l^3}.$$

Поэтому

$$M_a = -\int_0^l \frac{qa^2c^2(l-c)dc}{l^3} = -\frac{qa^2l^2}{20}, \quad M_b = -\int_0^l \frac{qa^2c^2(l-c)^2dc}{l^3} = -\frac{qa^2l^2}{30}.$$

6. Определить реактивные моменты M_a и M_b в балке с заделанными концами, изгибаемой парой Pc (рис. 167).

Решение. Пользуясь решением задачи 4, стр. 142 и уравнениями (103) и (104), получаем следующие уравнения:

$$2M_a + M_b = -\frac{3Pc}{l^2} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right],$$

$$2M_b + M_a = -\frac{3Pc}{l^2} \left[\frac{2}{3} a^3 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right],$$

из которых можно легко вычислить M_a и M_b .

7. Определить моменты на опорах балки с заделанными концами от неравномерного нагревания, если температура изменяется от t_0 внизу до t сверху балки по линейному закону.

Ответ. $M_a = M_b = \frac{\alpha EJ_z(t-t_0)}{h}$,

где α — коэффициент линейного расширения и h — высота балки.

8. Определить влияние на реактивную силу и реактивный момент в A , вызываемое малым вертикальным перемещением δ заделанного конца A балки AB (рис. 163).

Решение. Отбросим опору A ; тогда прогиб f_1 в A и угол наклона θ_1 в этой точке найдутся как для консоли, заделанной в B и нагруженной силой P , т. е.

$$f_1 = \frac{Pc^3}{3EJ_z} + \frac{Pc^2}{2EJ_z}(l-c), \quad \theta_1 = \frac{Pc^2}{2EJ_z}.$$

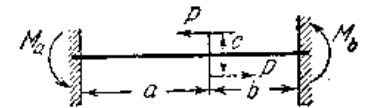


Рис. 167.

Прикладывая в A реактивную силу X вверх и реактивную пару Y в том же направлении, как M_a , такой величины, чтобы уничтожить угол наклона θ_1 и сделать прогиб равным δ , получим для определения неизвестных величин X и Y следующие уравнения:

$$\frac{Xl^2}{2EJ_z} - \frac{Yl}{EJ_z} = \frac{Pc^2}{2EJ_z}, \quad \frac{Xl^3}{3EJ_z} - \frac{Yl^2}{2EJ_z} = f_1 - \delta.$$

9. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 166, если $qa = 500$ кг/м, $l = 4,5$ м.

10. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки с заделанными концами, если левая половина балки равномерно нагружена нагрузкой $q = 500$ кг/м. Длина балки $l = 5$ м.

43. Рамы

Метод, примененный в предыдущем параграфе для статически неопределимых балок, можно приложить также к изучению рам. Возьмем в качестве простого примера симметричную раму (рис. 168), с шарнирами в C и D , и нагруженную симметрично. Вид рамы после деформации показан пунктиром. Пренебрегая изменением длины стержней и влиянием осевых сил на изгиб стержней¹⁾, можем рассматривать раму составленной из трех балок, как показано на рис. 168, б. Очевидно, что на концах горизонтальной балки AB

¹⁾ Одновременное действие изгиба и сжатия будет рассмотрено ниже (см. часть II).

будут действовать пары M , которые препятствуют свободному повороту этих концов и представляют действие вертикальных стержней на горизонтальную балку. Эта пара M может быть принята за статически неопределимую величину. Зная M , можем изгиб трех стержней исследовать без всякого затруднения. Для определения M мы имеем условие, что в A и B стержни между собой соединены жестко, так что поворот верхнего конца вертикального стержня AC должен быть равен повороту левого конца горизонтального стержня. Отсюда уравнение для определения M будет

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (a)$$

θ_1 должно быть определено из изгиба горизонтальной балки AB . Если обозначим через l длину этой балки и через EJ — ее жест-

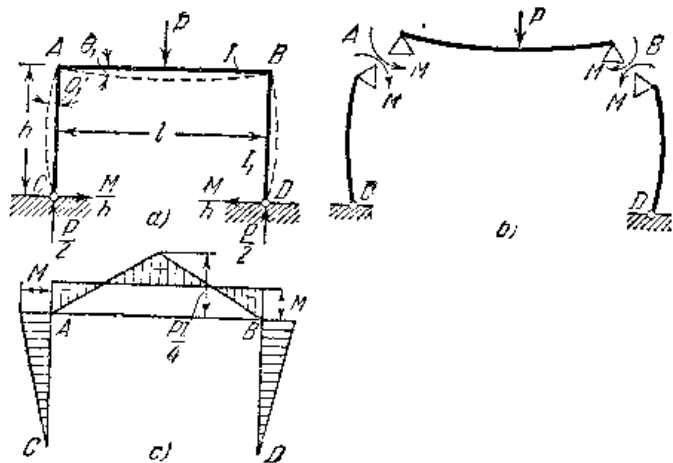


Рис. 168.

кость при изгибе, то угол поворота конца A от силы P , на основании уравнения (88) при $b=l/2$, равняется $Pl^2/16EJ$. Пары на концах сопротивляются этому изгибу и вызывают угол поворота в противоположном направлении, который из уравнений (103) и (104) равняется $Ml/2EJ$. Окончательное значение угла поворота будет

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Ml}{2EJ}.$$

Рассматривая теперь вертикальный стержень AC как балку с опертыми концами, изгибаемую парой сил M , и обозначая через h его длину и через EJ_1 его жесткость при изгибе, найдем из уравнения (104) угол вверху

$$\theta'_1 = \frac{Mh}{3EJ_1}.$$

Вставляя в уравнение (a), получаем

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Ml}{2EJ} = \frac{Mh}{3EJ_1},$$

откуда

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}. \quad (113)$$

Это есть абсолютное значение M . Его направление показано на рис. 168, *b*. Зная M , можем построить эпюру изгибающих моментов, как показано на рис. 168, *c*. Также показаны реакции в шарнирах C и D (рис. 168, *a*). Вертикальные составляющие этих реакций из условий симметрии равны между собой и каждая из них равна $P/2$. Что же касается горизонтальных составляющих, то их величина M/h получается, если рассматривать вертикальные стержни, как свободно опертые балки и нагруженные сверху парами M .

Эта задача может быть решена и другим путем, если вместо M за статически неопределимую величину принять горизонтальную реакцию H в шарнирах C и D . Статически неопределимая задача решается путем сложения двух статически определимых задач, показанных на рис. 169, *b* и 169, *c*. В случае *b*) отброшено лишнее закрепление, препятствующее горизонтальному перемещению шарниров C и D . Вертикальные стержни уже не имеют изгиба. Горизонтальный стержень AB находится в условиях бруса со свободно опертыми концами, углы поворота которых равны $Pl^2/16EJ$, и поэтому горизонтальное перемещение каждого шарнира C и D равняется $h(Pl^2/16EJ)$. В случае *c*) рассматривается действие сил H . Эти силы вызывают изгибающие пары на концах горизонтального стержня AB , равные Hh , так что углы поворота его концов θ' будут $Hh/2EJ$. Перемещение каждого шарнира C и D состоит из двух частей: 1) перемещения $\theta'h = Hh^2/2EJ$, вследствие поворота верхнего конца и 2) перемещения $Hh^2/3EJ$, вертикальных стержней, как консолей. В действительности же (рис. 169, *a*) шарниры C и D не перемещаются. Следовательно, горизонтальные перемещения, вызываемые силой P

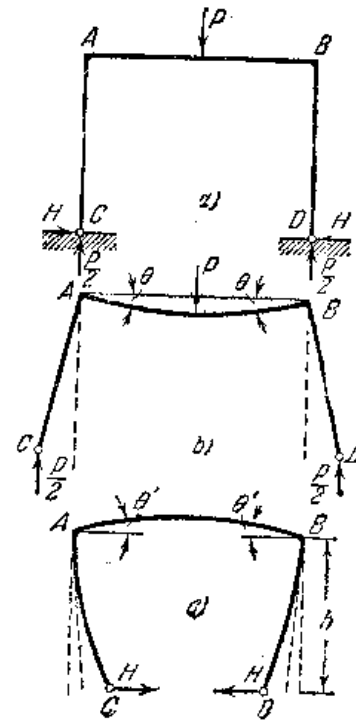


Рис. 169.

(рис. 169, б), должны быть уничтожены силами H (рис. 169, с), т. е.

$$\frac{Pl^2}{16EJ} h = \frac{Hh^2l}{2EJ} + \frac{Hh^3}{3EJ_1},$$

откуда

$$H = \frac{1}{h} \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}.$$

Замечая, что $Hh = M$, видим, что этот результат согласуется с найденным выше уравнением (113).

Этот последний метод анализа особенно пригоден для несимметричной нагрузки, как например, указанной на рис. 170. Отбрасывая закрепление, препятствующее горизонтальному перемещению шарниров C и D , мы имеем положение, изображенное на рис. 170, б. Очевидно, что увеличение расстояния между C и D можно получить умножением суммы углов θ_1 и θ_2 на h . Пользуясь уравнениями (88) и (89), находим это увеличение расстояния

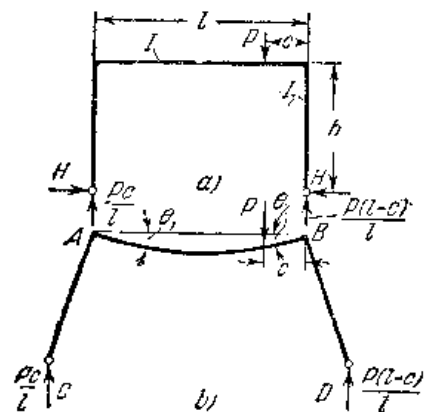


Рис. 170.

$$h \left[\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEJ} + \frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6lEJ} \right] = \frac{Pc(l-c)h}{2EJ}.$$

Оно должно быть уничтожено горизонтальными реакциями H (рис. 169, с). Тогда, пользуясь результатами, полученными в предыдущей задаче, мы получаем следующее уравнение для определения H :

$$2 \left(\frac{Hh^2l}{2EJ} + \frac{Hh^3}{3EJ_1} \right) = \frac{Pc(l-c)h}{2EJ},$$

откуда

$$H = \frac{Pc(l-c)}{2hl} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}. \quad (114)$$

Имея решение для одной сосредоточенной силы, можем легко исследовать при помощи метода сложения действия сил какой-либо иной случай нагрузки балки AB рамы.

Рассмотрим теперь раму с заделанными опорами и несимметрично нагруженную, как показано на рис. 171. В этом случае мы имеем три реактивных элемента на каждой опоре, и система имеет три статически неопределимых элемента. При решении этой задачи мы будем пользоваться методом, основанным на методе сложения действия сил, в котором данная система нагрузки разделяется на части,

так что для каждой отдельной нагрузки можно найти простое решение ¹⁾. Задача, показанная на рис. 171, а, может быть решена сложением решений двух задач, показанных на рис. 171, б и 171, с. Случай, показанный в б), является симметрич-

ным и может быть рассмотрен таким же образом, как первый пример, показанный на рис. 168. Исследование случая, изображенного в с), показывает, что точка перегиба O горизонтального стержня AB находится в середине стержня. Это следует из того условия, что силы $P/2$ равно отстоят от вертикальной оси симметрии рамы и противоположны по направлению. Момент, прогиб и осевое усилие, вызываемые в средней точке O горизонтальной балки AB одной из сил $P/2$, будут уничтожены действием другой силы $P/2$. Следовательно, в точке O не будет ни изгибающего момента, ни вертикального прогиба, ни осевой силы. Величина поперечной силы X в той же точке может быть найдена из того условия, что вертикальный прогиб в O равен нулю (рис. 171, д). Этот прогиб состоит из двух частей: прогиба f_1 от изгиба консоли OB и прогиба f_2 вследствие поворота конца B вертикального стержня BD . Пользуясь известными уравнениями для консоли (уравнение (98)) и обозначениями, данными на рисунке, получим следующие уравнения:

$$f_1 = \frac{Pc^3}{2 \cdot 3EI} + \frac{Pc^2}{2 \cdot 2EJ} \left(\frac{l}{2} - c \right) - \frac{X \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3EJ},$$

$$f_2 = \left(\frac{Pc}{2} - X \frac{l}{2} \right) \frac{h}{EJ_1} \frac{l}{2}.$$

Подставляя это в уравнение $f_1 + f_2 = 0$, найдем величину X поперечной силы. Определив X , можем вычислить изгибающий момент для случая с) в любом поперечном сечении рамы. Складывая его с изгибающими моментами для симметричного случая б), получим решение задачи ²⁾.

ЗАДАЧИ

1. Найти осевые усилия во всех стержнях рамы, показанной на рис. 168, а. Ответ. Сжимающие усилия в вертикальных стержнях $= P/2$; сжимающее усилие в горизонтальном стержне $= M/h$.
2. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 170, а.

¹⁾ Такой метод был широко применен W. L. Andrus. см. его книгу «Das B-U Verfahren», Berlin, 1919.

²⁾ Решения многих важных задач на рамы можно найти в книге: Kleinloger I, Mehrstielige Rahmen, Berlin, 1927.

3. Определить изгибающие моменты в узлах рамы, показанной на рис. 172. *Решение.* Рассматривая стержень *AB* как балку, опертую на концах (рис. 172, б), и обозначая через *M* моменты в узлах, получим угол поворота θ_1 ,

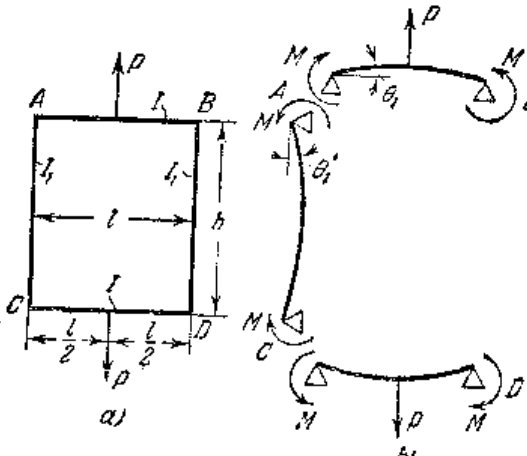


Рис. 172.

Полагая это равным углу θ'_1 на концах вертикальных стержней, которые изгибаются только парами *M*, получим следующее уравнение для определения *M*:

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Ml}{2EJ} = \frac{Mh}{3EJ_1} - \frac{M_1h}{6EJ_1}$$

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Ml}{2EJ} = \frac{Mh}{2EJ_1}$$

откуда

$$M = \frac{Pl}{8} \frac{1}{1 + \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}$$

4. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы предыдущей задачи.

5. Определить горизонтальные реакции *H* для случая, показанного на рис. 173.

Указание. Пользуясь уравнением (114) и применяя метод сложения действия сил, получаем

$$H = \frac{ql^2}{24h} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}}$$

6. Построить эпюру изгибающих моментов для трех стержней предыдущей задачи, полагая $h=l$ и $J=J_1$.

7. Определить изгибающие моменты в узлах рамы, показанной на рис. 174.

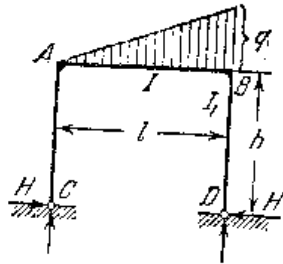


Рис. 173.

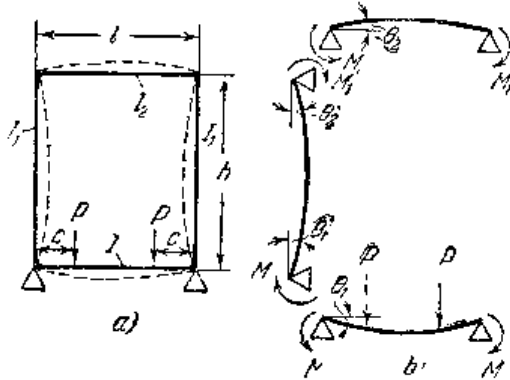


Рис. 174.

Решение. Разъединяя раму, как показано на рис. 174, б, получим уравнения для определения пар *M* и *M*₁

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad \text{и} \quad \theta_2 = \theta'_2$$

Вставляя в эти уравнения значения

$$\theta_1 = \frac{Pc(l-c)}{2EJ} - \frac{Ml}{2EJ}, \quad \theta'_1 = \frac{Mh}{3EJ_1} - \frac{M_1h}{6EJ_1}$$

$$\theta_2 = \frac{M_1l}{2EJ_2}, \quad \theta'_2 = \frac{Mh}{6EJ_1} - \frac{M_1h}{3EJ_1}$$

получим два уравнения для определения *M* и *M*₁.

8. Построить эпюру изгибающих моментов и определить осевые усилия во всех стержнях рамы, показанной на рис. 174, а, если $h=l$ и $J=J_1=J_2$.

9. Симметричная прямоугольная рама подвергается действию горизонтальной силы *H*, как показано на рис. 175. Определить изгибающие моменты *M* и *M*₁ в узлах.

Решение. Вид деформированной рамы показан на рис. 175, а. Разъединяя раму, как показано на рис. 175, б, и прилагая моменты по направлениям, которые согласуются с искаженным видом рамы, мы имеем для стержня *CD*

$$\theta_1 = \frac{M_1l}{6EJ} = \left(\frac{Hh}{2} - M\right) \frac{l}{6EJ} \quad (b)$$

Рассматривая теперь вертикальный стержень *AC*, как консоль, заделанную на конце *C* с углом θ_1 , найдем угол наклона в конце *A*

$$\theta'_2 = \theta_1 + \frac{H}{2} \frac{h^2}{2EJ_1} - \frac{Mh}{EJ_1} \quad (c)$$

Наконец, вследствие изгиба стержня *AB*

$$\theta_2 = \theta'_2 = \frac{Ml}{6EJ_2} \quad (d)$$

Тогда из уравнений (b), (c) и (d) получаем

$$M = \frac{Hh}{2} \left(1 + \frac{3h}{l} \frac{J}{J_1}\right) \frac{1}{1 + \frac{J}{J_2} + 6 \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}} \quad (e)$$

Вставляя в уравнение (b), можем найти изгибающий момент *M*₁. Когда горизонтальный стержень имеет очень большую жесткость, мы приближаемся к условиям рамы, показанной на рис. 171, а и подверженной действию поперечной нагрузки *H*. Вставляя в (e) $J=\infty$, получаем для этого случая

$$M = \frac{Hh}{4} \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \frac{l}{h} \frac{J}{J_2}} \quad (f)$$

Случай рамы, показанной на рис. 168 с шарнирными опорами и подверженной действию поперечной нагрузки, приложенной в *A*, можно получить подстановкой $J=0$ в уравнение (e).

10. Определить горизонтальные реакции *H* и изгибающие моменты *M*_a и *M*_b в узлах *A* и *B* рамы, показанной на рис. 176.

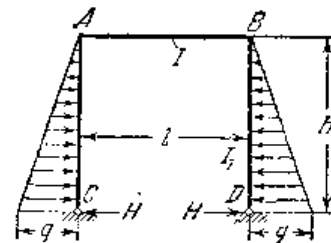


Рис. 176.

Ответ.

$$H = \frac{qh}{20} \frac{11m+20}{2m+3}, \quad M_a = M_b = -\frac{qh^2}{60} \frac{7m}{2m+3}, \quad \text{где } m = \frac{h}{l} \frac{J}{J_1}$$

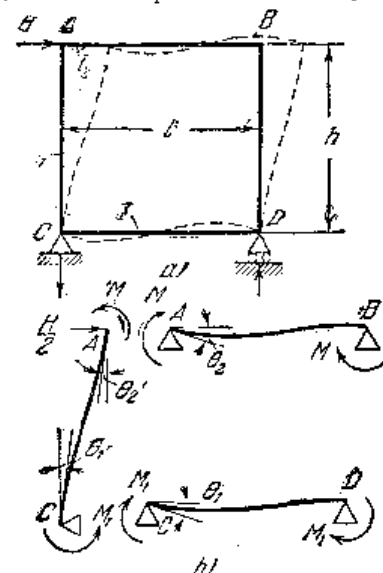


Рис. 175.

11. Рама состоит из двух стержней, соединенных жестко в B и заделанных в A и C (рис. 177). Определить изгибающий момент M в B и сжимающее усилие

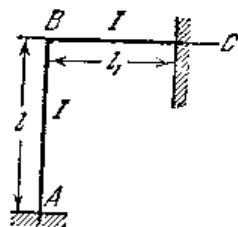


Рис. 177.

в AB , если, вследствие повышения температуры, стержень AB увеличивается в длине на $\Delta = \alpha l(t - t_0)$.

Ответ. P и M могут быть найдены из уравнений:

$$\frac{Pl_1^3}{3EJ} - \frac{Ml_1^2}{2EJ} = \Delta, \quad \frac{Pl_1^2}{2EJ} - \frac{Ml_1}{EJ} = \frac{Ml}{4EJ}.$$

44. Балки на трех опорах

В случае балки на трех опорах (рис. 178, a) имеется один статически неопределимый элемент. Пусть будет этим элементом реакция промежуточной опоры. Тогда при помощи метода сложения действия сил решение случая a) можно получить путем сложения

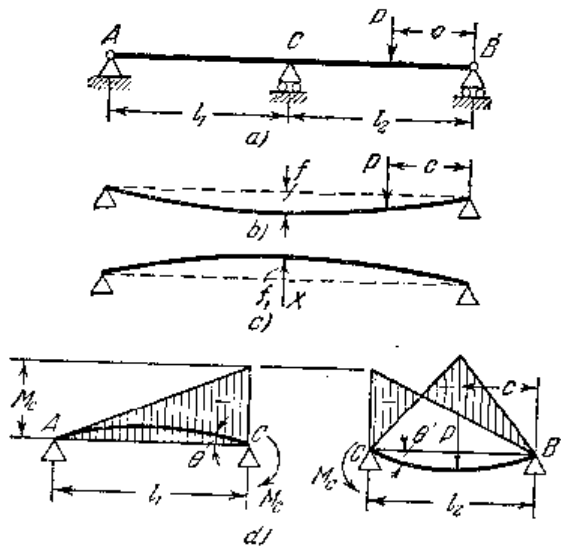


Рис. 178.

случаев, представленных в b) и c) рис. 178. Промежуточная реакция X найдется из того условия, что прогиб f , вызванный в C силой P , должен быть уничтожен реакцией X . Пользуясь уравнением (86).

получаем следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Pl_1 [(l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^2]}{6(l_1 + l_2)EJ_z} - \frac{Xl_1^3 l_2^3}{3(l_1 + l_2)EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{Pc [(l_1 + l_2)^2 - c^2 - l_1^2]}{2l_1 l_2^2}. \quad (115)$$

Если P действует на левом пролете балки, то можно воспользоваться тем же уравнением, но расстояние c должно быть измерено от опоры A и l_1 и l_2 должны перемениться местами. Для $l_1 = l_2 = l$ из уравнения (115) следует

$$X = \frac{Pc(3l^2 - c^2)}{2l^3}. \quad (116)$$

Имея решение для одной силы P , какую-либо иную нагрузку легко можно исследовать при помощи метода сложения действия сил.

Та же задача может быть решена и другим способом. Вообразим балку разрезанной на две части в C (рис. 178, d) и пусть M_c обозначает величину изгибающего момента первоначальной балки в этом поперечном сечении. Таким образом, задача сводится к рассмотрению двух свободно опертых балок, показанных в d), которые являются статически определенными. Величина M_c определится из условий непрерывности изогнутой оси на опоре C . Из этого следует, что угол $1) \theta = \theta'$, или, пользуясь уравнениями (88) и (104) и предполагая, что изгибающий момент M_c положителен, получаем

$$-\frac{M_c l_1}{3EJ_z} = -\frac{Pc(l_2^2 - c^2)}{6l_2 EJ_z} + \frac{M_c l_2}{3EJ_z},$$

откуда

$$M_c = -\frac{Pc(l_2^2 - c^2)}{2l_2(l_1 + l_2)}. \quad (117)$$

Следовательно, M_c — отрицателен и направлен, как указано на рис. 178, d . Эпюра изгибающих моментов показана заштрихованной площадью на рис. 178, d .

ЗАДАЧИ

1. Для примера, представленного на рис. 178, доказать, что величина изгибающего момента M_c , определяемая уравнением (117), та же самая, что получается для поперечного сечения C при помощи уравнения (115).
2. Построить эпюру поперечных сил для балки предыдущей задачи, если $l_1 = l_2$, $c = l_2/2$ и $P = 400$ кг.
3. Балка на трех опорах (рис. 178, a), несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Определить изгибающий момент на опоре C .

Решение. Пользуясь методом сложения действия сил, подставляя qdc вместо P в уравнение (117) и интегрируя по обоим пролетам, получаем

$$M_c = -\int_0^{l_2} \frac{qc(l_2^2 - c^2)dc}{2l_2(l_1 + l_2)} - \int_0^{l_1} \frac{qc(l_1^2 - c^2)dc}{2l_1(l_1 + l_2)} = -\frac{q}{8} \frac{l_2^3 + l_1^3}{l_1 + l_2}$$

1) Угол считаем положительным, если вращение происходит по направлению движения часовой стрелки.

при $l_1=l_2=l$, $M_c = -\frac{ql^2}{8}$. Направление этого момента такое, как указано на рис. 178, *d*.

4. Построить эпюру поперечных сил для предыдущей задачи, полагая $l_1=l_2$ и $q=700 \text{ кг/м}$.

5. Определить численно наибольший изгибающий момент в балке *ACB* (рис. 178, *a*), если $P=4 \text{ т}$, $l_1=3 \text{ м}$, $l_2=4 \text{ м}$, $c=2 \text{ м}$.

Ответ. $M_{\max}=3140 \text{ кгм}$.

6. Балка на трех равноотстоящих друг от друга опорах несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Какое будет иметь влияние на среднюю реакцию понижение средней опоры на величину δ ?

Решение. Пользуясь указанным на рис. 178, *b* и 178, *c* методом, найдем среднюю реакцию X из уравнения

$$\frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EJ} = \frac{X(2l)^3}{48EJ} + \delta,$$

откуда

$$X = \frac{5}{8} 2ql - \frac{6\delta EJ}{l^3}.$$

7. Определить дополнительное давление балки *AB* на опору *C* (рис. 178, *a*) вследствие неравномерного нагревания балки, если температура изменяется от t внизу до t_1 сверху балки по линейному закону, полагая $t > t_1$ и $l_1=l_2=l$.

Решение. Если отбросить опору *C*, то вследствие неравномерного нагревания изогнутая ось балки будет дугой круга. Радиус этого круга определяется из уравнения

$$\frac{l}{r} = \frac{\alpha(t - t_1)}{h},$$

в котором h — высота балки и α — коэффициент линейного расширения. Соответствующий прогиб в середине $f = l^2/2r$ и реакция X в *C* может быть найдена из уравнения

$$\frac{X(2l)^3}{48EJ} = f.$$

8. Определить эпюру изгибающих моментов для балки *ABC*, опертой на три понтона (рис. 179), если горизонтальная площадь поперечного сечения каждого понтона равняется F и вес единицы объема воды равняется γ .

Решение. Отбрасывая опору *C*, находим, что прогиб, вызываемый в этой точке грузом P , состоит из двух частей: 1) прогиба от изгиба балки и 2) прогиба вследствие опускания понтонов *A* и *B*. Из уравнения (91) получаем

$$f = \frac{Pc}{48EJ_z} [3(2l)^2 - 4c^2] + \frac{P}{2F\gamma}. \quad (a)$$

Реакция X средней опоры уменьшает этот прогиб на величину

$$\frac{X(2l)^3}{48EJ_z} + \frac{X}{2F\gamma}. \quad (b)$$

Рис. 179.

Разность между (a) и (b) представляет величину погружения среднего понтона, равную $X/F\gamma$, откуда получаем следующее уравнение для определения X :

$$\frac{Pc}{48EJ_z} [3(2l)^2 - 4c^2] + \frac{P}{2F\gamma} - \frac{X(2l)^3}{48EJ_z} - \frac{X}{2F\gamma} = \frac{X}{F\gamma}.$$

Зная X , легко можем получить эпюру изгибающих моментов.

45. Неразрезные балки

В случае неразрезной балки на многих опорах (рис. 180) обычно одна опора считается неподвижным шарниром, в то время как другие — подвижными шарнирами. При таком устройстве каждая промежуточная опора имеет только один неизвестный реактивный элемент, а именно величину вертикальной реакции. Отсюда число статически неопределимых элементов равно числу промежуточных опор. Например, в случае, показанном на рис. 180, *a*, число статически неопределимых элементов равняется пяти. Здесь также могут

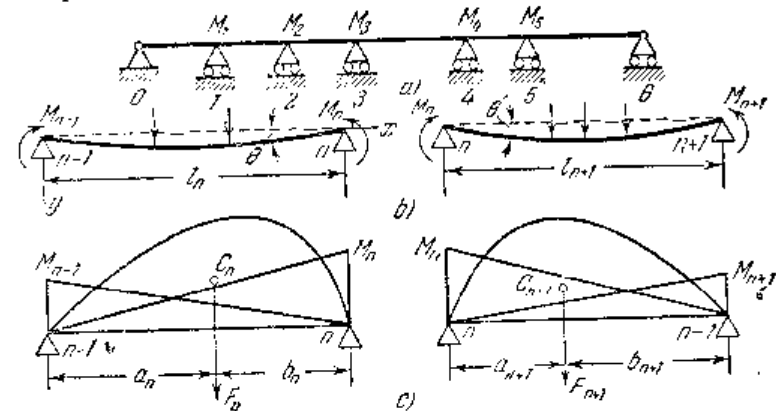


Рис. 180.

быть применены оба метода, указанные в предыдущем параграфе. Но если число опор велико, то второй метод, в котором за статически неопределимые элементы принимаются изгибающие моменты, гораздо проще. Пусть рис. 180, *b* представляет два смежных пролета n и $n+1$ неразрезной балки, рассеченной на опорах $n-1$, n и $n+1$. Пусть M_{n-1} , M_n , M_{n+1} означают изгибающие моменты на этих опорах. Направления этих моментов зависят от нагрузки на балку. Мы примем за положительные — направления их, показанные на рисунке 1). Очевидно, что если изгибающие моменты на опорах известны, задача о неразрезной балке сведется к расчету столько же балок, свободно лежащих на двух опорах, сколько имеется пролетов в неразрезной балке. Для вычисления изгибающих моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} воспользуемся условием непрерывности изогнутой оси балки на опорах. Для какой-либо опоры n это условие непрерывности удовлетворяется, если изогнутые оси двух смежных пролетов имеют общую касательную на опоре n , т. е. если угол наклона на правом конце пролета n равен углу наклона на левом конце пролета $n+1$. Чтобы вычислить эти углы наклона, воспользуемся гра-

1) Если окончательно получим для некоторых моментов отрицательные знаки, то это укажет, что направление моментов противоположно направлению, показанному на рисунке.

фоаналитическим методом. Пусть F_n означает площадь эпюры изгибающих моментов для пролета n (рис. 180, *c*), рассматриваемого как свободно опертая балка, от действительной нагрузки на этом пролете. Пусть a_n и b_n представляют горизонтальные расстояния центра тяжести S_n площади эпюры моментов от опор $n-1$ и n . Тогда для этого условия нагрузки угол на правом конце будет (см. § 36).

$$-\frac{F_n a_n}{l_n E J_z}.$$

В дополнение к изгибу, вызываемому нагрузкой, расположенной на пролете, пролет n изгибается также парами M_{n-1} и M_n . Из уравнений (103) и (104) угол, вызываемый на опоре n этими парами, равняется

$$-\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z}\right).$$

Тогда полный угол поворота равняется¹⁾

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z} + \frac{F_n a_n}{l_n E J_z}\right). \quad (a)$$

Таким же образом для левого конца пролета $n+1$ получаем

$$\theta' = \frac{F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} E J_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_z}. \quad (b)$$

Из условия непрерывности следует, что

$$\theta = \theta'. \quad (c)$$

Вставляя выражения (a) и (b) в это уравнение, получаем

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6F_n a_n}{l_n} - \frac{6F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (118)$$

Это есть *уравнение трех моментов*²⁾. Очевидно, что число этих уравнений равно числу промежуточных опор, и следовательно, изгибающие моменты на опорах могут быть вычислены без затруднений.

Вначале предполагалось, что концы неразрезной балки оперты. Если один или оба конца заделаны, то число статически неопределимых величин будет больше числа промежуточных опор, и тогда необходимые дополнительные уравнения могут быть выведены из того условия, что заделанные концы балки не поворачиваются (см. задачу 5 ниже).

Зная моменты на опорах, можем вычислить без затруднения реакции опор неразрезной балки. Взяв, например, два смежных

пролета n и $n+1$ (рис. 180, *b*) и рассматривая их как две свободно опертые балки, можем легко вычислить реакцию A_n опоры n от нагрузки на этих двух пролетах. В добавление к этому будет возникать реакция от опорных моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} . Взяв направление этих моментов, как указано на рис. 180, *b*, найдем дополнительное давление на опору n :

$$\frac{M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Складывая это с найденной выше реакцией A'_n , получим полную реакцию

$$A_n = A'_n + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (119)$$

Если на опорах приложены сосредоточенные силы, то они непосредственно передаются на соответствующие опоры и должны быть прибавлены к правой части уравнения (119).

Общее уравнение непрерывности (c) можно применить также в тех случаях, когда, вследствие неточности расположения опор или неравномерной осадки опор,

опоры расположены не на одной высоте (рис. 181). Пусть β_n и β_{n+1} означают углы наклона к горизонту прямых линий, соединяющих точки опор n -го и $(n+1)$ -го пролетов; углы поворота, определяемые уравнениями (a) и (b), измерены от линии, соединяющей центры шарниров. Следовательно, угол θ между касательной в n и горизонтальной линией будет для пролета n

$$\theta = -\left(\frac{M_n l_n}{3EJ_z} + \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_z} + \frac{F_n a_n}{l_n E J_z} - \beta_n\right).$$

Точно таким же образом для пролета $n+1$

$$\theta' = \frac{F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} E J_z} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_z} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_z} + \beta_{n+1}.$$

Приравняв эти углы, получаем

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -\frac{6F_n a_n}{l_n} - \frac{6F_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} - 6EJ_z (\beta_{n+1} - \beta_n). \quad (120)$$

Если h_{n-1} , h_n , h_{n+1} означают перпендикулярные расстояния опор $n-1$, n и $n+1$ относительно какой-либо горизонтальной линии, то

$$\beta_n = \frac{h_{n-1} - h_n}{l_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{h_n - h_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Подставляя в уравнение (120), можем вычислить изгибающие моменты на опорах, возникающие вследствие понижения опор.

¹⁾ Угол принимается за положительный, если вращение происходит по часовой стрелке.

²⁾ Это уравнение было выведено B e r t o t, Compt. rend. soc. ing. civils, стр. 278, 1855; см. также C l a r e u r o n, Compt. rend., т. 45, 1857.

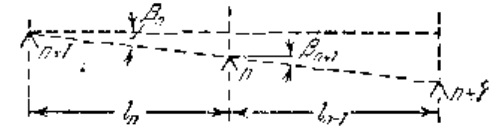


Рис. 181.

ЗАДАЧИ

1. Определить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки с тремя равными пролетами, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q (рис. 182).

Решение. Для свободно лежащей балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра изгибающих моментов представляет параболу с наибольшей ординатой $\frac{1}{8} ql_n^2$. Площадь параболического сегмента равняется

$$F_n = \frac{2}{3} l_n \frac{ql_n^2}{8} = \frac{ql_n^3}{12}.$$

Центр тяжести этой площади находится в середине пролета, так что $a_n = b_n = l_n/2$. Вставляя в уравнение (118), получаем

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{ql_n^3}{4} - \frac{q(l_{n+1})^3}{4}. \quad (118')$$

Применяя это уравнение в нашем случае (рис. 182) для первого и второго пролетов и замечая, что на опоре O изгибающий момент равняется нулю, получаем

$$4M_1l + M_2l = -\frac{ql^3}{2}. \quad (d)$$

Из условий симметрии очевидно, что $M_1 = M_2$. Тогда из (d) следует $M_1 = M_2 = -(ql^3/10)$. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 182, а заштрихованной площадью. Реакция опоры O равняется

$$A_0 = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{10} \frac{1}{l} = \frac{4}{10} ql.$$

Реакция опоры 1 равняется

$$A_1 = ql + \frac{ql^2}{10} \frac{1}{l} = \frac{11}{10} ql.$$

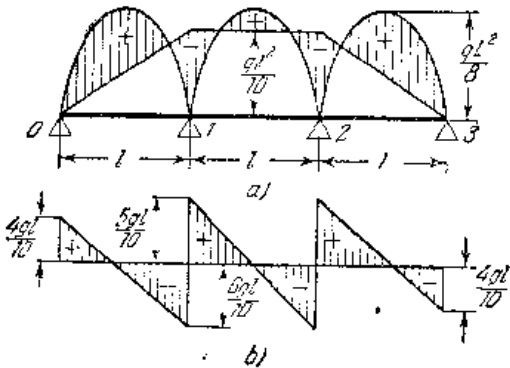


Рис. 182.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 182, б. Наибольший момент будет, очевидно, на расстоянии $4l/10$ от концов балки, где поперечная сила равняется нулю. Численно наибольший изгибающий момент будет на промежуточных опорах.

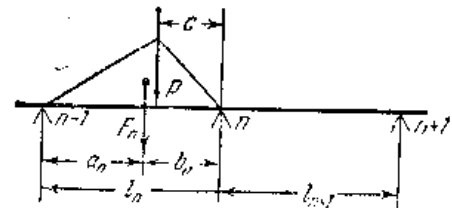


Рис. 183.

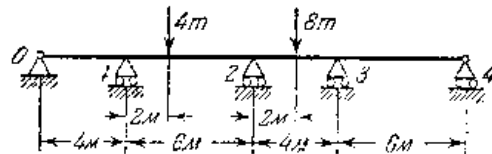


Рис. 184.

2. Определить выражение для правой части уравнения (118), когда имеется сосредоточенная нагрузка на пролете n и нет ее на пролете $n+1$ (рис. 183).

Решение. В этом случае F_n есть площадь треугольника с высотой $Pc(l_n - c)/l_n$ и с основанием l_n , следовательно

$$F_n = Pc(l_n - c)/2 \text{ и } a_n = l_n - b_n = l_n - (l_n + c)/3.$$

Вставляя в (118), получим

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{Pc(l_n - c)(2l_n - c)}{l_n}.$$

3. Определить изгибающие моменты на опорах и реакции для неразрезной балки, показанной на рис. 184.

Ответ. $M = -1,54 \text{ тм}$; $M_2 = -3,74 \text{ тм}$; $M_3 = -1,65 \text{ тм}$. Реакции: $A_0 = -0,386 \text{ т}$; $A_1 = 2,69 \text{ т}$; $A_2 = 6,22 \text{ т}$; $A_3 = 3,75 \text{ т}$; $A_4 = -0,275 \text{ т}$. Моменты на опорах отрицательны и вызывают изгиб выпуклостью вверх.

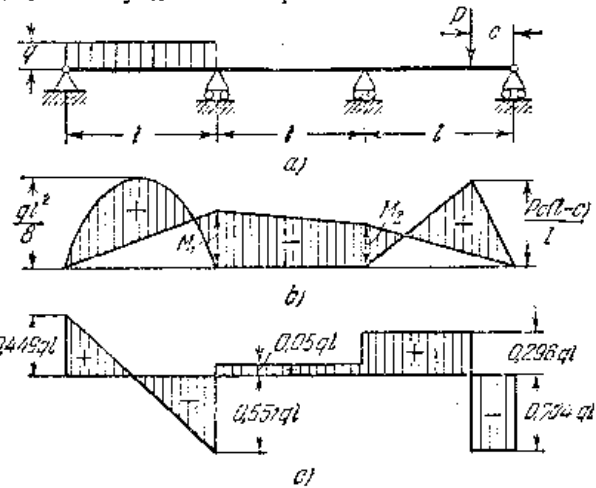


Рис. 185.

4. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки, показанной на рис. 185, а, если $P = ql$, $c = l/4$.

Ответ. $M_1 = -\frac{49}{960} ql^2$; $M_2 = -\frac{11}{240} ql^2$. Эпюры показаны на рис. 185, б и 185, в.

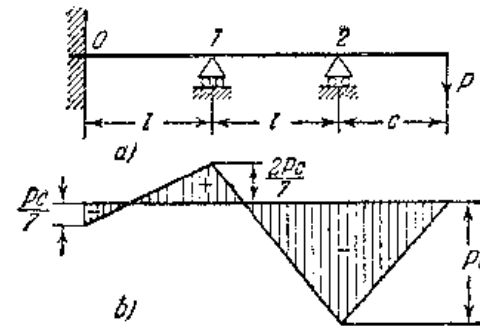


Рис. 186.

5. Определить эпюру изгибающих моментов для случая, показанного на рис. 186, а.

Решение. Уравнение (118) для этого случая получается

$$M_0l + 4M_1l + M_2l = 0.$$

Очевидно, что $M_2 = -Pc$, между тем как условие в заделанном конце (опоры

ра 0) дает (из уравнений (103) и (104))

$$\frac{M_0 l}{3EJ} + \frac{M_1 l}{6EJ} = 0.$$

Из приведенных выше уравнений получаем $M_0 = -\frac{1}{7} Pc$; $M_1 = \frac{2}{7} Pc$; $M_2 = -Pc$.
Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 186, б.

6. Определить изгибающие моменты на опорах неразрезной балки с семью равными пролетами, когда нагружен только средний пролет равномерно распределенной нагрузкой q .

Ответ. $M_2 = M_4 = -\frac{15}{284} ql^2$, $M_3 = M_5 = -\frac{4}{15} M_2$, $M_1 = M_6 = \frac{1}{15} M_2$.

7. Неразрезная балка, имеющая четыре равных пролета, каждый длиной 4,8 м, равномерно нагружена на последнем пролете. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, если $q = 500$ кг/м.

8. Решить задачу 5, полагая, что равномерная нагрузка интенсивностью q распределена по всей длине балки и что $c = l/2$. Построить эпюру поперечных сил для этого условия нагружения.

Ответ. $M_3 = -\frac{5}{56} ql^2$, $M_1 = -\frac{1}{14} ql^2$, $M_2 = -\frac{1}{8} ql^2$.

ГЛАВА VII

СИММЕТРИЧНЫЕ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ. БАЛКИ ИЗ ДВУХ МАТЕРИАЛОВ

46. Балки переменного поперечного сечения

В предыдущих параграфах рассматривались балки призматической формы. Более подробное исследование показывает, что уравнения (56) и (57), которые были выведены для призматических стержней, могут быть применены с достаточной точностью для стержней переменного поперечного сечения при условии, что изменение является не слишком резким. Случаи резкого изменения поперечного сечения, в которых имеет место значительная концентрация напряжений, будут рассмотрены во II-й части.

В качестве первого примера балки переменного поперечного сечения рассмотрим изгиб консольной балки *равного сопротивления*, т. е. балки, в которой момент сопротивления изменяется по длине ее в том же отношении, как и изгибающий момент. Тогда, как видно из уравнений (60), $(\sigma_x)_{\max}$ остается постоянным по длине балки и оно может быть принято равным $[\sigma]$. Такое условие является выгодным в отношении употребляемого количества материала, так как каждое поперечное сечение будет иметь наименьшую площадь для того, чтобы удовлетворить условиям прочности.

Для консоли с нагрузкой на конце (рис. 187) изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении на расстоянии x от груза численно равен Px . Для того чтобы иметь балку равного сопротивления, момент сопротивления также должен быть пропорциональным x . Это условие может быть выполнено различными путями. Возьмем в качестве первого примера случай прямоугольного поперечного сечения постоянной ширины b и переменной высоты h (рис. 187). Из определения понятия балки равного сопротивления следует, что

$$\frac{M}{W} = \frac{6Px}{bh^2} = \frac{6Pl}{bh_0^2} = \text{const},$$

где h_0 есть высота балки в заделанном конце. Тогда $h^2 = \frac{h_0^2 x}{l}$.

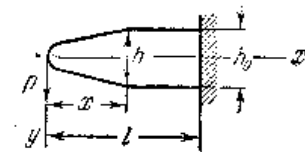


Рис. 187.

Можно видеть, что в этом случае высота балки изменяется, следуя параболическому закону. В нагруженном конце площадь поперечного сечения равна нулю. Этот результат получается потому, что при выводе формы балки равного сопротивления касательными напряжениями пренебрегалось. В практических приложениях эти напряжения должны быть приняты в расчет таким образом, чтобы путем некоторого изменения формы в нагруженном конце иметь достаточную площадь поперечного сечения для того, чтобы воспринять поперечную силу. Прогиб балки на конце найдется из уравнения (93):

$$f = \int_0^l \frac{12Px^2 dx}{Ebh^3} = \frac{12Pl^2}{Ebh_0^3} \int_0^l \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{Pl^2}{EJ_0}, \quad (121)$$

где $J_0 = \frac{bh_0^3}{12}$ представляет момент инерции поперечного сечения в заделанном конце. Сравнивая с уравнением (95), видим, что этот прогиб в два раза больше прогиба призматического стержня, имеющего жесткость при изгибе EJ_0 и ту же нагрузку, т. е. стержень имеет такую же прочность, но не такую же жесткость, как призматический стержень.

В качестве второго примера мы рассмотрим консоль прямоугольного поперечного сечения постоянной высоты h и переменной ширины b (рис. 188, *a* и 188, *b*). Так как момент сопротивления и момент инерции J_z балки треугольной формы увеличиваются с возрастанием x в том же отношении, как и изгибающий момент, то наибольшее напряжение $(\sigma_x)_{\max}$ и кривизна (см. уравнение (56)) остаются постоянными по длине балки, и величина радиуса кривизны может быть определена из уравнения (см. уравнение (55)):

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{hE}{2r}. \quad (a)$$

Прогиб на конце дуги круга можно принять, в случае небольших прогибов, равным

$$f = \frac{l^2}{2r} = \frac{pl^2}{2EJ_0}, \quad (122)$$

или при помощи уравнения (a)

$$f = (\sigma_x)_{\max} \frac{l^2}{hE}. \quad (123)$$

Из этого уравнения видно, что для этого типа консолей равного сопротивления прогиб на конце изменяется пропорционально квадрату длины и обратно пропорционально высоте. Этим результатом можно воспользоваться для приближенного расчета напряжений и прогибов в *листовой рессоре*. Рассмотренная выше треугольная

пластинка разрезается на полоски, которые затем накладываются друг на друга, как показано на рис. 188, *b*, *c*, *d*. Для первого приближения первоначальной кривизной и трением между полосками пренебрегают и тогда уравнение (123) можно считать достаточно точным¹⁾.

При вычислении прогиба балок переменного сечения можно воспользоваться с выгодой графоаналитическим методом (см. § 34). В связи с этим необходимо лишь помнить, что кривизна изогнутой оси в каком-либо поперечном сечении равна отношению M/EJ_z (уравнение (56)). Поэтому увеличение жесткости при изгибе в данном сечении будет иметь то же влияние, как уменьшение в том же отношении изгибающего момента. Следовательно, задачу на изгиб балок переменного сечения можно свести к задаче на изгиб балок постоянного поперечного сечения при помощи *измененной*

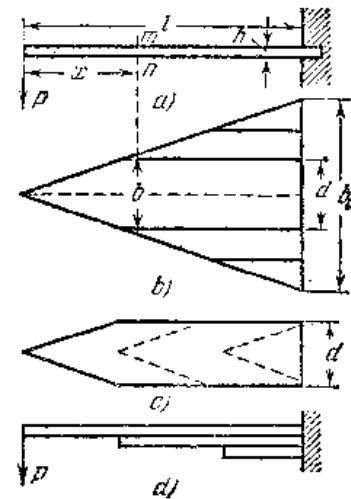


Рис. 188.

эпюры изгибающих моментов. Измененная эпюра моментов получается умножением ординат действительной эпюры моментов на отношение

J_0/J , где J есть момент инерции в данном поперечном сечении и J_0 есть постоянный момент инерции. Это сводит изгиб стержня переменного поперечного сечения к изгибу стержня постоянного поперечного сечения с моментами инерции J_0 .

Например, задачу на изгиб круглого вала (рис. 189), который имеет сечения двух разных диаметров с моментами инерции J_0 и J_1 и нагружен силой P , можно свести к задаче на изгиб круглого вала, имеющего постоянный момент инерции J_0 . При рассмотрении фиктивной балки A_1B_1 вместо треугольной нагрузки $A_1C_1B_1$, пред-

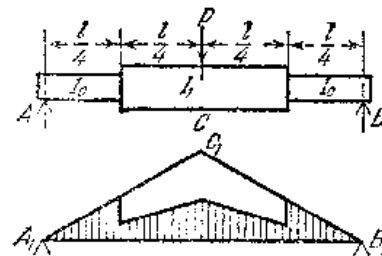


Рис. 189.

1) Это решение получено E. Phillips, Ann. mines., т. 1, стр. 195—336, 1852. См. также Goddard and Pearson, History of the Theory of Elasticity, т. 2, стр. 330, 1893 и A. Castiglione, Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn, Vienna, 1888. Влияние трения между листами было рассмотрено S. Marié, Ann. mines., тт. 7—9, 1905—1906. D. Landau и P. H. Paag исследовали распределение нагрузки между отдельными листами рессоры, J. Franklin Inst., тт. 185—187. Полная библиография о механических рессорах была опубликована Am. Soc. Mech. Engrs, New York, 1927. См. также книгу: S. Goss и E. Lehler, Die Federn, VDI, Verlag, 1938. Весьма полное исследование различных типов механических рессор дано в книге A. M. Wahl, Mechanical Springs, Cleveland, 1944.

ставляющей эпюру изгибающих моментов от действительной нагрузки, мы воспользуемся нагрузкой, представленной заштрихованной площадью. Эта площадь получается уменьшением ординат эпюры на среднем участке вала в отношении J_0/J_1 . Определение прогибов и углов наклона можно теперь сделать, как в случае призматических стержней; величина прогиба и угол наклона в каком-либо поперечном сечении балки будут равны изгибающему моменту и поперечной силе от фиктивной нагрузки, поделенным на EJ_0 . Необходимо заметить, что в случае, представленном на рис. 189, имеет место резкое изменение диаметра вала в расстоянии $l/4$ от опор, вызывающее местные напряжения в этих точках. Это не имеет существенного влияния на изгиб вала при условии, что разница в диаметрах двух участков мала по сравнению с длинами этих участков.

Метод, примененный для вала переменного поперечного сечения, можно применить также к составным двутавровым балкам

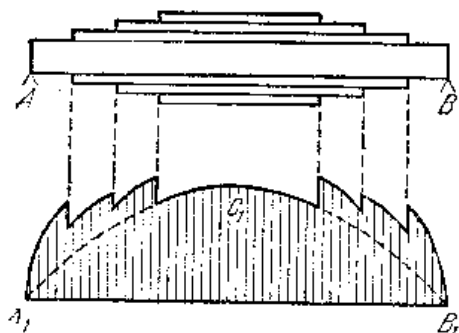


Рис. 190.

или фермам со сплошной стенкой переменного поперечного сечения. Пример фермы со сплошной стенкой, опертой на концах и равномерно нагруженной, показан на рис. 190. Изгибающий момент уменьшается от середины к концам фермы, и вес балки можно уменьшить путем уменьшения числа листов в поясах, как показано схематически на рисунке. Прогиб такой балки можно вычислить на основании момента инерции среднего поперечного сечения. За фиктивную нагрузку вместо одной параболы, указанной пунктиром, взята представленная на рис. 190 заштрихованная площадь, в которой уменьшение поперечного сечения компенсируется увеличением ординат эпюры моментов в отношении $J_{\text{серед}}/J_0$.

ЗАДАЧИ

1. Стальной лист формы, показанной на рис. 191, заделан на одном конце и нагружен силой P на другом. Определить прогиб на конце, если длина равна $2l$, ширина — a , толщина листа — h и нагрузка на конце — P .

Решение. Прогиб будет состоять из трех частей:

$$f_1 = \frac{Pl^2}{3EJ_z} + \frac{Pl^2}{2EJ_0} \text{ — прогиб в } B.$$

$$f_2 = \frac{3Pl^2}{2EJ_z} \text{ — прогиб в } C \text{ вследствие угла наклона в } B.$$

$$f_3 = \frac{Pl^2}{2EJ_z} \text{ — прогиб от изгиба части } BC \text{ листа.}$$

Полный прогиб равен $f = f_1 + f_2 + f_3$.

2. Решить предыдущую задачу, полагая $l=25$ см, $a=7,5$ см, $P=400$ кг и $\sigma_{\text{max}}=4800$ кг/см².

3. Определить ширину d листовой рессоры (рис. 188) и ее прогиб, если $P=2,5$ т, $h=1,25$ см, $l=60$ см, $[\sigma]=4800$ кг/см² и число листов $n=10$,

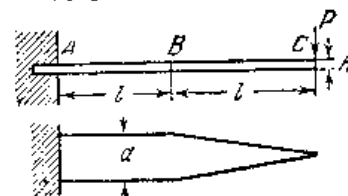


Рис. 191.

Решение. Считая листы рессоры вырезанными из треугольной пластинки (рис. 188, b), найдем наибольшее напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{6Pl}{ndh^2},$$

откуда

$$d = \frac{6Pl}{n[\sigma]h^2} = \frac{6 \cdot 2500 \cdot 60}{10 \cdot 4800 \cdot 1,25^2} = 12 \text{ см.}$$

Прогиб определится из уравнения (123)

$$f = \frac{4800 \cdot 60^2}{1,25 \cdot 2 \cdot 10^3} = 6,91 \text{ см.}$$

4. Сравнить прогибы в середине и углы поворота на концах вала, показанного на рис. 189, с теми же величинами вала той же длины, но постоянного поперечного сечения, момент инерции которого равен J_0 . Принять $J_1/J_0=2$.

Решение. Вследствие большей жесткости при изгибе в середине углы поворота концов вала, показанного на рис. 189, будут меньше углов поворота концов цилиндрического вала во столько раз, во сколько заштрихованная площадь меньше всей площади треугольника $A_1C_1B_1$. Полная площадь представляет нагрузку для случая цилиндрического вала. При заданных значениях это отношение равно $5/8 : 1$.

Прогибы в середине для обоих валов будут находиться в таком же отношении, как изгибающие моменты от заштрихованной площади и площади треугольника $A_1C_1B_1$. Это отношение равно $9/16 : 1$.

5. Балка, опертая на концах, нагружена, как показано на рис. 192. Как должна изменяться высота h балки для того, чтобы иметь форму равного сопротивления, если ширина b прямоугольного поперечного сечения остается постоянной по длине балки?

$$\text{Ответ. } h^2 = h_0^2 \left(1 - 8 \frac{x^2}{l^2}\right).$$

6. Определить прогиб стальной пластины толщиной 1,25 см, показанной на рис. 193, a и 193, b, под действием нагрузки $P=10$ кг, приложенной в середине. Решите. Сводя эту задачу к определению прогиба пластины постоянной ширины равной 10 см, преобразуем эпюру моментов для этого случая в трапецию $abcd$

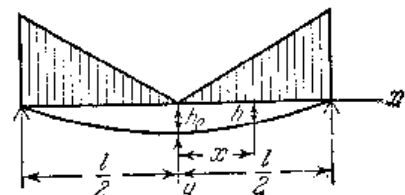


Рис. 192.

(рис. 193, с), тогда мы получим

$$f = \frac{11}{8} \frac{Pl^3}{48EJ_z}$$

где J_z есть момент инерции в середине пролета. Численное значение прогиба теперь легко можно найти.

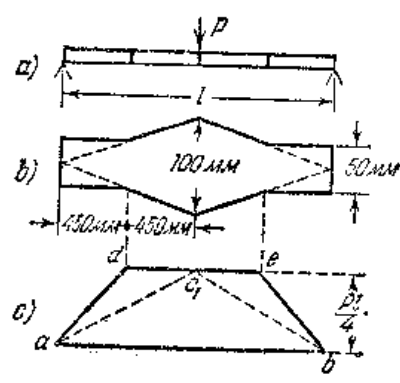


Рис. 193.

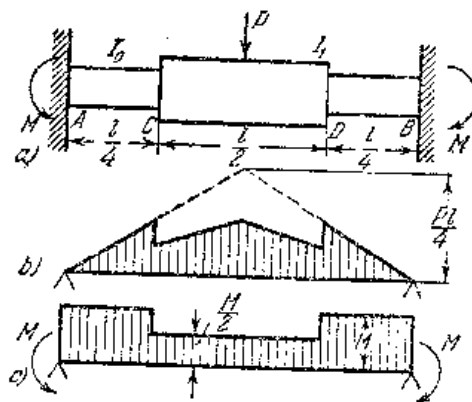


Рис. 194.

7. Определить наибольший прогиб листовой рессоры (рис. 188, а), если $l=90$ см, $h=1,25$ см, $E=2 \cdot 10^9$ кг/см², $[\sigma]=4000$ кг/см².

Ответ. $f=12,96$ см.

8. Свободно опертая балка прямоугольного сечения несет нагрузку P , которая движется по пролету. Как должна изменяться высота h балки для того, чтобы иметь форму равного сопротивления, если ширина b прямоугольного поперечного сечения остается постоянной по длине балки?

Решение. Для какого-либо данного положения груза наибольший момент имеет место под грузом. Обозначая расстояние груза от середины пролета через x , находим изгибающий момент под грузом

$$M = \frac{P}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(\frac{l}{2} + x \right)$$

Необходимая высота h балки под грузом получается из уравнения

$$[\sigma] = \frac{6M}{bh^2}$$

откуда

$$h^2 = \frac{6M}{b[\sigma]} = \frac{6P}{lb[\sigma]} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

и

$$\frac{h^2}{\frac{6Pl}{4b[\sigma]}} + \frac{x^2}{\frac{l^2}{4}} = 1.$$

Можно видеть, что в этом случае высота h изменяется, следуя закону эллипса, полуоси которого равны

$$\frac{l}{2} \text{ и } \sqrt{\frac{6Pl}{4b[\sigma]}}$$

9. Определить опорные моменты на концах балки AB с заделанными концами, нагруженной в середине пролета (рис. 194). Принять

$$\frac{J_1}{J_0} = 2.$$

Решение. Решение получается путем сложения двух простых случаев, показанных на рис. 194, б и с. Ясно, что условия в заделанных концах будут удовлетворены, если углы поворота концов будут равны нулю, т. е. если реакции от фиктивной нагрузки (см. стр. 139), представленной заштрихованными площадями в б) и с), равны. Поэтому уравнение для определения численного значения M будет

$$\frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{3}{8} \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = Ml - \frac{Ml}{4},$$

откуда

$$M = \frac{5Pl}{48}.$$

10. Решить предыдущую задачу в предположении, что в точках C и D приложены равные грузы P .

Ответ. $M = \frac{Pl}{6}$.

47. Симметричные балки из двух различных материалов

Имеются случаи, когда применяются балки из двух или нескольких различных материалов. Рис. 195, а представляет простой случай деревянной балки, усиленной стальной полосой, прибитой к балке снизу. Полагая, что при изгибе не существует скольжения между сталью и деревом, здесь также мы можем воспользоваться теорией цельных балок. Согласно этой теории, удлинения и укорочения продольных волокон пропорциональны расстояниям от нейтральной оси. Благодаря тому, что модуль упругости дерева значительно меньше модуля упругости стали, деревянная часть балки при изгибе будет эквивалентна очень узкой стенке из стали, как показано на рис. 195, б. Чтобы момент внутренних сил не изменился для данной кривизны, т. е. для данного удлинения и укорочения, толщина b_1 этой стенки должна быть следующей:

$$b_1 = \frac{bE_d}{E_c}. \tag{а}$$

Таким образом, задача сводится к изгибу стальной балки таврового сечения, называемого *преобразованным сечением*; эта задача может быть решена на основании предыдущей теории.

Рассмотрим, например, свободно лежащую балку длиной 3 м и нагруженную в середине силой 400 кг. Размеры поперечного

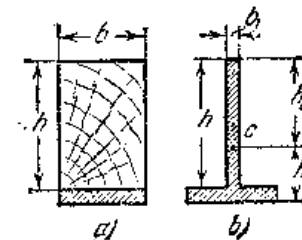


Рис. 195.

сечения деревянной части балки: $b=10$ см, $h=15$ см, а на выпуклой стороне она усилена стальной полосой шириной 2,5 см и толщиной 1,25 см. Полагая $E_s/E_c=1/20$ и пользуясь уравнением (а), будем иметь преобразованное сечение стенки $15 \times 0,5$ см и полки $2,5 \times 1,25$ см. Расстояния крайних волокон от нейтральной оси рис. 195, b равны $h_1=6,36$ см и $h_2=9,9$ см. Момент инерции преобразованного сечения относительно нейтральной оси равняется $J_z=290$ см⁴, следовательно, напряжения в крайних волокнах преобразованного сечения (из уравнений (61)) будут

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} h_1}{J_z} = \frac{30\,000 \cdot 6,35}{290} = 655 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_{\max} h_2}{J_z} = -\frac{30\,000 \cdot 9,9}{290} = -1024 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы получить наибольшее сжимающее напряжение в дереве действительной балки, нужно полученное выше напряжение σ_{\min} преобразованного сечения (стали) умножить на $E_s/E_c=1/20$. Наибольшее растягивающее напряжение для этого случая одно и то же и для действительной балки, и для преобразованной балки.

В качестве другого примера изгиба балки из двух разных материалов рассмотрим случай биметаллической полосы, составленной из никелевой стали и монель-металла (рис. 196). Изгиб такой полосы внешними силами может быть рассмотрен точно таким же образом, как в предыдущей задаче об изгибе балки из дерева и стали, при условии, что мы знаем отношение E_M/E_c , в котором E_M и E_c соответственно будут модули упругости монель-металла и стали. Рассмотрим теперь

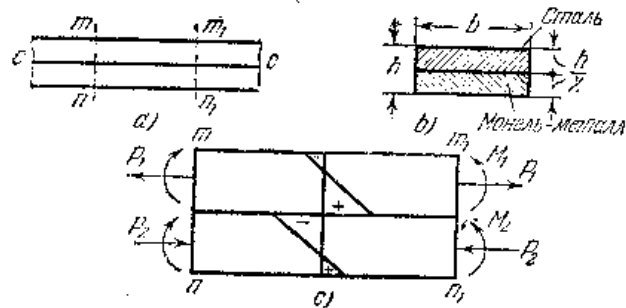


Рис. 196.

изгиб такой полосы вследствие изменения температуры. Коэффициент линейного расширения монель-металла больше, чем никелевой стали, и при повышении температуры будет происходить изгиб с вогнутостью со стороны стальной полосы, это явление изгиба биметаллических полос вследствие изменения температуры используют в различных автоматических инструментах для регулирования температуры (например¹⁾), как, например, термостатах. Пусть $h/2$ — толщина и b — ширина каждой металлической полосы, t — увеличение температуры, r — радиус кривизны, α_c и α_M — коэффициенты линейного расширения соответственно стали и монель-

¹⁾ См. статью автора в J. Opt. Soc. Amer., т. 11, стр. 23.

металла, $E_c J_c$ — жесткость при изгибе стали, $E_M J_M$ — жесткость при изгибе монель-металла. При повышении температуры полоса монель-металла, имеющего больший коэффициент линейного расширения, будет подвергаться изгибу и сжатию, а полоса стали — изгибу и растяжению. Рассматривая элемент полосы, выделенный двумя смежными поперечными сечениями m_1 и m_2 (рис. 196, с), можем пружинные силы по поперечному сечению стали привести к растягивающему усилию P_1 и к паре M_1 . Таким же образом внутренние силы для монель-металла можно привести к сжимающему усилию P_2 и к паре M_2 . Внутренние силы в любом поперечном сечении балки должны быть в равновесии. Поэтому

$$P_1 = P_2 = P$$

и

$$\frac{Ph}{2} = M_1 + M_2. \quad (b)$$

Вставляя

$$M_1 = \frac{E_c J_c}{r}, \quad M_2 = \frac{E_M J_M}{r}$$

в уравнение (b), получаем

$$\frac{Ph}{2} = \frac{E_c J_c}{r} + \frac{E_M J_M}{r}. \quad (c)$$

Другое уравнение для определения P и r можно вывести из того условия, что по поверхности соприкосновения $c-c$ относительные удлинения монель-металла и стали должны быть одинаковы. Поэтому

$$\alpha_c t + \frac{2P_1}{E_c h b} + \frac{h}{4r} = \alpha_M t - \frac{2P_2}{E_M h b} - \frac{h}{4r}$$

или

$$\frac{2P}{hb} \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_M} \right) = (\alpha_M - \alpha_c) t - \frac{h}{2r}. \quad (d)$$

Из уравнений (c) и (d) мы получаем

$$\frac{4}{bh^2 r} (E_c J_c + E_M J_M) \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_M} \right) = (\alpha_M - \alpha_c) t - \frac{h}{2r}. \quad (e)$$

Вставляя в это уравнение

$$J_c = J_M = \frac{bh^3}{96} \quad \text{и} \quad E_c = 1,15 E_M,$$

получаем следующее приближенное уравнение:

$$\frac{1}{r} = \frac{3(\alpha_M - \alpha_c)t}{2h}. \quad (f)$$

Теперь из уравнения (c) находим

$$P = \frac{3}{h^2} (\alpha_M - \alpha_c) t (E_c J_c + E_M J_M) = \frac{3bn}{32} (\alpha_M - \alpha_c) t (E_c + E_M) \quad (g)$$

и

$$M_1 = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_M - \alpha_c)t}{h} E_c J_c, \quad M_2 = \frac{3}{2} \frac{(\alpha_M - \alpha_c)t}{h} E_M J_M. \quad (h)$$

Из уравнений (g) и (h) можно определить P , M_1 и M_2 . Наибольшее напряжение

в стали получается сложением растягивающего напряжения, вызываемого усилием P , с растягивающим напряжением от кривизны $\frac{1}{r}$

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{bh} + \frac{h}{4} \frac{E_c}{r} = \frac{4}{bh^2 r} \left(E_c J_c + E_m J_m + \frac{bh^3}{16} E_c \right).$$

Полагая, например, что оба металла имеют один и тот же модуль упругости E , получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{hE}{3r},$$

или, пользуясь уравнением (f) ¹⁾, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} Et (\alpha_m - \alpha_c).$$

Для $E = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $t = 200^\circ \text{C}$ и $\alpha_m - \alpha_c = 4 \cdot 10^{-6}$ находим

$$\sigma_{\max} = 720 \text{ кг/см}^2.$$

Распределение напряжений, возникающих от нагревания, показано на рис. 196, с.

ЗАДАЧИ

1. Найти допускаемый изгибающий момент для деревянной балки, усиленной стальной полосой (рис. 195), если $b = 15 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$ и толщина стальной полосы равна $1,25 \text{ см}$. Принять $E_m = 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $[\sigma_d] = 80 \text{ кг/см}^2$ — для дерева и $[\sigma_c] = 1070 \text{ кг/см}^2$ для стали.

2. Предположить, что деревянная балка в предыдущей задаче усилена сверху стальной полосой шириной 5 см и толщиной $2,5 \text{ см}$, а внизу стальной полосой шириной 15 см и толщиной $1,25 \text{ см}$. Вычислить допускаемый изгибающий момент, если E и $[\sigma]$ те же, что и в предыдущей задаче.

Ответ. $M = 368\,000 \text{ кг см}$.

3. Биметаллическая полоса имеет длину $l = 2,5 \text{ см}$. Найти прогиб в середине, вызываемый увеличением температуры на 200°C , если $E_c = 1,15 E_m$ и $\alpha_m - \alpha_c = 4 \cdot 10^{-6}$.

48. Железобетонные балки

Известно, что сопротивление бетона гораздо больше при сжатии, чем при растяжении. Следовательно, прямоугольная балка из бетона будет разрушаться от растягивающих напряжений на выпуклой стороне. Балку можно сделать значительно прочнее путем добавления стальных (усиливающих) стержней на выпуклой стороне, как показано на рис. 197.

Так как бетон сцепляется со сталью очень крепко, то при изгибе не имеется никакого скольжения стальных стержней относительно бетона, и поэтому методы, изложенные в предыдущем параграфе, здесь также могут быть применены к расчету напряжений при изгибе. На практике площади поперечных сечений стальных стержней обычно таковы, что бетон на выпуклой стороне перестает

сопротивляться растяжению раньше, чем начинается текучесть стали, и при больших нагрузках, практически, лишь одна сталь воспринимает все растяжение. Отсюда, при расчете напряжений при изгибе в железобетонных балках, практикой установлено допущение, что все растяжение воспринимается сталью и все сжатие — бетоном. Заменяя растягивающие усилия в стальных стержнях их равнодействующей, найдем, что распределение внутренних усилий по какому-либо поперечному сечению mn будет такое, как показано на рис. 197, б. Предполагая, как и прежде, что поперечные сечения при изгибе остаются плоскими и обозначая через kd расстояние нейтральной оси от верха ¹⁾, найдем наибольшее продольное относительное укорочение ϵ_6 в бетоне и относительное удлинение оси стальных стержней по следующим формулам:

$$\epsilon_6 = -\frac{kd}{r}, \quad \epsilon_c = \frac{(1-k)d}{r}. \tag{a}$$

Бетон не следует закону Гука, и диаграмма сжатия для этого материала имеет форму, подобную диаграмме для чугуна на рис. 4, б. Когда сжимающие напряжения увеличиваются, угол наклона касательной к диаграмме уменьшается, т. е. модуль упругости бетона уменьшается с увеличением напряжений. При вычислениях напряжений в железобетонных балках на практике обычно допускают, что бетон следует закону Гука, и вместо переменного модуля упругости принимают для этого модуля более низкое значение, чем то, которое получается из испытаний на сжатие при малых напряжениях. На практике для железобетона часто полагают, что $E_c/E_6 = 15$. Тогда из уравнений (а) наибольшее сжимающее напряжение в бетоне и наибольшее растягивающее напряжение в стали ²⁾ соответственно будут

$$\sigma_6 = -\frac{kd}{r} E_6, \quad \sigma_c = \frac{(1-k)d}{r} E_c. \tag{b}$$

Определим теперь положение нейтральной оси из того условия, что нормальные усилия по поперечному сечению mn должны приводиться к паре сил, равной изгибающему моменту в этом поперечном сечении. Сумма сжимающих усилий в бетоне должна равняться растягивающему усилию R в стальных стержнях, или

$$-\frac{bkd\sigma_6}{2} = \sigma_c F_c, \tag{c}$$

где F_c есть полная площадь поперечного сечения стали. Пользуясь обозначениями $F_c/bd = p$ и $E_c/E_6 = n$, получаем из (c) и (b)

$$k^2 = 2(1-k)pn, \tag{d}$$

откуда

$$k = \sqrt{(pn)^2 + 2pn} - pn. \tag{124}$$

После определения положения нейтральной оси из уравнения (124) получаем, на основании уравнения (b), отношение между наибольшим напряжением в бетоне и напряжением в стали

$$-\frac{\sigma_6}{\sigma_c} = \frac{k}{(1-k)n}. \tag{125}$$

Расстояние jd между равнодействующими R сжимающих и растягивающих усилий,

¹⁾ k есть численный коэффициент, меньший единицы.

²⁾ Поперечные размеры стальных стержней обычно малы, и вместо наибольшего напряжения принимается среднее растягивающее напряжение.

¹⁾ Это уравнение сохраняется также для $E_c = E_m$.

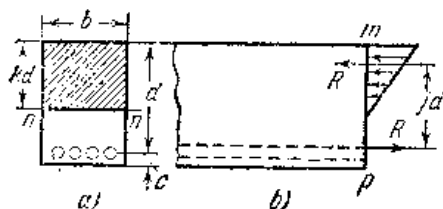


Рис. 197.

действующих по поперечному сечению балки (рис. 197, б) равно ¹⁾

$$jd = \frac{2}{3} kd + (1 - k)d = \left(1 - \frac{k}{3}\right)d, \quad (126)$$

и момент внутренних усилий, равный изгибающему моменту M , будет

$$jdR = j d F_c \sigma_c = - \frac{jkb d^2}{2} \sigma_6 = M,$$

откуда

$$\sigma_c = \frac{M}{F_c j d}, \quad (127)$$

$$\sigma_6 = - \frac{2M}{jkb d^2}. \quad (128)$$

При помощи уравнений (124)–(128) легко вычисляются напряжения при изгибе в железобетонных балках.

ЗАДАЧИ

1. Определить расстояние нейтральной оси от верха балки, если $E_c/E_6=15$ и $F_c=0,008 bd$ (рис. 197).

Ответ. $kd=0,384 d$.

2. Определить отношение $\rho=F_c/bd$, если наибольшее растягивающее напряжение в стали равняется 800 кг/см^2 , наибольшее сжимающее напряжение в бетоне равняется 43 кг/см^2 и $E_c/E_6=n=15$.

Решение. Из уравнения (125) $k=0,446$. Тогда из уравнения (d)

$$\rho = \frac{k^2}{2(1-k)n} = 0,012.$$

3. Определять отношение ρ , если наибольшее сжимающее напряжение в бетоне равняется $\frac{1}{20}$ растягивающего напряжения в стали.

Ответ. $\rho=0,0107$.

4. Определить безопасную нагрузку посередине железобетонной балки длиной 3 м, опертой на концах и имеющей $b=25 \text{ см}$, $d=30 \text{ см}$, $F_c=7,31 \text{ см}^2$, если $n=15$ и допускаемое напряжение для бетона равно 43 кг/см^2 .

Ответ. $P=2290 \text{ кг}$.

5. Вычислить наибольший изгибающий момент, который может безопасно выдержать железобетонная балка, если $b=20 \text{ см}$, $d=30 \text{ см}$, $F_c=12,5 \text{ см}^2$, $E_c/E_6=12$ и допускаемое напряжение для стали равно 1000 кг/см^2 и для бетона — 53 кг/см^2 .

Ответ. $M=1920 \text{ кгм}$.

6. Определить значение k , при котором в бетоне и стали одновременно возникают наибольшие допускаемые напряжения.

Решение. Пусть σ_6 и σ_c — допускаемые напряжения для бетона и стали. Тогда, взяв отношение этих напряжений, определяемых формулами (b), и рассматривая лишь абсолютное значение этого отношения, получим

$$\frac{\sigma_6}{\sigma_c} = \frac{kE_6}{(1-k)E_c},$$

откуда

$$k = \frac{\sigma_6}{\sigma_6 + \sigma_c} \frac{E_6}{E_c}.$$

Если это условие удовлетворяется, то говорят, что балка имеет сбалансированную арматуру. Имея k и пользуясь уравнением (126), получаем высоту из уравнения (128) и площадь F_c из уравнения (127).

¹⁾ j есть численный коэффициент, меньший единицы.

7. Определить отношение $\rho=F_c/bd$, если $\sigma_c=800 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_6=43 \text{ кг/см}^2$ и $n=E_c/E_6=15$.

Решение. Из формулы предыдущей задачи находим $k=0,446$. Тогда, вставляя в уравнение (d), получаем

$$\rho=0,012.$$

8. Рассчитать балку шириною 25 см, которая может безопасно выдержать изгибающий момент, равный 2700 кгм, если $\sigma_6=50 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_c=800 \text{ кг/см}^2$ и $E_c/E_6=12$. Найти высоту d и площадь стали F_c .

Принять сбалансированную арматуру, как в задаче 6.

49. Касательные напряжения в железобетонных балках

Пользуясь тем же методом, что и в § 26, и рассматривая элемент $m_1 m_2 n_1 n_2$ между двумя смежными поперечными сечениями $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$ (рис. 198), можем заключить, что наибольшие касательные напряжения будут действовать по нейтральному слою $n_1 n_2$. Обозначая через dR разность между сжимающими усилиями в бетоне по поперечным сечениям $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$, найдем, что касательные напряжения τ_{yx} по нейтральному слою определяются из следующего уравнения:

$$(\tau_{yx})_{\max} b dx = dR,$$

откуда

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{1}{b} \frac{dR}{dx}. \quad (a)$$

Так как изгибающий момент равен

$$M = Rjd,$$

то уравнение (a) получает вид

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{1}{bjd} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{bjd}, \quad (b)$$

где Q есть поперечная сила в рассматриваемом сечении. При помощи уравнения (126) указанное выше уравнение для касательных напряжений получается

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{3Q}{bd(3-k)}. \quad (129)$$

При практических расчетах имеют важное значение не только касательные напряжения по нейтральному слою, но также касательные напряжения по поверхности соприкосновения стали и бетона (напряжения сцепления). Рассматривая снова два смежных поперечных сечения (рис. 198), найдем, что разность между растягивающими усилиями в стальных стержнях в этих двух сечениях равна

$$dR = \frac{Q dx}{jd}.$$

Эта разность уравновешивается напряжениями сцепления, распределенными по поверхности стержней. Обозначая через F полную боковую поверхность всех стальных стержней на единицу длины балки, найдем, что напряжения сцепления по поверхности стержней будут

$$\frac{dR}{F dx} = \frac{Q}{F jd} = \frac{3Q}{F(3-k)d}. \quad (130)$$

Эти напряжения получают больше напряжений по нейтральному слою (уравнение (129)), если F меньше b . Чтобы увеличить F и в то же время сохранить площадь поперечного сечения стали постоянной, необходимо лишь увеличить число стержней и уменьшить их диаметр.

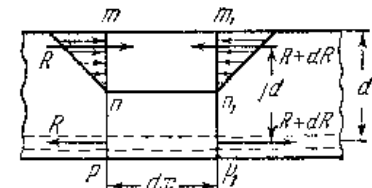


Рис. 198.

ГЛАВА VIII

ИЗГИБ БАЛОК В ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ

50. Чистый изгиб в плоскости, которая не является плоскостью симметрии

Если балка имеет плоскость симметрии, скажем плоскость xy (рис. 199, а), и пары, действующие в этой плоскости, приложены на концах, то балка будет изгибаться в той же плоскости и нейтральная ось nn в каждом поперечном сечении балки (рис. 199, а) будет проходить через центр тяжести C и будет перпендикулярна плоскости действующих пар. На основании симметрии можно заключить, что напряжения, соответствующие этому направлению нейтральной оси, дают равнодействующую пару в плоскости xy и при надлежащем подборе величины напряжений (см. уравнение (56)) эта пара будет уравновешивать внешнюю пару M .

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость xy изгибающих пар (рис. 199, б) не является плоскостью симметрии, и исследуем, при каком условии нейтральная ось будет перпендикулярна этой плоскости.

Предполагая, что ось nn перпендикулярна плоскости xy , и поступая так, как в § 23, найдем, что усилие, действующее на бесконечно малый элемент dF поперечного сечения, перпен-

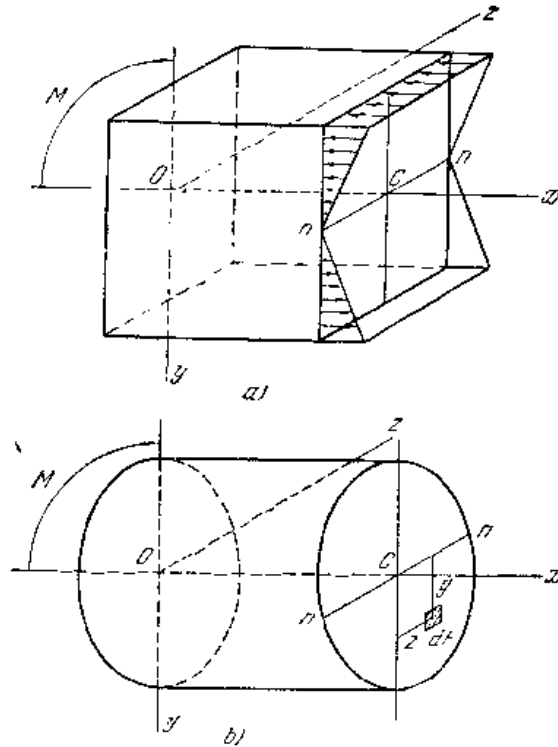


Рис. 199.

дикулярно поперечному сечению и имеет величину $Ey dF/r$. Уравнения равновесия части балки, показанной на рис. 199, б, будут¹⁾

$$\frac{E}{r} \int_F y dF = 0, \quad \frac{E}{r} \int_F y^2 dF = M, \quad \frac{E}{r} \int_F yz dF = 0. \quad (a)$$

Первое из этих уравнений устанавливает, что нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. Второе уравнение определяет величину кривизны $1/r$, изогнутой оси и третье уравнение устанавливает, что оси y и z являются главными осями инерции поперечного сечения (см. Приложение А, § IV, стр. 355) и что плоскости xy и xz являются главными плоскостями балки. Это показывает, что в общем случае чистого изгиба плоскость изгиба совпадает с плоскостью действующих пар лишь в том случае, когда последняя является одной из главных плоскостей бруса.

Если плоскость действующих пар не проходит через одну из главных осей инерции поперечного сечения бруса, то третье из уравнений равновесия (а) не будет удовлетворено. Следовательно, направление нейтральной оси не будет перпендикулярно плоскости изгибающих пар и должно быть найдено следующим образом. Предположим, что пара M действует в продольной плоскости бруса, которая пересекает поперечное сечение по линии mm , наклоненной к главной оси y под углом θ (рис. 200). Вектор M , представляющий момент пары, может быть разложен на две составляющие, как показано на рисунке. Так как каждая составляющая пары действует в одной из главных плоскостей балки, то соответствующие напряжения получаются при помощи обычных формул, выведенных для случая чистого изгиба (см. уравнение (57)), и полное напряжение в какой-либо точке A поперечного сечения будет определяться по формуле

$$\sigma = \frac{My \cos \theta}{J_z} + \frac{Mz \sin \theta}{J_y}. \quad (b)$$

Приравнявая это напряжение нулю, получаем уравнение нейтральной оси:

$$\frac{y \cos \theta}{J_z} + \frac{z \sin \theta}{J_y} = 0, \quad (c)$$

¹⁾ Остальные три уравнения будут всегда удовлетворяться, так как моменты всех сил относительно оси x и проекции сил на оси y и z обращаются в нуль.

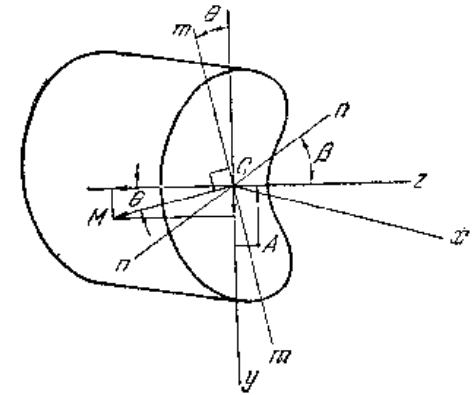


Рис. 200.

и тангенс угла β , определяющий направление нейтральной оси nn , будет

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{y}{z} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \theta. \quad (d)$$

Видно, что угол β вообще отличается от угла θ и нейтральная ось не перпендикулярна продольной плоскости mm , в которой действуют изгибающие пары. Эти два угла будут равны только, если $\theta = 0$ или $J_z = J_y$. В первом из этих случаев изгибающие пары действуют в главной плоскости xy , и нейтральная ось совпадает с главной осью z . Во втором случае два главных момента инерции поперечного сечения равны между собой. В таком случае эллипс инерции поперечного сечения (см. Приложение А, § V, стр. 359) становится кругом и любая пара взаимно перпендикулярных центральных осей может быть принята за главные оси, и, следовательно, нейтральная ось всегда будет перпендикулярна плоскости изгибающих пар.

В предыдущем изложении мы разложили заданную пару на две составляющие пары, действующие в главных плоскостях балки, и вычислили напряжения, вызванные каждой из этих составляющих. Иногда бывает удобно работать непосредственно с заданными изгибающими парами и иметь формулу для определения нормальных напряжений, вызываемых этими парами. Чтобы вывести такую формулу, рассмотрим изгиб балки парами M_z и M_y , действующими в двух произвольно выбранных перпендикулярных продольных плоскостях xu и xz (рис. 201).

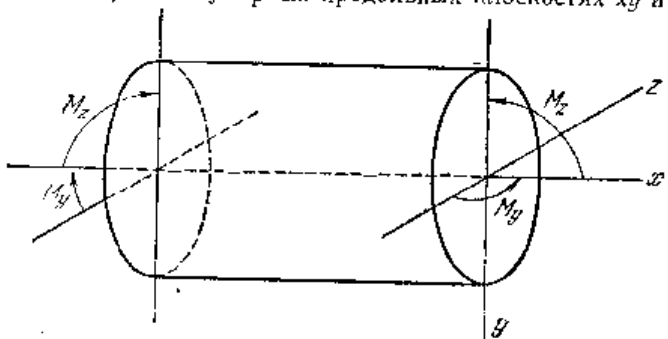


Рис. 201.

Предположим, что величины этих пар таковы, что изгиб происходит в плоскости xu , так что нейтральная ось в каждом поперечном сечении параллельна оси z . Обозначая r_y соответствующий радиус кривизны, находим, что нормальное напряжение будет $\sigma_x = E\eta/r_y$ и получаем следующие значения изгибающих пар:

$$M_z = \int y \sigma_x dF = \frac{EJ_z}{r_y}, \quad M_y = - \int z \sigma_x dF = -\frac{FJ_{yz}}{r_y}. \quad (e)$$

Аналогично, если пары таковы, что изгиб происходит в плоскости xz , то $\sigma_x = -Ez/r_z$ и мы имеем

$$M_y = \frac{FJ_y}{r_z}, \quad M_z = -\frac{EJ_{yz}}{r_z}. \quad (f)$$

В общем случае, когда изгиб происходит в обеих плоскостях, зависимость между изгибающими моментами и радиусами кривизны получится сложением уравнений (e) и (f), и мы имеем

$$M_y = \frac{EJ_y}{r_z} - \frac{EJ_{yz}}{r_y}, \quad M_z = \frac{EJ_z}{r_y} - \frac{EJ_{yz}}{r_z}. \quad (g)$$

Если пары действуют только в плоскости xu , то $M_y = 0$ и мы получаем

$$\frac{EJ_y}{r_z} - \frac{EJ_{yz}}{r_y} = 0, \quad \frac{1}{r_z} = \frac{1}{r_y} \frac{J_{yz}}{J_y}.$$

Подставляя во второе из уравнений (g), находим

$$M_z = \frac{1}{r_y} \frac{E(J_z J_y - J_{yz}^2)}{J_y}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{M_z J_y}{E(J_z J_y - J_{yz}^2)}, \quad \frac{1}{r_z} = \frac{M_z J_{yz}}{E(J_z J_y - J_{yz}^2)}. \quad (131)$$

Тогда нормальные напряжения, вызываемые парой M_z , будут

$$\sigma_x = \frac{E_y}{r_y} - \frac{E_z}{r_z} = \frac{M_z}{J_z J_y - J_{yz}^2} (J_y y - J_{yz} z). \quad (132)$$

Аналогично, если M_y равно нулю, мы получаем

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_z J_y - J_{yz}^2} (J_{yz} y - J_z z). \quad (133)$$

Уравнения (132) и (133) особенно полезны для балок, в которых стенка и полки параллельны осям y и z .

ЗАДАЧИ

1. Консольная балка прямоугольного поперечного сечения (рис. 202) изгибается парой M , действующей в продольной плоскости mm . Какую кривую

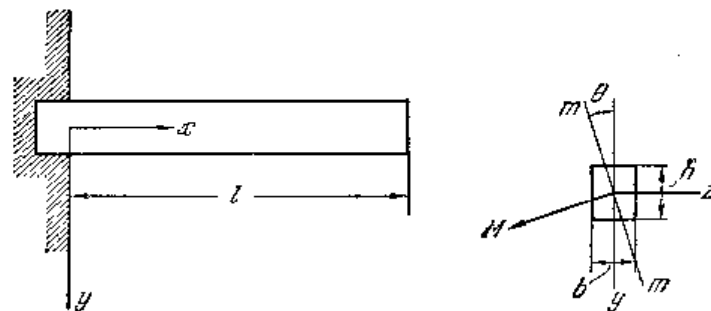


Рис. 202.

будет описывать конец балки, если угол θ , определяющий плоскость изгибающего момента, изменяется от нуля до 2π ?

Решение. Разлагая изгибающий момент M на два составляющих момента $M \cos \theta$ и $M \sin \theta$, действующих соответственно в главных плоскостях xu и xz , находим две составляющие u и v прогиба конца консоли соответственно по

направлению y и z :

$$u = -\frac{Ml^2 \cos \theta}{2EJ_z}, \quad v = -\frac{Ml^2 \sin \theta}{2EJ_y},$$

откуда

$$\frac{u^2}{\left(\frac{Ml^2}{2EJ_z}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{Ml^2}{2EJ_y}\right)^2} = 1.$$

Мы видим, что конец консоли описывает эллипс с полуосями $Ml^2/2EJ_z$ и $Ml^2/2EJ_y$.

2. Найти для предыдущей задачи численное значение отношения вертикального и горизонтального прогибов конца консоли, если $\theta = 45^\circ$ и $h = 2b$.

Ответ. $u/v = J_y/J_z = \frac{1}{4}$.

3. Найти для консоли, изображенной на рис. 202, угол наклона β нейтральной оси к горизонтальной и величину наибольшего напряжения, если $\theta = 45^\circ$ и $h = 2b = 15$ см, $M = 1200$ кгсм.

Ответ. $\operatorname{tg} \beta = 4$, $\sigma_{\max} = 9$ кг/см².

4. Двутавровая балка, свободно лежащая на опорах, изгибается двумя равными и противоположными парами M , действующими на концах балки в плоскости mt (рис. 203). Найти наибольшее напряжение и наибольший прогиб f балки, если $J_y = 158$ см⁴, $J_z = 2370$ см⁴, $M = 50\,000$ кгсм, $\theta = 30^\circ$, $l = 3,6$ м.

Ответ. $\sigma_{\max} = \frac{10M \cos \theta}{J_z} + \frac{5M \sin \theta}{J_y} = 974$ кг/см²,

$$f_{\max}^2 = \left(\frac{Ml^2 \cos \theta}{8EJ_z}\right)^2 + \left(\frac{Ml^2 \sin \theta}{8EJ_y}\right)^2 \quad \text{и} \quad f_{\max} = 1,29 \text{ см.}$$

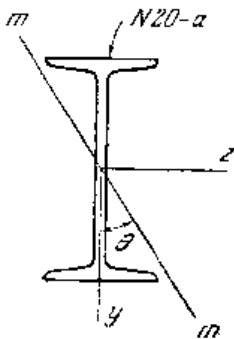


Рис. 203.

5. Стержень углового поперечного сечения (рис. 204) изгибается парами M , приложенными на концах и действующими в плоскости большей полки. Найти направления главных центральных осей u и v , величины J_u и J_v главных моментов инерции и величину наибольшего нормального напряжения при изгибе, если $M = 10\,000$ кгсм. При решении задачи воспользоваться формулой (132).

Ответ. $\varphi = 14^\circ 10'$, $J_u = 150,19$ см⁴, $J_v = 16,16$ см⁴, $(\sigma)_{\max} = 601$ кг/см² в точке А.

51. Изгиб балок, имеющих две плоскости симметрии

Если балка имеет две плоскости симметрии, то задача об изгибе поперечными силами, наклоненными к этим плоскостям и пересекающимися осью балки, может быть легко решена при помощи метода сложения действия сил. Каждая поперечная сила может быть разложена на две составляющие, действующие в двух плоскостях симметрии, и после решения задачи на изгиб для каждой из этих плоскостей окончательные напряжения и прогибы получатся путем сложения.

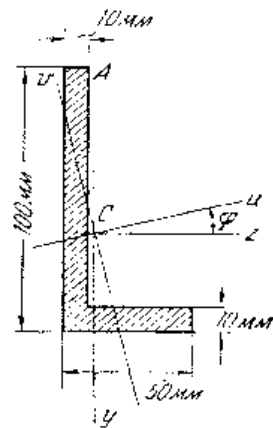


Рис. 204.

В качестве примера рассмотрим консоль прямоугольного поперечного сечения (рис. 205) с поперечной силой P , приложенной на конце под углом θ к вертикальной плоскости симметрии. Разлагая силу на две составляющие $P \cos \theta$ и $P \sin \theta$ и рассматривая изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях симметрии, мы находим, что абсолютные значения соответствующих изгибающих моментов в заделанном конце равны $Pl \cos \theta$ и $Pl \sin \theta$. Принимая во внимание направление этих моментов, найдем, что нормальное напряжение в какой-либо точке заделанного поперечного сечения будет

$$\sigma = -\frac{Pl y \cos \theta}{J_z} + \frac{Pl z \sin \theta}{J_y}.$$

Наибольшее растягивающее напряжение будет в точке А, и его величина определится по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{bh} \left(\frac{\cos \theta}{h} + \frac{\sin \theta}{b} \right).$$

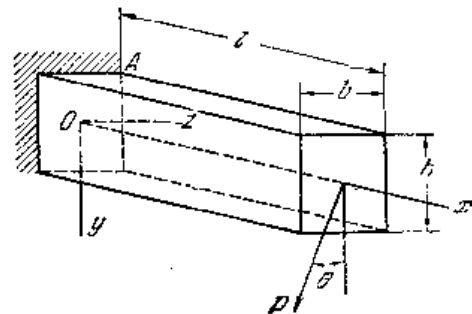


Рис. 205.

Вертикальный и горизонтальный прогибы нагруженного конца будут

$$f_y = \frac{Pl^3 \cos \theta}{3EJ_z}, \quad f_z = -\frac{Pl^3 \sin \theta}{3EJ_y},$$

и полный прогиб получится из уравнения

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Горизонтальная деревянная балка прямоугольного поперечного сечения несет вертикальную нагрузку, равномерно распределенную по оси, и опирается на концах в положении, указанном на рис. 206. Определить наибольшее нормальное напряжение и вертикальный прогиб в середине, если длина балки $l = 3$ м, интенсивность нагрузки

$$q = 300 \text{ кг/м}, \quad h = 20 \text{ см}, \quad b = 15 \text{ см}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\sigma_{\max} = 46,2$ кг/см², $f = 0,341$ см.

2. Решить предыдущую задачу, если расстояние между опорами равно 1,8 м и балка имеет два свешивающихся конца, длина каждого из которых равна 0,6 м.

3. Горизонтальный круглый стержень длиной l с заделанными концами несет равномерно распределенную вертикальную нагрузку интенсивностью q и горизонтальную поперечную нагрузку P , сосредоточенную в середине. Найти наибольшее напряжение, если $Pl = 24\,000$ кгсм, $ql^2 = 48\,000$ кгсм и диаметр стержня $d = 10$ см.

Ответ. $\sigma_{\max} = 51$ кг/см².

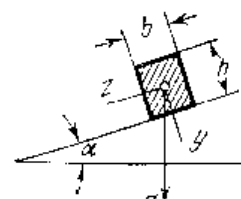


Рис. 206.

4. Горизонтальная балка квадратного поперечного сечения (рис. 207) со свободно опертими концами нагружена в точках, отстоящих от опор на расстоя-

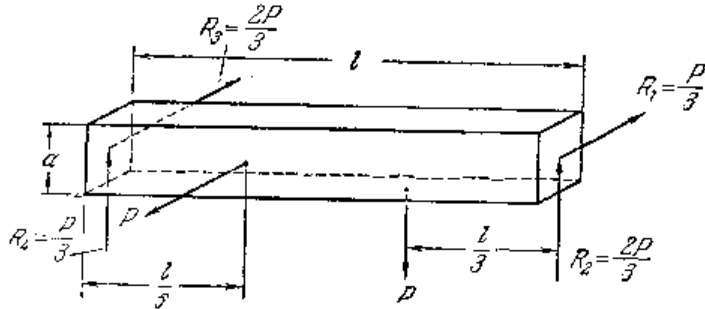


Рис. 207.

ниях, равных $\frac{1}{3}$ длины двумя равными силами P , одна из которых вертикальна, а другая горизонтальна. Найти σ_{\max} , если $l=3,6$ м, $a=30$ см, $P=2,4$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = \frac{2Pl}{a^3} = 64 \text{ кг/см}^2$.

52. Изгиб балок в главной плоскости, которая не является плоскостью симметрии

Центр сдвига. При рассмотрении чистого изгиба (см. стр. 195) было показано, что плоскость изогнутой оси совпадает с плоскостью изгибающих пар при условии, что эти пары действуют в одной из двух главных плоскостей изгиба. В случае изгиба балки копланарной системой поперечных сил задача становится более сложной. Если главная плоскость, в которой действуют силы, не является плоскостью симметрии балки, то такой изгиб обычно сопровождается кручением балки. В последующем изложении будет показано, как можно исключить это кручение и получить простой изгиб надлежащим перемещением плоскости действующих сил параллельно самой себе.

Мы начнем с простых примеров, в которых поперечное сечение балки имеет одну ось симметрии (ось z) и силы действуют в плоскости, перпендикулярной к этой оси (рис. 208). Рассмотрим случай тонкостенной балки, показанной на рис. 208, а, и определим положение вертикальной плоскости, в которой должны действовать поперечные силы для того, чтобы произвести простой изгиб балки в вертикальной плоскости. Из наших предыдущих рассуждений о распределении вертикальных касательных напряжений τ_{xy} (см. стр. 110) мы можем заключить, что практически вся поперечная сила Q будет воспринята только одними полками. Если мы будем рассматривать полки как две отдельные балки, поперечные сечения которых имеют соответственно моменты инерции J'_z и J''_z , то

их кривизна и прогибы при изгибе будут одинаковы, если нагрузка распределяется между ними в отношении $J'_z : J''_z$ ¹⁾. Тогда поперечные силы в этих полках будут находиться в том же отношении.

Это условие будет удовлетворено, если поперечная нагрузка действует в вертикальной плоскости, проходящей через точку O (рис. 208, а), причем $h_1 : h_2 = J''_z : J'_z$, где h_1 и h_2 — расстояния O от центров тяжести поперечных сечений полок. Таким образом, мы находим, что точка O перемещается от центра тяжести C поперечного сечения к той полке, поперечное сечение которой имеет больший момент инерции. В предельном случае, показанном на рис. 208, б, в котором одна из полок отсутствует, можно предположить с достаточной точностью, что точка O совпадает с центром тяжести полки и что поперечная нагрузка должна действовать в вертикальной плоскости, проходящей через эту точку, для того, чтобы иметь простой изгиб. Точка O , через которую должна проходить плоскость нагрузки, чтобы исключить кручение, называется *центром сдвига*.

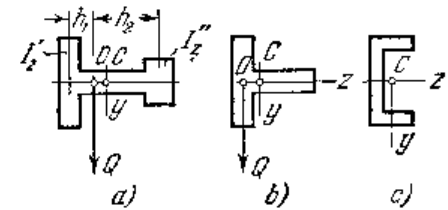


Рис. 208.

Рассмотрим теперь сечение швеллера (рис. 208, с) и определим положение плоскости, в которой должна действовать вертикальная нагрузка, чтобы произвести простой изгиб с нейтральной осью, совпадающей с осью z . Для этой цели необходимо рассмотреть распределение касательных напряжений по поперечному сечению при простом изгибе. Чтобы вычислить вертикальные касательные напряжения τ_{xy} для поперечного сечения стенки, можно воспользоваться тем же методом, что и в случае двутавровой балки (стр. 111), т. е. можно предположить с достаточной точностью, что вертикальная поперечная сила Q воспринимается только стенкой. В полках возникнут горизонтальные касательные напряжения, которые мы будем обозначать через τ_{xz} . Чтобы найти величину этих напряжений, рассмотрим элемент, вырезанный из полки двумя смежными поперечными сечениями на расстоянии dx и вертикальной плоскостью $m_1 n_1$, параллельной стенке (рис. 209). Если балка изогнется выпуклостью вниз, то нижняя полка будет растянута и растягивающие усилия N и $N+dN$, действующие на указанный выше элемент, будут равны

$$N = \frac{M}{J_z} \int y dF$$

¹⁾ При этом рассмотрении пренебрегается влиянием поперечной силы на прогиб полок.

и

$$N - dN = \frac{M + \frac{dM}{dx} dx}{J_z} \int y dF,$$

где интегрирование должно быть распространено на заштрихованную часть поперечного сечения полки. Интеграл представляет статический момент заштрихованной площади относительно оси z .

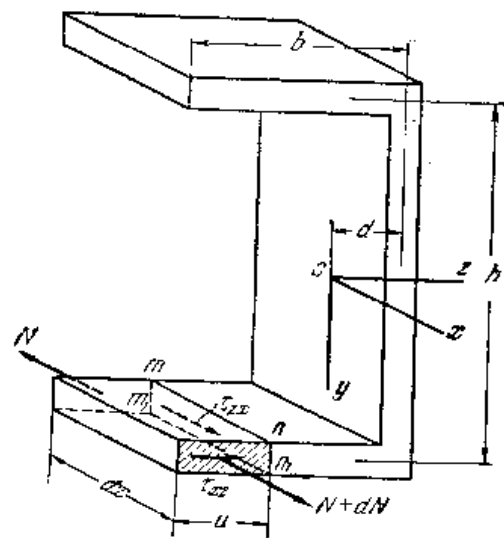


Рис. 209.

видели ранее (стр. 104), касательные напряжения τ_{xz} , равные τ_{zx} , должны действовать горизонтально в точках по линии mn в поперечном сечении полки. Следовательно, напряжения τ_{xz} распределяются неравномерно по поперечному сечению полки, но они пропорциональны расстоянию u . У сопряжения полки и стенки распределение касательных напряжений является сложным. В нашем приближенном вычислении мы предполагаем, что уравнение (а) сохраняется от $u=0$ до $u=b$. Тогда, обозначая через h расстояние между центрами тяжести полки и замечая, что момент площади поперечного сечения bt полки относительно оси z равен $bt h/2$, мы получаем из уравнения (а)

$$(\tau_{xz})_{\max} = (\tau_{zx})_{\max} = -\frac{Qbh}{2J_z}. \quad (b)$$

Равнодействующая R (рис. 210) касательных напряжений τ_{xz} , распределенных по площади поперечного сечения bt полки, равняется

$$R = \frac{Qbh}{2J_z} \frac{bt}{2} = \frac{Qb^2ht}{4J_z}. \quad (c)$$

Разность растягивающих усилий N и $N-dN$ должна быть равна сумме касательных напряжений, действующих по грани mn , элемента. Предполагая, что эти напряжения равномерно распределены по этой грани и обозначая через t толщину полки, мы получаем следующее уравнение для вычисления τ_{xz} :

$$\tau_{xz} t dx = -dN = -\frac{dM}{dx} \frac{dx}{J_z} \int y dF,$$

откуда

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{J_z} \int y dF. \quad (a)$$

Момент заштрихованной площади пропорционален расстоянию u от края полки; следовательно, τ_{xz} пропорционально u . Как мы

Суммирование касательных напряжений τ_{xz} по поперечному сечению верхней полки, очевидно, дает равную и противоположную силу. Таким образом, касательные напряжения по сечению швеллера приводятся к силам, показанным на рис. 210. Эта система сил статически эквивалентна силе Q , приложенной в точке O на расстоянии от центра стенки

$$e = \frac{Rh}{Q} = \frac{b^2 h^2 t}{4J_z}. \quad (d)$$

Отсюда видно что для получения простого изгиба с нейтральной осью, совпадающей с осью z , вертикальная плоскость, в которой действуют поперечные силы, должна проходить через точку O , называемую *центром сдвига*. При каком-либо другом положении этой плоскости изгиб балки будет сопровождаться кручением, и напряжения уже не будут следовать простому закону, в котором σ_x пропорционально y и не зависит от координаты z .

В случае изгиба углового сечения в вертикальной плоскости касательные напряжения τ в точках по mn будут направлены, как указано на рисунке 211, а и равны ¹⁾

$$\tau = \frac{Q}{J_z} \int y dF,$$

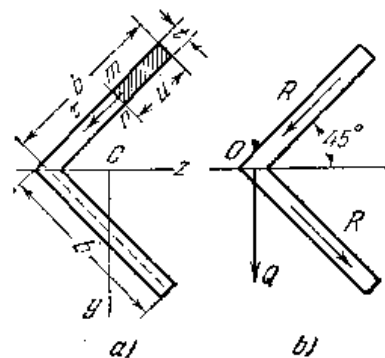


Рис. 211.

где интеграл представляет момент заштрихованной площади относительно оси z . Эти касательные напряжения дают равнодействующую силу в указанном на рис. 211, б направлении и равную

$$R = \frac{Qb^2t}{3J_z \sqrt{2}}.$$

Сила такой же величины получится также для нижней полки. Равнодействующая этих двух сил равна Q и проходит через точку O пересечения средних линий полки, которая, следовательно, в этом случае и является центром сдвига.

В предыдущих случаях мы рассмотрели балки с одной плоскостью симметрии, которые изгибались перпендикулярно этой плоскости. В таком случае центр сдвига находится на оси симметрии поперечного сечения, и для определения его положения необходимо найти лишь одну координату. Рассмотрим теперь несимметричную балку, для которой необходимо найти две координаты, чтобы

¹⁾ При вычислении этих напряжений применяется тот же метод, что и в случае швеллеров.

определить положение центра сдвига ¹⁾. В качестве примера мы возьмем инвеллер одинаковой толщины, но с неодинаковыми полками (рис. 212). Взяв центральные оси *y* и *z* параллельно стенке и полкам, мы предположим сначала, что поперечные силы, действующие на балку, параллельны стенке и находятся на таком расстоянии от стенки, что не вызывают кручения балки. Вертикальная поперечная сила *Q_y* будет воспринята только стенкой.

Для вычисления горизонтальных поперечных сил в полках мы поступим, как и прежде, и рассмотрим усилия, действующие на элемент нижней полки, заштрихованный на рис. 212. Чтобы вычислить продольное усилие *N*, действующее

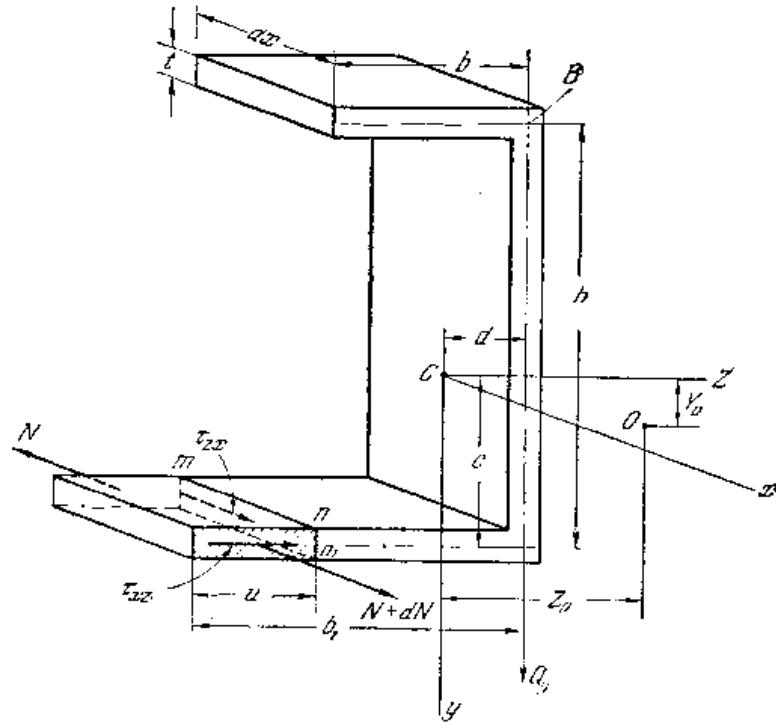


Рис. 212.

на элемент, мы воспользуемся уравнением (132) для продольных нормальных напряжений. Тогда мы получим

$$N = \int \sigma_x dF = \frac{M_z}{J_z J_y - J_{yz}^2} (J_y \int y dF - J_{yz} \int z dF),$$

где интегралы в правой части представляют моменты относительно осей *z* и *y*

¹⁾ Вопрос об определении центра сдвига был рассмотрен несколькими авторами. См., например, A. A. Griffith and G. I. Taylor, *Advisory Comm. Aeronaut. (England), Tech. Repts.*, т. 3, стр. 950, 1917; R. Maillart, *Schweiz. Bauzeitung*, т. 77, стр. 197, т. 79, стр. 254 и т. 83, стр. 111 и 176; C. Weber, *Z. angew. Math. u. Mech.*, т. 4, стр. 334, 1924; A. Eggenschwyler, *Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech.*, Zürich, стр. 434, 1926. См. также статью автора в *J. Franklin Inst.*, т. 239, стр. 201, 1945. В последнее время вопрос приобрел важное значение при проектировании самолетов. Обзор соответствующей литературы дан в статье Р. Кибби, *Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Techn. Notes*, N° 601.

плоскости, заштрихованной на рис. 212, так что

$$\int y dF = ctu$$

"

$$\int z dF = -tu \left(b_1 - d - \frac{u}{2} \right) = t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right);$$

дифференцируя, получаем

$$\frac{dN}{dx} dx = \frac{Q_y dx}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y ctu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right],$$

и уравнение равновесия рассматриваемого элемента будет

$$\tau_{xx} dx = \frac{-Q_y dx}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y ctu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right].$$

Тогда горизонтальное касательное напряжение по поперечному сечению полки будет

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{-Q_y}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_y ctu - J_{yz} t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right],$$

и соответствующая касательная сила в полках равняется

$$t \int_0^{b_1} \tau_{xz} du = \frac{-Q_y b_1^2 t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_y c}{2} - J_{yz} \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]. \quad (e)$$

Так как силы, действующие на балку, все вертикальны, горизонтальные касательные силы в полках должны образовать пару, которую можно получить умножением поперечной силы в нижней полке на расстояние *h*. Тогда момент ¹⁾ относительно центра тяжести *C* (рис. 212) всех касательных напряжений, действующих по поперечному сечению, будет

$$Q_y \left\{ d + \frac{b_1^2 h t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_y c}{2} - J_{yz} \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \right\}.$$

Это указывает на то, что вертикальная плоскость, в которой действуют внешние силы, чтобы произвести изгиб балки без кручения, находится на расстоянии

$$z_0 = d + \frac{b_1^2 h t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_y c}{2} - J_{yz} \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right] \quad (f)$$

от центра тяжести *C* поперечного сечения. В частном случае, когда полки одинаковы, оси *y* и *z* являются главными осями и *J_{yz}* отсутствуют, $c = \frac{h}{2}$, и мы получаем

$$z_0 = d + \frac{b^2 h^2 t}{4 J_z},$$

что согласуется с ранее полученным результатом (d), см. стр. 203.

Расстояние *z₀* представляет горизонтальную координату центра сдвига. Чтобы вычислить координату *y₀*, предположим, что внешние поперечные силы

¹⁾ Момент, вращающий по часовой стрелке, считается положительным.

действуют в плоскости, параллельной плоскости xz . Для вычисления нормальных напряжений σ_x мы теперь воспользуемся уравнением (133). Рассматривая опять элемент, заштрихованный на рис. 212, и поступая, как прежде, получаем

$$\tau_{xz} = \frac{-Qz}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[J_{yz} ctu - J_z t \left(\frac{u^2}{2} + du - b_1 u \right) \right].$$

Горизонтальная касательная сила в нижней полке равняется

$$t \int_0^{b_1} \tau_{xz} du = \frac{-Qz b_1^2 t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} c}{2} - J_z \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right].$$

Взяв момент этой силы относительно точки B (рис. 212) и разделив на горизонтальную касательную силу Q_z , вызываемую внешними силами, мы получим расстояние f плоскости действующих сил от точки B .

Тогда искомая координата центра сдвига будет

$$y_0 = f - c - h = \\ = c - h - \frac{b_1^2 h t}{J_z J_y - J_{yz}^2} \left[\frac{J_{yz} c}{2} - J_z \left(\frac{d}{2} - \frac{b_1}{3} \right) \right]. \quad (g)$$

Для частного случая равных полок мы имеем $J_{yz} = 0$, $c = \frac{h}{2}$ и, выразив в числах d и J_y , можем показать, что выражение (g) обратится в нуль, и, следовательно, центр сдвига лежит на оси z . Координаты y_0 и z_0 , представляемые уравнениями (f) и (g), полностью определяют положение центра сдвига для швеллера, показанного на рис. 212.

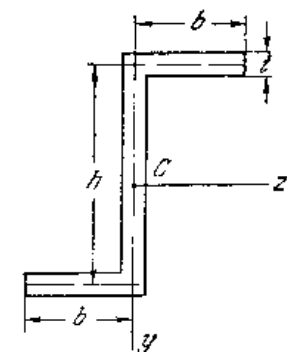


Рис. 213.

В случае зетового сечения (рис. 213), рассматривая сначала действие поперечных сил в плоскости, параллельной стенке, и получив уравнение, подобное уравнению (e), мы можем легко доказать, что горизонтальные касательные силы в полках будут отсутствовать. Следовательно, горизонтальная координата z_0 центра сдвига также будет отсутствовать. Далее, рассматривая поперечные силы, действующие в горизонтальной плоскости, найдем, что горизонтальные касательные силы в полках равны $\frac{1}{2} Q_z$; это указывает на то, что плоскость горизонтальной нагрузки должна проходить через центр тяжести C .

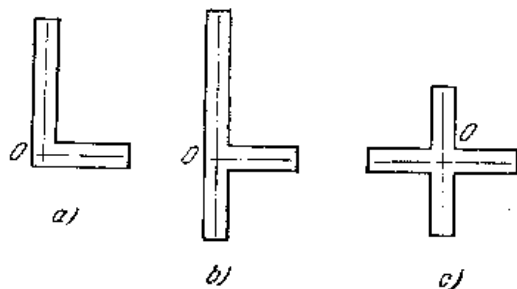


Рис. 214.

Во всех случаях, когда полки тонкостенной балки пересекаются по одной оси O , как на примерах, показанных на рис. 214, найдено, что равнодействующая поперечная сила проходит через эту ось и эта же ось, очевидно, является осью центров сдвига.

Возвращаясь теперь к общему случаю игиба несимметричных балок, мы заключаем из предыдущих рассуждений, что для того, чтобы иметь простой изгиб балки (изгиб без кручения), внешние силы должны быть распределены по оси центров сдвига. Для

вычисления прогибов, вызываемых этими силами, мы можем воспользоваться теми же методами, что и в случае чистого изгиба (см. § 50). Мы можем разложить каждую силу на две составляющие, параллельные главным центральным осям поперечного сечения балки, исследовать изгиб балки в каждой из главных плоскостей, применяя обычные формулы для балок, и получить полные прогибы геометрическим сложением прогибов, найденных в двух главных плоскостях.

Другой прием заключается в том, чтобы выбрать оси y и z параллельно стенке и полкам балки, как показано на рис. 212, разложить каждую действующую поперечную силу на две составляющие, параллельные осям y и z , и применить формулы (131) для сил в плоскости xy . Подобные формулы можно вывести для сил в плоскости xz . Окончательные прогибы получатся опять геометрическим сложением.

ГЛАВА IX

ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ. ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

53. Изгиб, сопровождаемый растяжением или сжатием

Здесь предполагается, что призматический брусок нагружен силами в одной из его плоскостей симметрии, но, если прежде все эти силы были перпендикулярны к оси бруска, то теперь они могут иметь составляющие вдоль оси бруска. Простой случай такого рода показан на рис. 215, который представляет колонну, нагруженную наклонной силой P . Эта сила разложена на поперечную составляющую Q и продольную N , причем предполагается, что колонна сравнительно жестка и прогиб так мал, что им можно пренебречь при рассмотрении напряжений, вызываемых силой N . Тогда результирующее напряжение в какой-либо точке получится сложением сжимающего напряжения от силы N с напряжением при изгибе от поперечной нагрузки Q . Случай гибкой колонны, в которой продольное усилие, благодаря вызываемому им прогибу колонны (рис. 215, *b*), имеет значительное влияние на изгиб, будет рассмотрен в дальнейшем. Напряжение от силы N постоянно во всех поперечных сечениях колонны и равно N/F , где F есть площадь поперечного сечения. Напряжение при изгибе зависит от момента, который увеличивается от нуля вверху до максимума Ql внизу. Следовательно, опасное сечение находится в заделанном конце, и напряжение здесь в какой-либо точке на расстоянии y от оси z будет

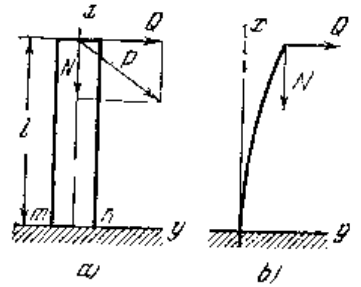


Рис. 215.

Полагая, например, что поперечное сечение колонны на рис. 215 есть прямоугольник с размерами $b \times h$, где h — сторона, параллельная плоскости изгиба, мы имеем $F = bh$ и $J_z = bh^3/12$. Тогда наибольшее сжимающее напряжение будет в точке n и равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6Ql}{bh^2} + \frac{N}{bh} \quad (a)$$

Это напряжение является численно наибольшим. В точке m мы получаем

$$(\sigma_x)_{\min} = \frac{6Ql}{bh^2} - \frac{N}{bh}.$$

Когда сила P не параллельна одной из двух плоскостей симметрии, напряжения при изгибе, вызываемые ее поперечной составляющей Q , найдутся разложением Q на составляющие, параллельные этим плоскостям (см. § 51). Результирующее напряжение в какой-либо точке получается сложением этих напряжений от изгиба с сжимающими напряжениями, вызванными продольной силой.

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее сжимающее напряжение в круглых деревянных столбах высотой 6 м и диаметром 20 см, показанных на рис. 216, если груз P на проволоке ABC равен 24 кг. Растягивающее усилие в каждом канате DF равно $S = 400$ кг, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{10}$, $\sin \beta = \frac{1}{5}$ и $DK = 4,5$ м.

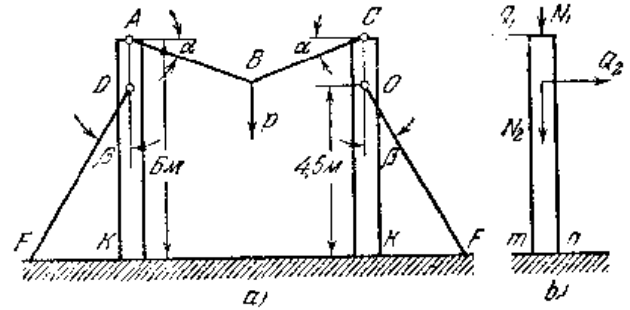


Рис. 216.

Решение. Составляющие силы в проволоке BC (рис. 216, *b*) будут $Q_1 = 120$ кг, $N_1 = 12$ кг. Составляющие силы в канате DF будут $Q_2 = 80$ кг и $N_2 = 392$ кг. На-

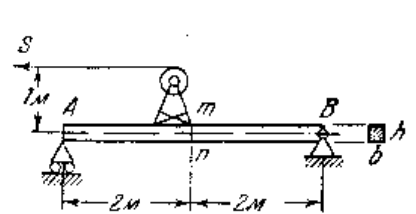


Рис. 217.

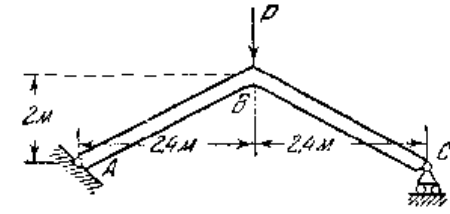


Рис. 218.

большой изгибающий момент должен быть в заделанном конце, где $M_{\max} = 36\,000$ кгсм. Давление в том же поперечном сечении равно $N_1 + N_2 = 404$ кг. Наибольшее сжимающее напряжение в точке m равняется

$$\sigma = \frac{4 \cdot 404}{\pi d^2} + \frac{32 \cdot 36\,000}{\pi d^3} = 1,3 + 45,9 = 47,2 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определить наибольшее растягивающее напряжение в прямоугольной деревянной балке, показанной на рис. 217, если $S = 1600$ кг, $b = 20$ см, $h = 25$ см.

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = \frac{6 \cdot 400 \cdot 200}{20 \cdot 25^2} + \frac{1600}{500} = 41,6 \text{ кг/см}^2.$

3. Определить наибольшее сжимающее напряжение в конструкции ABC , которая поддерживает нагрузку $P=800$ кг (рис. 218) и имеет жесткое соединение брусков в B , неподвижный шарнир в A и подвижную опору в C . Поперечное сечение брусков AB и BC представляет квадрат 25×25 см.

$$\text{Ответ. } \sigma = \frac{6 \cdot 400 \cdot 240}{25^3} + \frac{240}{25^2} = 37,2 \text{ кг/см}^2.$$

4. Кирпичная подпорная стена толщиной 1,8 м и высотой 4,5 м испытывает давление со стороны песчаной насыпи (рис. 219). Определить наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения внизу стены, если ее вес равен $\gamma=2200$ кг/м³ и боковое давление песка равняется 4400 кг на погонный метр. Распределение давления песка по высоте стены следует линейному закону, как показано прямой AB .

Ответ. Напряжение в m равняется

$$\sigma_m = \frac{2200 \cdot 4,5}{10000} - \frac{4400 \cdot 1,5 \cdot 100 \cdot 6}{100 \cdot 180^2} = -0,99 - 1,22 = -2,21 \text{ кг/см}^2.$$

Напряжение в n равняется

$$\sigma_n = \frac{2200 \cdot 4,5}{10000} + \frac{4400 \cdot 1,5 \cdot 100 \cdot 6}{100 \cdot 180^2} = 0,23 \text{ кг/см}^2.$$

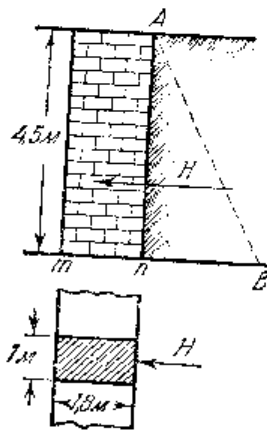


Рис. 219.

5. Определить толщину стены в предыдущей задаче, при которой напряжение в n будет равно нулю.

Ответ. 2 м.

6. На круглую колонну высотой 1,8 м действует сила P , составляющие которой Q и N равны 400 кг каждая. Найти диаметр колонны, если наибольшее сжимающее напряжение равняется 65 кг/см².

7. Найти σ_{max} и σ_{min} в поперечном сечении, находящемся посередине бруса BC (рис. 218), если вместо сосредоточенного груза P будет действовать вертикальная нагрузка $q=500$ кг/м, распределенная по оси ABC .

8. Круглый стержень AB (рис. 220), прикрепленный шарниром в B и опертый на гладкую вертикальную плоскость (без трения) в A , подвергается действию собственного веса. Определить положение поперечного сечения mn , в котором сжимающее напряжение будет наибольшим.

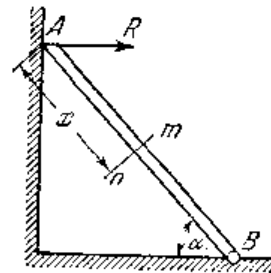


Рис. 220.

Решение. Обозначим через l длину стержня, через q вес единицы длины его и через α угол наклона к горизонту. Тогда горизонтальная реакция в A равняется $R=(ql/2) \operatorname{ctg} \alpha$, сжимающее усилие в каком-либо поперечном сечении mn на расстоянии x от A равняется $qx \sin \alpha + (ql/2)(\cos^2 \alpha / \sin \alpha)$ и изгибающий момент в том же поперечном сечении равняется

$$M = \frac{ql}{2} x \cos \alpha - \frac{qx^2 \cos \alpha}{2}.$$

Наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении mn равно

$$\frac{4}{\pi d^2} \left(qx \sin \alpha + \frac{ql \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{ql}{2} x \cos \alpha - \frac{qx^2 \cos \alpha}{2} \right),$$

где d есть диаметр стержня.

Приравняв нулю производную от этого выражения по x , получаем

$$x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8} \operatorname{tg} \alpha.$$

9. Стержень, показанный на рис. 215, имеет длину 2 м и диаметр 30 см. Определить величину силы P , если ее составляющие N и Q равны и наибольшее сжимающее напряжение в n равно 70 кг/см².

Ответ. $P=1280$ кг.

10. Сила P вызывает изгиб стержня ABC , заделанного в A (рис. 221). Определить угол поворота конца C при изгибе, если изгибающие моменты в A и B численно равны между собой.

Решение. Из равенства изгибающих моментов в A и B следует, что сила P проходит через среднюю точку D стержня AB . Тогда $P_x = P_y l / 2a$ и составляющие P_x и P_y могут быть теперь вычислены. Угол поворота поперечного сечения B вследствие изгиба части AB от составляющей силы P_y равен $P_y l^2 / 2EJ$ по направлению часовой стрелки. Угол поворота того же поперечного сечения от составляющей силы P_x равен $P_x a l / EJ$ в направлении против часовой стрелки. Угол поворота поперечного сечения C относительно поперечного сечения B , вследствие

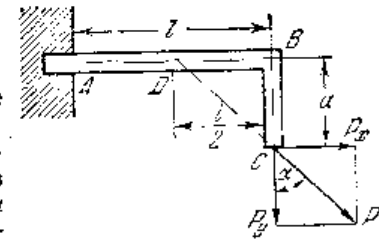


Рис. 221.

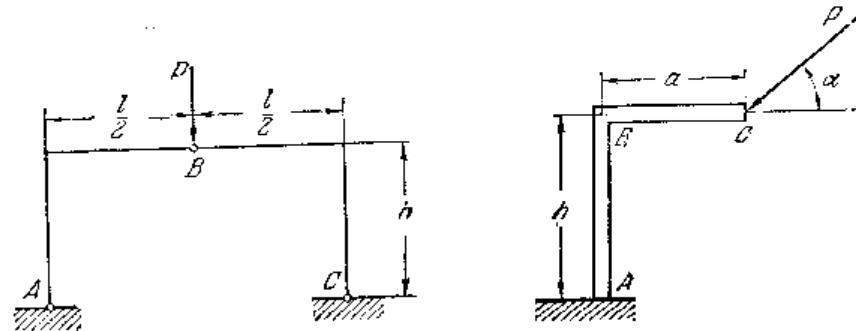


Рис. 222.

Рис. 223.

изгиба части BC стержня, равен $P_x a^2 / 2EJ$ в направлении против часовой стрелки. Полный угол поворота конца C в направлении по часовой стрелке равняется

$$\frac{P_y l^2}{2EJ} - \frac{P_x a l}{EJ} - \frac{P_x a^2}{2EJ} = -\frac{P_x a^2}{2EJ}.$$

11. Трехшарнирная рама ABC (рис. 222) поддерживает вертикальную нагрузку P . Найти численно наибольший изгибающий момент M_{max} в раме и сжимающее усилие N в горизонтальных стержнях.

$$\text{Ответ. } M_{\text{max}} = \frac{Pl}{4}, \quad N = \frac{Pl}{4h}.$$

12. Найти угол наклона α силы P , действующей на стержень ABC (рис. 223), если известно, что прогиб в B равен нулю.

$$\text{Ответ. } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{3a}.$$

54. Внецентренная нагрузка короткой стойки

Внецентренная нагрузка есть частный случай сложения растягивающих или сжимающих напряжений с напряжениями от изгиба. Когда длина стержня не очень велика по сравнению с его поперечными размерами, его прогиб настолько мал, что им можно пренебречь по сравнению с первоначальным эксцентриситетом e ; поэтому можно пользоваться принципом сложения действия ¹⁾. Возьмем, например, случай сжатия продольной силой P , приложенной с эксцентриситетом e (рис. 224) на одной из двух главных осей поперечного сечения. Если мы приложим две равные и противоположные силы P

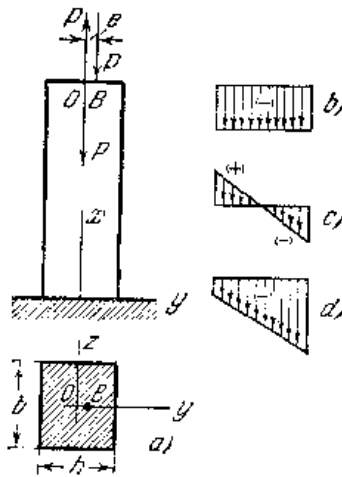


Рис. 224.

поперечному сечению стержня будут лишь одни сжимающие напряжения. Если наибольшее напряжение от изгиба будет больше непосредственно сжимающего напряжения, то нулевая линия напряжений будет параллельна оси z и делит поперечное сечение на две зоны с растягивающими напряжениями налево и сжимающими напряжениями направо.

Для прямоугольного поперечного сечения со сторонами h и b (рис. 224, а) уравнение (а) становится

$$\sigma_x = -\frac{P}{bh} - \frac{12Pe y}{bh^3}, \quad (a')$$

и мы получаем подстановкой $y = -(h/2)$

$$(\sigma_x)_{\max} = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left(-1 + \frac{6e}{h} \right). \quad (b')$$

в центре тяжести O поперечного сечения, то от этого условие не изменится, так как они эквивалентны нулю. Тогда мы получим осевое сжатие силой P , вызывающей непосредственно сжимающие напряжения $-P/F$, как показано на рис. 224, б, и изгиб в одной из главных плоскостей парой сил Pe , вызывающей нормальные напряжения $-(Pe y/J_z)$, как показано на рис. 224, с. Следовательно, полное напряжение будет

$$\sigma_x = -\frac{P}{F} - \frac{Pe y}{J_z}. \quad (a)$$

Эпюра распределения этого полного напряжения показана на рис. 224, д. На рис. 224, д предполагается, что наибольшее напряжение от изгиба меньше осевого сжимающего напряжения, так что по всему по-

Подстановкой $y = h/2$ мы получаем

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{P}{bh} - \frac{6Pe}{bh^2} = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right). \quad (c')$$

Можно видеть, что когда $e < h/6$, нигде по поперечному сечению знак напряжений не изменяется. Когда $e = h/6$, то на основании уравнения (с) наибольшее сжимающее напряжение равняется $2P/bh$ и напряжение на противоположной стороне прямоугольного поперечного сечения равняется нулю. Когда $e > h/6$, то знак напряжений меняется, и положение нулевой линии напряжений получится приравнением к нулю общего выражения (а') для σ_x ; тогда

$$y = -\frac{h^2}{12e} \quad (d')$$

или, посредством обозначения i_z для радиуса инерции относительно оси z (см. Приложение)

$$y = -\frac{i_z^2}{e}. \quad (134)$$

Видно, что расстояние нулевой линии напряжений от центра тяжести O уменьшается с увеличением эксцентриситета e . То же рассуждение можно применить и в случае внецентренно растягивающей нагрузки. Уравнение (134) можно применить также для других форм поперечного сечения, если точка приложения нагрузки находится на одной из главных осей инерции.

Рассмотрим теперь случай, когда точка B приложения внецентренно сжимающей силы P не находится ни на одной из двух главных осей инерции поперечного сечения, принятых на рис. 225 за оси y и z . Если взять m и n за координаты этой точки, то моменты силы P относительно осей y и z будут соответственно равны Pn и Pm . Используя принцип сложения действия сил, получим напряжение в какой-либо точке F поперечного сечения

$$\sigma_x = -\frac{P}{F} - \frac{Pny}{J_z} - \frac{Pnz}{J_y}; \quad (e')$$

первый член правой части представляет сжимающее напряжение, а два другие — напряжения от изгиба, вызываемые соответственно моментами Pm и Pn . Можно видеть, что распределение напряжений следует линейному закону. Уравнение нулевой линии напряжений получится приравнением правой части уравнения (е) нулю. При помощи обозначений $J_z/F = i_z^2$ и $J_y/F = i_y^2$, где i_z и i_y — соответствующие радиусы инерции относительно осей z и y , получается

$$\frac{my}{i_z^2} + \frac{nz}{i_y^2} + 1 = 0. \quad (f')$$

Подставляя в это уравнение сначала $y = 0$, а затем $z = 0$, мы получаем точки M

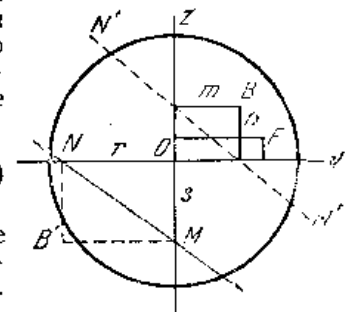


Рис. 225.

¹⁾ Случай внецентренной нагрузки длинных стержней см. § 56.

и N пересечения нулевой линии напряжений с осями координат z и y (рис. 225). Координаты этих точек s и r будут

$$s = -\frac{i_y^2}{n}, \quad r = -\frac{i_z^2}{m}, \quad (g)$$

откуда находим

$$n = -\frac{i_y^2}{s}, \quad m = -\frac{i_z^2}{r}.$$

Эти уравнения имеют такую же форму, как и уравнения (g), поэтому можно заключить, что когда нагрузка приложена в точке B' с координатами s и r , соответствующей нулевой линией будет линия $M'N'$, показанная на рисунке пунктиром и отсекающая на осях y и z отрезки m и n .

Существует другая важная зависимость между точкой приложения B нагрузки и положением соответствующей нулевой линии напряжений, а именно, когда B движется по линии B_1B_2 (рис. 226), то соответствующая нулевая линия напряжений поворачивается около некоторой постоянной точки B' . Это доказывается следующим образом: разложим нагрузку в B на две параллельные составляющие—одну в B_1 и другую в B_2 . Составляющая в B_1 действует в главной плоскости xz ; следовательно, соответствующая нулевая линия напряжений параллельна оси y и ее отрезок на Oz , как найдено из уравнения, аналогичного уравнению (134), равняется

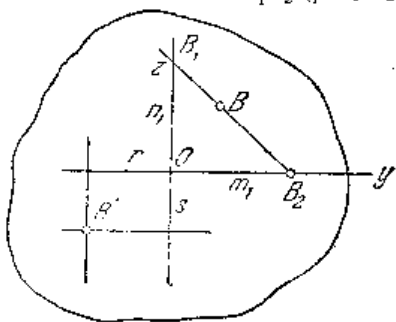


Рис. 226.

$$s = -\frac{i_y^2}{n_1} \quad (h)$$

Подобно этому нулевая линия напряжений для составляющей B_2 параллельна оси z , и ее расстояние от этой оси равняется

$$r = -\frac{i_z^2}{m_1} \quad (i)$$

Для некоторого положения нагрузки на линии B_1B_2 напряжение будет равняться нулю в B' . Следовательно, когда точка приложения нагрузки движется по прямой B_1B_2 , то соответствующая нулевая линия напряжений поворачивается около точки B' , координаты которой определяются уравнениями (h) и (i).

ЗАДАЧИ

1. Площадь поперечного квадратного сечения стержня уменьшена на половину в mn (рис. 227). Определить наибольшее растягивающее напряжение в поперечном сечении mn , вызываемое продольной нагрузкой P .

Ответ. $(\sigma_x)_{\max} = \frac{2P}{a^3} + \frac{Pa}{4} \frac{24}{a^3} = \frac{8P}{a^3}$.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круглое поперечное сечение.

3. Стержень таврового сечения внецентрично нагружен силами P (рис. 228). Определить наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения в этом стержне, если $d=1$ см, $h=9$ см, ширина полки $b=9$ см, $P=1000$ кг.

Решение. Расстояния центра тяжести таврового сечения от низа и верха соответственно равны $h_1=2,47$ см и $h_2=6,53$ см. Эксцентриситет силы P равняется $e=0,5+2,47=2,97$ см. Момент инерции $J_z=118$ см⁴. Напряжения от изгиба будут

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Pe h_1}{J_z} = \frac{1000 \cdot 2,97 \cdot 2,47}{118} = 62 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_x)_{\min} = -\frac{Pe h_2}{J_z} = -\frac{1000 \cdot 2,97 \cdot 6,53}{118} = -164 \text{ кг/см}^2.$$

Складывая их с растягивающим напряжением $P/F = 1000/17,05 = 58$ кг/см², получаем наибольшее растягивающее напряжение $62+58=120$ кг/см² и наибольшее сжимающее напряжение $164-58=106$ кг/см².

4. Определить наибольшее растягивающее напряжение в сечении mn зажимной скобы, показанной на рис. 229, если $P=120$ кг, $b=7,5$ см и поперечное сечение представляет прямоугольник с размерами $2,5 \times 0,6$ см.

Ответ. $\sigma_{\max} = 1520$ кг/см².

5. Определить ширину поперечного сечения mn в предыдущей задаче так, чтобы σ_{\max} было равно 1300 кг/см².

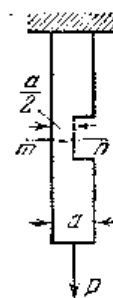


Рис. 227.

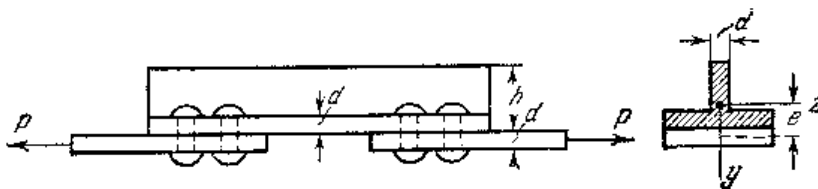


Рис. 228.

6. Найти наибольшее и наименьшее напряжения в заделанном поперечном сечении прямоугольной колонны, показанной на рис. 224, если $b=25$ см, $h=30$ см, $P=2m$ и координаты точки B приложения нагрузки (рис. 225) равны $m=n=5$ см. Найти положение нейтральной оси.

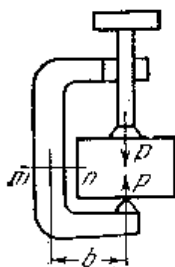


Рис. 229.

55. Ядро сечения

В предыдущем параграфе было показано, что для малого эксцентриситета e нормальные напряжения имеют один и тот же знак по всей площади поперечного сечения внецентрично нагруженного стержня. При больших значениях e нулевая линия напряжений пересекает поперечное сечение, и напряжения получаются разных знаков. В случае материалов очень слабых при растяжении, как, например, бетон или кирпичная кладка, возникает вопрос об определении области, в пределах которой можно прикладывать сжимающую нагрузку, не вызывая по всему поперечному сечению растягивающих напряжений. Эта область называется **ядром сечения**. Метод определения ядра сечения иллюстрируется следующими простыми примерами.

В случае **круглого поперечного сечения** радиуса R можем заключить в силу симметрии, что ядро сечения представляет круг. Радиус a этого круга найдется из того условия, что когда точка приложения нагрузки находится на контуре ядра, соответствующая нулевая линия напряжений должна быть касательной к контуру поперечного сечения. Припоминая, что момент инерции площади круга относительно диаметра равен $\pi R^4/4$ (см. Приложение), и, следовательно, радиус инерции равен $i = \sqrt{J/F} = R/2$, находим из уравнения (134) подстановкой a вместо e и R

вместо y , что

$$a = \frac{r^2}{R} = \frac{R}{4}. \quad (135)$$

т. е. радиус ядра сечения равен одной четверти радиуса поперечного сечения.

Для случая *кругового кольцевого сечения* с внешним радиусом R_n и внутренним радиусом R_v имеем

$$J = \frac{\pi}{4} (R_n^4 - R_v^4), \quad i^2 = \frac{J}{F} = \frac{R_n^2 + R_v^2}{4},$$

и радиус ядра на основании уравнения (134) получается

$$a = \frac{i^2}{R_n} = \frac{R_n^2 + R_v^2}{4R_n}. \quad (136)$$

Для $R_v = 0$ уравнение (136) совпадает с уравнением (135). Для очень тонкого кольца, когда R_v приближается к R_n , радиус a ядра приближается к значению $R_n/2$.

В случае *прямоугольного поперечного сечения* (рис. 230) нулевая линия напряжений совпадает со стороной cg , когда нагрузка приложена в точке A , на расстоянии $b/6$ от центра тяжести (см. стр. 213). Таким же образом нулевая линия напряжений совпадает со стороной gf , когда нагрузка находится в точке B , на расстоянии $h/6$ от центра тяжести. Когда нагрузка движется по линии AB , нейтральная ось поворачивается около точки g (см. стр. 214), не пересекая поперечного сечения. Следовательно, AB есть одна из сторон ядра сечения. Другие стороны вытекают из симметрии. Поэтому ядро сечения представляет ромб с диагоналями, равными $h/3$ и $b/3$. До тех пор, пока точка приложения остается в пределах этого ромба, нулевая линия напряжений не пересекает поперечного сечения и напряжения не будут меняться по знаку.

Для двутаврового сечения (рис. 231) крайние положения нулевой линии напряжений, в которых она не пересекает поперечное сечение, определяются сторонами AB и CD и пунктирными линиями AC и BD . Соот-

ветствующие положения точки приложения нагрузки могут быть определены из уравнения (134). По симметрии можно заключить, что эти точки будут вершинами ромба, заштрихованного на рис. 231.

Если точка приложения эксцентричной нагрузки находится вне ядра сечения, то соответствующая нулевая линия напряжений пересекает поперечное сечение, и нагрузка вызывает не только сжимающие, но также и растягивающие напряжения. Если материал совсем не сопротивляется растягивающим усилиям, то часть поперечного сечения будет бездействовать, а остальная — будет испытывать только сжимающие напряжения. Возьмем, например, прямоугольное поперечное сечение (рис. 232) с точкой приложения A нагрузки на главной оси y и на расстоянии c от края сечения. Если c меньше $h/3$, то часть поперечного сечения не будет работать. Рабочий участок может быть найден из того условия, что распределение сжимающих усилий по поперечному сечению следует линейному закону, изображенному на рисунке прямой mn , и что равнодействующая этих усилий равняется P . Так как эта рав-

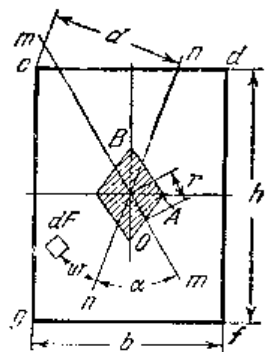


Рис. 230.

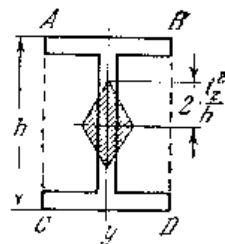


Рис. 231.

нодействующая должна проходить через центр тяжести площади треугольника mn , то размер ms рабочего участка поперечного сечения должен быть равен $3c$.

В случае *кругового поперечного сечения* (рис. 233), если эксцентриситет CA нагрузки больше $R/4$ и материал не сопротивляется растягивающим усилиям, будет работать только часть поперечного сечения. Пусть линия mn , перпендикулярная к AC , будет границей этого участка. Ее расстояние b от точки A может быть найдено из следующих условий: 1) сжимающие напряжения пропорциональны расстоянию y от mn ; 2) сумма сжимающих усилий, приходящихся на рабочий участок поперечного сечения, равна нагрузке P и 3) момент этих усилий относительно mn равен моменту Pb нагрузки P относительно той же оси. Если обозначить наибольшее сжимающее напряжение через σ_{\max} , то сжимающее напряжение на некотором расстоянии y от mn будет

$$\sigma = \frac{y\sigma_{\max}}{b-y}$$

и для определения b получаются следующие уравнения:

$$\int \frac{y\sigma_{\max}}{b-y} dF = P, \quad \int \frac{y^2\sigma_{\max}}{b-y} dF = Pb,$$

из которых

$$b = \frac{J_{mn}}{S_{mn}}, \quad (a)$$

где $J_{mn} = \int y^2 dF$ есть момент инерции площади рабочего участка поперечного сечения относительно оси mn и $S_{mn} = \int y dF$ есть статический момент площади рабочего участка поперечного сечения относительно той же оси. При помощи уравнения (a) положение A для данного положения mn легко можно найти. То же уравнение можно применить также и для других форм поперечного сечения при условии, что A находится на одной из главных осей¹⁾. Если нагрузка не приложена на главной оси, задача об определении рабочего участка поперечного сечения становится более сложной²⁾.

При помощи понятия о ядре сечения можно значительно упростить вычисление наибольших напряжений от изгиба в случае, когда изгиб происходит не в главной плоскости. Например, пусть mn на рис. 230 будет продольная плоскость балки, в которой действует изгибающий момент M , и nn — соответствующая нейтральная ось, которая образует угол α с плоскостью mn (см. стр. 195). Обозначая через σ_{\max} наибольшее напряжение в наиболее удаленной точке c и через d ее расстояние от нейтральной оси nn , находим, что напряжение в какой-либо другой

¹⁾ Для случаев круглых поперечных сечений и круглых кольцевых сечений, которые являются важными при расчете напряжений в трубах, изданы таблицы, упрощающие эти вычисления. (См. Кеск, Z. Architect. u. Ing. Ver. (Hannover), стр. 627, 1882; см. также Z. Ver. deut. Ing., стр. 1321, 1902 и статья G. D r e u e r, в Bautechnik, 1925.)

²⁾ Некоторые расчеты для прямоугольных поперечных сечений можно найти в следующих статьях: F. E n g e l s s e r, Zentr. Bauverwalt., стр. 429, 1919; O. H e n k e l s, там же, стр. 447, 1918; K. P o h l, Der Eisenbau, стр. 211, 1918; F. K. E s l i n g, Proc. Inst. Civil Engrs. (London), т. 3, 1905—1906.

точке, входящей на расстоянии w от mn , будет $\sigma = \sigma_{\max} w/d$, и момент всех усилий, распределенных по поперечному сечению, относительно оси mn равняется

$$\frac{\sigma_{\max} w^2}{d} dF = \frac{\sigma_{\max}}{d} J_{nn}. \quad (b)$$

где J_{nn} есть момент инерции поперечного сечения относительно оси mn . Момент внешних сил относительно той же оси равняется $M \sin \alpha$. Приравнявая это правой части уравнения (b), имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{Md \sin \alpha}{J_{nn}}. \quad (c)$$

Это уравнение можно значительно упростить, пользуясь свойствами ядра сечения¹⁾. Пусть O будет точка пересечения плоскости mn с ядром сечения и r — ее расстояние от центра тяжести поперечного сечения. Из свойств ядра сечения вытекает, что сжимающая сила P , приложенная в точке O , вызывает напряжение, равное нулю, в вершине s . Следовательно, растягивающее напряжение, вызываемое в точке s изгибающим моментом Pr , действующим в плоскости mn , численно равно сжимающему напряжению P/r от силы P или, подставляя Pr вместо M в уравнение (c), получаем

$$\frac{P}{F} = \frac{Prd \sin \alpha}{J_{nn}},$$

откуда

$$\frac{d \sin \alpha}{J_{nn}} = \frac{1}{Fr}. \quad (d)$$

Вставляя это в уравнение (c), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Fr}. \quad (137)$$

Произведение Fr называется моментом сопротивления поперечного сечения в плоскости mn . Это определение согласуется с определением, которое мы имели прежде (см. стр. 88), и для изгиба в главной плоскости Fr становится равным W .

ЗАДАЧИ

1. Определить ядро сечения профиля двутавровой балки, для которой $F = 151 \text{ см}^2$, $J_z = 83860 \text{ см}^4$, $i_z = 23,5 \text{ см}$, $J_y = 1700 \text{ см}^4$, $i_y = 3,36 \text{ см}$. Ширина полки $b = 17,6 \text{ см}$.

Ответ. Ядро сечения представляет ромб с диагоналями, равными 36,82 см и 2,56 см.

2. Определить радиус ядра кругового кольцевого сечения, если $R_{\text{вн}} = 25 \text{ см}$ и $R_{\text{вн}} = 20 \text{ см}$.

Ответ. Радиус ядра $a = 10,25 \text{ см}$.

3. Определить ядро поперечного сечения, имеющего форму равностороннего треугольника.

4. Определить ядро поперечного сечения квадратной тонкой трубки.

Решение. Если h — толщина трубки и b — сторона квадратного поперечного сечения, то имеем

$$J_z = J_y \approx \frac{2}{3} hb^3, \quad i_z^2 = i_y^2 = \frac{b^2}{6}.$$

Ядро сечения есть квадрат с диагональю

$$d = 2 \frac{i^2}{b} = \frac{2b}{3}.$$

¹⁾ См. R. L. and d. Z. Architekt. u. Ingenieurw., стр. 291, 1897.

56. Внецентренное сжатие гибкой симметричной колонны

При рассмотрении изгиба гибкой колонны под действием внецентренной нагрузки (рис. 234) прогибом f уже более нельзя пренебрегать по сравнению с эксцентриситетом e . Предположим, что эксцентриситет имеется в плоскости симметрии, тогда изгиб будет происходить в той же продольной плоскости xy , в которой действует нагрузка P , и изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn будет

$$M = -P(f + e - y). \quad (a)$$

При определении знака момента необходимо заметить, что, вращая рис. 234 по часовой стрелке на угол $\pi/2$, мы получим те же направления координатных осей, которые были приняты при выводе уравнения (79). Поэтому, следуя правилу, представленному на рис. 63, б, мы берем момент (a) со знаком минус, так как изогнутая ось обращена вогнутостью в сторону положительного направления оси y . Дифференциальное уравнение изогнутой оси получится подстановкой (a) в уравнение (79), а именно

$$FJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = P(f + e - y). \quad (b)$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{P}{EJ_z} = p^2, \quad (138)$$

получаем из уравнения (b)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = p^2(f + e). \quad (c)$$

Путем подстановки можно легко доказать, что уравнение

$$y = c_1 \sin px + c_2 \cos px + f + e \quad (d)$$

есть решение уравнения (c). Это решение содержит две постоянные интегрирования c_1 и c_2 , величины которых должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить условиям на концах колонны и получить истинную изогнутую ось колонны. На нижнем конце, который является заделанным, условия следующие:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0. \quad (e)$$

Пользуясь этими условиями совместно с выражением (d) и его

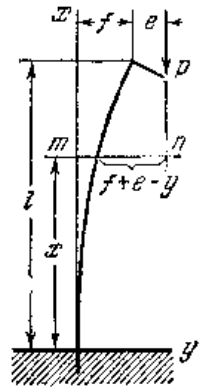


Рис. 234.

первой производной, получаем

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -(f + e),$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси (d) получается в виде

$$y = (f + e)(1 - \cos px). \quad (i)$$

Чтобы получить величину прогиба f на верхнем конце колонны, мы подставляем $x = l$ в правую часть уравнения (f). Тогда прогиб y в левой части должен быть равен f , и мы получаем уравнение

$$f = (f + e)(1 - \cos pl),$$

откуда

$$f = \frac{e(1 - \cos pl)}{\cos pl}. \quad (139)$$

Подставляя это в уравнение (f), получаем уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{e(1 - \cos px)}{\cos pl}. \quad (140)$$

Пользуясь этим уравнением, мы можем легко вычислить прогиб в любом поперечном сечении стержня.

В случае короткой стойки, которая была рассмотрена в § 54, величина pl мала по сравнению с единицей, и с достаточной точностью можно принять

$$\cos pl \approx 1 - \frac{1}{2} p^2 l^2. \quad (g)$$

Пользуясь этим значением $\cos pl$ и пренебрегая величиной $p^2 l^2 / 2$ в знаменателе выражения (139), как малой величиной по сравнению с единицей, мы получаем

$$f = \frac{ep^2 l^2}{2} = \frac{Pel^2}{2EJ_z}. \quad (h)$$

Это представляет величину прогиба на конце консоли, изгибаемой парой сил Pe , приложенной на конце. Следовательно, использование приближенного выражения (g) равносильно тому, что пренебрегается влиянием прогибов на величину изгибающего момента и принимается взамен него постоянный момент, равный Pe .

Если pl не мало, что обычно бывает в случаях, когда колонна является гибкой, то при вычислении f мы должны пользоваться выражением (139). Таким путем мы находим, что прогиб уже не пропорционален нагрузке P . Он увеличивается гораздо быстрее, чем P , как это видно из значений этого прогиба, данных во второй строчке таблицы 2.

Таблица 2

Прогибы, вызываемые внецентренной продольной нагрузкой

pl	0,1	0,5	1,0	1,5	$\pi/2$
f	0,005e	0,139e	0,851e	13,1e	∞
приближенное f	0,005e	0,139e	0,840e	12,8e	∞
$\sec pl$	1,005	1,140	1,867	13,2	∞
$P/P_{кр}$	0,004	0,101	0,405	0,911	1

Наибольший изгибающий момент имеет место в заделанном конце колонны и равняется

$$M_{\max} = P(e + f) = Pe \sec pl. \quad (141)$$

Ряд значений $\sec pl$ дан в четвертой строчке вышеприведенной таблицы. Эти значения показывают, как быстро увеличивается момент, когда pl приближается к значению $\pi/2$. Это явление будет рассмотрено в следующем параграфе.

Здесь, однако, необходимо повторить, что в рассматриваемом случае нет пропорциональности между величиной сжимающей силы и прогибом f , который она вызывает. Следовательно, здесь не может быть применен принцип сложения действия сил (стр. 144). Сила P , направленная по оси, вызывает только сжатие стержня, но когда та же сила действует вместе с изгибающей парой Pe , она вызывает не только сжатие, но также и дополнительный изгиб, так что полная деформация не может быть получена простым сложением продольного сжатия от силы P и изгиба от пары сил Pe . Причину, почему в этом случае не применим принцип сложения действия сил, можно легко объяснить, если мы сравним эту задачу с изгибом балки поперечными грузами. В последнем случае можно предположить, что малые прогибы балки не изменяют расстояния между силами, и изгибающие моменты можно вычислить без рассмотрения прогиба балки. В случае внецентренного сжатия колонны прогибы, вызываемые парой сил Pe , совершенно изменяют характер действия осевой нагрузки, которая вынуждена производить как сжатие, так и изгиб. В каждом случае, когда деформация, возникающая от одной нагрузки, изменяет действие другой нагрузки, будет найдено, что окончательная деформация не может быть получена методом сложения действия сил.

Предыдущие рассуждения относились к изгибу в плоскости симметрии колонны. Если колонна имеет две плоскости симметрии и эксцентриситет e не находится на одной из главных осей поперечного сечения, то необходимо разложить изгибающую пару Pe на две составляющие пары, каждая из которых действует в плоскости симметрии колонны. Тогда можно будет исследовать изгиб в каждой из двух плоскостей таким же способом, как рассмотрено выше.

Приведенные выводы об изгибе колонны, заделанной одним концом, можно также применить к случаю стойки, внецентренно сжатой двумя равными и противоположными силами P (рис. 235). На основании симметрии можно заключить, что среднее поперечное сечение A не поворачивается при изгибе, и каждая половина стойки на рис. 235 находится точно в таких же условиях, как стойка на рис. 234. Следовательно, прогиб и наибольший изгибающий момент получаются подстановкой $l/2$ вместо l в уравнения (139) и (141). Таким путем мы получим

$$f = \frac{e \left(1 - \cos \frac{pl}{2}\right)}{\cos \frac{pl}{2}}, \quad (142)$$

$$M_{\max} = Pe \sec \frac{pl}{2}, \quad (143)$$

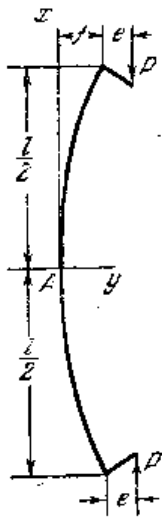


Рис. 235.

и уравнение для наибольшего сжимающего напряжения получается

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W} \sec \frac{pl}{2},$$

где W означает момент сопротивления.

ЗАДАЧИ

1. Найти прогиб в середине и наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения в внецентренно сжатой стальной стойке с шарнирными концами длиной 3 м, если поперечное сечение представляет швеллер с высотой 14 см, $J_z = 53,2 \text{ см}^4$, $J_y = 563,7 \text{ см}^4$, $F = 18,51 \text{ см}^2$, шириною полок 5,8 см. Расстояние между центром тяжести и наружной гранью стенки швеллера $z_0 = 1,71 \text{ см}$ и сжимающая сила $P = 1,6 \text{ т}$ действует по линии пересечения плоскости симметрии швеллера с наружной гранью стенки швеллера.

Ответ. $f = 0,363 \text{ см}$, $\sigma_{\max} = 193 \text{ кг/см}^2$ — растягивающее напряжение, $\sigma_{\min} = 169 \text{ кг/см}^2$ — сжимающее напряжение.

2. Стальной брус квадратного поперечного сечения $5 \times 5 \text{ см}$ и длиной 1,8 м внецентренно сжимается силами $P = 400 \text{ кг}$. Эксцентриситет e направлен по диагонали квадрата и равен 2,5 см. Найти наибольшее сжимающее напряжение, полагая, что стержень имеет шарнирные концы.

Ответ. $\sigma_{\max} = 85 \text{ кг/см}^2$.

3. Стальной стержень, имеющий длину 1,2 м и прямоугольное поперечное сечение $2,5 \times 5 \text{ см}$, сжимается двумя силами $P = 400 \text{ кг}$, приложенными в вершинах концевых поперечных сечений, так что эксцентриситет направлен по диагонали поперечного сечения и равен половине длины диагонали. Найти наибольшее сжимающее напряжение, считая концы шарнирными.

Ответ. $\sigma = 231 \text{ кг/см}^2$.

57. Критическая нагрузка

В предыдущем параграфе было указано, что прогиб внецентренно сжатой колонны очень быстро увеличивается, когда величина pl в уравнении (139) приближается к значению $\pi/2$. Когда pl становится равным $\pi/2$, то формулы (139) для прогибов и (141) для наибольшего изгибающего момента дают бесконечно большие значения. Чтобы найти соответствующее значение нагрузки, мы воспользуемся формулой (138). Подставляя $p = \pi/2l$ в это выражение, мы находим,

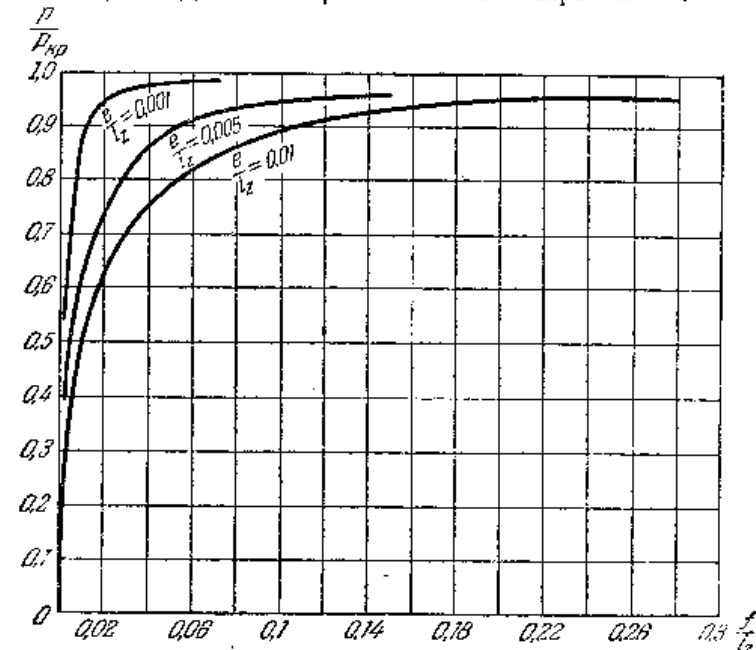


Рис. 236.

что значение нагрузки, при котором выражения (139) и (141) становятся бесконечно большими, равняется

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{4l^2}. \quad (144)$$

Это значение, которое зависит только от размеров колонны и модуля упругости материала, называется *критической нагрузкой* или *эйлеровой нагрузкой*, так как Эйлер был первым, который вывел это значение в своем знаменитом исследовании упругих кривых¹⁾. Чтобы более ясно видеть физическое значение этой нагрузки, построим кривые, представляющие зависимость между нагрузкой P и прогибом f , каковая дается уравнением (139). Несколько кривых такого рода для различных значений отношения e/l , т. е. эксцентриситета к радиусу инерции, показано на рис. 236. Абсциссы этих

¹⁾ Цитировано на стр. 125.

кривых представляют значение отношения f/l_0 , в то время как ординаты представляют значение отношения $P/P_{кр}$, т. е. значения отношения действующей нагрузки к ее критическому значению, определяемому уравнением (144).

Из кривых видно, что прогибы f делаются все меньше и меньше и кривые все ближе и ближе подходят к вертикальной оси по мере того, как уменьшается эксцентриситет e . В то же самое время прогибы быстро увеличиваются, когда нагрузка P приближается к ее

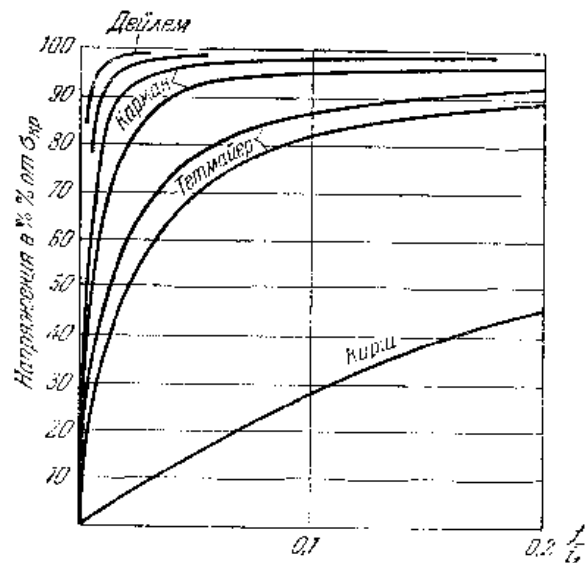


Рис. 237.

критическому значению (144), и все кривые имеют своей асимптотой горизонтальную линию $P/P_{кр} = 1$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси (79), которое было использовано при изложении предыдущего параграфа, было выведено на основании предположения, что прогибы малы по сравнению с длиной l стержня. Следовательно, формула (139) для прогиба f не может дать нам точного результата, когда P весьма близко к $P_{кр}$. Однако кривые на рис. 236 указывают, что независимо от того, насколько мал может быть эксцентриситет e , возникают весьма большие прогибы, если нагрузка P достаточно близка к ее критическому значению. Если прогибы становятся большими, то изгибающий момент в заделанном конце и напряжения также получаются большими.

Эксперименты, относящиеся к сжатию колонн, показывают, что даже, когда приняты все практические меры предосторожности к тому, чтобы приложить нагрузку центрально, всегда имеется некоторый неизбежный малый эксцентриситет. Следовательно, в таких опытах нагрузка P вызывает не только сжатие, но и изгиб. Кривые на рис. 237 показывают результаты таких опытов, полученные

некоторыми экспериментаторами. Можно видеть, что с увеличением точности в приложении нагрузки кривые все ближе и ближе подходят к вертикальной оси и быстрое увеличение прогиба становится все более и более резко выраженным, когда нагрузка приближается к ее критическому значению. Нагрузки P , которые близки к их критическим значениям, всегда вызывают большие деформации, обычно имеющие место за пределами упругости материала, так что после такой нагрузки колонна теряет свою практическую пригодность. Это указывает на то, что критическая нагрузка, определяемая уравнением (144), должна рассматриваться как *предельная нагрузка*, которая производит полное разрушение колонны. В практических приложениях допустимая нагрузка должна быть меньше критической нагрузки, и она получается путем деления критического значения нагрузки на некоторый коэффициент безопасности. Дальнейшее обсуждение этого вопроса находится в следующих двух параграфах.

В предыдущем изложении была рассмотрена колонна с одним заделанным концом и другим свободным. Подобные выводы могут быть сделаны в случае стойки с шарнирными концами (рис. 235). Уравнения (142) и (143) дают бесконечно большие значения, когда

$$\frac{pl}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя вместо p его значение из формулы (138), мы получаем в этом случае

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}. \quad (145)$$

Это есть *критическое значение сжимающей силы* для стойки с шарнирными концами.

В случае сжатия колонны с заделанными концами изгиб имеет форму, показанную на рис. 238. Изогнутую ось можно рассматривать как состоящую из четырех участков, каждый из которых подобен кривой, полученной ранее для колонны с одним заделанным и другим свободным концом. В этом случае критическое значение нагрузки найдется подстановкой $l/4$ вместо l в уравнение (144), что дает

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ_z}{l^2}. \quad (146)$$

Такова *критическая нагрузка* для колонны с заделанными концами.

Необходимо отметить, что при выводе уравнения (139) предполагалось, что эксцентриситет находится в направлении оси y и что эта ось является осью симметрии. Если колонна имеет две

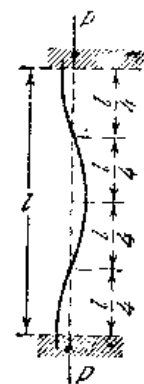


Рис. 238.

плоскости симметрии, то подобные формулы будут получены, если первоначальный эксцентриситет находится в направлении оси z . Тогда изгиб будет происходить в плоскости xz , и, чтобы вычислить прогибы, нужно в уравнение (139) подставить J_y вместо J_z . Если сделана попытка приложить нагрузку центрально и изгиб произойдет в результате малого неизбежного эксцентриситета, то мы должны рассматривать изгиб в обеих главных плоскостях xy и xz , и при вычислении критического значения нагрузки мы должны в уравнения (144), (145) и (146) подставить меньший из двух главных моментов инерции. В последующем изложении предполагается, что J_z есть наименьший главный момент инерции и i_z — соответствующий радиус инерции.

При вычислении прогибов иногда бывает удобно применять приближенные формулы вместо точных формул (139) и (142). В предыдущем параграфе было показано (стр. 220), что для малых нагрузок, т. е. когда pl есть малая дробь, скажем меньше $\frac{1}{10}$, прогиб определяется с достаточной точностью из уравнения

$$f = \frac{Pel^2}{2EJ_z}, \quad (a)$$

в котором влиянием продольной силы на изгиб пренебрегается и предполагается, что изгибающий момент Pe является постоянным. Для больших нагрузок уравнение (a) является недостаточно точным, и необходимо принять во внимание влияние сжимающей силы на изгиб. Это влияние зависит, главным образом, от отношения $P/P_{кр}$, и прогиб может быть получен с весьма удовлетворительной точностью из приближенной формулы

$$f = \frac{Pel^2}{2EJ_z} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (b)$$

Прогибы, вычисленные по этой формуле, даны в третьей строчке таблицы 2 на стр. 221. Сравнивая эти числа с числами второй строчки той же таблицы, видим, что эта формула (b) является достаточно точной почти до критического значения нагрузки.

Подобная приближенная формула для прогиба стойки с шарнирными концами представится в виде ¹⁾

$$f = \frac{Pel^2}{8EJ_z} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (c)$$

Первый множитель в правой части представляет прогиб, вызванный

¹⁾ Это приближенное решение было дано Thomas'ом Young'ом в его знаменитой книге «A course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts», London, 1807.

двумя парами сил Pe , приложенными на концах. Второй множитель представляет влияние на прогиб продольной сжимающей силы P .

Уравнение (c) весьма полезно для определения критической нагрузки из опыта со сжатой стойкой. Если результаты такого опыта представлены в форме кривой, подобной кривым, показанным на рис. 237, то для определения $P_{кр}$ нужно провести горизонтальную асимптоту к этой кривой. Эта операция не может быть сделана с достаточной точностью, особенно если неизбежные эксцентриситеты не очень малы и кривая не поворачивается очень резко при приближении к горизонтальной асимптоте. Более удовлетворительное определение $P_{кр}$ получается при помощи уравнения (c). Разделив это уравнение на $P/P_{кр}$, мы получим

$$\frac{f}{P} P_{кр} = \frac{e\pi^2}{8} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}$$

и

$$\frac{f}{P} P_{кр} - f = \frac{e\pi^2}{8}.$$

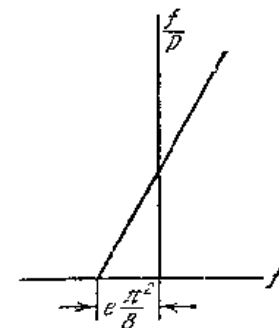


Рис. 239.

Это уравнение показывает, что если мы возьмем за абсциссы прогибы f , измеренные при опыте, а за ординаты — отношение f/P , то построенный на этих координатах график представит прямую линию (рис. 239). Эта линия пересечет горизонтальную ось ($f/P=0$) на расстоянии $e\pi^2/8$ от начала координат, и величина, обратная тангенсу угла наклона линии, даст критическую нагрузку ¹⁾.

58. Критическое напряжение. Расчет колонн

Рассматривая случай стойки с шарнирными концами, мы получим критическое напряжение путем деления критической нагрузки, определяемой из уравнения (145), на площадь поперечного сечения. Таким путем мы находим

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{(l/i_z)^2}. \quad (147)$$

Видно, что для данного материала значение критического напряжения зависит от величины отношения l/i_z , которое называется *гибкостью* стержня. На рисунке 240 кривая ACB представляет ²⁾

¹⁾ Этот метод, указанный R. V. Southwell'ом Proc. Roy. Soc. (London) A., т. 135, стр. 601, 1932, оказался весьма полезным и теперь широко применяется при испытаниях колонн.

²⁾ Эта кривая иногда называется *кривой Эйлера*, так как она получена из формулы Эйлера для критической нагрузки.

зависимость между $\sigma_{кр}$ и l/i_z для случая стали, имеющей $E=2 \cdot 10^6$ кг/см². Необходимо отметить, что кривая вполне определяется величиной модуля упругости материала и не зависит от его предела прочности. Для больших значений гибкости l/i_z критическое напряжение становится малым и это указывает на то, что очень гибкая стойка выпучивается и теряет свою прочность при очень малом сжимающем напряжении. Это положение не может быть улучшено, если взять сталь высокой прочности, так как модуль упругости стали значительно не изменяется благодаря примесям и термической обработке и остается практически постоянным.

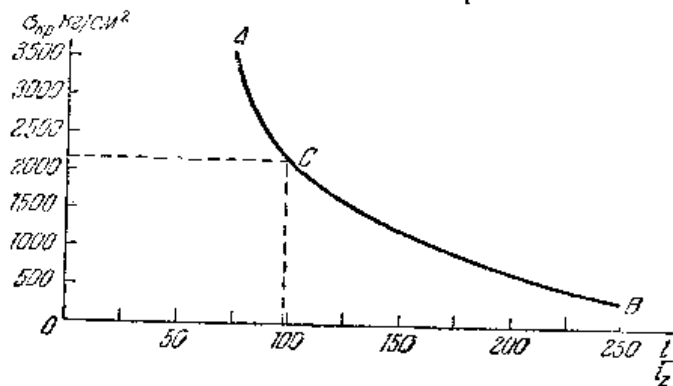


Рис. 240.

Стойка может быть сделана более прочной путем увеличения момента инерции J_z и радиуса инерции i_z , что может быть очень часто выполнено без какого-либо увеличения площади поперечного сечения путем расположения материала стойки по возможности дальше от нейтральной оси. Таким образом, колонны трубчатого сечения более экономичны, чем колонны со сплошным сечением. Когда гибкость уменьшается, то критическое напряжение увеличивается, и кривая ACB приближается асимптотически к вертикальной оси. Однако должен быть некоторый предел применения кривой Эйлера для коротких стоек. Вывод выражения для критической нагрузки основан на применении дифференциального уравнения (79) для изогнутой оси, а при выводе этого последнего предполагалось, что материал совершенно упругий и следует закону Гука (см. § 31). Поэтому кривая ACB на рис. 240 дает удовлетворительные результаты лишь для сравнительно гибких стержней, для которых $\sigma_{кр}$ остается в пределах упругости материала. Для коротких стоек, для которых $\sigma_{кр}$, полученное из уравнения (147), выше предела пропорциональности материала, кривая Эйлера не дает удовлетворительного результата и нужно прибегнуть к опытам на продольный изгиб стоек, сжатых за пределом пропорциональности. Эти опыты показывают, что стойки из такого материала, как строительная сталь, которая имеет резко выраженный предел текучести, теряют

свою устойчивость и выпучиваются, как только сжимающее напряжение становится равным пределу текучести. Некоторые результаты опытов показаны на рис. 241. Материалом является строительная сталь, имеющая резко выраженный предел текучести $\sigma_T = 3000$ кг/см². Видно, что для стоек, обладающих относительно большой гибкостью ($l/i_z > 80$), опытные значения критических напряжений совпадают удовлетворительно с кривой Эйлера, в то время как для коротких стоек критическое напряжение остается практически независимым от гибкости l/i_z и равняется пределу текучести.

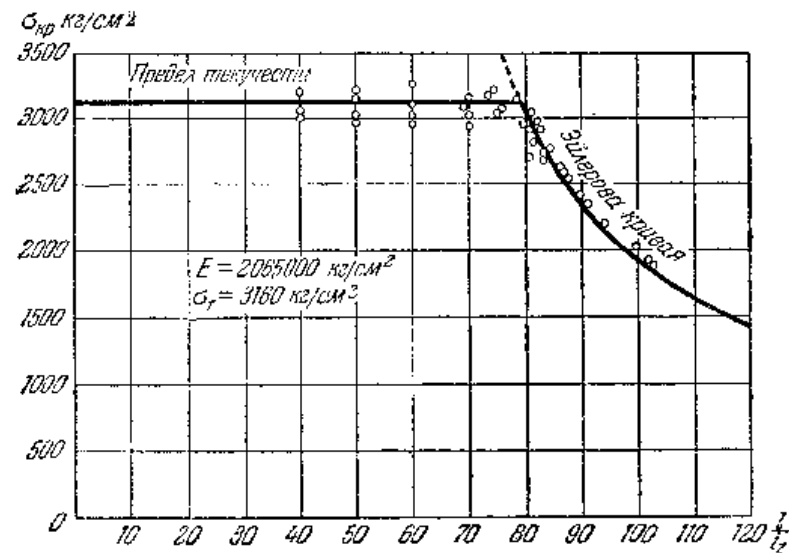


Рис. 241.

В случае обыкновенной низкоуглеродистой стали предел текучести не так резко выражен, как в предыдущем примере, и имеет место при более низком напряжении. Для таких сталей мы можем принять $\sigma_T = 2200$ кг/см². Предел пропорциональности также значительно ниже, так что кривая Эйлера удовлетворительна лишь для гибкостей выше $l/i_z = 100$, что соответствует сжимающему напряжению $\sigma_{кр} = 2000$ кг/см². При более высоких напряжениях, т. е. для $l/i_z < 100$, материал не следует закону Гука, и кривой Эйлера пользоваться нельзя. Она обычно заменяется в неупругой области двумя прямыми линиями AB и BC , как показано на рис. 242. Горизонтальная линия AB соответствует пределу текучести, а наклонная линия BC взята для напряжений между пределом пропорциональности и пределом текучести материала.

Имея такую диаграмму, как линия $ABCD$ на рис. 242, построенная для обыкновенной строительной стали, мы можем легко получить критическое напряжение для стальной стойки любых размеров. Необходимо лишь вычислить в каждом частном случае значение гибкости l/i_z и взять соответствующую ординату из кривой.

Чтобы получить безопасное напряжение для стойки, необходимо критическое напряжение разделить на надлежащий коэффициент безопасности. При выборе этого коэффициента необходимо принять во внимание, что, так как гибкость увеличивается, различные недостатки, такие как первоначальная кривизна колонны, по-видимому, увеличиваются. Поэтому кажется логичным вводить переменный коэффициент безопасности, который увеличивается с увеличением гибкости. В некоторых технических условиях коэффициент безопасности увеличивается от 1,7 для $l/i_z=0$, до 3,5 для

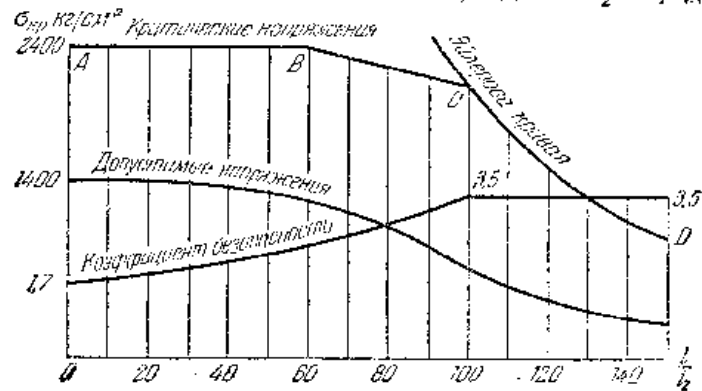


Рис. 242.

$l/i_z=100$. Он изменяется таким образом, что допускаемые напряжения в неупругой области следуют параболическому закону. Для $l/i_z > 100$ коэффициент безопасности принимается постоянным и равным 3,5 и допускаемые напряжения вычисляются при помощи кривой Эйлера. На рис. 242 даны кривые, которые представляют допускаемые напряжения и коэффициенты безопасности как функции гибкости для обыкновенной строительной стали.

Выше была рассмотрена стойка с шарнирными концами. Этот случай иногда называется *основным случаем* продольного изгиба стоек, так как он встречается очень часто при расчете сжатых элементов ферм с шарнирными узлами. Допускаемые напряжения, определяемые по диаграмме рис. 242 для основного случая, также могут быть использованы в других случаях при условии, если мы возьмем вместо действительной длины колонны *приведенную длину*, зависящую от условий на концах колонны. Рассматривая, например, случай колонны с одним заделанным и другим свободным концом (см. стр. 219), а также колонну с обоими заделанными концами (см. стр. 225), мы можем представить соответствующие формулы для критических нагрузок в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_z}{(2l)^2} \quad \text{и} \quad P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_z}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}.$$

Сравнивая эти формулы с формулой (145) для основного случая, мы можем заключить, что при расчете колонны с одним заделанным и другим свободным концом мы должны взять длину в два раза больше действительной длины, чтобы воспользоваться диаграммой рис. 242. В случае колонны с обоими заделанными концами приведенная длина равна половине действительной длины.

Подбор надлежащих размеров поперечного сечения колонны обычно производится путем последовательных попыток. Зная нагрузку P , действующую на колонну, мы принимаем некоторые размеры поперечного сечения и вычисляем i_z и l/i_z для этих размеров. Тогда значение безопасного сжимающего напряжения получится из диаграммы рис. 242. Умножая это значение на площадь принятого поперечного сечения, получим допускаемую нагрузку на колонну. Если эта нагрузка не меньше и незначительно больше P , то принятое поперечное сечение является удовлетворительным. В противном случае вычисления нужно повторить. В случае колонны с заделанными концами при вычислении i_z принимается площадь поперечного сечения брутто, так как заклепочные отверстия не оказывают заметного влияния на величину критической нагрузки. Однако при вычислении безопасной нагрузки на колонну допускаемое напряжение умножается на площадь поперечного сечения нетто для того, чтобы застраховать от чрезмерных напряжений в колонне.

ЗАДАЧИ

1. Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения $2,5 \times 5$ см и с шарнирными концами сжимается продольными силами. Определить наименьшую длину, при которой можно применить уравнение (147) для критического напряжения, если предел пропорциональности материала равен 2000 кг/см^2 и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Определить величину критического напряжения, если длина стержня равна 1,5 м.

Ответ. Наименьшая длина = 72 см. Критическое напряжение для $l=1,5$ м равняется 457 кг/см^2 .

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круговое поперечное сечение диаметра 2,5 см и концы его заделаны.

3. Определить критическое сжимающее напряжение для бруса двутаврового сечения, длина которого равна 1,8 м и концы которого заделаны. $J_z = 64,4 \text{ см}^4$, $J_y = 712 \text{ см}^4$ и $F = 21,5 \text{ см}^2$. Определить безопасную нагрузку при помощи кривой рис. 242.

Ответ. $\sigma_{кр} = 1830 \text{ кг/см}^2$, $l/i_z = 104$, безопасная нагрузка = 11 240 кг.

4. Решить предыдущую задачу, полагая, что концы колонны заделаны. Воспользоваться рис. 242.

Ответ. $\sigma_{кр} = 2200 \text{ кг/см}^2$, коэффициент безопасности = 2, безопасная нагрузка = 23 650 кг.

5. Вычислить при помощи рис. 242 безопасную нагрузку для стержня (рис. 243), составленного из двух двутавровых балок того же поперечного сечения, что и в вышеприведенной задаче 3. Длина стержня равна 3 м и он имеет шарнирные концы. Предположить, что соединение осуществлено так жестко, что обе двутавровые балки работают, как один брус.

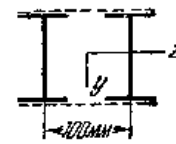


Рис. 243.

Решение. $J_z = 2 \times 712 = 1424 \text{ см}^4$, $J_y = 2 [64,4 + 21,5 \times (5)^2] = 1204 \text{ см}^4$. Поэтому большее значение гибкости равно

$$\frac{l}{i_y} = \frac{300}{\sqrt{\frac{1204}{2 \cdot 21,5}}} = 56,7,$$

и из рис. 242 находим, что допускаемое сжимающее напряжение равняется 1030 кг/см^2 .

Безопасная нагрузка $= 1030 \cdot 21,5 = 44\ 300 \text{ кг}$.

6. Решить предыдущую задачу, полагая, что концы стержня заделаны.

7. Колонна длиной 3 м с шарнирными концами состоит из двух швеллеров, имеющих $J_z = 53,2 \text{ см}^4$, $J_y = 563,7 \text{ см}^4$, $F = 18,51 \text{ см}^2$ и расстояние между центром тяжести и наружной гранью стержня швеллера $z_0 = 1,71 \text{ см}$. Найти безопасную нагрузку на колонну, если расстояние между наружными гранями стенок швеллеров равняется 10 см.

8. Определить необходимую площадь поперечного квадратного сечения стальной стойки длиной 1,8 м, если нагрузка $P = 16 \text{ т}$ и концы являются шарнирными. Воспользоваться рис. 242.

9. Решить предыдущую задачу, предполагая, что концы стойки заделаны.

59. Расчет колонн на основании предполагаемых неточностей

В предыдущем параграфе безопасная нагрузка на колонну была получена путем деления критической нагрузки для колонны на надлежащий коэффициент безопасности. Недостаток этого метода заключается в некотором произволе при выборе коэффициента безопасности, который, как мы видели, изменяется одновременно с гибкостью. Чтобы иметь более рациональный способ расчета колонн, был разработан ¹⁾ другой метод, который основан на предполагаемых неточностях. На основании существующих экспериментальных данных мы можем принять некоторые значения для величины неизбежного эксцентриситета e в приложении сжимающей силы P . Тогда, пользуясь этими значениями в формулах § 56, мы можем вычислить величину P_T нагрузки, при которой наибольшее сжимающее напряжение стойки получается равным пределу текучести материала. Тогда безопасная нагрузка получается путем деления P_T на надлежащий коэффициент безопасности. Таким образом, вместо того, чтобы пользоваться критической нагрузкой, которая эквивалентна разрушающей нагрузке, мы пользуемся нагрузкой, при которой начинается текучесть, как основанием для вычисления безопасной нагрузки.

Этот метод расчета колонн можно упростить при помощи диаграмм, построение которых будет теперь пояснено. Если взять случай стойки с шарнирными концами (рис. 235), то наибольший изгибаю-

щий момент получится из уравнения (143), и наибольшее сжимающее напряжение будет

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W} \sec \sqrt{\frac{P}{EJ_z}} \frac{l}{2}. \quad (a)$$

Первый член правой части есть напряжение, возникающее непосредственно от силы P , а второй — наибольшее сжимающее напряжение, вызываемое изгибающим моментом. Нагрузка, при которой начинается текучесть, получается путем подстановки в это уравнение σ_T вместо σ_{\max} , что дает

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F} \left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2i_z} \sqrt{\frac{P_T}{EF}} \right). \quad (b)$$

Здесь мы пользуемся обозначением $r = \frac{W}{F}$ для радиуса ядра поперечного сечения (см. стр. 218) и $i_z = \sqrt{J_z/F}$ для наименьшего главного радиуса инерции. Величина P_T/F есть среднее сжимающее напряжение или центральное сжимающее напряжение, при котором начинается текучесть. Обозначая это напряжение через σ_c , мы получаем

$$\sigma_T = \sigma_c \left(1 + \frac{e}{r} \sec \frac{l}{2i_z} \sqrt{\frac{\sigma_c}{E}} \right). \quad (c)$$

Из этого уравнения для данного значения отношение e/r можно получить значение σ_c для любого значения гибкости l/i_z . Результаты таких вычислений для строительной стали, имеющей $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$, представлены кривыми на рис. 244. Пользуясь этими кривыми, мы можем легко вычислить среднее сжимающее напряжение σ_c и сжимающую нагрузку $P_T = F\sigma_c$, при которой начинается текучесть, если даны e/r и l/i_z . Тогда безопасная нагрузка получится путем деления P_T на коэффициент безопасности.

В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что неизбежные неточности в колонне могли быть представлены эксцентриситетом нагрузки. Подобным образом мы можем также рассматривать как неточность первоначальную кривизну колонны. Обозначая наибольшее

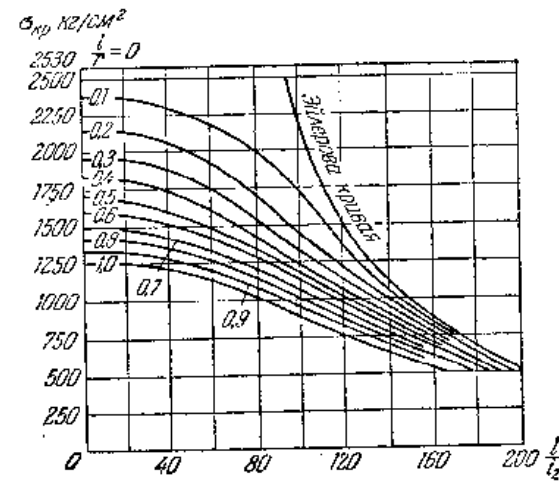


Рис. 244.

¹⁾ См. D. H. Johnson, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., Дек. 1934; также H. K. Stephenson and K. Cloninger, Jr. Texas Eng. Exp. Sta Bull. N. 129, 1953.

начальное отклонение оси колонны от прямой линии ¹⁾ через a , можем получить кривые, подобные показанным на рис. 244 и представляющие σ_c как функцию отношения a/l и гибкости l/i_z .

При практических расчетах обычно полагают, что первоначальное отклонение a находится в некотором отношении к длине l колонны. Взяв некоторую величину такого отношения ²⁾, мы вычислим

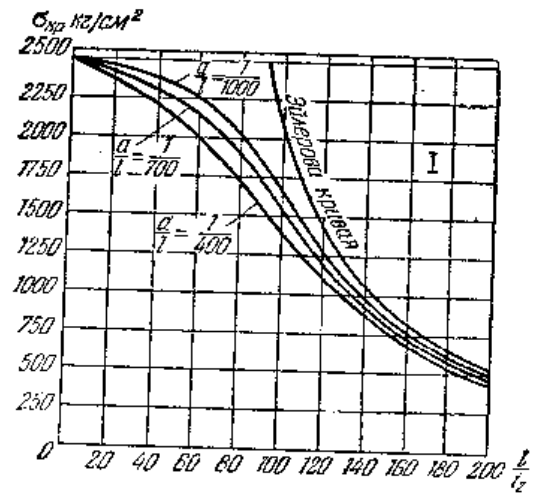


Рис. 245.

величину a , и тогда значение σ_c получится из вышеупомянутых кривых. Результаты, полученные таким путем для трех различных значений отношения a/l и для $\sigma_r = 2400 \text{ кг/см}^2$, показаны для двутаврового сечения на рис. 245. Для очень коротких колонн все три кривые дают $\sigma_c = 2400 \text{ кг/см}^2$. Для очень гибких колонн значения, даваемые кривыми, приближаются к значениям, получаемым из кривой Эйлера.

Пользуясь одной из кривых и разделив значение σ_c , взятое из кривой, на надлежащий коэффициент безопасности, скажем 2, получим безопасное значение среднего сжимающего напряжения. Преимущество этого метода заключается в том, что здесь применяется постоянный коэффициент безопасности, так как увеличение неточностей с возрастанием длины l колонны уже было принято в соображение, а именно: было предположено, что эксцентриситет пропорционален пролету. Однако величина неточностей, которая должна быть принята, остается в некоторой степени неопределенной и зависящей от существующих экспериментальных данных.

60. Эмпирические формулы для расчета колонн

В обоих методах расчета колонн, разработанных в двух последних параграфах на основании теоретических соображений, имеет место некоторая неопределенность, как, например, переменный коэффициент безопасности в процессе расчета, показанный на рис. 242, или предполагаемые неточности, принятые для составления кри-

вых на рис. 245. Эти величины могут быть должным образом выбраны лишь на основании опытов с действительными колоннами. При таких обстоятельствах является естественным, что многие инженеры на практике предпочитают пользоваться непосредственно результатами опытов, представленными эмпирическими формулами. Такой метод является совершенно правильным до тех пор, пока применение этих формул остается в пределах, для которых они были установлены и для которых имеется достаточно экспериментальных данных. Однако, как только необходимо перейти за эти пределы, формулы должны быть изменены для того, чтобы соответствовать новым условиям. В этой работе теоретические соображения имеют основное значение. Одна из старейших эмпирических формул была установлена Тредголдом ¹⁾. Она была применена Гордоном для того, чтобы представить результаты опытов Годкинсона, и была дана в окончательной форме Рэнкином. Допускаемое среднее сжимающее напряжение, определяемое по формуле Гордона — Рэнкина равняется

$$[\sigma] = \frac{a}{1 + b \left(\frac{l}{i_z}\right)^2}, \quad (a)$$

где a есть напряжение и b — числовой коэффициент, обе эти величины постоянны для данного материала. При надлежащем выборе этих постоянных формула дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с результатами опытов в некоторых пределах.

Формула, выражающая прямолинейный закон и выведенная главным образом на основании экспериментальной работы Л. Тетмайера (и ранее применявшаяся Американской железнодорожной технической ассоциацией, так же, как и Чикагский строительный устав 1924 г.), дает допускаемое напряжение (в кг/см^2) в виде

$$[\sigma] = 1025 - 4,5 l/i_z. \quad (b)$$

Эта формула должна применяться при $30 < l/i_z < 120$ для главных элементов и при $l/i_z = 150$ для второстепенных элементов. Для значений $l/i_z < 30$ применяется $[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2$.

Формула, выражающая параболический закон и предложенная Л. Остепфельдом ²⁾, также иногда применяется. Она дает для критического сжимающего напряжения следующее значение:

$$\sigma_{кр} = a - b \left(\frac{l}{i_z}\right)^2, \quad (c)$$

где a и b — величины, зависящие от механических свойств материала.

¹⁾ Обычно принимается половина волны синусоиды, как представляющая начальную кривизну колонны.

²⁾ Обычно оно принимается в пределах $\frac{l}{400} \leq a \leq \frac{l}{1000}$.

¹⁾ Относительно истории формулы см. E. H. Salmon, *Columbus, London, 1921*; см. также Todd Hunter and Pearson, *History of Theory of Elasticity, Cambridge, т. 1, стр. 105, 1886.*

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., т. 42, стр. 1462, 1898; см. также G. E. Fuller and W. A. Johnston, *Applied Mechanics, т. 2, стр. 359, 1919.*

Для строительной стали уравнение (с) иногда принимается в таком виде:

$$\sigma_{кр} = 2560 - 0,085 \left(\frac{l}{i_z} \right)^2. \quad (d)$$

Это уравнение дает параболу, которая касается кривой Эйлера при $l/i_z = 122,5$, и величину критического напряжения для короткой стойки, равную $\sigma_{кр} = 2560 \text{ кг/см}^2$. Чтобы получить допускаемое напряжение из этой формулы, необходимо принять коэффициент безопасности в пределах от $2^{1/2}$ до 3.

Нормы 1948 г. Американского института стальных конструкций (AISC) предписывают для определения допускаемых напряжений при сжатии пользоваться формулой, выражающей параболический закон,

$$[\sigma] = 1090 - 0,031 \left(\frac{l}{i_z} \right)^2 \quad (e)$$

при $l/i_z < 120$ для главных и второстепенных элементов. Для второстепенных элементов (решетка и т. п.) при значениях $120 < l/i_z < 200$ допускаемое сжимающее напряжение определяется по формуле типа Гордона — Рэнкина

$$[\sigma] = \frac{1150}{1 + \frac{l^2}{18000i_z^2}}. \quad (f)$$

Для главных элементов при значениях $120 < l/i_z < 200$ допускаемое сжимающее напряжение получается путем умножения уравнения (f) на следующую дробь:

$$1,6 - \frac{l}{200i_z}. \quad (g)$$

Нормы 1946 г. Американской железнодорожной технической ассоциации (AREA) и нормы 1949 г. Американской ассоциации государственных дорог (AASHO) предписывают пользоваться для определения допускаемого напряжения в сжатых элементах формулой, выражающей параболический закон:

$$[\sigma] = 960 - 0,016 (l/i_z)^2 \quad \text{при } l/i_z < 140. \quad (h)$$

Строительный устав г. Нью-Йорка (1947 г.) предписывает пользоваться формулой (f) для элементов, обладающих гибкостью $l/i_z < 120$, с наибольшим значением 960 кг/см^2 .

ЗАДАЧИ

1. Строительная стальная колонна с шарнирно-опертыми концами имеет $J_z = 484 \text{ см}^4$ и $F = 42 \text{ см}^2$. Нужно рассмотреть колонны, имеющие три разные длины, а именно: $l = 1,5 \text{ м}$, $l = 3 \text{ м}$ и $l = 4 \text{ м}$. Каковы будут безопасные нагрузки в кг, если

применить: 1) нормы AJSC, 2) строительный устав г. Нью-Йорка, 3) формулу (b) и 4) нормы AREA?

Ответ.

	$l = 1,5 \text{ м}$	$l = 3 \text{ м}$	$l = 4 \text{ м}$
1)	43260	35660	27760
2)	40320	33720	27300
3)	34730	26370	20830
4)	39020	35070	31000

2. Подобрать балку двутаврового сечения, которая должна служить в качестве колонны длиной 3,6 м с заделанными концами и нести нагрузку 80 т. Применить нормы Американского института стальных конструкций (AISC).

Решение. Взяв приведенную длину $l = \frac{1}{2}(3,6) = 1,8 \text{ м}$, получим уравнение (e)

в таком виде:

$$\frac{80000}{F} = 1090 - 0,031 \left(\frac{180}{i_z} \right)^2, \quad (i)$$

при этом полагаем $l/i_z < 120$. Наименьшая площадь может быть найдена, если принять $[\sigma] = 1090 \text{ кг/см}^2$, как для короткой стойки. Это дает $F = 80000/1090 = 73,4 \text{ см}^2$. Поэтому при подборе мы не должны брать сечение, которое имеет площадь меньше $73,4 \text{ см}^2$.

Мы попробуем сначала взять сечение, для которого $F = 73,4 \text{ см}^2$, наименьший радиус инерции $i_z = 2,46 \text{ см}$ и $l/i_z = 73,2$, что < 120 . Действительное напряжение, определяемое левой частью уравнения (i), равняется 1090 кг/см^2 , в то время как допускаемое напряжение, определяемое правой частью уравнения, равняется 924 кг/см^2 . Таким образом, взятое сечение является небезопасным, поэтому мы берем сечение с большей площадью, а именно такое, для которого $F = 86,1 \text{ см}^2$, наименьший радиус инерции $i_z = 2,77 \text{ см}$ и $l/i_z = 65$. Действительное напряжение равняется 929 кг/см^2 , а допускаемое напряжение равняется 959 кг/см^2 , так что выбранное сечение является удовлетворительным.

личина относительного сдвига γ найдется из малого треугольника cac' :

$$\gamma = \frac{c'c}{ac}.$$

Так как $c'c$ является малой дугой радиуса $d/2$, соответствующей разности $d\varphi$ углов поворота двух смежных поперечных сечений, то $c'c = (d/2)d\varphi$ и мы получаем

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx} d. \quad (a)$$

Для стержня, скручиваемого моментом на конце, угол закручивания пропорционален длине и величина $d\varphi/dx$ постоянна. Она представляет *угол закручивания на единицу длины стержня* и будет обозначаться через θ . Тогда из (a) имеем

$$\gamma = \frac{1}{2} \theta d. \quad (148)$$

Касательные напряжения, действующие по граням элемента и вызывающие вышеуказанный сдвиг, имеют направления, показанные на чертеже. Величина каждого на основании уравнения (39) равна

$$\tau = \frac{1}{2} G\theta d. \quad (149)$$

Таким образом, напряженное состояние элемента на поверхности стержня вполне выяснено. Что же касается напряженного состояния внутри стержня, то сделаем предположение, что не только круговой контур поперечного сечения стержня не искажается, но также и сами поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются, как абсолютно твердые, т. е. каждый диаметр поперечного сечения остается прямым и поворачивается на один и тот же угол. Испытания круглых стержней показывают, что теория, основанная на этом предположении, очень хорошо согласуется с результатами опытов. В таком случае рассуждение относительно элемента $abcd$ на поверхности стержня (рис. 246, б) остается в силе и для подобного элемента поверхности внутреннего цилиндра, радиус которого r заменяется $d/2$ (рис. 246, с). Толщина dr элемента в радиальном направлении считается очень малой. Следовательно, такие элементы находятся также в состоянии чистого сдвига, и касательное напряжение на их гранях равно

$$\tau = Gr\theta. \quad (b)$$

Это указывает на то, что касательное напряжение пропорционально расстоянию r от оси стержня. Рис. 247 изображает это распределение напряжений. Наибольшее напряжение имеет место на внешней поверхности стержня. Для вязких материалов пластическое течение начинается на внешней поверхности. Для материалов,

ГЛАВА X

КРУЧЕНИЕ И ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

61. Кручение круглого стержня

Рассмотрим круглый стержень, заделанный в верхнем конце и скручиваемый парой сил, приложенной к нижнему концу (рис. 246). Можно показать посредством измерений на поверхности, что круго-

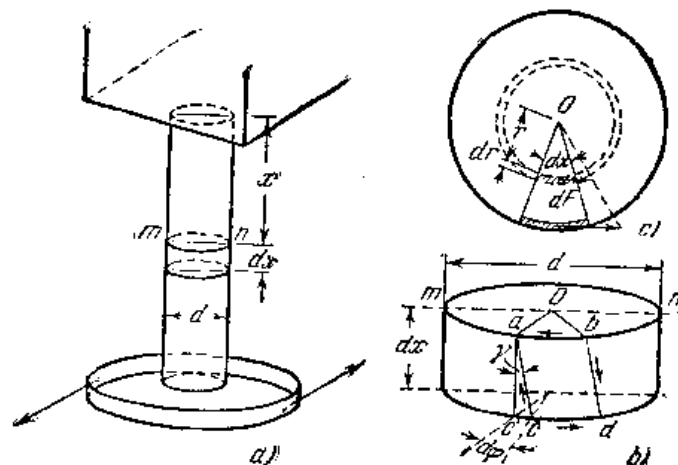


Рис. 246.

вые сечения стержня при кручении остаются круговыми и что их диаметры и расстояния между ними не изменяются при условии, что угол закручивания мал.

Диск, изображенный отдельно на рис. 246, б, будет находиться в следующем напряженном состоянии. Его нижнее поперечное сечение повернется относительно верхнего поперечного сечения на угол $d\varphi$, где φ измеряет поворот сечения mn относительно заделанного конца. Прямоугольный элемент $abcd$ боковой поверхности диска принимает форму, показанную на рис. 246, б. Длины сторон, по существу, остаются такими же, но только углы изменяются. Элемент находится в состоянии *чистого сдвига* (см. § 16) и ве-

которые слабее при сдвиге в продольном направлении, чем в поперечном, например в случае деревянного стержня с волокнами, параллельными оси, первые трещины появляются от касательных напряжений, действующих в осевых сечениях, и они возникают на поверхности стержня в продольном направлении.

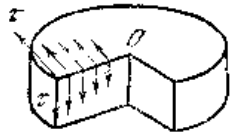


Рис. 247.

В образце из материала, который слабее при растяжении, чем при сдвиге, например в случае круглого чугунного стержня или цилиндрического куска мела, трещина часто имеет место по винтовой линии, наклоненной под углом 45° к

оси стержня (рис. 248). Объяснение простое. Припомним, что состояние чистого сдвига эквивалентно растяжению в одном направлении и равному ему сжатию в перпендикулярном направлении (см. рис. 45). Прямоугольный элемент, вырезанный из внешнего слоя скрученного стержня со сторонами под углом 45° к оси, будет подвержен напряжениям, показанным на рис. 248. Показанные растягивающие напряжения производят упомянутую винтовую трещину.

Найдем теперь соотношение между приложенной скручивающей парой M_k и напряжениями, которые она вызывает. Из равновесия части стержня между низом и поперечным сечением mn (рис. 246, а) мы заключаем, что касательные напряжения, распределенные по поперечному сечению, статически эквивалентны паре сил, равной и противоположной скручивающей паре M_k . Для каждого элемента площади dF (рис. 246, в) сдвигающее усилие равно τdF . Момент этого усилия относительно оси стержня на основании уравнения (b) равен $(\tau dF)r = G\theta r^2 dF$. Крутящий момент M_k равен сумме этих моментов, взятой по всей площади поперечного сечения, т. е.

$$M_k = \int_F G\theta r^2 dF = G\theta \int_F r^2 dF = G\theta J_p, \quad (c)$$



Рис. 248.

где J_p есть полярный момент инерции круглого поперечного сечения. Для круга диаметра d мы имеем (см. Приложение А, стр. 353). $J_p = \pi d^4 / 32$, следовательно,

$$M_k = G\theta \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\theta = \frac{M_k}{G} \frac{32}{\pi d^4} = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (150)$$

Мы видим, что θ , угол закручивания на единицу длины стержня, прямо пропорционален приложенному крутящему моменту и обратно пропорционален модулю упругости при сдвиге G и четвертой степени диаметра. Если длина стержня есть l , то полный угол

закручивания будет

$$\varphi = \theta l = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (151)$$

Этим уравнением пользуются для опытной проверки теории, причем многочисленными опытами подтверждаются предположения, сделанные при выводе теории.

Необходимо заметить, что опыты на кручение обычно производятся для определения модуля упругости G для различных материалов. Если измерить угол закручивания, вызванный в данном стержне заданным крутящим моментом, то величину G можно легко получить из уравнения (151).

Подставляя θ из уравнения (150) в уравнение (149), получим уравнение для вычисления наибольшего касательного напряжения при кручении круглого стержня

$$\tau_{\max} = \frac{M_k d}{2J_p} = \frac{16M_k}{\pi d^3}. \quad (152)$$

Наибольшее касательное напряжение пропорционально крутящему моменту M_k и обратно пропорционально кубу диаметра стержня.

В практических приложениях необходимый диаметр вала часто должен быть рассчитан по числу лошадиных сил N , которое он передает. По данному N крутящий момент в $kg\,cm$ получится из известного уравнения

$$M_k \frac{2\pi n}{60} = 7500N, \quad (153)$$

в котором n означает число оборотов вала в минуту. Величина $2\pi n/60$ есть угловая скорость, и левая часть уравнения (153) представляет работу, произведенную в одну секунду крутящим моментом, измеренным в $kg\,cm$. Правая часть уравнения представляет произведенную работу (в $kg\,cm/сек$), вычисленную по числу лошадиных сил N . Взяв M_k из уравнения (153) и подставив его в уравнение (152), получим

$$d (cm) = 71,14 \sqrt[3]{\frac{N}{n\tau_{\max}}}. \quad (154)$$

Принимая, например, допускаемое напряжение при сдвиге $[\tau] = 600\,kg/cm^2$, имеем

$$d (cm) = 8,43 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

ЗАДАЧИ

1. Определить диаметр d вала машины мощностью в 200 лошадиных сил при $n = 120$ оборотов в минуту, если допускаемое напряжение $[\tau] = 200\,kg/cm^2$.
 Ответ. $d = 14,4\,cm$.
2. Определить мощность в лошадиных силах, передаваемую валом, если $d = 15\,cm$, $n = 120$ оборотов в минуту, $G = 8 \cdot 10^9\,kg/cm^2$ и угол закручивания,

измеренный между двумя поперечными сечениями на расстоянии 7,5 м, равен $\frac{1}{15}$ радиана.

Решение. Из уравнения (151) имеем

$$M_K = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{\varphi G}{l} = \frac{\pi \cdot 15^4}{32} \cdot \frac{8 \cdot 10^5}{15 \cdot 750}$$

Передаваемая мощность, на основании уравнения (153), равна

$$N = \frac{M_K \cdot 2\pi n}{60 \cdot 7500} = \frac{\pi \cdot 15^4 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 120}{32 \cdot 15 \cdot 750 \cdot 60 \cdot 7500} \approx 600 \text{ л. с.}$$

3. Вал диаметра $d=8,75$ см делает 45 оборотов в минуту. Определить передаваемую мощность, если наибольшее касательное напряжение равно 300 кг/см^2 .

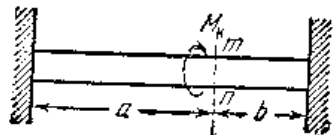


Рис. 249.

4. Стальная проволока ($G=8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$) должна иметь такие размеры, чтобы наибольшее касательное напряжение равнялось 900 кг/см^2 при угле закручивания 90° . Определить отношение l/d .

Ответ. $l/d=698$.

5. Стальной вал с заделанными концами (рис. 249) подвергается действию крутящего момента M_K , приложенного в промежуточном поперечном сечении m . Определить угол закручивания, если известно допускаемое напряжение $[\tau]$.

Решение. Для обеих частей вала углы закручивания одинаковы. Поэтому, на основании уравнения (151), крутящие моменты обратно пропорциональны длинам этих частей. Если $a > b$, то больший крутящий момент будет на правой части вала и величина его равняется $M_K \cdot a/(a+b)$. Вставляя эту величину крутящего момента в $[\tau]$ вместо τ_{\max} в уравнение (152), получим для d следующее уравнение:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_K}{(a+b)\pi[\tau]}}$$

Теперь угол закручивания можно получить при помощи уравнения (151).

6. 500 л. с. передается от шкива I, из них: 200 л. с. шкиву II и 300 л. с. шкиву III (рис. 250). Найти отношение диаметров d_1 и d_2 , чтобы иметь одно и то же наибольшее напряжение в обеих частях вала. Найти отношение углов закручивания для этих двух частей.

Решение. Крутящие моменты в двух частях вала находятся в отношении 5 : 3. Для того чтобы иметь одно и то же наибольшее напряжение, необходимо, на основании уравнения (152), чтобы

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

Углы закручивания, на основании уравнений (151) и (152), должны быть в отношении

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{l_1}{l_2} \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$$

7. Полагая, что вал предыдущей задачи имеет постоянный диаметр и вращается со скоростью 200 оборотов в минуту, найти величину диаметра, если

$[\tau]=400 \text{ кг/см}^2$. Найти угол закручивания для каждой части вала, если $G=8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и $l_1=l_2=1,2$ м.

8. Определить длину стального вала диаметра $d=5$ см ($G=8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$), если наибольшее напряжение равно 900 кг/см^2 , когда угол закручивания равен 6° .
Ответ. $l=2,33$ м.

9. Определить диаметр, начиная с которого имеет решающее значение при проектировании угол закручивания вала, а не наибольшее напряжение, если $G=8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $[\tau]=200 \text{ кг/см}^2$ и наибольший допускаемый угол закручивания равен $1/4^\circ$ на метр.

Решение. Исключая M_K из уравнений

$$\frac{16M_K}{\pi d^3} = 200 \quad \text{и} \quad \frac{32M_K}{G\pi d^4} = \frac{\pi}{180 \cdot 4 \cdot 100}$$

получаем $d=11,46$ см, так что для $d < 11,46$ см угол закручивания является решающим фактором при проектировании.

10. Определить крутящий момент в каждой части вала с заделанными концами, который скручивается моментами M'_K и M''_K , приложенными в двух промежуточных сечениях (рис. 251).

Решение. Определяя крутящие моменты, вызываемые в каждой части вала моментами M'_K и M''_K (см. выше задачу 5), и складывая полученные выражения для каждой части, получаем

$$\frac{M'_K(b+c) + M''_K c}{l}, \quad \frac{M'_K a - M''_K c}{l}, \quad \frac{M'_K a + M''_K(a+b)}{l}$$

11. Определить диаметры и углы закручивания для вала задачи 6, если $n=120$ оборотов в минуту, $\tau_{\max}=200 \text{ кг/см}^2$, $l_1=1,8$ м и $l_2=1,2$ м.

62. Кручение полого вала

Из предыдущего рассмотрения кручения сплошного вала видно (см. рис. 247), что материал только на внешней поверхности вала может быть напряжен до предела, равного допускаемому напряжению. Внутри вала материал работает при более низком напряжении. Поэтому в случаях, где уменьшение веса имеет большое значение, например для валов авиационных двигателей, уместно применять полые валы.

При рассмотрении кручения полых валов делаются те же предположения, что и в случае сплошных валов. Общее выражение для касательных напряжений здесь будет то же самое, как и в уравнении (б) предыдущего параграфа. Однако при вычислении момента сдвигающих усилий радиус r изменяется от радиуса внутреннего отверстия, который мы обозначим через $\frac{1}{2}d_1$, до внешнего радиуса вала, который, как прежде, будет $\frac{1}{2}d$. Тогда уравнение (с) предыдущего параграфа должно быть заменено

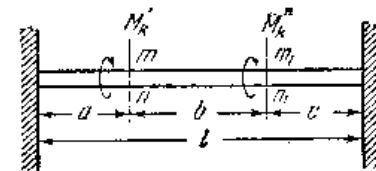


Рис. 251.

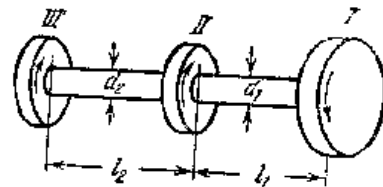


Рис. 250.

следующим уравнением:

$$G\theta \int_{\frac{1}{2}d_1}^{\frac{1}{2}d} r^2 dF = M_k = G\theta J_p,$$

где $J_p = (\pi/32)(d^4 - d_1^4)$ есть полярный момент инерции кольцевого сечения. Тогда

$$\theta = \frac{32M_k}{\pi(d^4 - d_1^4)G} = \frac{M_k}{GJ_p}, \quad (155)$$

и угол закручивания будет

$$\varphi = \theta l = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (156)$$

Подставляя уравнение (155) в уравнение (149), получаем

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi d^3 \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)} = \frac{M_k d}{2J_p}. \quad (157)$$

Из уравнений (156) и (157) мы видим, что, взяв, например, $d_1 = \frac{1}{2}d$, угол закручивания и наибольшее напряжение по сравнению с теми же величинами для сплошного вала диаметра d увеличатся приблизительно на 6%, между тем как вес вала уменьшится на 25%.

ЗАДАЧИ

1. Полный цилиндрический стальной вал внешнего диаметра 25 см и внутреннего диаметра 15 см вращается со скоростью 1000 оборотов в минуту. Какова передаваемая мощность в лошадиных силах, если $\tau_{\max} = 520 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $N = 19\,360 \text{ л. с.}$

2. Найти наибольший крутящий момент, который может быть приложен к полному круглому валу, если $d = 15 \text{ см}$, $d_1 = 10 \text{ см}$ и $[\tau] = 520 \text{ кг/см}^2$.

3. Полный вал парового двигателя передает 8000 л. с. при 100 оборотах в минуту и допускаемом напряжении 300 кг/см^2 . Найти d , если $d/d_1 = 2$.

Решение.

$$M_k = \frac{8000 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 60}{2\pi \cdot 100}.$$

Из уравнения (157) имеем

$$\tau_{\max} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16M_k}{\pi d^3}.$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 16 \cdot 8000 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 60}{15 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot \pi \cdot 300}} = 47 \text{ см.}$$

следовательно, $d_1 = 23,5 \text{ см}$,

63. Вал прямоугольного поперечного сечения

Задача о кручении вала прямоугольного поперечного сечения сложна вследствие искривления поперечного сечения при кручении. Это искривление можно показать на опыте с прямоугольным бруском из резины, на гранях которого начерчена система квадратиков. Из фотографии ¹⁾ (рис. 252) видно, что при кручении линии, первоначально перпендикулярные к оси бруска, искривляются. Это указывает на то, что искажение упомянутых выше квадратиков изменяется по граням этого поперечного сечения, достигая наибольшего значения в середине и становясь равным нулю в углах. Поэтому мы полагаем, что касательные напряжения изменяются соответственно этому искажению, а именно: наибольшее значение в серединах сторон и нуль — в углах поперечного сечения. Строгое исследование задачи ²⁾ указывает, что наибольшее касательное напряжение имеет место в серединах длинных сторон прямоугольного поперечного сечения и определяется уравнением

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{abc^2}, \quad (158)$$

в котором b — длинная сторона и c — короткая сторона прямоугольного поперечного сечения и α — числовой коэффициент, зависящий от отношения b/c . Несколько значений α дано ниже, в таблице 3. Величина наибольшего напряжения может быть вычислена с достаточной точностью из следующего приближенного уравнения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{bc^2} \left(3 + 1,8 \frac{c}{b}\right).$$

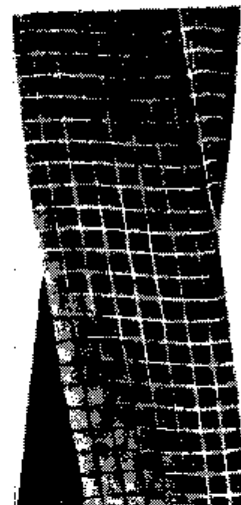


Рис. 252.

Угол закручивания на единицу длины в случае прямоугольного поперечного сечения определяется из уравнения

$$\theta = \frac{M_k}{\beta bc^3 G}. \quad (159)$$

Значения числового коэффициента β даны в третьей строчке таблицы 3.

Таблица 3

Данные для кручения валов прямоугольного поперечного сечения

b/c	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

¹⁾ Фотография взята из книги С. В а с h, Elasticität und Festigkeit, 6-е изд., стр. 312, 1911.

²⁾ Полное решение принадлежит St.-Venant'у, Mem. sav. étrangers, т. 14, 1855. Оценку этой работы можно найти у T o d h u n t e r and P e a r s o n, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, т. 2, стр. 312, 1893.

Во всех рассматриваемых случаях угол закручивания на единицу длины пропорционален крутящему моменту и может быть представлен уравнением

$$\theta = \frac{M_k}{C}, \quad (a)$$

где C есть постоянная, называемая жесткостью при кручении вала.

В случае круглого вала (уравнение (150)) $C = GJ_p$.

Для прямоугольного вала (уравнение (159)) $C = \beta bc^3 G$.

64. Винтовая пружина с малым шагом витков

Предположим, что винтовая пружина кругового поперечного сечения подвергается действию сил P , направленных по оси (рис. 253), и что какой-либо виток лежит в плоскости, мало отличающейся

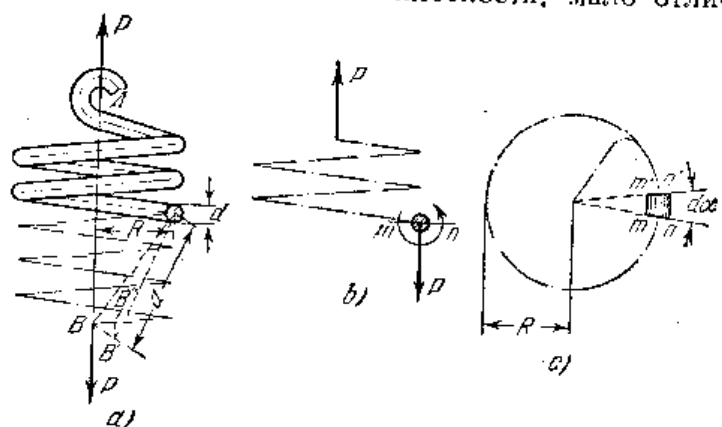


Рис. 253.

от плоскости, перпендикулярной к оси пружины. Рассматривая равновесие верхней части пружины, ограниченной осевым сечением, например mn (рис. 253, b), можем заключить из уравнений статики, что усилия по поперечному сечению mn витка приводятся к срезающей силе P , приложенной в центре тяжести поперечного сечения, и к паре сил, действующей в плоскости поперечного сечения в направлении против часовой стрелки. Момент пары равен PR , где R есть радиус цилиндрической поверхности, содержащей осевую линию пружины. Пара сил PR скручивает виток и вызывает наибольшие напряжения, которые, на основании уравнения (152), равняются

$$\tau_1 = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad (a)$$

где d — диаметр поперечного сечения mn витка. На эти напряжения от кручения должны накладываться напряжения от срезающей

силы P . Для грубого приближения эта сила считается равномерно распределенной по поперечному сечению. Тогда соответствующее касательное напряжение будет

$$\tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (b)$$

В точке m (рис. 253, b) направления τ_1 и τ_2 совпадают, так что здесь имеет место наибольшее касательное напряжение, величина которого равна

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (160)$$

Можно видеть, что второй член в скобках, представляющий влияние срезающей силы, увеличивается с увеличением отношения d/R . Это имеет практическое значение в тяжелых винтовых рессорах, каковые употребляются в железнодорожных вагонах. Такие точки, как m , на внутренней стороне витка находятся в менее благоприятных условиях, чем такие точки, как n . Опыт с тяжелыми рессорами показывает, что трещины обычно начинаются на внутренней стороне витка.

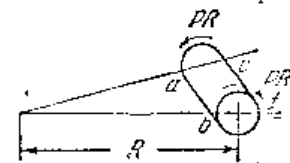


Рис. 254.

Имеется и другая причина, по которой необходимо ожидать более высокого напряжения на внутренней стороне витка. При вычислении напряжений от скручивания мы воспользовались уравнением (а), которое было выведено для цилиндрических стержней. В действительности, каждый элемент пружины будет находиться в условиях, показанных на рис. 254. Видно, что если при кручении поперечное сечение в f поворачивается относительно ac , то перемещение точки b относительно точки a будет такое же, как точки f относительно точки c . Благодаря тому, что расстояние ab меньше расстояния cf , относительный сдвиг на внутренней стороне ab будет больше, чем на внешней стороне cf , и, следовательно, касательные напряжения, вызываемые парой сил PR , будут больше в b , чем в f . Принимая это во внимание и учитывая влияние срезающей силы¹⁾, мы должны заменить уравнение (160) следующим уравнением для вычисления наибольшего касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (161)$$

в котором $m = \frac{2R}{d}$.

¹⁾ Такие исследования были сделаны V. R o e v с'гом, Z. Ver. deut. Ing., т. 57, стр. 1906, 1913; также A. M. W a h l'ом, Trans. ASME, 1928. Последний определил также напряжения опытным путем при помощи измерений на поверхности витка. Полное исследование различного рода пружин дано W a h l'ом, стр. 188.

Можно видеть, что *поправочный коэффициент* в скобках увеличивается с уменьшением m . Например, в случае $m=4$ этот коэффициент равен приблизительно 1,40 и если $m=10$, он равен 1,14.

При вычислении удлинения пружины или опускания ее нижнего конца обычно принимается только влияние кручения витков. Для угла закручивания какого-либо элемента между двумя смежными поперечными сечениями mn и $m'n'$ (рис. 253, *c*), пользуясь уравнением (151) и принимая Rd_x вместо l , получим

$$d\varphi = \frac{PRR dx}{GJ_p}$$

Вследствие кручения нижняя часть пружины поворачивается относительно центра mn (рис. 253, *a*), и точка приложения B силы P описывает малую дугу BB' , равную $a d\varphi$. Вертикальная составляющая этого перемещения равна

$$B'B'' = BB' \frac{R}{a} = R d\varphi = \frac{PR^2 dx}{GJ_p} \quad (c)$$

Полное опускание пружины получится путем суммирования опусканий $B'B''$, вызываемых каждым элементом mn $m'n'$, по длине пружины. Тогда

$$\delta = \int_0^{2\pi n} \frac{PR^2}{GJ_p} d\alpha = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad (162)$$

где n означает число витков.

Для пружины некругового поперечного сечения указанный выше метод можно применить к вычислению напряжений и деформаций, если вместо уравнений (151) и (152) принять уравнения, соответствующие данной форме поперечного сечения. Например, в случае прямоугольного поперечного сечения должны быть применены уравнения (158) и (159).

ЗАДАЧИ

1. Определить, наибольшее напряжение и удлинение винтовой пружины (рис. 253), если $P=100$ кг, $R=10$ см, $d=2$ см, число витков равно 20 и $G=8 \cdot 10^5$ кг/см².

Ответ. $\tau_{\max} = 726$ кг/см², $\delta = 10$ см.

2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что виток имеет квадратное сечение 2 см в стороне.

Решение. Полагая, что поправочный коэффициент для срезающей силы, в зависимости от кривизны витков (см. уравнение (161)) в этом случае такой же, как и для кругового поперечного сечения, получим из уравнения (158)

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{0,208b^3} [1,14] = \frac{100 \cdot 10 \cdot 1,14}{0,208 \cdot 2^3} = 696 \text{ кг/см}^2$$

При вычислении удлинения необходимо в уравнение (162) подставить 0,141 d^3

(см. уравнение (159)) вместо $\pi d^4/32$. Тогда

$$\delta = \frac{10\pi}{32 \cdot 0,141} = \approx 7 \text{ см.}$$

3. Сравнить веса двух винтовых пружин, одну круговую, а другую — квадратного поперечного сечения, спроектированных при принятых в задаче 1 условиях и имеющих одно и то же наибольшее напряжение. Принять в обоих случаях поправочный коэффициент, равный 1,14. Сравнить удлинения этих пружин.

Решение. Длина стороны квадрата поперечного сечения найдется из уравнения $\pi n^3/16 = 0,208b^3$, откуда $b = \sqrt[3]{0,944 \cdot d} = 0,981d$. Веса пружин находятся в том же отношении, как и площади поперечных сечений, т. е. в отношении

$$\frac{\pi d^2}{4} : (0,981d)^2 = 0,816.$$

Удлинения двух пружин находятся в отношении

$$0,141b^4 : \frac{\pi d^4}{32} = 0,141 \cdot 0,926 : \frac{\pi}{32} = 1,33.$$

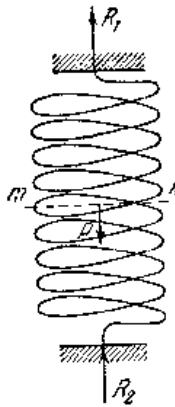


Рис. 255.

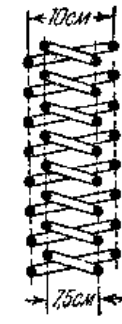


Рис. 256.

4. Как распределится нагрузка P между двумя концами винтовой пружины, показанной на рис. 255, если число витков выше точки приложения нагрузки равно 6 и ниже этой точки равно 5.

Ответ. $R_1 : R_2 = 5 : 6$.

5. Две винтовые пружины из одного и того же материала и одинакового кругового поперечного сечения и длины, собранные, как показано на рис. 256, сжаты между двумя параллельными плоскостями. Определить наибольшее напряжение в каждой пружине, если $d=1,25$ см и $P=40$ кг.

Решение. Из уравнения (162) следует, что нагрузка P распределяется между двумя пружинами обратно пропорционально кубу радиусов витков, т. е. силы, сжимающие внешнюю и внутреннюю пружины, будут относиться как $7,5^3 : 10^3$. Тогда, на основании уравнения (161), наибольшие напряжения в этих пружинах соответственно будут равны 185 кг/см² и 343 кг/см².

6. Какова будет предельная нагрузка для пружины задачи 1, если допустимое напряжение равно $[\tau]=1300$ кг/см². Каково будет удлинение пружины при этой предельной нагрузке?

Ответ. 179 кг, $\delta = 17,9$ см.

7. Коническая пружина (рис. 257) растягивается осевыми силами P . Определить безопасную величину P , если допустимое напряжение $[\tau]=3000$ кг/см², диаметр поперечного сечения $d=2,5$ см, радиус конуса вверху пружины $R_1=5$ см и внизу $R_2=20$ см. Определить удлинение пружины, если число витков равно n

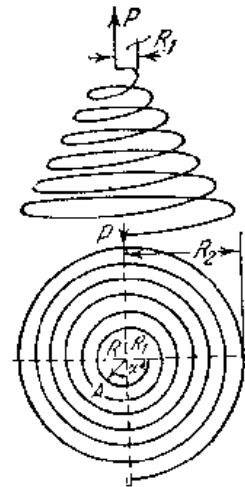


Рис. 257.

в горизонтальная проекция осевой линии пружины представляет спираль, заданную уравнением

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

Решение. Для какой-либо точки A осевой линии пружины, определяемой величиной угла α , расстояние от оси пружины равняется

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n},$$

а соответствующий крутящий момент равен

$$M_k = P \left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n} \right].$$

Наибольший крутящий момент при $\alpha = 2\pi n$ равен PR_2 . Безопасный предел для P , на основании уравнения (161), будет

$$P = \frac{3000 \cdot \pi \cdot 2,5^3}{16 \cdot 20 \cdot 1,09} = 422 \text{ кг.}$$

Осадка пружины получится из уравнения (с) (см. стр. 248) равной:

$$\delta = \frac{32P}{\pi d^4 G} \int_0^{2\pi n} \left[R_1 + \frac{(R_2 - R_1) \alpha}{2\pi n} \right]^2 d\alpha = \frac{16Pn}{d^4 G} (R_1^2 + R_2^2) (R_1 + R_2).$$

8. Определить необходимую площадь поперечного сечения витков конической пружины, спроектированной при тех же условиях, как в предыдущей задаче, но квадратного поперечного сечения. Принять поправочный коэффициент равным 1,09 (см. предыдущую задачу).

Ответ. $b^2 = 6 \text{ см}^2$.

65. Одновременное действие изгиба и кручения. Изгиб и кручение валов круглого поперечного сечения

Выше, при рассмотрении кручения (см. стр. 238) предполагалось, что круглый вал испытывает простое кручение. В практических приложениях мы часто имеем случаи, когда действуют одновременно крутящий и изгибающий моменты. Силы, передаваемые валу посредством шкивов, зубчатых колес или маховиков, можно привести к скручивающим и изгибающим силам. Простой случай такого рода показан на рис. 258.

Круглый вал заделан в одном конце и нагружен на другом вертикальной силой P , приложенной на расстоянии R от оси. Этот случай приводится к нагрузке вала крутящим моментом $M_k = PR$ поперечной силой P на свободном конце¹⁾. Крутящий момент является постоянным по оси, а изгибающий момент, вызываемый силой P , в каком-либо сечении равняется

$$M = -P(l - x). \quad (a)$$

При отыскании наибольших напряжений, возникающих в вале, необходимо рассмотреть: 1) касательные напряжения от крутящего

¹⁾ В этой задаче весами вала и шкива пренебрегают.

момента M_k , 2) нормальные напряжения от изгибающего момента (a) и 3) касательные напряжения от поперечной силы P . Наибольшие касательные напряжения от крутящего момента возникают на поверхности вала и имеют величину

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi d^3}. \quad (b)$$

Наибольшие нормальные напряжения σ_x от изгибающего момента имеют место в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

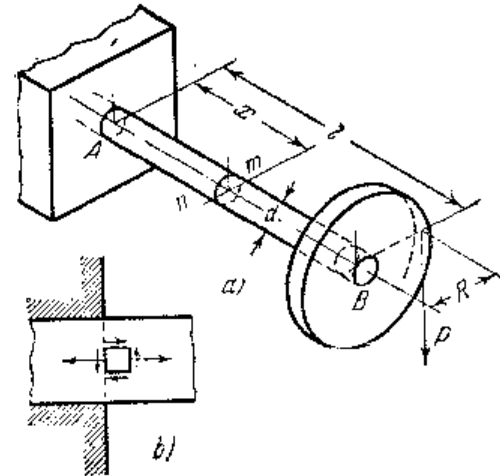


Рис. 258.

в заделанном конце, где изгибающий момент является численно наибольшим; величина этих напряжений равна

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi d^3}. \quad (c)$$

Касательные напряжения от поперечной силы обыкновенно имеют лишь второстепенное значение. Наибольшей величины они достигают на нейтральной оси, где нормальные напряжения от изгибающего момента равны нулю. Поэтому наибольшие сложные напряжения обычно имеют место в точках, где напряжения (1) и (2) являются наибольшими, в данном случае в волокнах на верхней и нижней поверхностях вала в заделанном конце.

Рисунок 258, b представляет вид сверху части вала в заделанном конце и выделенный у места заделки элемент с действующими на него напряжениями. Главные напряжения для этого элемента найдутся из уравнений (72) и (73) (стр. 114).

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2},$$

или, пользуясь уравнениями (b) и (c), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2W} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (163)$$

Таким же образом, пользуясь уравнением (73), получаем

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2W} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}) = \frac{16}{\pi d^3} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (163')$$

Из уравнения (163) можно заметить, что σ_{\max} имеет такое же значение, как и при простом изгибе вала, если бы действовал некоторый эквивалентный изгибающий момент, равный

$$M_{\text{эвв}} = \frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}).$$

Наибольшее касательное напряжение в рассматриваемом элементе (рис. 258, b), по уравнению (34) (стр. 52), равняется

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_k^2}. \quad (164)$$

На практике для определения безопасных размеров диаметров валов, сделанных из мягких металлов, теперь обычно принимают теорию наибольших касательных напряжений. Обозначая допускаемое напряжение при сдвиге через $[\tau]$ и подставляя его вместо τ_{\max} в уравнение (164), получим следующее выражение для определения диаметра вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi [\tau]} \sqrt{M^2 + M_k^2}}. \quad (165)$$

Вышеприведенные рассуждения можно применить также и при расчете полого вала наружного диаметра d и внутреннего диаметра d_1 . Тогда

$$W = \frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32d} = \frac{\pi d^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \right],$$

и полагая $d_1/d = n$, получим из уравнений (163) и (163') для полого вала

$$\sigma_{\max} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^4)} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}), \quad (166)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^4)} (M - \sqrt{M^2 + M_k^2}). \quad (167)$$

Наибольшее касательное напряжение равняется

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3 (1 - n^4)} \sqrt{M^2 + M_k^2}, \quad (168)$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi [\tau] (1 - n^4)} \sqrt{M^2 + M_k^2}}. \quad (169)$$

Если на вал действует несколько параллельных поперечных сил, то для определения необходимого диаметра по формуле (165) или (169) нужно взять полный изгибающий момент M и полный крутящий момент M_k в каждом поперечном сечении. Если поперечные силы, действующие на вал, не параллельны, то результирующие изгибающие моменты от них должны быть определены по способу сложения векторов. Пример такого вычисления разобран ниже, в задаче 3.

ЗАДАЧИ

1. Вал круглого сечения диаметром 6 см поддерживает шкив диаметром 75 см, весящий 200 кг (рис. 259). Определить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении mn , если горизонтальные натяжения верхней и нижней частей ремня равны соответственно 700 кг и 100 кг.

Решение. В поперечном сечении mn

$$M_k = (700 - 100) 37,5 = 22\,500 \text{ кг см},$$

$$M = 15 \sqrt{200^2 + 800^2} = 12\,370 \text{ кг см}.$$

Тогда по формуле (164)

$$\tau_{\max} = 606 \text{ кг/см}^2.$$

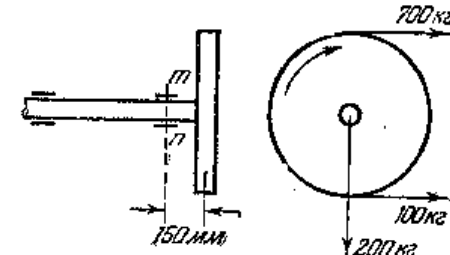


Рис. 259.

2. Вертикальная труба, показанная на рис. 260, подвергается действию горизонтальной силы $P = 100$ кг, приложенной на расстоянии 1 м от оси трубы. Определить σ_{\max} и τ_{\max} , если длина трубы $l = 7,5$ м и момент сопротивления $W = 150$ см³.

Ответ. $\sigma_{\max} = 502$ кг/см², $\tau_{\max} = 252$ кг/см².

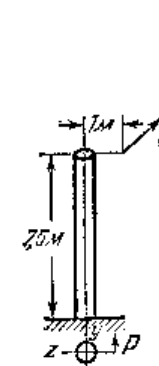


Рис. 260.

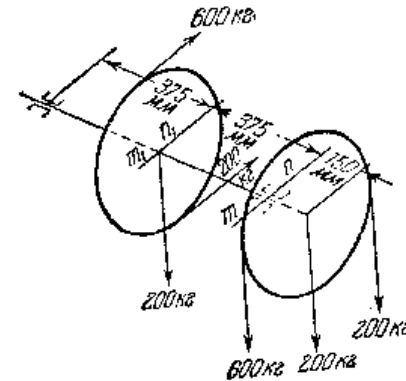


Рис. 261.

3. Определить необходимый диаметр однородного вала (рис. 261), несущего два одинаковых шкива диаметром 75 см и весом 200 кг каждый. Горизонтальные усилия в ремне для одного шкива и вертикальные усилия для другого показаны на рисунке. Допускаемое напряжение $[\tau] = 400$ кг/см².

Решение. Опасными сечениями будут m_1 и m_2 , которые выдерживают полный крутящий момент и наибольшие изгибающие моменты. Крутящий момент в обоих сечениях равен $M_k = (600 - 200) 37,5 = 15\,000$ кг см. Изгибающий момент в сечении m_1 равен $(600 + 200) 15 = 15\,000$ кг см. Изгибающий момент в сечении m_2 , действующий в горизонтальной плоскости, равен

$$\frac{1}{4} (600 + 200) 75 = 15\,000 \text{ кг см.}$$

Изгибающий момент в том же поперечном сечении, действующий в вертикальной плоскости, равен

$$\frac{200 \cdot 75}{4} - \frac{1000 \cdot 15 \cdot 37,5}{75} = -3750 \text{ кг см.}$$

Равнодействующий изгибающий момент в сечении m_1 равен

$$M = \sqrt{15\,000^2 + 3750^2} = 15\,460 \text{ кг см.}$$

Этот момент больше момента, действующего в сечении m_2 , и поэтому должен быть подставлен вместе с вычисленным выше крутящим моментом M_k в уравнение (165), из которого получаем $d = 6,50$ см.

4. Определить диаметр вала, показанного на рис. 259, если допустимое напряжение на сдвиг равно $[\tau] = 400$ кг/см².

5. Определить внешний диаметр полого вала, если $[\tau] = 400$ кг/см², $d_1/d = \frac{1}{3}$, а остальные размеры и силы указаны на рис. 261.

6. Решить задачу 3, полагая, что на правый шкив действует такой же крутящий момент, как и в задаче 3, но вызываемый горизонтальной силой, касательной к окружности шкива, вместо вертикальных натяжений в ремне 600 кг и 200 кг.

ГЛАВА XI

ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ И УДАР

66. Энергия упругой деформации при растяжении

При рассмотрении простого растяжения стержня (см. рис. 1) мы видим, что во время удлинения под действием постепенно увеличивающейся силы последняя производит некоторую работу, и эта работа превращается, частично или полностью, в потенциальную энергию деформации. Если деформация остается в пределах упругости, то произведенная работа полностью преобразуется в потенциальную энергию и может быть возвращена при постепенной разгрузке деформированного стержня.

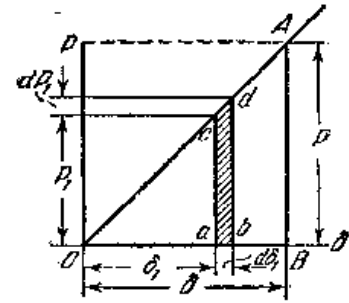


Рис. 262.

Если конечная величина нагрузки будет P и соответствующее удлинение — δ , то диаграмма растяжения будет иметь вид, показанный на рис. 262, где по оси абсцисс отложены удлинения, а по оси ординат — соответствующие силы. P_1 представляет промежуточное значение силы, а δ_1 — соответствующее удлинение. Увеличение dP_1 силы вызывает увеличение $d\delta_1$ удлинения. Работа, произведенная силой P_1 во время этого удлинения, равна $P_1 d\delta_1$ и представлена на рисунке заштрихованной площадью. Если принять во внимание увеличение силы P_1 во время удлинения, то совершенная работа изобразится площадью трапеции $abcd$. Полная работа, совершенная в процессе нагрузки, когда сила увеличивалась от 0 до P , равняется сумме таких элементарных площадок и изображается площадью треугольника OAB . Этот же треугольник представляет полную энергию U , накопленную в стержне во время деформации. Тогда

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{170}$$

Пользуясь уравнением (1), мы получаем следующие два выражения для энергии деформации в призматическом стержне:

$$U = \frac{P^2 l}{2FE} \tag{171}$$

$$U = \frac{FE\delta^2}{2l} \tag{172}$$

Первое из этих уравнений дает энергию деформации как функцию силы P , а второе дает ту же энергию, как функцию удлинения δ . Для стержня данных размеров и данного модуля упругости энергия деформации вполне определяется величиной силы P или величиной удлинения δ .

В практических приложениях часто имеет важное значение энергия деформации, отнесенная к единице объема. Из уравнений (171) и (172) она равняется

$$U' = \frac{U}{Fl} = \frac{\sigma^2}{2E}, \tag{173}$$

или

$$U' = \frac{E\varepsilon^2}{2}, \tag{174}$$

где $\sigma = P/F$ есть растягивающее напряжение и $\varepsilon = \delta/l$ — относительное удлинение.

Наибольшее количество энергии деформации в единице объема, которое может быть накоплено в стержне безостаточной деформации¹⁾, найдется подстановкой в уравнение (173) предела упругости вместо σ . Сталь с пределом упругости 2000 кг/см^2 и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ дает 1 кг см на куб см ; резина с модулем упругости $E = 10 \text{ кг/см}^2$ и пределом упругости 20 кг/см^2 дает $U' = 20 \text{ кг см}$ на куб см . Иногда интересно знать наибольшее количество энергии деформации на единицу веса U'' , которое может быть накоплено без появления остаточной деформации. Эта величина вычисляется из уравнения (173) подстановкой предела упругости вместо σ и делением U' на вес одного кубического сантиметра материала. Несколько числовых значений, полученных таким образом, дано в таблице 4.

Таблица 4

Значения потенциальной энергии на единицу объема и на единицу веса

Материал	Удельный вес	$E \text{ кг/см}^2$	Предел упругости кг/см^2	$U' \text{ кг см на см}^3$	$U'' \text{ кг см на кг}$
Строительная сталь	7,8	$2 \cdot 10^6$	2000	1	128
Инструментальная сталь	7,8	$2 \cdot 10^6$	8000	16	2051
Медь	8,5	$1 \cdot 10^6$	270	0,0365	4,3
Дуб	1,0	$1 \cdot 10^6$	270	0,865	365
Резина	0,93	10	20	20	21505

1) Эта величина иногда называется «живое упругое сопротивление».

Эта таблица показывает, что количество энергии, которое может быть накоплено в данном весе резины приблизительно в 10 раз больше, чем для инструментальной стали и приблизительно в 170 раз больше, чем для строительной стали.

ЗАДАЧИ

1. Призматический стальной стержень длиной 25 см и площадью поперечного сечения 25 см^2 сжимается силой $P = 1600 \text{ кг}$. Определить количество энергии деформации.

Ответ. $U = 0,64 \text{ кг см}$.

2. Определить количество энергии деформации в предыдущей задаче, если площадь поперечного сечения вместо 25 см^2 равняется $12,5 \text{ см}^2$.

Ответ. $U = 1,28 \text{ кг см}$.

3. Определить количество энергии деформации в вертикальном однородном стержне, растянутом под действием собственного веса, если длина стержня равняется 30 м , площадь его поперечного сечения 6 см^2 и вес стали $7,8 \text{ кг/дцм}^3$.

Ответ. $U = 0,81 \text{ кг см}$.

4. Определить количество энергии деформации в предыдущей задаче, если в дополнение к собственному весу стержень нагружен на конце продольной силой $P = 400 \text{ кг}$.

Ответ. $U = 27,81 \text{ кг см}$.

5. Проверить решение задачи, показанной на рис. 18, стр. 26, для того случая, когда все стержни имеют одно и то же поперечное сечение и один и тот же модуль упругости, путем приравнивания энергии деформации системы работы, произведенной нагрузкой P .

Решение. Если X есть усилие в вертикальном стержне, то его удлинение равно Xl/FE , и работа, произведенная силой P , будет $\frac{1}{2} P(Xl/FE)$. Приравнивая ее к энергии деформации, получаем

$$\frac{1}{2} P \frac{Xl}{FE} = \frac{X^2 l}{2FE} + 2 \frac{(X \cos^2 \alpha)^2 l}{2FE \cos \alpha},$$

откуда

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha},$$

что подтверждает прежнее решение.

6. Проверить задачу 2, стр. 19, путем приравнивания работы, произведенной грузом, к энергии деформации двух стержней.

7. Стальной стержень длиной 75 см и площадью поперечного сечения 6 см^2 вытягивается на $0,05 \text{ см}$. Найти количество энергии деформации.

Ответ. Из уравнения (172) находим

$$U = \frac{(0,05)^2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6}{2 \cdot 75} = 200 \text{ кг см}.$$

8. Сравнить количества энергии деформации в двух круглых стержнях, показанных на рис. 263, а и 263, б, предполагая равномерное распределение напряжений по поперечным сечениям стержней.

Решение. Энергия деформации призматического стержня равняется

$$U = \frac{P^2 l}{2FE}.$$

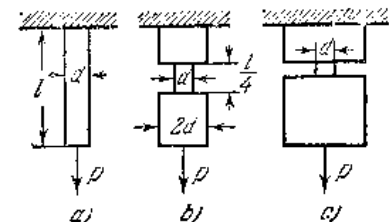


Рис. 263.

Энергия деформации стержня с выточками равняется

$$U_1 = \frac{P^2 \frac{1}{4} l}{2FE} + \frac{P^2 \frac{3}{4} l}{8FE} = \frac{7 P^2 l}{16 2FE},$$

отсюда

$$\frac{U_1}{U} = \frac{7}{16}.$$

При данном наибольшем напряжении количество энергии, накопленной в стержне с выточками, меньше, чем в стержне одинаковой толщины. Потребуется лишь весьма небольшое количество работы, чтобы довести растягивающее напряжение до опасного предела в таком стержне, как показано на рис. 263, с, который имеет очень узкую выточку и большой внешний диаметр, хотя его диаметр в самом слабом месте равен диаметру цилиндрического стержня.

67. Растяжение, вызываемое ударом

На рис. 264 показано простое устройство для того, чтобы вызвать растяжение ударом. Груз Q падает с высоты h на выступ mn и при ударе вызывает растяжение вертикального стержня AB , который закреплен в верхнем конце. Если массы стержня и выступа малы по сравнению с массой падающего тела, то удовлетворительное приближенное решение получается, если пренебречь массой стержня и предположить, что при ударе не происходит потери энергии. После удара о выступ mn тело Q продолжает двигаться вниз, вызывая растяжение стержня. Вследствие сопротивления стержня скорость движущегося тела уменьшается до тех пор, пока не сделается равной нулю. В этот

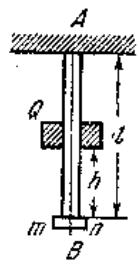


Рис. 264.

момент удлинение стержня и соответствующие растягивающие напряжения будут наибольшими, и их величина определяется на основании предположения, что полная работа, произведенная грузом Q , преобразуется в энергию деформации стержня¹⁾. Если δ означает наибольшее удлинение, то совершенная грузом Q работа равняется $Q(h+\delta)$. Энергия деформации стержня получится из уравнения (172). Тогда уравнение для вычисления δ будет

$$Q(h+\delta) = \frac{FE}{2l} \delta^2, \quad (a)$$

из которого

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}, \quad (175)$$

¹⁾ В действительности же часть энергии рассеется, и действительное удлинение будет всегда меньше того, которое вычисляется на основании указанных допущений.

где

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{FE}$$

есть статическое удлинение стержня от груза Q и $v = \sqrt{2gh}$ есть скорость падающего тела в момент удара о выступ mn . Если высота h велика по сравнению с $\delta_{ст}$, то тогда приближенно получается

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}.$$

Соответствующее растягивающее напряжение в стержне будет

$$\sigma = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l} \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2} = \sqrt{\frac{2E Q v^2}{Fl 2g}}. \quad (176)$$

Выражение под радикалом прямо пропорционально кинетической энергии падающего тела, модулю упругости материала стержня и обратно пропорционально объему Fl стержня. Следовательно, напряжение может быть уменьшено не только увеличением площади поперечного сечения, но также и увеличением длины стержня или уменьшением модуля упругости E . Это совершенно отлично от статического растяжения стержня, где напряжение не зависит от длины l и модуля упругости E . Подставляя в уравнение (176) допускаемое напряжение вместо σ , получаем следующее уравнение для размеров стержня, подверженного предельному осевому удару:

$$Fl = \frac{2E Q v^2}{([\sigma]^2 2g)} = \frac{2EQh}{([\sigma]^2)}, \quad (177)$$

т. е. для того, чтобы сохранить наибольшее напряжение постоянным, объем стержня должен быть пропорционален кинетической энергии падающего тела.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, в котором h равняется нулю, т. е. тело Q внезапно положено на опору mn (рис. 264) без начальной скорости. Хотя в этом случае мы не имеем кинетической энергии в начале растяжения стержня, все-таки эта задача совершенно отлична от задачи при статическом нагружении стержня. В случае статического растяжения мы предполагаем постепенное приложение нагрузки и, следовательно, всегда существующее равновесие между действующей нагрузкой и сопротивляющимися силами упругости в стержне. При этих условиях вопрос о кинетической энергии не входит в задачу. В случае внезапного приложения нагрузки удлинение стержня и напряжение в стержне в начале равны нулю, и внезапно приложенный груз начинает падать под действием собственного веса. Во время этого движения сила сопротивления стержня постепенно увеличивается, и, когда она

сделается равной Q , вертикальное перемещение груза будет $\delta_{ст}$. В этот момент груз обладает некоторой кинетической энергией, приобретенной при перемещении на $\delta_{ст}$; следовательно, он продолжает двигаться вниз до тех пор, пока его скорость не дойдет до нуля вследствие действия силы сопротивления стержня. Наибольшее удлинение при этом условии получится из уравнения (175) подстановкой $v=0$. Тогда

$$\delta = 2\delta_{ст} \quad (178)$$

т. е. внезапно приложенный груз, вследствие динамических условий, вызывает удлинение, которое в два раза больше удлинения, получающегося в случае постепенно приложенной нагрузки.

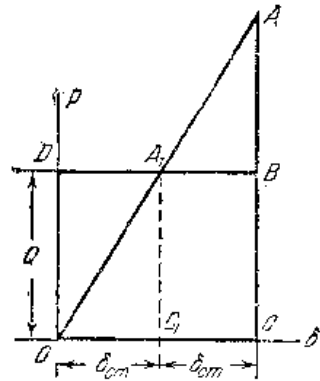


Рис. 265.

Это можно показать также графически на рис. 265. Наклонная линия OA представляет диаграмму растяжения стержня, показанного на рис. 264. Тогда для некоторого удлинения, например OC , площадь OAC дает соответствующую энергию деформации в стержне. Горизонтальная линия DB находится на расстоянии Q от оси δ и площадь $ODBC$ дает работу, произведенную грузом Q при перемещении на OC . Когда δ равно $\delta_{ст}$, то совершенная грузом Q работа изобразится на рисунке площадью прямоугольника ODA_1C_1 . В это же самое

время накопленная в стержне энергия определится площадью треугольника OA_1C_1 , который представляет лишь половину площади упомянутого прямоугольника. Другая половина произведенной работы преобразуется в кинетическую энергию движущегося тела. Вследствие приобретенной скорости тело продолжает двигаться и останавливается лишь на расстоянии $\delta = 2\delta_{ст}$ от начала. В этот момент полная работа, совершенная грузом Q и изображенная прямоугольником $ODBC$, равняется количеству энергии, накопленной в стержне и представленной треугольником OAC .

Предыдущие рассуждения об ударе основаны на предположении, что напряжения в стержне остаются в пределах упругости. За этим пределом задача становится более сложной, так как удлинение стержня уже не пропорционально растягивающей силе. Предполагая, что диаграмма растяжения не зависит от скорости нагружения стержня¹⁾,

¹⁾ Опыты с мягкой сталью показывают, что с увеличением скорости испытания предел текучести повышается и количество работы, необходимой для разрушения образца, больше, чем при статическом испытании. См. Н. Н. Дзвиденков, Известия Петербургского политехнического института, 1913; W e l t e r, Z. Metallkunde, 1924; M. J. M a n j o i n e, J. Appl. Mech., т. 11, стр. 211, 1924.

найдем, что удлинение за пределом упругости при ударе можно определить из обычной диаграммы растяжения, которая показана на рис. 266.

Для некоторого предполагаемого наибольшего удлинения δ соответствующая площадь $OADF$ дает работу, которую необходимо произвести, чтобы вызвать такое удлинение; она должна равняться работе $Q(h+\delta)$, совершенной грузом Q . Когда $Q(h+\delta)$ равно или больше всей площади $OABC$ диаграммы растяжения, то падающее тело разрушит стержень.

Из этого следует, что любое изменение формы стержня, которое влечет уменьшение полной площади $OABC$ диаграммы, уменьшает также силу сопротивления стержня удару.

В образцах с выточками, например, показанными на рис. 263, *b* и 263, *c*, пластическое течение металла будет сосредоточено у выточки, и полное удлинение и работа, необходимая для разрушения, будут гораздо меньше, чем в случае цилиндрического стержня, показанного на том же рисунке.

Такие образцы с выточками весьма слабы при ударе. Легкий толчок может произвести разрушение, даже если сам материал будет мягким. Точно так же слабо сопротивляются удару части, имеющие заклёпочные отверстия или резкое изменение поперечного сечения¹⁾.

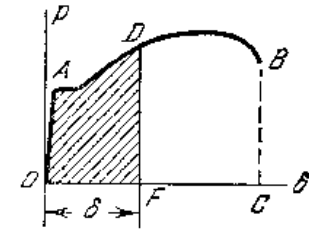


Рис. 266.

В предыдущем изложении мы пренебрегли массой стержня по сравнению с массой падающего тела Q . Только в таком случае мы можем предполагать, что вся энергия падающего тела преобразуется в энергию деформации стержня. Действительные условия при ударе более сложны, и когда стержень имеет значительную массу, то часть энергии будет теряться при ударе. Хорошо известно, что когда движущаяся со скоростью v масса Q/g центрально ударяет покоящуюся массу Q_1/g и деформация в точке соприкосновения является пластической, то конечная общая скорость v_a двух тел равняется

$$v_a = \frac{Q}{Q+Q_1} v. \quad (b)$$

В случае стержня, показанного на рис. 264, условия более сложны. При ударе верхний конец A остаётся в покое, в то время как нижний конец B приобретает скорость движущегося тела Q . Следовательно, для того чтобы вычислить из уравнения (b) конечную скорость v_a , мы должны воспользоваться *приведённой массой* вместо действительной массы стержня. Предполагая, что скорость стержня изменяется линейно по его длине, можем показать, что приведённая масса в этом случае равняется одной трети массы стержня²⁾. Для стержня весом q на единицу

¹⁾ См. H a c k s t r o m, Baumaterialienkunde, стр. 321, 1905 и H. Z i m m e r m a n n Zentr. Bauverwalt, стр. 265, 1899.

²⁾ Это решение было получено Н. Сох'ом, Trans. Cambridge Phil. Soc., стр. 73, 1849; см. также T o d h u n t e r and P e a r s o n, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, т. 1, стр. 895, 1886.

длины уравнение (b) получает вид

$$v_a = \frac{Q}{Q + \frac{ql}{3}} v. \quad (c)$$

Это есть общая скорость груза Q и нижнего конца стержня, которая устанавливается в первый момент удара. Полагая, что у поверхности соприкосновения между падающим грузом и опорой mn (рис. 264) происходит пластическая деформация без всякого отскокивания, получаем, что соответствующая кинетическая энергия равняется

$$\frac{v_a^2}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right) = \frac{Qv^2}{2g} \frac{l}{1 + \frac{ql}{3Q}}.$$

Эта величина должна быть подставлена в уравнение (a) вместо

$$\frac{Qv^2}{2g} = Qh$$

для того, чтобы принять во внимание потерю энергии в первый момент удара. Тогда вместо уравнения (175) получаем

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ст} v^2 \frac{l}{1 + \frac{ql}{3Q}}}. \quad (179)$$

Изложенный метод дает удовлетворительные результаты до тех пор, пока масса стержня мала по сравнению с массой падающего тела. В противном случае становится необходимым рассмотрение продольных колебаний стержня¹⁾. Местная деформация в точке соприкосновения при ударе разобрана J. E. Sears'ом²⁾ и J. E. P. Wagstaff'ом³⁾.

ЗАДАЧИ

1. Груз в 4 кг, привязанный к стальной проволоке диаметром 0,3 см (рис. 267), падает из A с ускорением g . Определить возникающие в проволоке напряжения в тот момент, когда ее верхний конец внезапно остановится. Массой проволоки пренебречь.

Решение. Если ускорение груза Q равняется g , то растягивающих напряжений в проволоке нет. После остановки проволоки в A напряжения получаются из уравнения (176), в котором $\delta_{ст}$ пренебрегают. Подставляя $v^2 = 2gh$ и $l = h$, получаем

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EQ}{F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 4}{0,785 \cdot 0,3^2}} = 15\,038 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Продольные колебания призматического стержня при ударе были рассмотрены Navier. Более исчерпывающее решение было разработано St.-Venant'ом; см. его перевод: C. I. e. b. s. h., Theorie der Elasticität fester Körper, 1883, примечание к § 61. См. также J. B. o. u. s. s. i. n. e. s. q., Application des Patentiers, стр. 508, 1885 и C. R. a. m. s. a. u. e. r., Ann. Physik, т. 30, 1909.

²⁾ Trans. Cambridge. Phil. Soc., т. 21, стр. 49, 1908.

³⁾ Proc. Roy. Soc. (London) A т. 105, стр. 344, 1924.

Очевидно, что напряжения в этом случае не зависят от высоты h , с которой падает груз, так как кинетическая энергия тела увеличивается в том же отношении, как и объем проволоки.

2. Груз $Q = 400$ кг падает с высоты $h = 1$ м на вертикальный деревянный столб длиной 6 м и диаметром 30 см, закрепленный в нижнем конце. Определить наибольшее сжимающее напряжение в столбе, полагая для дерева $E = 10^8$ кг/см² и пренебрегая массой столба и величиной $\delta_{ст}$.

Ответ. $\sigma = 138$ кг/см².

3. Груз $Q = 4000$ кг, привязанный к концу стального проволочного каната (рис. 267), движется вниз с постоянной скоростью $v = 1$ м/сек. Каковы будут напряжения в канате, когда его верхний конец внезапно остановится? Свободная длина каната в момент удара равна $l = 20$ м, площадь его поперечного сечения $F = 15$ см² и $E = 10^8$ кг/см².

Решение. Пренебрегая массой каната и полагая, что кинетическая энергия движущегося тела полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации каната, получаем следующее уравнение для определения наибольшего удлинения δ каната:

$$\frac{FE\delta^2}{2l} - \frac{FE\delta_{ст}^2}{2l} = \frac{Q}{2g} v^2 + Q(\delta - \delta_{ст}) \quad (d)$$

в котором $\delta_{ст}$ означает статическое удлинение каната. Замечая, что $Q = FE\delta_{ст}/l$, из уравнения (d) получаем

$$\frac{FE}{2l} (\delta - \delta_{ст})^2 = \frac{Qv^2}{2g},$$

откуда

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\frac{Qv^2 l}{FEg}}.$$

Следовательно, при внезапной остановке движения растягивающее напряжение в канате увеличивается в отношении

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{v}{\delta_{ст}} \sqrt{\frac{Ql}{FEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{ст}}}. \quad (e)$$

Для указанных числовых данных получаем

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{FE} = \frac{4000 \cdot 20 \cdot 100}{15 \cdot 10^8} = 0,53 \text{ см},$$

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{981 \cdot 0,53}} = 5,39,$$

следовательно,

$$\sigma = 5,39 \frac{Q}{F} = 1437 \text{ кг/см}^2.$$

4. Решить предыдущую задачу, если между канатом и грузом помещена пружина, которая удлинняется на 4 см от груза в 1000 кг.

Решение. $\delta_{ст} = 0,53 + 4 \cdot 4 = 16,53$ см. Вставляя в уравнение (e), получаем

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = 1 + 0,806 = 1,806; \quad \sigma = 1,806 \frac{Q}{F} = 481,6 \text{ кг/см}^2.$$

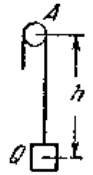


Рис. 267.

Сравнивая это с результатом предыдущей задачи, видим, что пружина, включенная между канатом и грузом, имеет большие влияния на уменьшение величины σ_{\max} при ударе.

5. Для случая, показанного на рис. 264, определить высоту h , для которой наибольшее напряжение в стержне при ударе равняется 2000 кг/см^2 . Принять $Q=10 \text{ кг}$, $l=2 \text{ м}$, $F=3 \text{ см}^2$, $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Массой стержня пренебречь.

Ответ. $h=60 \text{ см}$.

68. Энергия упругой деформации при сдвиге и кручении

Энергия деформации, накопленная в элементе, испытывающем чистый сдвиг (рис. 268), может быть вычислена по методу, примененному в случае простого растяжения. Если нижнюю грань ad элемента принять закрепленной, то необходимо рассмотреть лишь работу, произведенную силой P при деформации верхней грани bc . Полагая, что материал следует закону Гука, находим, что относительный сдвиг пропорционален касательному напряжению и диаграмма, изображающая эту зависимость, аналогична диаграмме, показанной на рис. 262. Тогда работа, произведенная силой P и накопленная

в форме энергии упругой деформации, будет равняться (см. уравнение 170, стр. 255)

$$U = \frac{P\delta}{2}. \quad (170')$$

Припоминая, что

$$\frac{\delta}{l} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{FG},$$

из (170') мы получим следующие два уравнения:

$$U = \frac{P^2 l}{2FG}, \quad (180)$$

$$U = \frac{FG\delta^2}{2l}. \quad (181)$$

Путем деления этих уравнений на объем $F l$ бруска получаем два выражения для энергии деформации на единицу объема:

$$U' = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (182)$$

$$U' = \frac{\gamma^2 G}{2}, \quad (183)$$

где $\tau = P/F$ есть касательное напряжение и $\gamma = \delta/l$ — относительный сдвиг. Количество энергии при сдвиге на единицу объема, которое

может быть накоплено в бруске без остаточной деформации, получится подстановкой в уравнение (182) предела упругости вместо τ .

Энергия, накопленная в скручиваемом круглом вале, легко вычисляется при помощи уравнения (182). Если τ_{\max} есть наибольшее касательное напряжение на поверхности вала, то $\tau_{\max} (2r/d)$ будет касательным напряжением в точке на расстоянии r от оси, где d — диаметр вала. Энергия на единицу объема в этой точке из уравнения (182) будет

$$U' = \frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2}. \quad (a)$$

Энергия, накопленная в материале, заключенном между двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r+dr$, равняется

$$\frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2} 2\pi l r dr,$$

где l — длина вала. Тогда полная энергия, накопленная в вале, будет

$$U = \int_0^{d/2} \frac{2\tau_{\max}^2 r^2}{Gd^2} 2\pi l r dr = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2 l}{4} \frac{\tau_{\max}^2}{2G}. \quad (184)$$

Это выражение показывает, что полная энергия составляет лишь половину той энергии, которая была бы, если бы все элементы вала были напряжены до наибольшего касательного напряжения τ_{\max} .

Энергия кручения может быть вычислена из диаграммы кручения (рис. 269), в которой крутящие моменты изображены ординатами, а углы закручивания — абсциссами. В пределах упругости угол закручивания пропорционален крутящему моменту, как представлено наклонной линией OA . Узкая заштрихованная на чертеже площадка изображает работу, произведенную крутящим моментом при возрастании угла закручивания φ на величину $d\varphi$. Площадь $OAB = M_k \varphi / 2$ изображает полную энергию, накопленную в вале во время кручения. Припоминая, что $\varphi = M_k l / GJ_p$, получаем

$$U = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} \quad \text{или} \quad U = \frac{\varphi^2 GJ_p}{2l}. \quad (185)$$

В первом из этих уравнений энергия представлена как функция крутящего момента, во втором — как функция угла закручивания.

В общем случае, для любой формы поперечного сечения и крутящего момента, изменяющегося по длине вала, угол между двумя

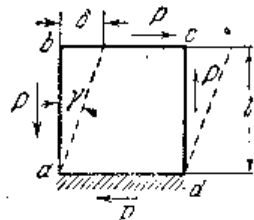


Рис. 268.

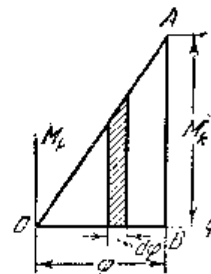


Рис. 269.

смежными поперечными сечениями определяется по формуле (см. стр. 246)

$$\frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{M_k}{C} dx.$$

Энергия деформации части вала между двумя смежными поперечными сечениями равняется

$$\frac{1}{2} M_k \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{C}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

и полная энергия кручения равняется

$$U = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2C} \int_0^l M_k^2 dx. \quad (186)$$

ЗАДАЧИ

1. Определить соотношение между пределом упругости при сдвиге и пределом упругости при растяжении, если количество энергии деформации на 1 см^2 , которое может быть накоплено без остаточной деформации, одно и то же как при растяжении, так и при сдвиге.

Решение. Из уравнений (173) и (183) имеем

$$\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\tau^2}{2G},$$

откуда

$$\frac{\tau}{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{E}}.$$

Для стали

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{1}{2,6}} = 0,62\sigma.$$

2. Определить осадку винтовой пружины (см. рис. 253), пользуясь выражением энергии деформации при кручении.

Решение. Обозначим через P силу, действующую в направлении оси пружины (рис. 253), через R — радиус витков и через n — число витков. Из уравнения (185) энергия кручения, накопленная в пружине, будет

$$U = \frac{(PR)^2 2\pi Rn}{2GJ_p}.$$

Приравняв это выражение произведенной работе $P\delta/2$, получаем

$$\delta = \frac{2\pi n PR^3}{GJ_p} = \frac{64\pi n PR^3}{Gd^4},$$

что совпадает с уравнением (162).

3. Вес стальной винтовой пружины равен 4 кг. Определить количество энергии, которое можно накопить в этой пружине, не вызывая остаточных деформаций, если предел упругости при сдвиге равен 5000 кг/см^2 .

Решение. Количество энергии на куб см из уравнения (182) равняется

$$U' = \frac{(5000)^2}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^8} = 16,25 \text{ кг см.}$$

Энергия, приходящаяся на кг материала (см. стр. 256), равняется 2051 кг см . Тогда полная энергия кручения ¹⁾, которая может быть накоплена в пружине, будет

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2051 = 4102 \text{ кг см.}$$

4. Сплошной круглый вал и тонкая труба из одного материала и одного и того же веса подвергаются кручению. В каком отношении будут находиться количества энергии в вале и трубе, если наибольшие напряжения в них равны?

Ответ. 1 : 2.

5. Круглый стальной вал с маховым колесом на одном конце вращается со скоростью 120 оборотов в минуту. Другой его конец внезапно останавливается. Определить наибольшее напряжение вала при ударе, если длина вала $l = 1,5 \text{ м}$, диаметр $d = 5 \text{ см}$, вес махового колеса $Q = 40 \text{ кг}$, радиус инерции его $i = 25 \text{ см}$.

Решение. Наибольшее напряжение вала будет тогда, когда полная кинетическая энергия маховика преобразуется в энергию деформации скрученного вала. Кинетическая энергия маховика равняется

$$\frac{Q i^2 \omega^2}{2g} = \frac{40 \cdot 25^2 (4\pi)^2}{2 \cdot 981} = 2000 \text{ кг см.}$$

Подставляя это выражение в уравнение (184), вместо U , получаем

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{16 \cdot 7,7 \cdot 10^8 \cdot 2000}{\pi 25 \cdot 150}} = 1446 \text{ кг/см}^2.$$

6. Два круглых стержня из одного и того же материала, одинаковой длины, но разных поперечных сечений F и F_1 , скручиваются одинаковыми моментами. В каком отношении будут находиться количества энергии деформации в этих двух стержнях?

Ответ. Обрато пропорционально квадратам площадей поперечных сечений.

69. Энергия упругой деформации при изгибе

Начнем рассмотрение со случая чистого изгиба. Для призматического бруска, заделанного одним концом и изгибаемого парой сил на другом (рис. 270), угол поворота свободного конца равняется

$$\varphi = \frac{Ml}{EJ_z}. \quad (a)$$

Это перемещение пропорционально изгибающему моменту M , и при помощи диаграммы, подобной изображенной на рис. 269, и путем подобных же рассуждений мы можем заключить, что работа, произведенная изгибающим моментом при изгибе, или энергия, накопленная в бруске, равняется

$$U = \frac{M\varphi}{2}. \quad (b)$$

¹⁾ Распределение напряжений предполагается такое же, как и в скручиваемом круглом стержне.

При помощи уравнения (а) эта энергия может быть выражена двояко следующим образом:

$$U = \frac{M^2 l}{2EJ_z}, \quad (187)$$

$$U = \frac{\varphi^2 EJ_z}{2l}. \quad (188)$$

Иногда полезно иметь потенциальную энергию, выраженную в виде функции наибольшего нормального напряжения $\sigma_{\max} = M_{\max}/W$. Так, например, для прямоугольного бруска $\sigma_{\max} = 6M/bh^2$, или $M = bh^2\sigma_{\max}/6$, и уравнение (187) получает вид

$$U = \frac{1}{3} bhl \frac{\sigma_{\max}^2}{2E}. \quad (189)$$

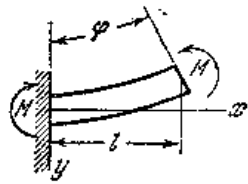


Рис. 270.

Очевидно, в этом случае полная энергия составляет лишь одну треть той энергии, которая была бы, если бы все волокна испытывали напряжение σ_{\max} .

При рассмотрении изгиба силами, перпендикулярными к оси, энергией деформации сдвига сначала пренебрегают. На основании уравнений (187) и (188) энергия, накопленная в элементе балки между двумя смежными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии dx одно от другого, равняется

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EJ_z} \quad \text{или} \quad dU = \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx.$$

Здесь изгибающий момент M есть величина переменная в зависимости от x , а

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| dx$$

(см. стр. 124). Следовательно, полная энергия, накопленная в бруске, равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_z} \quad (190)$$

или

$$U = \int_0^l \frac{EJ_z}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (191)$$

Возьмем, например, консоль AB (рис. 271, а). Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn равняется $M = -Px$. Подстановка в уравнение (190) дает

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EJ_z} = \frac{P^2 l^3}{6EJ_z}. \quad (с)$$

Для прямоугольного бруска $\sigma_{\max} = 6Pl/bh^2$, и уравнение (с) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{9} bhl \frac{\sigma_{\max}^2}{2E}. \quad (с')$$

Это показывает, что количество энергии, которое может быть накоплено в прямоугольной консольной балке, нагруженной на конце, без остаточных деформаций, составляет одну треть энергии для того же бруска при чистом изгибе и одну девятую — при растяжении того же бруска. Это соображение является важным при проектировании рессор, которые должны без вреда поглощать данное количество энергии и, кроме того, иметь, по возможности, малый вес. Способность консоли поглощать энергию можно увеличить, давая ей переменное поперечное сечение.

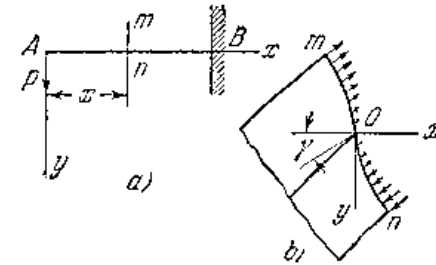


Рис. 271.

Например, консоль *равного сопротивления* с прямоугольным поперечным сечением постоянной высоты h (см. рис. 188) и с теми же значениями для P , h и σ_{\max} имеет прогиб, а следовательно, и количество накопленной энергии на 50% больше, чем призматический брусок. В то же самое время брусок равного сопротивления изгибу имеет половину веса призматического бруска, так что он может накопить в три раза больше энергии на 1 кг материала.

Возвращаясь к уравнению (с) и приравнявая энергию деформации работе, совершенной силой P при изгибе, получаем

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EJ_z}, \quad (d)$$

откуда прогиб на конце равняется

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ_z},$$

что совпадает с уравнением (95).

Дополнительный прогиб от сдвига можно также определить из потенциальной энергии деформации. Для консоли, показанной на рис. 271, с прямоугольным поперечным сечением касательное напряжение на расстоянии y от нейтральной оси равняется (см. уравнение (65))

$$\frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Следовательно, из уравнения (182) энергия сдвига в элементарном объеме $b dx dy$ равняется

$$\frac{P^2}{8GJ_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b dx dy$$

и

$$U = \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{P^2}{8GJ_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b dx dy = \frac{P^2 l h^3}{20GJ_z} \quad (e)$$

Для того чтобы получить уравнение для определения полного прогиба, нужно эту величину сложить с правой частью вышеприведенного уравнения (d) ¹⁾

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{Pl^3}{6EJ_z} + \frac{P^2 l h^3}{20GJ_z}; \quad (f)$$

следовательно,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{h^2 E}{l^2 G} \right). \quad (g)$$

Второй член в скобках выражает действие касательных напряжений на прогиб балки.

При помощи метода, изложенного в § 39, на основании предположения, что элемент поперечного сечения в центре тяжести заделанного конца остается вертикальным (рис. 271, б), дополнительный угол наклона от сдвига определится

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3}{2} \frac{P}{bhG},$$

и дополнительный прогиб будет

$$\frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG}.$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EJ_z} + \frac{3}{2} \frac{Pl^3}{bhG} = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{h^2 E}{l^2 G} \right). \quad (g')$$

Мы видим, что уравнения (g) и (g') не совпадают. Расхождение объясняется следующим: вывод § 39 был основан на предположении, что поперечные сечения балки могут свободно искривляться под действием касательных напряжений. В таком случае заделанное поперечное сечение будет искривляться по поверхности *mOn* (рис. 271, б) и при вычислении полной работы, произведенной при изгибе консоли, мы должны принять во внимание не только работу, совершенную силой *P* (рис. 271, а), но также и работу, совершенную напряжениями, действующими в заделанном поперечном сечении (рис. 271, б). Если будет принята во внимание эта последняя работа, то прогиб, вычисленный на основании рассмотрения энергии деформации, совпадает с прогибом, полученным в § 39 и определяемым по приведенной выше формуле (g').

В случае свободно опертой балки и нагруженной в середине, как можно заключить из условий симметрии, среднее поперечное сечение не искривляется. В таком случае уравнение (g), если его применить к каждой половине балки, будет давать лучшее приближение для прогиба, чем уравнение (g'). Это можно видеть, если сравнить приближенные уравнения (g) и (g') с более строгим решением, данным в § 39.

¹⁾ Такое сложение энергии сдвига с энергией от нормальных напряжений является правильным, так как касательные напряжения, действующие на элемент (рис. 268), не изменяют длины сторон элемента, и если нормальные напряжения действуют по этим граням, то они не произведут работу при деформации сдвига. Следовательно, касательные напряжения не изменят количества энергии от растяжения или сжатия, и оба вида энергии можно просто сложить вместе.

ЗАДАЧИ

1. Деревянная консольная балка длиной 2 м, прямоугольного поперечного сечения 12×20 см несет равномерно распределенную нагрузку $q=250$ кг на 1 пог. м. Определить количество потенциальной энергии деформации, если $E=10^6$ кг/см².

$$\text{Ответ. } U = \frac{q^2 l^5}{40EJ_z} = \frac{(2,5)^2 \cdot 200^5 \cdot 12}{40 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 20^4} = 62,5 \text{ кг см.}$$

2. В каком отношении увеличится количество энергии деформации, вычисленное в предыдущей задаче, если высота балки будет 12 см, а ширина 20 см?

Ответ. Энергия деформации увеличится в отношении $20^4 : 12^4$.

3. Два одинаковых бруска, один со свободно опертыми концами, а другой — с заделанными, изгибаются равными силами, приложенными в середине. В каком отношении находятся количества потенциальной энергии деформации?

Ответ. 4 : 1.

4. Решить предыдущую задачу для равномерно распределенной нагрузки одинаковой интенсивности q в обоих брусках.

5. Найти отношение количеств потенциальной энергии деформации в балках прямоугольного сечения одинаково нагруженных, имеющих одинаковую длину и одинаковую ширину поперечного сечения, но высоты в которых относятся как 2:1.

Решение. Для данной нагрузки энергия деформации пропорциональна прогибу, а прогиб обратно пропорционален моменту энергии площади поперечного сечения. Поэтому при уменьшении высоты в два раза прогиб увеличивается в 8 раз и количество энергии деформации увеличивается во столько же раз.

70. Изгиб, вызываемый ударом

Динамический прогиб балки, которая подвержена удару падающего тела Q , может быть определен по методу, изложенному для случая удара, вызывающего растяжение (§ 67). Возьмем в качестве примера свободно лежащую на опорах балку, ударяемую в середине (рис. 272), и допустим, что массой балки можно пренебречь по сравнению с массой падающего тела и что балка напряжена до предела текучести. Тогда потери энергии при ударе не будет и работа, произведенная грузом Q при его падении, полностью преобразуется в энергию деформации изгиба балки ¹⁾. Пусть δ означает наибольший прогиб балки при ударе. Если мы предположим, что изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как при статическом изгибе, то сила, которая вызвала бы такой прогиб, на основании уравнения (90), должна равняться

$$P = \delta \frac{48EJ_z}{l^3}. \quad (a)$$

Полная энергия, накопленная в балке, равняется работе, со-

¹⁾ Местными деформациями на поверхности соприкосновения нагрузки с балкой при этом вычислении пренебрегают.

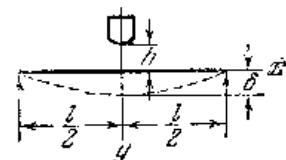


Рис. 272.

вершенной силой P ,

$$U = \frac{P\delta}{2} = \delta^2 \frac{24EJ_z}{l^3}.$$

Если h по-прежнему означает высоту падения, то уравнение для определения δ будет

$$Q(h + \delta) = \delta^2 \frac{24EJ_z}{l^3}, \quad (b)$$

откуда

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}, \quad (192)$$

где

$$\delta_{ст} = \frac{Ql^3}{48EJ_z} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Уравнение (192) — точно такое же, как и при ударе, вызывающем растяжение (уравнение (175)).

Необходимо заметить, что вид уравнения остается тот же и для других случаев удара при условии, что деформация в точке удара пропорциональна силе P , приложенной в этой точке. Если через α обозначим коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции, то мы имеем

$$\alpha P = \delta \quad \text{и} \quad U = \frac{P\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\alpha}.$$

Тогда

$$Q(h + \delta) = \frac{\delta^2}{2\alpha},$$

и так как $\delta_{ст} = Q\alpha$, то это уравнение приводится к уравнению (192).

Необходимо заметить также, что прогиб δ , вычисленный из уравнения (192), представляет верхний предел, к которому приближается наибольший динамический прогиб, когда нет потерь энергии при ударе. Всякая потеря будет уменьшать динамический прогиб. Когда динамический прогиб найден из уравнения (192), то соответствующие напряжения можно найти умножением на $\delta/\delta_{ст}$ напряжений, полученных при статическом приложении груза Q .

Когда h велико по сравнению с $\delta_{ст}$ или удар происходит в горизонтальном направлении, то уравнение (192) принимает более простой вид

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{ст} v^2}. \quad (c)$$

Для случая балки, опертой на концах и ударяемой посередине, это уравнение дает

$$\delta = \sqrt{\frac{Qv^2}{2g} \frac{l^3}{24EJ_z}}. \quad (d)$$

Наибольший изгибающий момент в этом случае будет

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{\delta \cdot 48EJ_z}{l^3} \frac{l}{4}$$

и

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\delta \cdot 48EJ_z}{l^3} \frac{l}{4W}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения, пользуясь уравнением (d), получаем

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{Qv^2}{2g} \frac{18E}{l^2}}. \quad (e)$$

Это указывает на то, что наибольшее напряжение зависит от кинетической энергии падающего тела и объема lF балки.

При определении влияния массы балки на наибольший прогиб будем предполагать, что изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как и при статическом изгибе. Тогда можно показать, что приведенная масса балки¹⁾, опртой на концах, равняется $(17/35)(ql/g)$ и общая скорость, которая устанавливается в первый момент удара, равняется

$$v_a = \frac{Q}{Q + \frac{17}{35} ql} v.$$

Полная кинетическая энергия после установления общей скорости v_a равна

$$\frac{v_a^2}{2g} \left[Q + \frac{17}{35} ql \right] = \frac{Qv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{Q}}.$$

Пользуясь этим выражением вместо

$$\frac{Qv^2}{2g} = Qh$$

в уравнении (b), получаем уравнение

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\delta_{ст}^2 + \frac{\delta_{ст} v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{Q}}}, \quad (193)$$

в котором принято во внимание влияние массы балки на прогиб δ^2).

¹⁾ См. Соx, цитир. на стр. 261.

²⁾ Несколько примеров на применение этого уравнения можно найти в статье Prof. Tschischke, Z. Ver. deut. Ing., стр. 134, 1894. Более точная теория поперечного удара на балку основана на исследовании ее поперечных колебаний совместно с местными деформациями в точке удара. См. перевод St. Venant'a книги Clebsch'a, стр. 537, цитировано; также Compt. rend., т. 45, стр. 204, 1857 и статью автора в Z. Math u. Phys., т. 62, стр. 198, 1913. Опыты с балками, подверженными удару, были произведены в Швейцарии и удовлетворительно согласуются с вышеприведенной приближенной теорией, см. M. Ros, Tech. Kom. Ver. hand. Schweiz. Brückenbau u. Eisenhochbauindustrie, март, 1922. См. также Z. Tuzi and M. Nisida, Phil. Mag. (серия 7), т. 21, стр. 448; R. N. Arnold, Proc Inst. Mech. Engrs. (London), т. 137, стр. 217, 1937; E. H. Lee, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 129, 1940.

В случае консоли, если груз Q ударяет балку на конце, величина приведенной массы балки равняется $\frac{33}{140} (ql/g)$. Когда свободно лежащая на опорах балка ударяется в точке, расстояния которой от опор соответственно равны a и b , то приведенная масса ее равняется

$$\frac{1}{105} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{l^2}{ab} \right)^2 \right] \frac{ql}{g},$$

и уравнение (193) должно быть изменено согласно этому выражению.

ЗАДАЧИ

1. Груз в 20 кг, падающий с высоты $h=30$ см, ударяет посередине свободно лежащую на двух опорах деревянную балку прямоугольного сечения длиной 3 м. Определить необходимую площадь поперечного сечения, если допустимое напряжение $[\sigma]=70$ кг/см², $E=10^8$ кг/см². Пренебрегь $\delta_{ст}$ сравнительно с h .

Решение. Пользуясь уравнением (с) стр. 273¹⁾, получаем

$$F = \frac{Qu^2}{2g} \frac{18E}{l([\sigma])^2} = \frac{20 \cdot 30 \cdot 18 \cdot 10^8}{300 \cdot 70^2} = 735 \text{ кв. см.}$$

2. В каком отношении изменится площадь в предыдущей задаче: 1) если пролет балки увеличится с 3 до 4 м; 2) если груз Q увеличится на 50%?

Ответ. 1) Площадь уменьшится в отношении 3 : 4; 2) площадь увеличится на 50%.

3. Груз $Q=40$ кг падает с высоты 30 см на середину свободно лежащей на двух опорах двутавровой балки длиной 3 м. Найти безопасные размеры, если $[\sigma]=2000$ кг/см².

Решение. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h (см. уравнение (с)), находим, что отношение между динамическим и статическим прогибами равняется

$$\frac{\delta}{\delta_{ст}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}}$$

Если изогнутая ось балки при ударе имеет такую же форму, как и при статическом изгибе, то наибольшие напряжения будут относиться как прогибы. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}} \frac{Ql}{4W} = [\sigma],$$

откуда

$$\frac{W}{c} = \frac{6EQh}{([\sigma])^2 l},$$

где W — момент сопротивления, а c — расстояние наиболее удаленного волокна от нейтральной оси, которое в этом случае равняется половине высоты балки. Подставляя числовые данные, получаем

$$\frac{W}{c} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 30}{2000^2 \cdot 300} = 12 \text{ см}^2.$$

Необходимая двутавровая балка будет № 16, $W=109$ см².

¹⁾ Местными деформациями на поверхности соприкосновения нагрузки с балкой при этом вычислении следует пренебредить.

4. Какие напряжения возникнут в балке предыдущей задачи от груза в 80 кг, падающего на середину балки с высоты 15 см?

Ответ. $\sigma_{\max}=1989$ кг/см².

5. Груз $Q=40$ кг, падающий с высоты $h=30$ см, ударяет на конце деревянную консольную балку длиной 2 м и площадью поперечного сечения 30×30 см. Определить наибольший прогиб, принимая во внимание потерю энергии благодаря влиянию массы балки.

Решение. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h , получим уравнение, аналогичное уравнению (193):

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{ст} v^2}{g} \frac{1}{1 - \frac{33}{140} \frac{ql}{Q}}}$$

Для $\gamma=0,6$; $q=0,6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10=54$ кг/м; $ql=54 \cdot 2=108$ кг м

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{ст} \frac{60}{33 \cdot 108}}{1 + \frac{33}{140} \cdot 40}} = \sqrt{\frac{36,6 \cdot 40 \cdot 200^2 \cdot 12}{3 \cdot 10^8 \cdot 30^4}} = 0,76 \text{ см.}$$

6. Груз Q , падающий вниз с высоты h , ударяет посередине балку, свободно лежащую на двух опорах. Пренебрегая $\delta_{ст}$ по сравнению с h , найти величину отношения $\frac{ql}{Q}$, при которой влияние массы балки уменьшает динамический прогиб на 10%.

Ответ. $\frac{ql}{Q}=0,483$.

71. Общее выражение энергии деформации

При рассмотрении задач на растяжение, сжатие, кручение и изгиб было показано, что энергия деформации может быть представлена в каждом случае функцией второй степени от внешних сил (уравнения (171), (180) и (187)) или функцией второй степени от перемещений (уравнения (172), (181) и (188)). Это положение также справедливо в самом общем случае деформации упругого тела при соблюдении следующих условий: 1) материал следует закону Гука, 2) перемещения вследствие деформации настолько малы, что не оказывают влияния на действие внешних сил, и ими можно пренебредить при вычислении напряжений¹⁾. При этих двух условиях перемещения упругой системы являются линейными функциями внешних сил. Если эти силы увеличиваются в некотором отношении, то все перемещения увеличиваются в том же отношении. Рассмотрим тело, которое подвергается действию внешних сил P_1, P_2, P_3, \dots (рис. 273) и опирается таким

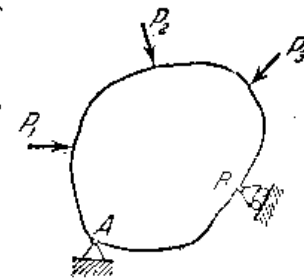


Рис. 273.

¹⁾ Такие задачи, как изгиб стержней поперечными силами с одновременным осевым растяжением или сжатием, не удовлетворяют вышеуказанным условиям и исключаются из этого рассмотрения. Относительно этих исключительных случаев см. § 76.

образом, что движение его в целом как твердого тела невозможно, а могут происходить лишь отдельные перемещения вследствие упругих деформаций. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ означают перемещения точек приложения сил, измеряемые по направлению соответствующей силы¹⁾. Если внешние силы увеличиваются постепенно, так что они всегда находятся в равновесии с внутренними силами упругости, то произведенная ими во время деформации работа будет равняться потенциальной энергии, накопленной в деформированном теле. Количество этой энергии не зависит от порядка, в котором приложены силы, но вполне определяется их конечными значениями. Положим, что внешние силы P_1, P_2, P_3, \dots увеличиваются одновременно в одном и том же отношении. Тогда зависимость между каждой силой и соответствующим ей перемещением может быть изображена диаграммой аналогично той, которая показана на рис. 262, и работа, произведенная всеми силами P_1, P_2, P_3, \dots , равная потенциальной энергии тела, будет

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3}{2} + \dots \quad (194)$$

т. е. полная энергия деформации равна полусумме произведений каждой внешней силы на соответствующее перемещение²⁾. На основании сделанных выше допущений, перемещения $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ являются однородными линейными функциями сил P_1, P_2, P_3, \dots . Подстановка этих функций в уравнение (194) дает общее выражение для потенциальной энергии упругого тела в форме однородной функции второй степени от внешних сил. Если силы представлены линейными функциями перемещений и эти функции подставлены в уравнение (194), то получается выражение для потенциальной энергии в форме однородной функции второй степени от перемещений.

В предыдущем рассуждении не были приняты в соображение реакции опор. Работа, произведенная этими реакциями во время деформации, равна нулю, так как перемещение неподвижной опоры A (рис. 273) равно нулю, а перемещение подвижной опоры B перпендикулярно к направлению реакции, трением же на опорах обычно пренебрегают. Следовательно, реакции ничего не добавляют к выражению для потенциальной энергии (194).

В качестве примера на применение уравнения (194) рассмотрим потенциальную энергию, накопленную телом, имеющим форму куба и испытывающим равномерное растяжение по трем перпендикулярным направлениям (см. рис. 54). Если ребро куба равняется единице длины, то растягивающие усилия на его гранях численно равны $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и соответствующие удлинения будут $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

¹⁾ Перемещения тех же точек по направлению, перпендикулярному к соответствующей силе, не рассматриваются в последующем изложении.

²⁾ Этот вывод впервые был получен Слареугоном; см. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2 изд., стр. 79, 1866.

Тогда потенциальная энергия, накопленная в одном кубическом сантиметре, по формуле (194) будет

$$U' = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}.$$

Подставляя вместо удлинений их значения из уравнения (43)¹⁾, получаем

$$U' = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x). \quad (195)$$

Это выражение может быть применено также в том случае, когда нормальные напряжения являются сжимающими; необходимо лишь эти напряжения взять с отрицательным знаком.

Если, кроме нормальных напряжений, действуют по граням элемента и касательные напряжения, то энергия сдвига может быть сложена с энергией растяжения или сжатия (см. стр. 270) и, пользуясь уравнением (182), находим, что полная энергия, накопленная в 1 см^3 , равняется

$$U' = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (196)$$

В качестве второго примера рассмотрим балку, свободно лежащую на двух опорах, нагруженную силой P посередине пролета и парой сил M на опоре A . Прогиб посередине по формулам (90) и (103) равняется

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Ml^2}{16EJ}. \quad (a)$$

Угол поворота сечения на опоре A по формулам (88) и (104) равняется

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{Ml}{3EJ}. \quad (b)$$

Тогда потенциальная энергия балки, равная работе, совершенной силой P и парой сил M , будет

$$U = \frac{P\delta}{2} + \frac{M\theta}{2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^3}{96} + \frac{M^2 l}{6} + \frac{MPl^2}{16} \right). \quad (c)$$

Это выражение является однородной функцией второй степени от внешней силы и внешней пары. Определяя M и P из уравнений (a) и (b) и подставляя их в уравнение (c), получаем выражение для потенциальной энергии балки в виде однородной функции второй степени от перемещений. Необходимо заметить, что когда на тело действуют внешние пары сил, то соответствующими перемещениями будут углы поворота тех сечений элементов, на которые действуют эти пары сил.

72. Теорема Кастилиано

Имея выражение для потенциальной энергии в разных случаях, мы можем установить очень простой метод для вычисления перемещений точек упругого тела при его деформации. Например, в случае простого растяжения (см. рис. 1) потенциальная энергия стержня по

¹⁾ В этом вычислении не имеют практического значения изменения температуры, вызываемые деформацией. Для дальнейшего ознакомления см. T. W e u g a n c h, *Theorie elastischer Körper*, Leipzig, стр. 163, 1884. См. также *Architek. u. Ingenieurw.*, т. 54, стр. 91 и 277, 1908.

формуле (171) равняется

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Взяв производную от этого выражения по P , получим

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{FE} = \delta.$$

Таким образом, производная от потенциальной энергии по силе дает перемещение, соответствующее силе, т. е. перемещение точки приложения силы по направлению силы. В случае консоли, нагруженной на конце, потенциальная энергия равняется (уравнение (с), стр. 268)

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EJ}.$$

Производная от этого выражения по силе P дает известный прогиб $Pl^3/3EJ$ на свободном конце.

При кручении круглого вала потенциальная энергия равняется (уравнение (185))

$$U = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p}.$$

Производная от этого выражения по крутящему моменту дает

$$\frac{dU}{dM_k} = \frac{M_k l}{GJ_p} = \varphi,$$

т. е. угол закручивания вала, и представляет перемещение, соответствующее крутящему моменту.

Когда на упругое тело действует несколько сил, то можно применить тот же метод вычисления перемещений. Например, выражение (с) предыдущего параграфа дает потенциальную энергию балки, изгибаемой силой P в середине и парой сил M на конце. Частная производная от этого выражения по силе P дает прогиб под силой и частная производная по моменту M дает угол поворота опорного сечения, на которое действует пара сил M .

Теорема Кастилиано является общим выражением этих результатов ¹⁾. Если материал следует закону Гука и перемещения при деформации настолько малы, что ими можно пренебречь при рассмотрении действия сил, то потенциальная энергия такой системы может быть выражена однородной функцией второй степени от действующих сил (см. § 71). Тогда частная производная от потенциальной энергии по какой-либо силе дает перемещение, соответствующее этой силе

¹⁾ См. статью Castigliano, Nuova teoria intorno dell'equilibrio dei sistemi elastici, Atti acc. sci., Torino, 1875. См. также его Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin, 1879. Английский перевод работы Кастилиано см. E. S. Andrews, Elastic Stresses in Structures, London, 1919.

(исключительные случаи см. § 76). Термины «сила» и «перемещение» здесь могут иметь обобщенное значение, т. е. они включают соответственно «пару сил» и «угловое перемещение».

Рассмотрим общий случай, показанный на рис. 273. Положим, что потенциальная энергия представлена функцией сил P_1, P_2, P_3, \dots , так что

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots). \quad (a)$$

Если какой-либо внешней силе P_n дано небольшое приращение dP_n , то энергия деформации также увеличится, и ее новое значение будет

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (b)$$

Но количество потенциальной энергии не зависит от порядка, в котором силы приложены к телу, и зависит лишь от их конечных значений. Можно предположить, например, что сначала была приложена бесконечно малая сила dP_n , а затем силы P_1, P_2, P_3, \dots . Окончательное количество потенциальной энергии будет прежним. Сила dP_n , приложенная сначала, вызывает лишь бесконечно малое перемещение, так что соответствующая работа (равная произведению малой силы на соответствующее малое перемещение) является бесконечно малой величиной второго порядка и ею можно пренебречь.

Прикладывая теперь силы P_1, P_2, P_3, \dots , должны заметить, что действие их не изменяется ранее приложенной силой dP_n , и работа, совершенная этими силами, будет по-прежнему равняться U (уравнение (a)). Но тем не менее при приложении этих сил сила dP_n на перемещении δ_n в направлении P_n производит работу $(dP_n)\delta_n$. Эти два выражения для работы необходимо приравнять друг другу. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} U + \frac{\partial U}{\partial P_n} (dP_n) &= U + (dP_n) \delta_n, \\ \delta_n &= \frac{\partial U}{\partial P_n}, \end{aligned} \right\} \quad (197)$$



Рис. 274.

и теорема Кастилиано доказана.

В качестве приложения теоремы рассмотрим консольную балку, нагруженную силой P и парой сил M_0 на конце (рис. 274). Изгибающий момент в поперечном сечении mn равняется $M = -Px - M_0$, и потенциальная энергия из уравнения (187) равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}.$$

Чтобы получить прогиб δ на конце консоли, мы должны лишь взять

¹⁾ Это следует из условий, оговоренных на стр. 275, на основании которых потенциальная энергия была получена как однородная функция второй степени.

частную производную от U по P^1), что дает

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Подставляя вместо M его выражение в зависимости от P и M_a , получаем

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l (Px + M_a) x dx = \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{M_a l^2}{2EJ}.$$

То же выражение можно получить при помощи одного из прежде изложенных методов, например графоаналитического метода или метода интегрирования дифференциального уравнения (79) упругой кривой.

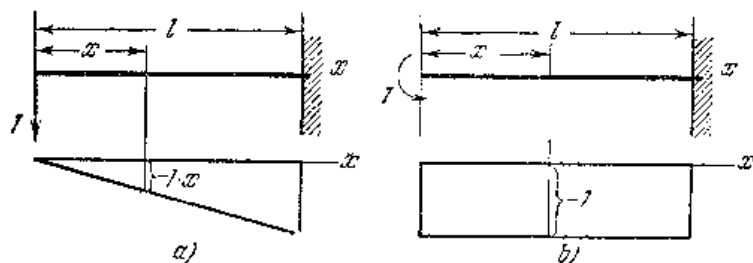


Рис. 275.

Чтобы получить угол поворота концевое сечения, найдем частную производную от потенциальной энергии по паре сил M_a , что дает

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (Px + M_a) dx = \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{M_a l}{EJ}.$$

Положительные знаки, полученные для δ и θ , указывают на то, что прогибы поворота конца имеют те же направления, соответственно, как сила и пара сил на рис. 274.

Необходимо заметить, что частная производная $\frac{\partial M}{\partial P}$ представляет скорость увеличения момента M с увеличением силы P и может быть наглядно изображена эпюрой изгибающих моментов для силы, равной единице, как показано на рис. 275, а. Частная производная $\frac{\partial M}{\partial M_a}$ может быть наглядно представлена, таким образом, эпюрой изгибающих моментов на рис. 275, б. Пользуясь обозначениями:

$$\frac{\partial M}{\partial P} = M_p \quad \text{и} \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = M_m,$$

¹⁾ Проще будет сначала продифференцировать под знаком интеграла и затем интегрировать, нежели сначала вычислить интеграл и затем дифференцировать.

мы можем представить наши прежние результаты в следующем виде:

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M M_p dx, \quad \theta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M M_m dx. \quad (198)$$

Эти уравнения, выведенные для частного случая, показанного на рис. 274, также справедливы для общего случая балки с любой нагрузкой и любыми опорами. Они также могут быть применены в случае распределенных нагрузок.

Рассмотрим, например, случай балки, свободно лежащей на опорах и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 276), и вычислим прогиб в середине этой балки, пользуясь теоремой

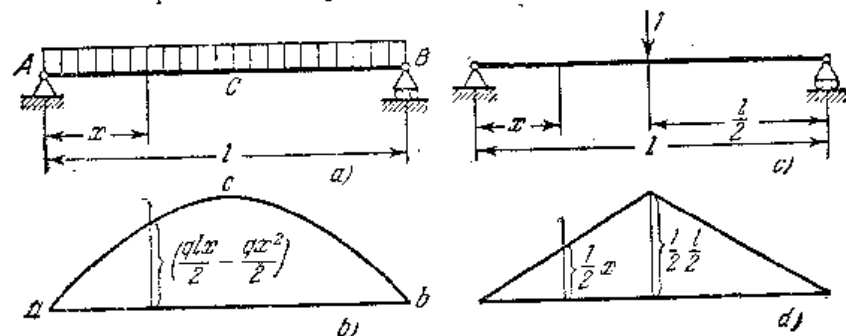


Рис. 276.

Кастилиано. В предыдущих случаях действовали сосредоточенные силы и пары сил, и частные производные по этим силам и парам сил давали соответствующие перемещения и углы поворота. Однако в случае равномерно распределенной нагрузки нет вертикальной силы, которая действует в середине балки и которая соответствовала бы искомому прогибу в середине. Таким образом, мы не можем поступить так же, как в предыдущей задаче. Однако это затруднение можно легко устранить, если предположить, что в середине балки имеется фиктивная нагрузка P бесконечно малой величины. Такая сила, очевидно, не окажет влияния на прогиб или эпюру изгибающих моментов, показанную на рис. 276, б. В то же самое время скорость увеличения изгибающего момента вследствие увеличения P , выраженная частной производной $\frac{\partial M}{\partial P}$, представлена на рис. 276, с и 276, д. При этих значениях M и $\frac{\partial M}{\partial P}$ величина прогиба будет

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Замечая, что M и $\frac{\partial M}{\partial P}$ симметричны относительно середины пролета,

получаем

$$\delta = \frac{2}{EJ_z} \int_0^{l/2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EJ_z} \int_0^{l/2} \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Если требуется вычислить угол поворота конца *B* балки на рис. 276, *a* при помощи теоремы Кастилиано, мы должны лишь предположить бесконечно малую пару сил *M_b*, приложенную в *B*. Такая пара не изменит эпюры изгибающих моментов на рис. 276, *b*.

Тогда частная производная $\frac{\partial M}{\partial M_b}$ будет представлена на рис. 277, *a* и 277, *b*. Требуемый угол поворота конца *B* балки будет

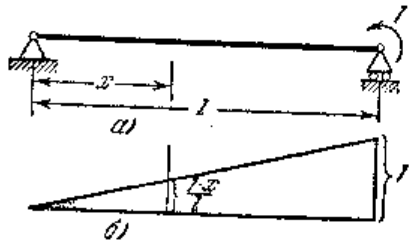


Рис. 277.

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{l} dx = \frac{ql^3}{24EJ_z}$$

Мы видим, что результаты, полученные при помощи теоремы Кастилиано, совпадают с ранее полученными результатами (стр. 126).

ЗАДАЧИ

1. Определить при помощи теоремы Кастилиано прогиб и угол поворота конца равномерно нагруженной консоли.
2. Определить прогиб конца *B* одноконсольной балки, показанной на рис. 278.

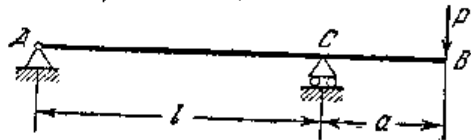


Рис. 278.

3. Какое горизонтальное перемещение опоры *B* рамы, показанной на рис. 279, будет вызвано горизонтальными силами *H*?

Ответ. $\delta_h = \frac{2}{3} \frac{Hh^3}{EJ_1} + \frac{Hh^2 l}{EJ}$

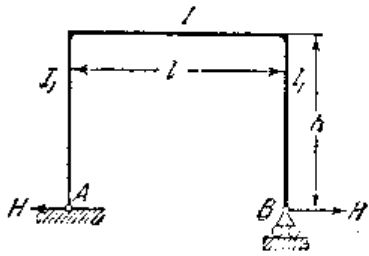


Рис. 279.

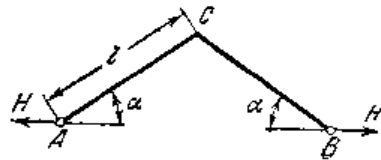


Рис. 280.

4. Определить увеличение расстояния *AB*, вызываемое силами *H* (рис. 280), если стержни *AC* и *BC* имеют одинаковые размеры, причем необходимо принять во

внимание лишь изгиб стержней. Угол α предполагается не очень малым, так что влиянием прогибов на величину изгибающего момента можно пренебречь.

Ответ. $\delta = \frac{2}{3} \frac{Hl^3 \sin^2 \alpha}{EJ}$

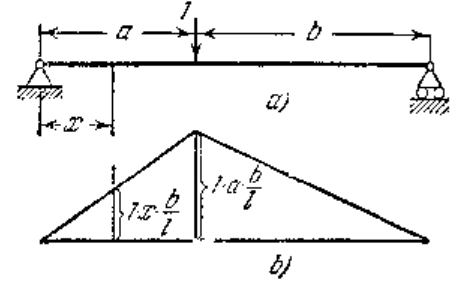


Рис. 281.

5. Определить прогиб на расстоянии *a* от левого конца равномерно нагруженной балки, показанной на рис. 276, *a*.

Решение. Прикладывая бесконечно малую нагрузку *P* на расстоянии *a* от левого конца, находим частную производную $\frac{\partial M}{\partial P}$, которая изображена на рис. 281, *a*

и 281, *b*. Пользуясь для *M* параболической эпюрой, представленной на рис. 276, *b*, получаем требуемый прогиб

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^a \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{xb}{l} dx + \frac{1}{EJ} \int_a^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{a(l-x)}{l} dx = \frac{qab}{24EJ} (a^2 + b^2 + 3ab)$$

Подставляя *x* вместо *a* и *l*—*x* вместо *b*, мы можем этот результат привести к согласованию с ранее полученным уравнением изогнутой оси балки (стр. 126).

73. Деформация ферм

Теорема Кастилиано особенно полезна при определении деформаций в фермах. В качестве примера рассмотрим случай, показанный на рис. 282. Все стержни системы пронумерованы, и их длины и площади поперечных сечений даны в таблице 5. Усилие *S_i*, вызванное в каком-либо стержне *i* системы силами *P₁*, *P₂*, *P₃*, можно вычислить из обычных уравнений статики. Эти усилия даны в 4-м столбце таблицы 5. Потенциальная энергия деформации какого-либо стержня, по формуле (171), равняется $S_i^2 l_i / 2F_i E$. Тогда количество потенциальной энергии во всей системе будет

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2F_i E} \tag{199}$$

где суммирование распространяется на все стержни системы, которых в нашем случае имеется *m*=11. Усилия *S_i* являются функциями нагрузок *P* и, следовательно, на основании уравнения (197), прогиб δ_n под какой-либо нагрузкой *P_n* равняется

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial P_n} \tag{200}$$

Производная $\frac{\partial S_i}{\partial P_n}$ представляет скорость увеличения усилия S_i с увеличением нагрузки P_n . Численно она равняется усилию, вызываемому в стержне i нагрузкой, равной единице и приложенной в положении P_n , и мы будем пользоваться этим обстоятельством при нахождении указанной производной. В дальнейшем эти производные будем обозначать через S'_i . Тогда уравнение для вычисления деформации будет

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{F_i E} \quad (201)$$

Рассмотрим, например, деформацию δ_2 , соответствующую силе P_2 в точке A на рис. 282,а. Значения S'_i , помещенные в 5-м столбце таблицы, получены при помощи статики при нагруженном состоянии, показанном на рис. 282,б, в котором отброшены все действующие силы и приложена в шарнире A вертикальная сила в 1 тонну. Значения, помещенные в 6-м столбце таблицы, вычислены из значений, входящих в столбцы 2—5. Суммирование и деление на модуль упругости $E = (2/1000) \cdot 10^6 \text{ м/см}^2$

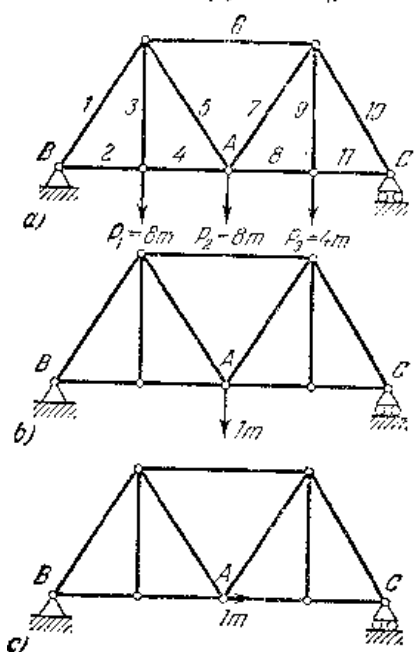


Рис. 282.

Данные для фермы, показанной на рис. 282

Таблица 5

i	$l_i, \text{см}$	$F_i, \text{см}^2$	$S_i, \text{м}$	S'_i	$\frac{S_i S'_i l_i}{F_i}$	S''_i
1	500	30	-13,75	-0,625	143	0
2	300	15	+ 8,25	+0,375	62	1
3	400	10	+ 8,00	0	0	0
4	300	15	+ 8,25	+0,375	62	1
5	500	10	+ 3,75	+0,625	117	0
6	500	20	-10,50	-0,750	24	0
7	500	10	+ 6,25	+0,625	195	0
8	300	15	+ 6,75	+0,375	51	0
9	400	10	+ 4,00	0	0	0
10	500	30	-11,25	-0,625	117	0
11	300	15	+ 6,75	+0,375	51	0

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{F_i} = 822 \text{ м/см.}$$

дает деформацию в A (уравнение (201))

$$\delta_2 = \frac{822 \cdot 1000}{2 \cdot 10^6} = 0,411 \text{ см.}$$

Предыдущие рассуждения относились к вычислению перемещений $\delta_1, \delta_2, \dots$, соответствующих заданным внешним силам P_1, P_2, \dots . При исследовании деформации упругой системы бывает необходимо вычислить перемещение точки, в которой совсем нет нагрузки, или перемещение нагруженной точки в направлении, отличном от направления нагрузки. Метод Кастилиано можно применить также и здесь. Мы только приложим в этой точке дополнительную бесконечно малую воображаемую нагрузку Q в том направлении, в котором желательно получить перемещение и вычислить производную $\frac{\partial U}{\partial Q}$. В этой производной необходимо дополнительную нагрузку Q положить равной нулю и затем определить желаемое перемещение. Например, в ферме, показанной на рис. 282, а, определим перемещение точки A . В этой точке прикладываем горизонтальную силу Q и получаем соответствующее горизонтальное перемещение

$$\delta_n = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q} \quad (a)$$

где суммирование распространено на все стержни системы. Усилия S_i в уравнении (а) имеют то же значение, что и прежде, так как дополнительная нагрузка Q равна нулю, а производные $\frac{\partial S_i}{\partial Q} = S'_i$ получаются как усилия в стержнях фермы, вызываемые нагрузкой, показанной на рис. 282, с. Эти значения помещены в 7-м столбце таблицы. Подставляя эти усилия в уравнение (а), мы находим, что горизонтальное перемещение A равно сумме удлинений 2 и 4 стержней, а именно:

$$\delta_n = \frac{1}{E} \left(\frac{S_2 l_2}{F_2} + \frac{S_4 l_4}{F_4} \right) = \frac{1000}{2 \cdot 10^6} \left(\frac{8,25 \cdot 300}{15} + \frac{8,25 \cdot 300}{15} \right) = 0,165 \text{ см.}$$

При исследовании деформации ферм иногда бывает необходимо знать изменение расстояния между двумя точками системы. Это можно получить при помощи метода Кастилиано. Определим, например, какое увеличение δ в расстоянии между узлами A и B (рис. 283, а) будет вызвано силами P_1, P_2, P_3 . Приложим в этих узлах две равные и противоположные воображаемые силы Q , как указано на рисунке. Из теоремы Кастилиано следует, что частная производная $\left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$ дает укорочение расстояния AB , вызываемое нагрузками P_1, P_2, P_3 . Пользуясь уравнением (197), находим, что это перемещение

равняется ¹⁾

$$\delta = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q_i} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{F_i E} S'_i \quad (202)$$

где S_i — усилия, вызываемые в стержнях системы действующими силами P_1, P_2, P_3 ; S'_i — величины, определяемые из нагруженного состояния, показанного на рис. 283, б, в котором отброшены все действующие силы, а в А и в В приложены две противоположные силы, равные единице, и m — число стержней.

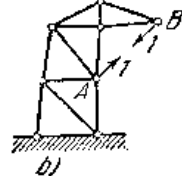
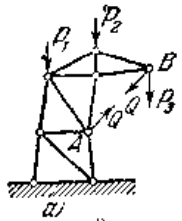


Рис. 283.

ЗАДАЧИ

1. Система, состоящая из двух призматических стержней одинаковой длины и одинакового поперечного сечения (рис. 284), несет вертикальную нагрузку P . Определить вертикальное перемещение шарнира А.

Решение. Растягивающее усилие в стержне АВ и сжимающее усилие в стержне АС равны P . Следовательно, потенциальная энергия системы равняется

$$U = 2 \frac{P^2 l}{2FE}$$

Вертикальное перемещение А равняется

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl}{FE}$$

2. Определить горизонтальное перемещение шарнира А в предыдущей задаче.

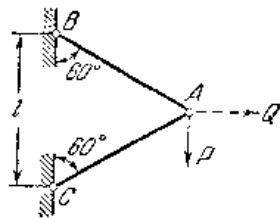


Рис. 284.

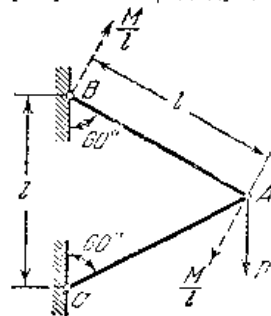


Рис. 285.

Решение. Прикладываем горизонтальную воображаемую нагрузку Q , как указано на рис. 284 пунктирной линией. Тогда потенциальная энергия системы будет

$$U = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)^2 l}{2FE} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}} \right)^2 l}{2FE}$$

¹⁾ Эта задача впервые была решена J. C. Maxwell'ом «On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames», Phil. Mag., т. 27, стр. 294, 1864; или Scientific Papers, Cambridge, т. 1, стр. 598, 1890.

Производная от этого выражения по Q при $Q=0$ даст горизонтальное перемещение

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \left(\frac{2Ql}{3FE} \right)_{Q=0} = 0.$$

3. Определить угловое перемещение стержня АВ, вызываемое нагрузкой P (рис. 285).

Решение. Приложим к системе воображаемую пару сил M , как показано на рисунке пунктирными линиями. Перемещение, соответствующее этой паре сил, есть угловое перемещение φ стержня АВ от нагрузки P . Усилия в стержнях

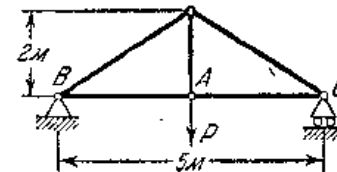


Рис. 286.

будут: $P + \frac{M}{\sqrt{3}l}$ в стержне АВ и $P - \frac{2M}{\sqrt{3}l}$ в стержне АС. Потенциальная энергия равняется

$$U = \frac{l}{2FE} \left[\left(P + \frac{M}{\sqrt{3}l} \right)^2 + \left(P - \frac{2M}{\sqrt{3}l} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \left(\frac{P\sqrt{3}}{FE} + \frac{5M}{3FE} \right)_{M=0} = \frac{P\sqrt{3}}{FE}.$$

4. Определить вертикальное перемещение точки А и горизонтальное перемещение точки С стальной фермы, показанной на рис. 286, если $P=1000$ кг, площади поперечных сечений сжатых стержней равны 30 см^2 , а растянутых — 12 см^2 .

74. Приложение теоремы Кастилиано к решению статически неопределимых задач

Теорема Кастилиано весьма полезна также при решении статически неопределимых задач. Начнем с задач, в которых реакции опор рассматриваются как статически неопределимые величины. Обозначая через X, Y, Z, \dots статически неопределимые реактивные силы, можем энергию деформации системы выразить в функции этих сил. Для неподвижных опор и для опор, движение которых перпендикулярно к направлению реакций, частные производные от энергии деформации по неизвестным реактивным силам должны быть, по теореме Кастилиано, равными нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \quad \dots \quad (203)$$

Таким способом мы получаем столько уравнений, сколько имеется статически неопределимых реакций.

Можно показать, что уравнения (203) выражают условия для минимума функции U , откуда следует, что величины статически неопределимых реактивных сил таковы, что делают потенциальную

энергию системы минимумом. Это есть так называемый принцип наименьшей работы, применяемый к определению лишних реакций¹⁾.

В качестве примера на применение упомянутого принципа рассмотрим равномерно нагруженную балку, заделанную одним концом и свободно опертую другим (рис. 287). Это — задача с одной статически неопределимой реакцией. Припиная за статически неопределимую величину реакцию X правой опоры, найдем эту неизвестную силу из уравнения

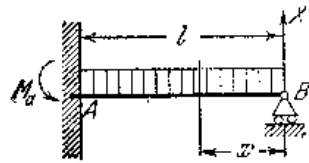


Рис. 287.

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (a)$$

Потенциальная энергия балки, по формуле (190), равняется

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ},$$

где

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}. \quad (b)$$

Подставляя в (a), получаем

$$\frac{dU}{dX} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{EJ} \left(X \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{8} \right) = 0,$$

откуда

$$X = \frac{3}{8} ql.$$

Вместо реактивной силы X за статически неопределимую величину можно было бы приять реактивную пару M_a на левом конце балки. Тогда энергия деформации была бы функцией M_a . Уравнение (b) сохраняется, но изгибающий момент в каком-либо сечении будет

$$M = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2}.$$

Исходя из условия, что левый конец балки при ее изгибе не поворачивается, производная от энергии деформации по M_a должна

¹⁾ Принцип наименьшей работы впервые был установлен Р. Менабреа в его статье «Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques», Compt. rend., т. 46, стр. 1056, 1858; см. там же, т. 98, стр. 714, 1884. Полное доказательство принципа было дано Кастилиано, который сделал этот принцип основным методом решения статически неопределимых систем. Применение метода потенциальной энергии в технике было разработано О. Мохром (см. его Abhandlungen, цитиров.), Г. Мюллер-Бреслау в его книге «Die neuen Methoden der Festigkeitslehre» и Г. Энгессером «Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme», Zeitg. Bauverwalt., стр. 606, 1907. Очень полная библиография этого предмета приведена в статье М. Grüning «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft», том 4, стр. 419.

равняться нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dM_a} &= \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} dx = -\frac{1}{EJ} \int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx = \\ &= -\frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{24} - \frac{M_a l^3}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем абсолютное значение момента

$$M_a = \frac{1}{8} ql^2.$$

Задачи, в которых за статически неопределимые величины мы принимаем усилия, действующие в лишних стержнях системы, также можно решать при помощи теоремы Кастилиано. Возьмем, например, систему, представленную на рис. 18, которая была рассмотрена ранее (см. стр. 26). Припиная за статически неопределимую величину усилие X в вертикальном стержне, найдем, что усилия в наклонных стержнях OB и OD будут равны $\frac{P-X}{2 \cos \alpha}$.

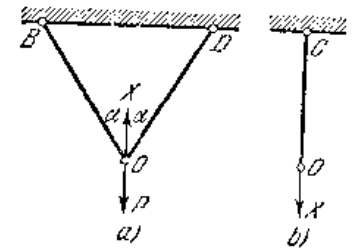


Рис. 288.

Обозначая через U_1 энергию деформации наклонных стержней (рис. 288, a) и через U_2 энергию деформации вертикального стержня (рис. 288, b), получим полную энергию деформации системы¹⁾

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{P-X}{2 \cos \alpha} \right)^2 \frac{l}{FE \cos \alpha} + \frac{X^2 l}{2FE}. \quad (c)$$

Если δ есть действительно перемещение вниз узла O на рис. 18, то производная по X от энергии U_1 системы, представленной на рис. 288, a, должна быть равна $-\delta$, так как усилие X системы имеет направление, противоположное направлению перемещения δ . Также производная $\frac{\partial U_2}{\partial X}$ будет равна δ , поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0. \quad (d)$$

Видно, что истинное значение усилия X в лишнем стержне таково, что делает полную энергию деформации системы минимумом. Подставляя в уравнение (d) вместо U его выражение (c), получаем

$$-\frac{P-X}{2 \cos^2 \alpha} \frac{l}{FE \cos \alpha} + \frac{Xl}{FE} = 0.$$

¹⁾ Предполагается, что все стержни имеют одну и ту же площадь поперечного сечения и один и тот же модуль упругости E .

откуда

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Подобные рассуждения можно применить к любой статически неопределимой системе с одним лишним стержнем, и мы можем утверждать, что усилие в этом стержне таково, что обращает энергию деформации системы в минимум. Чтобы проиллюстрировать способ вычисления усилий в таких системах, рассмотрим раму, показанную на рис. 289, а. Реакции здесь статически определимы, но когда мы попробуем определить усилия в стержнях, то найдем, что имеется один лишний стержень. Примем стержень CD за лишний. Разрезаем этот

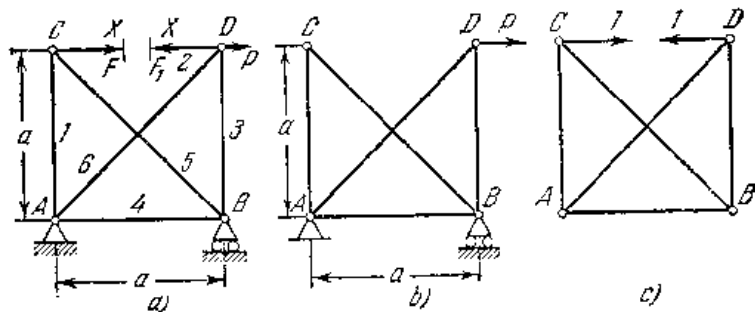


Рис. 289.

стержень в какой-либо точке и прикладываем к каждому концу F и F_1 силу X , равную усилию в стержне.

Таким образом, мы приходим к статически определимой системе, подверженной действию известной силы P и, кроме того, неизвестных сил X . Усилия в стержнях этой системы будут найдены в два этапа: 1) усилия, вызываемые внешней нагрузкой P , когда отсутствует X (рис. 289, б), и обозначаемые через S_i^0 , где i указывает номер стержня; 2) усилия, возникающие в том случае, когда внешняя сила P отброшена и силы, равные единице, заменяют силы X (рис. 289, в). Последние усилия обозначаются через S_i^1 . Тогда полное усилие в каком-либо стержне при одновременном действии силы P и сил X равняется

$$S_i = S_i^0 + S_i^1 X. \quad (e)$$

Полная потенциальная энергия системы по формуле (199) равняется

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0{}^2 l_i}{2F_i E} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i^1 X)^2 l_i}{2F_i E}, \quad (f)$$

где суммирование распространяется на все стержни системы, вклю-

чая и разрезанный стержень CD ¹⁾. Применим теперь теорему Кастиллано, согласно которой производная от U по X дает перемещение концов F и F_1 по направлению одного к другому. В действительности же стержень является неразрезанным, и это перемещение равняется нулю. Отсюда

$$\frac{dU}{dX} = 0, \quad (g)$$

т. е. усилие X в лишнем стержне таково, что обращает потенциальную энергию системы в минимум. Из уравнений (f) и (g) получаем

$$\frac{d}{dX} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i^1 X)^2 l_i}{2F_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i^1 X) l_i S_i^1}{F_i E} = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{F_i E}}{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^1{}^2 l_i}{F_i E}}. \quad (204)$$

Этот способ можно распространить на систему, в которой имеется несколько лишних стержней.

Принцип наименьшей работы также можно применять в тех случаях, когда статически неизвестными величинами являются пары сил. Возьмем в качестве примера равномерно нагруженную балку на трех опорах (рис. 290).

Если за статически неопределимую величину принять изгибающий момент над средней опорой, то, разрезав балку в B , получаем две свободно лежащие на опорах балки (рис. 290, б), нагруженные неизвестными парами сил M_b , кроме известной равномерной нагрузки q . Так как в действительности изогнутая ось балки непрерывна, то никакого поворота конца B' балки $A'B'$ относительно конца B'' балки $B''C'$ нет. Отсюда

$$\frac{dU}{dM_b} = 0. \quad (205)$$

Опять значение статически неопределимой величины таково, что обращает потенциальную энергию системы в минимум.

¹⁾ Для этого стержня $S_i^0 = 0$ и $S_i^1 = 1$.

ЗАДАЧИ

1. Вертикальный груз P удерживается вертикальным стержнем DB длиной l и с площадью поперечного сечения F и двумя одинаково наклонными стержнями длиной l и с площадью поперечного сечения F_1 (рис. 291). Определить усилия в стержнях, а также отношение F_1/F , при котором усилия во всех трех стержнях будут численно равны между собой.

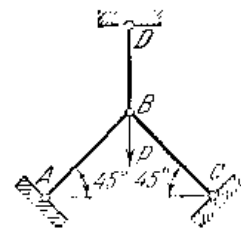


Рис. 291.

Решение. Система является статически неопределимой. Пусть X будет растягивающее усилие в вертикальном стержне. Тогда сжимающие усилия в наклонных будут $\frac{P-X}{\sqrt{2}}$ и потенциальная энергия системы равняется

$$U = \frac{X^2 l}{2FE} + \frac{(P-X)^2 l}{2F_1 E}.$$

Принцип наименьшей работы даст

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{FE} - \frac{(P-X)l}{F_1 E} = 0,$$

откуда

$$X = \frac{P}{1 + \frac{F_1}{F}}.$$

Подставляя это значение X в уравнение

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - X),$$

выражающее условие равенства сил во всех трех стержнях, получаем

$$F_1 = \sqrt{2}F.$$

2. Определить горизонтальную реакцию X в системе, показанной на рис. 292

Решение. Незвестная сила X войдет лишь в выражение для потенциальной энергии при изгибе части AB стержня. Для этой части $M = Pa - Xx$, и равенство наименьшей работы дает ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{d}{dX} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \\ &= -\frac{1}{EJ} \int_0^l (Pa - Xx) x dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{Pal^2}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$X = \frac{3}{2} P \frac{a}{l}.$$

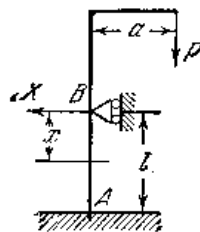


Рис. 292.

3. Определить горизонтальные реакции X системы, показанной на рис. 293. Все размеры даны в таблице 6.

Решение. Из принципа наименьшей работы имеем

$$\frac{dU}{dX} = \frac{d}{dX} \sum \frac{S_i^2 l_i}{2F_i E} = \sum \frac{S_i l_i}{F_i E} \frac{dS_i}{dX} = 0. \quad (b)$$

¹⁾ В этом случае влиянием осевой силы на изгиб стержня AB пренебрегают.

Таблица 6

Данные для фермы, показанной на рис. 293

i	l_i , см	F_i , см ²	S_i^0	S_i'	$\frac{S_i^0 S_i' l_i}{F_i}$	$\frac{S_i'^2 l_i}{F_i}$
1	2	3	4	5	6	7
1	360,6	25	-1,803P	+1,202	-31,24P	20,82
2	316,2	15	+1,581P	-2,108	-70,26P	93,68
3	100,0	10	+1,000P	-1,333	-13,34P	17,78
4	360,6	25	-1,803P	+1,202	-31,24P	20,82
5	316,2	15	+1,581P	-2,108	-70,26P	93,68
					$\Sigma = -216,34P$	$\Sigma = 246,78$

Пусть S_i^0 будет усилие в стержне i , вызываемое известной нагрузкой P , при $X=0$, и пусть S_i' будет усилие, вызываемое в том же стержне силами, равными единице, которые заменяют усилия X (рис. 293, б). Значения S_i^0 и S_i' определяются из статики. Они даны в столбцах 4 и 5 таблицы 6. Тогда полное усилие в каком-либо стержне будет

$$S_i = S_i^0 + S_i' X.$$

Подставляя в уравнение (б), находим

$$\sum_{i=1}^5 \frac{(S_i^0 + S_i' X) l_i}{F_i E} - S_i' = 0,$$

откуда

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i^0 S_i' l_i}{F_i}}{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i'^2 l_i}{F_i}}.$$

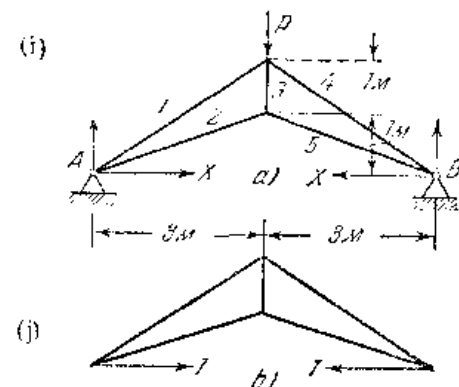


Рис. 293.

Необходимые числовые значения для вычисления X даны в столбцах 6 и 7 таблицы 6. Подставляя эти данные в уравнение (г), получаем

$$X = 0,877P.$$

4. Определить усилие в лишнем горизонтальном стержне системы, показанной на рис. 294, полагая, что длина этого стержня равна b м и площадь поперечного сечения равняется F_0 . Другие стержни имеют те же размеры, что и в задаче 3.

Решение. Усилие в горизонтальном стержне (стержень номер 0) вычисляется из уравнения (204). Это уравнение подобно уравнению (г) в задаче 3, за исключением того, что в системе, показанной на рис. 294, имеется дополнительный горизонтальный стержень 0. Усилие, возникающее в этом стержне только от одной силы P ($X=0$), равняется нулю, т. е. $S_0^0 = 0$. Усилие, вызываемое двумя силами, равными единице (рис. 294, б), равняется $S_0' = 1$. Дополнительный член в числителе уравнения (г) будет

$$\frac{S_0^0 S_0' l_0}{F_0} = 0.$$

Дополнительный член в знаменателе будет

$$\frac{S_0^2 l_0}{F_0} = \frac{11_0}{F_0} = \frac{600}{F_0}$$

Тогда, пользуясь данными задачи 3, получаем

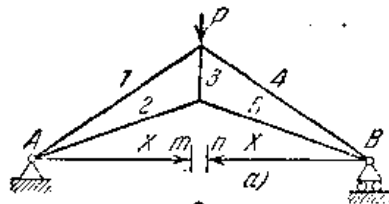


Рис. 291.

$$X = \frac{216,34P}{\frac{600}{F_0} + 246,78}$$

Взяв, например $F_0 = 50 \text{ см}^2$, найдем

$$X = \frac{216,34P}{12 + 246,78} = 0,836P.$$

т. е. лишь на 4,7% меньше значения, полученного в задаче 3 для неподвижных опор¹⁾.
Взяв площадь поперечного сечения $F_0 = 5 \text{ см}^2$, получим

$$X = \frac{216,34P}{120 + 246,78} = 0,590P.$$

Отсюда видно, что в статически неопределимых системах усилия в стержнях зависят не только от приложенных нагрузок, но также и от площади поперечных сечений стержней.

5. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 23, пользуясь принципом наименьшей работы.

6. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рис. 295, полагая, что все стержни одинаковых размеров и из одного материала.

Решение. Если один стержень отбросить, то усилия в оставшихся стержнях можно определить с помощью уравнений статики. Следовательно, система имеет один лишний стержень. Пусть таковым будет стержень 1 и X — действующее в нем усилие. Тогда все стержни на сторонах шестиугольника будут иметь растягивающие усилия X , стержни 8, 9, 11 и 12 будут иметь сжимающие усилия X и стержни 7 и 10 имеют усилия $P - X$. Потенциальная энергия системы будет

$$U = 10 \frac{X^2 l}{2FE} + 2 \frac{(P - X)^2 l}{2FE}.$$

Из уравнения $\frac{dU}{dX} = 0$ получаем

$$X = \frac{P}{6}.$$

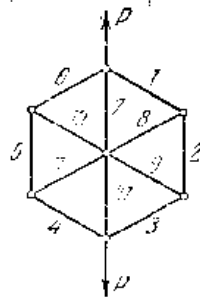


Рис. 295.

7. Определить усилия в стержнях системы, показанной на рисунке 289, полагая площади поперечных сечений всех стержней равными между собой и принимая усилие X в диагонали AD за статически неопределимую величину.

Решение. Подставляя данные, помещенные в таблице 7, в уравнение (204), находим:

$$X = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} P.$$

¹⁾ Взяв $F_0 = \infty$, мы получим те же условия, как для неподвижных опор.

Таблица 7

Данные для системы, показанной на рис. 289

i	l_i	S_i^0	S_i'	$S_i^0 S_i' l_i$	$S_i'^2 l_i$
1	a	P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	P	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	a	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	+1	$-2aP$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	0	+1	0	$a\sqrt{2}$

$$\sum S_i^0 S_i' l_i = \frac{-(3 + 2\sqrt{2})aP}{\sqrt{2}}; \quad \sum S_i'^2 l_i = 2a(1 + \sqrt{2})$$

8. Прямоугольная рама одинакового поперечного сечения (рис. 296) испытывает равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q , как показано на рисунке. Определить изгибающие моменты в углах.

Ответ. $M = \frac{(a^2 + b^2) q}{12(a + b)}$

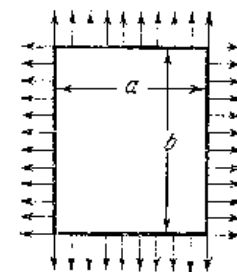


Рис. 296.

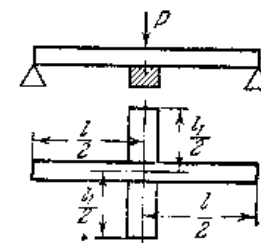


Рис. 297.

9. Нагрузка P поддерживается двумя балками одинакового поперечного сечения, пересекающимися одна другую, как показано на рис. 297. Определить давление X между балками.

Ответ. $X = \frac{Pl^2}{l^2 + l_1^2}$

10. Найти статически неопределимую величину H в раме, показанной на рис. 170, стр. 168, пользуясь принципом наименьшей работы.

Решение. Энергия деформации изгиба рамы равняется

$$U = 2 \int_0^h \frac{H^2 x^2 dx}{2EJ_1} + \int_0^l \frac{(M_0 - Hh)^2 dx}{2EJ} \quad (k)$$

где M_0 означает изгибающий момент, изменяющийся по длине горизонтального стержня AB и найденный как для балки, свободно лежащей на опорах. Подставляя в уравнение

$$\frac{dU}{dH} = 0, \quad (l)$$

находим

$$\frac{2H}{EJ_1} \frac{h^3}{3} + \frac{Hh^2 l}{EJ} = \frac{h}{EJ} \int_0^l M_0 dx. \quad (m)$$

Интеграл правой части представляет площадь треугольной эпюры моментов для балки, нагруженной силой P . Следовательно,

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{1}{2} P c (l - c).$$

Подставляя в уравнение (m), мы получаем для H то же выражение, как в уравнении (114).

11. Найти статически неопределимые величины в рамах, показанных на рис. 169, 172 и 174, пользуясь принципом наименьшей работы.

12. Найти изгибающий момент M_B в балке, показанной на рис. 290, полагая $l_1 = 2l_2$.

75. Теорема о взаимности работ и перемещений

Начнем с задачи о балке, свободно лежащей на двух опорах и показанной на рис. 298, а, и определим прогиб в точке D , когда нагрузка P действует в точке C . Этот прогиб получится подстановкой в уравнение (86) $x=d$, что дает

$$(y)_{x=d} = \frac{Pbd}{6l} (l^2 - b^2 - d^2).$$

Отсюда видно, что это выражение не изменится, если мы подставим d вместо b и b вместо d , что указывает на то, что для случая, показанного на рис. 298, б, прогиб в D_1 тот же, что прогиб в D на рис. 298, а. Из рис. 298, б мы получаем рис. 298, с простым поворотом балки на 180° ,

что приводит точку C_1 к совпадению с точкой D и точку D_1 к совпадению с точкой C . Следовательно, прогиб в C на рис. 298, с равен

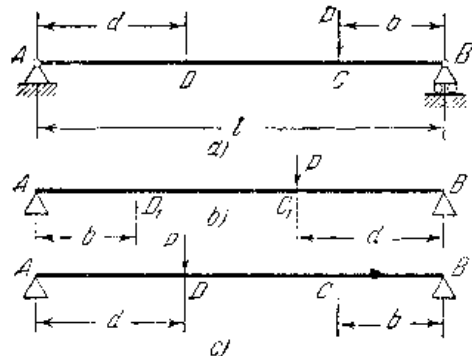


Рис. 298.

прогибу в D на рис. 298, а. Это значит, что если груз P переместится из точки C в точку D , то прогиб, измеренный в D в первом случае нагружения, получится такой же в точке C во втором случае. Это есть частный случай *теоремы о взаимности перемещений*.

Чтобы вывести теорему в общем виде¹⁾, рассмотрим упругое тело, показанное на рис. 299, нагруженное двумя различными способами и омертое таким образом, что его перемещение как твердого тела невозможно. В первом напряженном состоянии приложенные силы будут P_1 и P_2 , а во втором состоянии P_3 и P_4 . Перемещения точек приложения в направлении сил в первом состоянии будут $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ и во втором состоянии $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$. Теорема о взаимности работ формулируется так: работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равна работе, произведенной силами второго состояния на соответствующих перемещениях первого состояния. Символически это выразится так:

$$P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2 = P_3 \delta_3 + P_4 \delta_4. \quad (206)$$

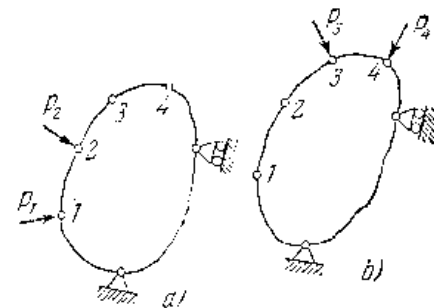


Рис. 299.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим энергию деформации тела, когда все силы P_1, \dots, P_4 действуют одновременно, и воспользуемся тем обстоятельством, что количество энергии деформации не зависит от порядка, в каком были приложены силы, но зависит лишь от конечных значений сил. При первом способе нагружения предположим, что сначала были приложены силы P_1 и P_2 , а затем P_3 и P_4 . Потенциальная энергия, накопленная при приложении P_1 и P_2 , равняется

$$\frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2}. \quad (a)$$

Работа, произведенная силами P_3 и P_4 при их приложении, равняется

$$\frac{P_3 \delta'_3}{2} + \frac{P_4 \delta'_4}{2}. \quad (b)$$

Однако необходимо заметить, что при приложении P_3 и P_4 точки

¹⁾ Частный случай этой теоремы был получен J. C. Maxwell'ом (цитиров. на стр. 286). Теорема принадлежит E. Betti, Nuovo cimento, сер. 2, тт. 7 и 8, 1872. В более общем виде теорема была дана Lord'ом Rayleigh'ем, Proc. London Math. Soc., т. 4, 1873; или Scientific Papers, т. 1, стр. 179. Различные применения этой теоремы к решению технических задач были сделаны O. Mohr'ом и H. Müller-Breslau (цитиров. на стр. 288).

приложения ранее приложенных сил P_1 и P_2 переместятся на δ'_1 и δ'_2 . Тогда P_1 и P_2 совершат работу

$$P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2. \quad (c)$$

Следовательно, суммируя (a), (b) и (c), найдем полную потенциальную энергию, накопленную в теле

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_1 \delta'_1}{2} + \frac{P_2 \delta'_2}{2} + P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2. \quad (d)$$

При втором способе нагружения приложим сначала силы P_3 и P_4 , а затем P_1 и P_2 . Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем:

$$U = \frac{P_3 \delta_3}{2} + \frac{P_4 \delta_4}{2} + \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + P_3 \delta_3 + P_4 \delta_4. \quad (e)$$

Замечая, что выражения (d) и (e) должны представлять одно и то же количество потенциальной энергии, получаем уравнение (206), представляющее теорему о взаимности работ. Эта теорема может быть доказана для какого угодно числа сил, а также и для пар или для сил и пар. В случае пары за перемещение принимается соответствующий угол поворота.

Для того частного случая, когда в первом напряженном состоянии действует одна сила P_1 , а во втором состоянии одна сила P_2 , уравнение (206) становится ¹⁾

$$P_1 \delta'_1 = P_2 \delta_2. \quad (207)$$

Если $P_1 = P_2$, то $\delta'_1 = \delta_2$, т. е. перемещение точки приложения силы P_2 в направлении этой силы, вызываемое силой P_1 , равно перемещению точки приложения силы P_1 в направлении P_1 , вызываемое силой P_2 . Подтверждение этого заключения уже было дано для частного случая балки, показанной на рис. 298.

В качестве другого примера рассмотрим изгиб балки, свободно лежащей на двух опорах. Пусть в первом состоянии она изгибается силой P в середине, а во втором состоянии изгибается парой M на конце. Сила P вызовет угол наклона на конце $\theta = \frac{P l^2}{16 E J}$. Пара M , приложенная на конце, вызовет прогиб в середине $\delta = \frac{M l^2}{16 E J}$. Уравнение (207) принимает вид

$$P \frac{M l^2}{16 E J} = M \frac{P l^2}{16 E J}.$$

¹⁾ Эти выражения не разделены на 2, так как силы P_1 и P_2 остаются постоянными в то время, когда их точки приложения перемещаются на δ'_1 и δ'_2 .

²⁾ Это было доказано впервые J. C. Maxwell'ом и часто называется *теоремой Maxwell'a*.

Теорема о взаимности работ и перемещений весьма полезна в задачах о нахождении наиболее неблагоприятного положения подвижной нагрузки в статически неопределимых конструкциях. Примером является рис. 300, который изображает балку с одним заделанным концом и со свободно опертым другим и несущую сосредоточенный груз P . Задача заключается в том, чтобы найти изменение величины реакции X левой опоры при изменении расстояния x груза от этой опоры. Примем *действительное состояние* балки (рис. 300, a) за первое состояние нагружения. Второе, или *фиктивное*, состояние показано на рис. 300, b. Внешняя нагрузка и лишняя опора отброшены и вместо неизвестной реакции X приложена направленная вверх сила, равная единице. Это второе состояние нагружения является статически определимым, и соответствующая изогнутая ось балки может быть определена (см. уравнение (97), стр. 134). Если оси координат приняты, как показано на рис. 300, b, то

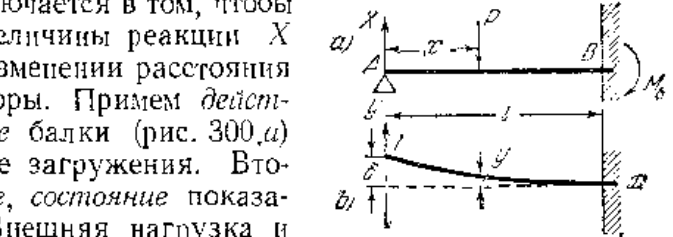


Рис. 300.

$$y = \frac{1}{6 E J} (l - x)^2 (2l + x). \quad (f)$$

Пусть δ означает прогиб на конце и y — прогиб на расстоянии x от левой опоры. Тогда, применяя теорему о взаимности работ, находим, что работа, совершенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равняется

$$X \delta - P y.$$

При вычислении же работы, совершенной силами второго состояния, заметим, что на конце имеется лишь сила, равная единице ¹⁾, а соответствующее перемещение точки A в первом состоянии равно нулю. Следовательно, эта работа равняется нулю и теорема о взаимности работ дает

$$X \delta - P y = 0,$$

откуда

$$X = P \frac{y}{\delta}. \quad (g)$$

Видно, что при изменении грузом P своего положения на балке (рис. 300, a) реакция X пропорциональна соответствующим значениям y на рис. 300, b. Следовательно, изогнутая ось балки второго

¹⁾ Реакции в заделанном конце не рассматриваются ни в том, ни в другом случае, так как соответствующее перемещение равно нулю и соответствующая работа равна нулю.

состояния (уравнение (1)) дает полную картину того, как изменяется X в зависимости от x . Такая линия называется *инфлюэнтной линией* или *линией влияния* для реакции X ¹⁾.

Если на балку, показанную на рис. 300, *a*, одновременно действует несколько грузов, то при помощи уравнения (g) совместно с принципом сложения действия сил находим

$$X = \frac{1}{\delta} \sum P_n y_n$$

где y_n есть ордината инфлюэнтной линии, соответствующая точке приложения груза P_n , и где суммирование распространено на все грузы.

ЗАДАЧИ

1. Построить линии влияния для опорных реакций балки, лежащей на трех опорах (рис. 301).

Решение. Чтобы получить линию влияния для реакции средней опоры, принимаем действительное состояние загрузки, показанное на рис. 301, *a*, за первое состояние. Второе состояние указано на рис. 301, *b*, в котором груз P отброшен и реакция X средней опоры заменена силой, равной единице и направленной вверх. Второе состояние загрузки является статически определенным, и изогнутая ось балки — известна (уравнение (86) и (87), стр. 129), следовательно прогибы δ и y могут быть вычислены. Тогда работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния равняется

$$X\delta - Py.$$

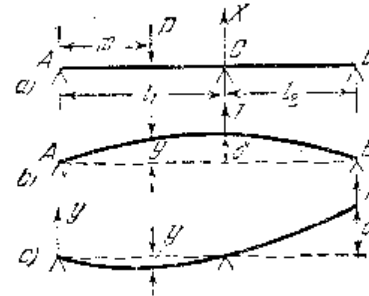


Рис. 301.

Работа сил второго состояния (сила, равная единице) на соответствующих перемещениях первого состояния (прогиб в C равен нулю) равна нулю. Отсюда

$$X\delta - Py = 0, \quad X = P \frac{y}{\delta}.$$

Следовательно, изогнутая ось балки второго состояния дает форму линии влияния для реакции X . Для того чтобы получить линию влияния для

реакции опоры B , необходимо за второе состояние загрузки принять состояние,

2. Пользуясь линией влияния предыдущей задачи, определить реакцию B , если груз P находится в середине первого пролета ($x = l_1/2$) (рис. 301, *a*).

Ответ. Реакция направлена вниз и равна

$$\frac{3P}{16} \frac{l_1^2}{l_1^2 + l_2 l_1}$$

3. Найти линию влияния для изгибающего момента над средней опорой C балки, лежащей на трех опорах (рис. 302). Пользуясь этой линией влияния, вычислить изгибающий момент M_C , когда груз P находится в середине второго пролета.

Решение. Первым состоянием загрузки является действительное состояние (рис. 302, *a*) с изгибающим моментом M_C , действующим в сечении C . Для получения

второго состояния груз P отброшен, балка разрезана в сечении C и две пары, равные единице и направленные в противоположные стороны, заменяют M_C (рис. 302, *b*). Этот случай является статически определенным. Углы θ_1 и θ_2 определяются уравнением (104) и прогиб y — уравнением (105). Сумма углов θ_1 и θ_2 представляет перемещение во втором состоянии, соответствующее изгибающему моменту M_C , действующему в первом состоянии. Работа, произведенная силами первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния, равняется¹⁾

$$M_C(\theta_1 + \theta_2) - Py.$$

Работа, произведенная силами второго состояния на перемещениях первого состояния, равна нулю, так как в действительности никакого разреза на опоре C не существует и перемещение, соответствующее двум парам, равным единице, второго состояния, равно нулю. Отсюда

$$M_C(\theta_1 + \theta_2) - Py = 0$$

и

$$M_C = P \frac{y}{\theta_1 + \theta_2}.$$

(h)

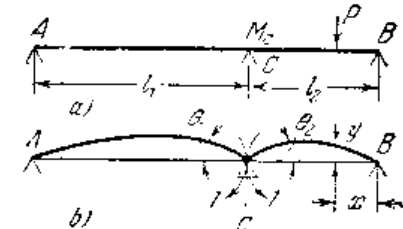


Рис. 302.

Таким образом, когда груз P изменяет свое положение, изгибающий момент M_C изменяется в том же отношении, как и прогиб y . Следовательно, изогнутая ось балки второго состояния представляет форму линии влияния для M_C . Замечая, что

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{l_1 + l_2}{3EI},$$

и что прогиб в середине второго пролета равняется

$$(y)_{x=\frac{l_2}{2}} = \frac{1 \cdot l_2^2}{16EI},$$

находим, что при приложении груза P в середине второго пролета изгибающий момент на основании уравнения (h) равен

$$M_C = \frac{3}{16} \frac{Pl_2^2}{l_1 + l_2}.$$

Положительный знак, полученный для M_C , показывает, что момент имеет направление, указанное на рис. 302, *b*. Следуя нашему общему правилу для знаков моментов (рис. 63), мы в этом случае рассматриваем M_C как отрицательный момент.

4. Найти линию влияния для изгибающего момента в заданном конце B балки AB (рис. 300) и вычислить этот момент, когда груз находится на расстоянии $x = l/3$ от левой опоры.

$$\text{Ответ. } M_B = -\frac{4}{27} Pl.$$

5. Построить линию влияния для горизонтальных реакций H рамы, показанной на рис. 170, *a*, когда груз P движется по стержню AB .

Ответ. Линия влияния имеет тот же вид, что и изогнутая ось стержня AB в нагруженном состоянии, показанном на рис. 169, *a*.

¹⁾ Применение моделей при определении линий влияния было разработано G. E. Veggsom, J. Franklin Inst., 1927.

¹⁾ Предполагается, что изгибающий момент M_C вызывает изгиб оси вогнутостью вниз.

76. Исключительные случаи

При выводе и теоремы Кастigliано и теоремы о взаимности работ и перемещений предполагалось, что перемещения, возникающие при деформации, пропорциональны силам, действующим на упругую систему. Имеются случаи, в которых перемещения не пропорциональны силам, хотя материал тела может следовать закону Гука. Это бывает всегда, когда перемещения при деформации могут изменять действие внешних сил. В таких случаях потенциальная энергия системы уже не является функцией второй степени, и теорема Кастиглиано не имеет места.

Для того чтобы объяснить это обстоятельство, рассмотрим простой случай, в котором на упругую систему действует лишь одна сила P . Предположим сначала, что перемещение δ пропорционально соответствующей силе P , как изображено прямой линией OA на рис. 306, а. Тогда площадь треугольника OAB представит энергию деформации, накопленную в системе при приложении силы P . При бесконечно малом увеличении перемещения на $d\delta$ потенциальная энергия увеличится на величину, показанную на рисунке заштрихованной площадью, и мы получаем

$$dU = P d\delta. \quad (a)$$

При линейной зависимости бесконечно малый треугольник ADC подобен треугольнику OAB , поэтому

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \quad \text{или} \quad d\delta = \frac{\delta dP}{P}. \quad (b)$$

Подставляя это в уравнение (а), получаем

$$dU = P \frac{\delta dP}{P}.$$

откуда получается положение Кастиглиано:

$$\frac{dU}{dP} = \delta. \quad (c)$$

Пример, в котором теорема Кастиглиано не может быть применена, показана на рис. 307. Для одинаковых горизонтальных стержней AC и BC , прикрепленные шарнирами A , B и C , подвергаются действию вертикальной силы P в точке C . Пусть C_1 будет положение после деформации и α — угол наклона каждого стержня в его деформированном состоянии. Относительное удлинение стержней из рис. 307, а, будет

$$\epsilon = \left(\frac{l}{\cos \alpha} - l \right) : l. \quad (d)$$

Если рассматриваются лишь малые перемещения, то угол α мал и $\frac{l}{\cos \alpha} = l + \frac{\alpha^2}{2}$ приблизительно. Тогда из (d) имеем

$$\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}.$$

6. Построить линию влияния для усилия X в горизонтальном стержне CD (рис. 303, а), когда груз P движется по балке AB . Вычислить X , когда груз находится в середине. Перемещениями от удлинения и укорочения стержней пренебречь и принять во внимание лишь перемещение от изгиба балки AB .

Решение. Действительное состояние (рис. 303, а) принято за первое состояние загрузки. Во втором состоянии груз P отброшен и усилия X заменены силами, равными единице (303, б). Возникающие от этих сил давления, направленные вверх и равные $(1 \cdot h)/c$, передаются балке AB в точках F и H , и балка прогибается, как указало пунктиром. Если y есть прогиб балки в точке, соответствующей грузу P , и δ есть перемещение точек C и D по направлению одна к другой во втором состоянии, то теорема о взаимности работ дает

$$X\delta - Py = 0 \quad \text{и} \quad X = P \frac{y}{\delta}. \quad (i)$$

Следовательно, изогнутая ось балки AB во втором состоянии является требуемой линией влияния. Изгиб балки двумя симметрично

расположенными грузами разобран в задаче 1, стр. 141. Подставляя $(1 \cdot h)/c$ вместо P в полученные там формулы, находим, что прогибы балки в точке F и в середине соответственно будут равны

$$(y)_{x=c} = \frac{ch}{6EJ} (3l - 4c)$$

и

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{h}{24EJ} (3P^2 - 4c^2).$$

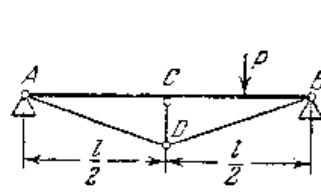


Рис. 304.

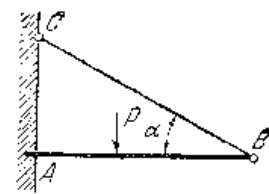


Рис. 305.

Рассматривая теперь вращение треугольника AFC (рис. 303, с), как твердого тела, находим, что горизонтальное перемещение точки C равно вертикальному перемещению точки F , умноженному на h/c . Следовательно,

$$\delta = 2 \frac{h}{c} (y)_{x=c} = \frac{h^2}{3EJ} (3l - 4c).$$

Подставляя это значение и прогиб в середине в уравнение (i), получаем

$$X = \frac{P}{8h} \frac{3l^2 - 4c^2}{3l - 4c}.$$

7. Найти линию влияния для усилия в стержне CD системы, показанной на рис. 304, пренебрегая перемещениями от укорочений и удлинений и рассматривая лишь изгиб балки AB .

Ответ. Линия будет та же, что и для средней реакции балки, лежащей на трех опорах (см. задачу 1, стр. 300).

8. Построить линию влияния усилия для стержня BC , который поддерживает балку AB . Найти усилие в BC , когда P находится в середине (рис. 305).

Ответ. Пренебрегая перемещениями от удлинения стержня BC и укорочения балки AB , находим, что усилие в BC равно $\frac{5}{16} \frac{P}{\sin \alpha}$.

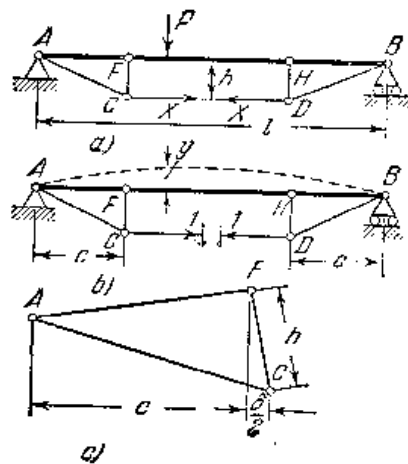


Рис. 303.

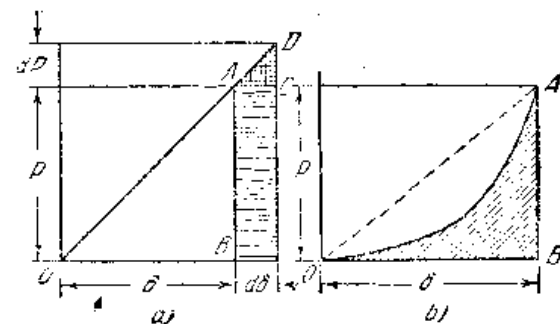


Рис. 306.

Соответствующие усилия в стержнях будут

$$T = FE\varepsilon = \frac{FE\alpha^2}{2}. \quad (e)$$

Из условия равновесия узла C_1 (рис. 307, б) следует

$$P = 2\alpha T. \quad (f)$$

и, подставляя вместо T его значение из уравнения (e), получаем $P = FE\alpha^3$, откуда

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} \quad (g)$$

$$\delta = l\alpha = l \sqrt[3]{\frac{P}{FE}}. \quad (208)$$

Рис. 307.

В этом случае перемещение не пропорционально силе P , хотя материал стержней следует закону Гука. Зависимость между δ и P изображена на рис. 306, б кривой OA . Заштрихованная площадь OAB на этом рисунке представляет потенциальную энергию, накопленную в системе. Количество потенциальной энергии равняется

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta. \quad (h)$$

Подставляя из уравнения (208)

$$P = FE \frac{\delta^3}{l^3},$$

получаем

$$U = \frac{EF}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{FE\delta^4}{4l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{FE}}. \quad (i)$$

Это показывает, что потенциальная энергия системы уже не является функцией второй степени от силы P . Также она не равна половине, а лишь четверти произведения $P\delta$ (см. § 71). Теорема Кастилиано, здесь, конечно, не имеет места

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} \right) = \frac{1}{3} l \sqrt[3]{\frac{P}{FE}} = \frac{1}{3} \delta.$$

Аналогичные результаты получаются во всех случаях, где перемещения не пропорциональны силам¹⁾.

¹⁾ Такие задачи были разобраны F. Engesser'ом, Z. Architekt. u. Ing.-Ver., 1. 35, стр. 733, 1889; см. также H. M. Westergaard, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., февраль, 1941.

ГЛАВА XII КРИВЫЕ БРУСЬЯ

77. Чистый изгиб кривых брусьев

При последующем изложении предполагается, что линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений бруса и называемая *осью бруса*, представляет собой плоскую кривую и что каждое поперечное сечение имеет ось симметрии, лежащую в плоскости этой кривой¹⁾. Брус подвергается действию сил, лежащих в указанной плоскости симметрии, так что изгиб имеет место в этой же плоскости.

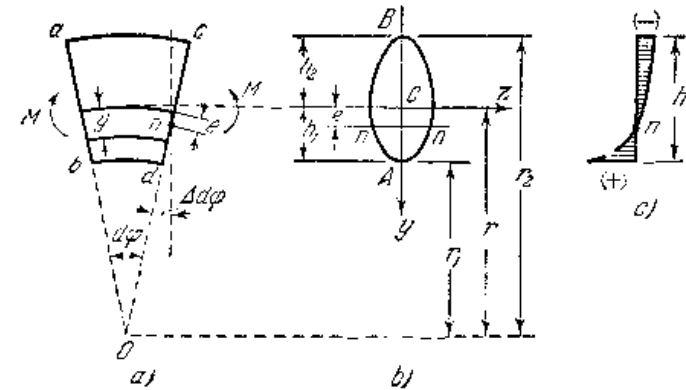


Рис. 308.

Рассмотрим сначала случай *чистого изгиба* кривого бруса постоянного поперечного сечения, т. е. случай, когда к концам бруса приложены пары сил M (рис. 308). Закон распределения напряжений для этого случая может быть получен на основании тех же предположений, которые были приняты ранее при рассмотрении изгиба призматических брусьев, а именно, что поперечные сечения бруса, первоначально плоские и нормальные к его оси, остаются такими же

¹⁾ Случай несимметричных поперечных сечений рассмотрен F. K. G. Ödqvist'ом, Publ. N° 107, Inst. f. Festigkeitslehre Königl. Tech. Hochschule, Stockholm, 1953.

и при изгибе бруса¹⁾. Пусть ab и cd будут два бесконечно близких поперечных сечения бруса (рис. 308, a) и пусть $d\varphi$ будет угол между ними до изгиба. Вследствие изгиба поперечное сечение cd поворачивается относительно ab около нейтральной оси nn на малый угол $\Delta d\varphi$. Этот угол и соответствующий момент M принимаются положительными, если при изгибе первоначальная кривизна уменьшается. При этом повороте продольные волокна на выгнутой стороне бруса сжимаются, а волокна на вогнутой стороне растягиваются. Обозначая через y расстояние волокна от оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярной плоскости изгиба, принимая направление к центру кривизны оси бруса за положительное и обозначая через e расстояние нейтральной оси nn от центра тяжести c , мы находим, что удлинение какого-либо волокна при изгибе равно $(y-e)\Delta d\varphi$ и соответствующее относительное удлинение его равняется

$$\varepsilon = \frac{(y-e)\Delta d\varphi}{(r-y)d\varphi}. \quad (a)$$

В этом выражении r означает радиус кривизны оси бруса (рис. 308, b), а знаменатель в уравнении (а) представляет первоначальную длину волокна между рассматриваемыми поперечными сечениями ab и cd .

Предполагая, что между продольными волокнами не имеется бокового давления²⁾, получаем нормальное к поперечному сечению напряжение в расстоянии y от центральной оси, равное

$$\sigma = \frac{E(y-e)\Delta d\varphi}{(r-y)d\varphi}. \quad (b)$$

Из этого видно, что распределение напряжений происходит уже не по линейному закону, как в случае изгиба призматических брусьев, а по гиперболическому закону, как показано на рис. 308, c . Из того условия, что сумма нормальных усилий, распределенных по поперечному сечению, равняется нулю в случае чистого изгиба, можно заключить, что нейтральная ось здесь перемещается от центра тяжести поперечного сечения по направлению к центру кривизны оси бруса. В случае прямоугольного поперечного сечения бруса заштрихованная площадь (рис. 308, c), соответствующая растяжению, должна равняться заштрихованной площади, соответствующей сжатию,

¹⁾ Эта приближенная теория была разработана E. Winkler'ом, *Civilingenieur.* т. 4, стр. 232, 1858; см. также его книгу «Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit», Prague, гл. 15, 1867. Подобная теория была также разработана H. Reissner'ом, *Ann. mines*, стр. 617, 1862. Дальнейшее развитие теории было сделано F. Grasshof'ом в его книге «Elastizität und Festigkeit», стр. 251, 1878; см. также J. D. Biot и P. A. G. de Saint Venant, *History of the Theory of Elasticity*, т. 2, стр. 422, 1893. Об опубликованных работах, относящихся к точному решению задачи на кривые брусья, см. «Theory of Elasticity» автора и J. N. Goodier, стр. 63, 1951.

²⁾ Точная теория показывает, что существует некоторое радиальное давление, но оно не имеет существенного влияния на нормальные напряжения от изгиба σ .

и мы сразу видим, что наибольшие напряжения возникают на вогнутой стороне. Для того чтобы напряжения в крайних растянутых и крайних сжатых волокнах были равны между собой, необходимо применять такие формы поперечных сечений, которые имеют центр тяжести ближе к вогнутой стороне бруса.

Уравнение (b) содержит две неизвестные величины: расстояние e нейтральной оси nn от центра тяжести C (рис. 308, b) и угол поворота $\Delta d\varphi$. Для определения этих величин воспользуемся двумя уравнениями статики, согласно которым сумма нормальных усилий, распределенных по поперечному сечению, равна нулю и момент этих усилий равен моменту M внешних пар. Эти уравнения представляются так:

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{(y-e)dF}{r-y} = 0, \quad (c)$$

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{(y-e)y dF}{r-y} = M. \quad (d)$$

Из первого из этих уравнений следует, что

$$\int_F \frac{y dF}{r-y} - e \int_F \frac{dF}{r-y} = 0. \quad (e)$$

Первый интеграл в левой части этого уравнения имеет размерность площади и может быть выражен в таком виде:

$$\int_F \frac{y dF}{r-y} = mF, \quad (f)$$

где m — коэффициент, определяемый для каждой частной формы поперечного сечения путем выполнения указанного интегрирования. Величина mF называется *приведенной площадью* поперечного сечения. Второй интеграл может быть преобразован следующим образом:

$$\int_F \frac{dF}{r-y} = \int_F \frac{(y+r-y)dF}{r(r-y)} = \int_F \frac{y dF}{r(r-y)} + \int_F \frac{dF}{r} = (m+1) \frac{F}{r}$$

и уравнение (e) получается в таком виде:

$$mF - (m+1) \frac{Fe}{r} = 0,$$

откуда

$$e = r \frac{m}{m+1} \quad \text{или} \quad m = \frac{e}{r-e}. \quad (209)$$

Теперь из уравнения (d), пользуясь преобразованием

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r-y} = - \int_F \left(y - \frac{ry}{r-y} \right) dF = - \int_F y dF + r \int_F \frac{y dF}{r-y} = mrF, \quad (g)$$

получаем

$$\frac{F \Delta d\varphi}{d\varphi} (mrF - meF) = M$$

и

$$\frac{E \Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{m(r-e)F} = \frac{M}{Fe}. \quad (210)$$

Подставляя это значение в выражение (b), мы получаем следующую формулу для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{m(r-e)F(r-y)} = \frac{M(y-e)}{Fe(r-y)}. \quad (211)$$

Для определения напряжений в наиболее удаленных волокнах подставляем для точек A и B (рис. 308, b) значения $y = h_1$ и $y = -h_2$, тогда получим

$$\sigma_A = \frac{M(h_1 - e)}{Fer_1}, \quad \sigma_B = -\frac{M(h_2 + e)}{Fer_2}, \quad (212)$$

где r_1 и r_2 означают радиусы внутренней и внешней поверхности кривого бруса. Определив из уравнений (i) и (209) величины m и e для данной формы поперечного сечения, мы можем легко вычислить нормальные напряжения при помощи уравнения (211).

Изменение $\Delta d\varphi$ угла $d\varphi$ между двумя последовательными поперечными сечениями получается из уравнения (210), которое дает

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{eI'E} = \frac{M ds}{erFE}$$

и соответствующее изменение кривизны оси бруса будет

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{erFE} = \frac{M(m+1)}{mr^2FE}. \quad (213)$$

Если радиальный размер h кривого бруса мал по сравнению с радиусом кривизны r оси бруса, мы можем пренебречь в уравнениях (i) и (g) величиной y по сравнению с r и заключаем, что когда радиус кривизны делается все большим и большим, число m приближается к нулю, и величина mr^2F приближается к значению центрального момента инерции J_z поперечного сечения. Тогда выражение (213), представляющее изменение кривизны оси бруса, приближается к значению

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (214)$$

что совпадает с прежде полученным значением для кривизны первоначально прямых брусьев (см. стр. 123).

78. Изгиб кривых брусьев силами, действующими в плоскости симметрии

Рассмотрим теперь более общий случай изгиба кривого бруса, показанный на рис. 309, a. Предполагается, что силы P_1, \dots, P_n представляют систему сил, находящихся в равновесии и действующих в плоскости оси бруса, которая является плоскостью симметрии бруса. Очевидно, изгиб бруса происходит в этой плоскости. Для нахождения напряжений в каком-либо поперечном сечении mn бруса (рис. 309, a) мы предположим, что часть бруса справа от поперечного сечения mn отброшена и ее действие на левую часть бруса заменено силой, приложенной в центре тяжести C поперечного сечения,

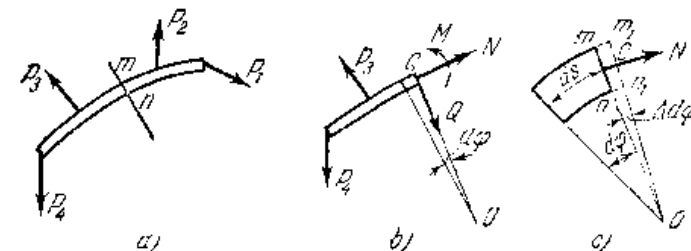


Рис. 309.

и парой сил M . Разлагая силу на две составляющие N и Q , одну нормальную к поперечному сечению и другую, направленную радиально, мы окончательно получаем: *изгибающий момент M , продольную силу N и поперечную силу Q* . Положительные направления этих сил показаны на рис. 309, b.

Напряжения и деформации, возникающие от пары сил, были исследованы в предыдущем параграфе при рассмотрении чистого изгиба кривого бруса. Напряжения, соответствующие продольной силе, равномерно распределяются по поперечному сечению и их величина будет равна N/F . Эти напряжения будут вызывать одинаковые относительные удлинения волокон, но полные удлинения, пропорциональные первоначальной длине волокон между какими-либо двумя смежными поперечными сечениями, будут пропорциональны расстоянию от центра кривизны O оси бруса (рис. 309, c). Таким образом, от действия продольной силы первоначальный угол $d\varphi$ увеличится на величину

$$\Delta d\varphi = \frac{N ds}{FEr}. \quad (215)$$

В то же самое время первоначальная длина ds элемента оси бруса увеличится на величину

$$\Delta ds = \frac{N ds}{FE}. \quad (216)$$

Поперечная сила Q вызывает касательные напряжения и некоторое искривление поперечного сечения. Обычно предполагают, что закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению кривого бруса такой же, как и для бруса с прямолинейной осью¹⁾. В таком случае относительное радиальное смещение двух смежных поперечных сечений будет такое же, как для прямых брусьев, и будет равно

$$\frac{\alpha Q}{FG} ds. \quad (217)$$

Складывая нормальные напряжения, вызываемые парой сил M , с нормальными напряжениями, возникающими от силы N , получаем

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{Fe(r-y)} + \frac{N}{F}. \quad (218)$$

Величину изменения $\Delta d\varphi$ угла между двумя смежными поперечными сечениями находим по формуле

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{e r F E} - \frac{N ds}{F E r}. \quad (219)$$

При помощи формул (215) — (219) можно вычислить напряжения и деформации кривого бруса для любого рода нагрузки бруса, действующей в плоскости кривизны его оси.

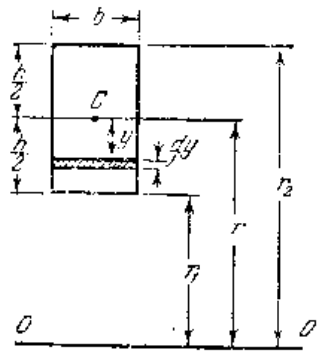


Рис. 310.

79. Частные случаи изгиба кривых брусьев

В следующих примерах, для некоторых частных случаев, приведены вычисления величины m , определяемой из уравнения (i) § 77, и расстояние e нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения. Зная эти величины, мы можем вычислить напряжения в кривых брусьях при помощи формул двух предыдущих параграфов.

Прямоугольное поперечное сечение. В этом случае ширина b поперечного сечения (рис. 310) постоянна, и мы получаем

$$mF = \int_F \frac{y dF}{r-y} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{(y-r+e) dy}{r-y} = br \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dy}{r-y} = bh \ln \frac{r_2}{r_1} = bh,$$

¹⁾ Это допущение удовлетворительно согласуется с точным решением для узкого прямоугольного поперечного сечения, см. книгу автора «Theory of Elasticity», стр. 75, 1951.

так что

$$m = \frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \quad (a)$$

и

$$e = \frac{mr}{m+1} = \frac{r \left(\frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)}{\frac{r}{h} \ln \frac{r_2}{r_1}} = r - \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (b)$$

При малых значениях h/r расстояние e мало по сравнению с h и чтобы вычислить его из уравнения (b) с достаточной точностью, не необходимо взять $\ln \frac{r_2}{r_1}$ с высокой степенью точности. Для того чтобы устранить это неудобство, мы можем воспользоваться известным рядом

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r + \frac{h}{2}}{r - \frac{h}{2}} = \frac{h}{r} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \right].$$

Тогда из уравнения (a) найдем

$$m = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \quad (c)$$

Таким образом, мы получаем быстро сходящийся ряд, из которого можно легко вычислить величины m и e с какой угодно точностью. Взяв только первый член ряда, мы получим

$$m \approx \frac{h^2}{12r^2} \quad \text{и} \quad e \approx \frac{h^2}{12r}.$$

Если взять два члена ряда, то найдем

$$m \approx \frac{h^2}{12r^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{h^2}{4r^2} \right) \quad \text{и} \quad e \approx \frac{h^2}{12r} \left(1 + \frac{4}{15} \frac{h^2}{4r^2} \right).$$

Видно, что при малых значениях h/r расстояние e очень мало. Тогда можно допустить с достаточной точностью линейный закон распределения напряжений вместо гиперболического. Для сравнения результатов, полученных для этих двух типов распределения напряжений в случае прямоугольного поперечного сечения, приведена таблица 8. В этой таблице для разных значений отношения r/h даны отношения

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{M/Fr} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sigma_{\min}}{M/Fr}.$$

Из этой таблицы видно, что при $r/h > 10$ можно принимать линейный закон распределения напряжений и для наибольшего напряжения можно с достаточной точностью пользоваться формулой, выведенной для бруса с прямолинейной осью.

Таблица 8

Сравнение гиперболического и линейного законов распределения напряжений

r/h	Гиперболический закон распределения напряжений		Линейный закон распределения напряжений		Погрешность в σ_{\max} , %
	1	2	3	4	
1	9,2	-4,4	6	-6	35,0
2	14,4	-10,3	12	-12	17,0
3	20,2	-16,1	18	-18	10,9
4	26,2	-22,2	24	-24	9,2
10	62,0	-58,0	60	-60	3,2

Трапециoidalное поперечное сечение. Пользуясь опять уравнением

$$mF = \int_F \frac{y dF}{r-y} \quad (d)$$

и вводя обозначение

$$v = r - y, \quad (e)$$

где v есть расстояние заштрихованного элемента (рис. 311) от оси OO , проходящей через центр кривизны оси бруса, мы получаем

$$mF = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r-v) dF}{v} = r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dF}{v} - F. \quad (f)$$

Переменная ширина поперечного сечения (рис. 311) равняется

$$b = b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h}$$

и

$$dF = dv \left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h} \right].$$

Подставляя это в уравнение (f), получим

$$\begin{aligned} m &= \frac{r}{F} \int_{r_1}^{r_2} \left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(r_2 - v)}{h} \right] \frac{dv}{v} - 1 = \\ &= \frac{r}{F} \left\{ \left[b_2 + r_2 \frac{b_1 - b_2}{h} \right] \ln \frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2) \right\} - 1. \quad (g) \end{aligned}$$

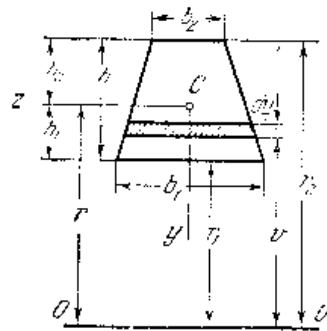


Рис. 311.

Если $b_1 = b_2 = b$ то эта формула совпадает с формулой (a), которая была получена для прямоугольного поперечного сечения. Если мы примем $b_2 = 0$, то получим из формулы (g) значение m для *треугольного поперечного сечения*.

Тавровое поперечное сечение. Поступая так же, как в предыдущем случае, мы получим для поперечного сечения, изображенного на рис. 312

$$m = \frac{r}{F} \left(b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_3}{r_4} \right) - 1. \quad (h)$$

Двутавровое поперечное сечение. Тот же способ, что и в предыдущем случае, дает (рис. 313):

$$m = \frac{r}{F} \left(b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_3 \ln \frac{r_4}{r_3} + b_2 \ln \frac{r_5}{r_4} \right) - 1. \quad (i)$$

Круговое поперечное сечение. Замечая, что в этом случае (рис. 314) ширина поперечного сечения на расстоянии y от центра тяжести

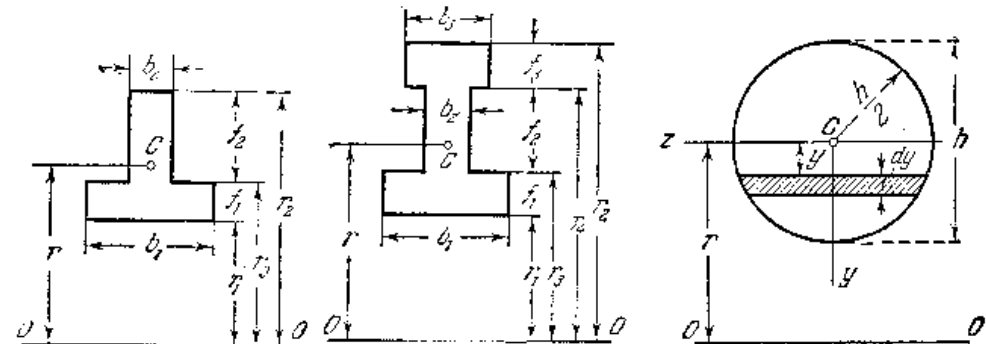


Рис. 312.

Рис. 313.

Рис. 314

сечения равняется $2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - y^2}$, получаем для определения m следующее уравнение:

$$\begin{aligned} mF &= \int_F \frac{y dF}{r-y} = r \int_F \frac{dF}{r-y} - F = 2r \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{4} - y^2}}{r-y} dy - F = \\ &= 2\pi r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} \right) - F. \quad (j) \end{aligned}$$

Пользуясь рядом

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{4r^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{4r^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(\frac{h^2}{4r^2} \right)^4 - \dots$$

мы получим

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \quad (220)$$

Это есть быстро сходящийся ряд, из которого величину m можно легко вычислить с какой угодно точностью.

Можно видеть, что при вычислении m из уравнения (d) величина не изменится, если все элементы dF умножить на некоторую постоянную величину, так как в этом случае интеграл уравнения (d) и площадь F того же уравнения увеличатся в одном и том же отношении. Из этого следует, что значение m , полученное для кругового поперечного сечения из уравнения (j), можно применить также для эллипса

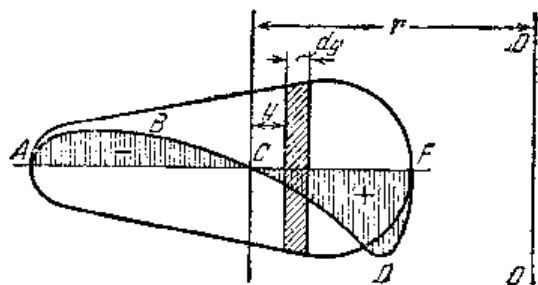


Рис. 315.

с осями h и h_1 , так как в этом случае каждая элементарная площадка, полученная для круга, должна быть умножена на постоянное отношение h_1/h .

Вычисление интеграла в уравнении (d) иногда можно упростить путем деления поперечного сечения на несколько частей, интегрирования каждой части и

сложения результатов этих интегрирований. Взяв, например, поперечное сечение в виде кругового кольца с внешним диаметром h и внутренним диаметром h_1 , и пользуясь уравнением (j) для внешнего и внутреннего кругов, мы найдем для кольцевого поперечного сечения:

$$m = \frac{1}{h^2 - h_1^2} \left\{ h^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2r} \right)^4 + \dots \right] - h_1^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h_1}{2r} \right)^4 + \dots \right] \right\}. \quad (k)$$

Таким же способом мы можем развернуть формулы для поперечных сечений, показанных на рисунках 312 и 313. Когда величина m вычислена, то из уравнения (209) мы найдем e , а из уравнения (212) — наибольшее напряжение.

Уравнение (d) является основой для графического определения величины m в тех случаях, когда форма поперечного сечения не может быть просто выражена аналитически. Из уравнения (d) видно, что при вычислении приведенной площади каждую элементарную площадку нужно уменьшить в отношении $\frac{y}{r-y}$. Это можно сделать, сохраняя ширину элементарных полосок, но уменьшая их длину в указанном отношении (рис. 315). Таким путем получится заштрихованная площадь на рисунке. Разность между площадями CDF и ABC дает приведенную площадь mF . Зная это, можем легко вычислить величины m и e .

Так как значение mF получается как разность двух площадей, то точность результата оказывается низкой и метод дает лишь грубое приближение. Гораздо большая точность может быть получена путем деления поперечного сечения на полоски одинаковой ширины и затем применения правила Симпсона вместо вычисления интеграла уравнения (d) ¹⁾.

Теория кривых брусьев, изложенная выше, применяется при проектировании *подъемных крюков*²⁾. На рис. 316 изображена рабочая часть крюка постоянного кругового поперечного сечения. Предполагается, что вертикальная сила P проходит через центр кривизны O оси крюка. Наибольшее нормальное напряжение от изгиба имеет место в поперечном сечении, перпендикулярном грузу P . Затем, поступая так, как изложено в § 78, мы найдем, что на горизонтальное поперечное сечение крюка действуют растягивающая сила P , приложенная в центре тяжести S поперечного сечения, и изгибающий момент $M = Pr$. Складывая напряжения от силы P и изгибающего момента M и пользуясь уравнением (218), получаем

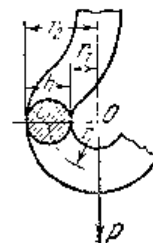


Рис. 316.

$$\sigma = \frac{M(y-e)}{Ie(r-y)} + \frac{P}{F} = \frac{Py}{Fm(r-y)}.$$

Применяя эту формулу к наиболее удаленным точкам, для которых $y = \pm h/2$, мы найдем, что

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \frac{h}{2mr_1}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{P}{F} \frac{h}{2mr_2}. \quad (221)$$

Видно, что численно наибольшее напряжение есть растягивающее напряжение на внутренней поверхности, которое получается умножением напряжения P/F на коэффициент напряжения

$$k = \frac{h}{2mr_1}, \quad (222)$$

величина которого зависит от отношения $h/2r$. Пользуясь выражением (220) для m , найдем, что k изменяется от 13,5 до 15,4, в то время как $h/2r$ изменяется от 0,6 до 0,4³⁾. Вычисление напряжений в подъемных крюках неправильного сечения можно выполнить, если определить m при помощи правила Симпсона ⁴⁾.

¹⁾ Примеры таких вычислений даны в статье: A. M. Wahl, J. Appl. Mech., том 13, стр. 259, 1946.

²⁾ Теоретическое и экспериментальное исследование подъемных крюков было сделано Национальной физической лабораторией в Англии; см. H. J. Gough, H. L. Cox и D. G. Sorwitz, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), дек., 1934. Для сравнения теоретических напряжений в крюках прямоугольного поперечного сечения с экспериментальными результатами см. K. Böttcher, Forschungsber. № 337, 1931.

³⁾ При $h/2r = 0,6$ коэффициент k имеет наименьшее значение.

⁴⁾ Этот метод описан A. M. Wahl'ем, цитирован на стр. 315.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношение численных значений σ_{\max} и σ_{\min} для кривого бруса прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе, если $r=12$ см и $h=10$ см.

Ответ. $\left| \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right| = 1,81$.

2. Решить предыдущую задачу для кругового поперечного сечения.

Ответ. $e=0,54$ см, $\left| \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right| = \frac{4,46}{5,34} = 1,96$.

3. Определить размеры b_1 и b_2 двутаврового поперечного сечения (рис. 313), чтобы σ_{\max} и σ_{\min} при чистом изгибе были численно равны между собой. Даны следующие размеры: $r_1=3$ см, $r_2=4$ см, $r_3=6$ см, $r_4=7$ см, $b_2=1$ см, $b_1+b_2=5$ см.

Решение. Из уравнений (212) имеем

$$\frac{h_1 - e}{r_1} = \frac{h_2 + e}{r_2} \quad \text{или} \quad \frac{r - r_1 - e}{r_1} = \frac{r_2 - r + e}{r_2},$$

откуда

$$r - e = \frac{r}{m+1} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 4,2 \text{ см.}$$

Подставляя вместо m значение (i) и замечая, что $F=7$ см², получим

$$4,2 = \frac{7}{b_1 \ln \frac{4}{3} + 1 \cdot \ln \frac{6}{4} + (5 - b_1) \ln \frac{7}{6}},$$

откуда

$$b_1 \ln \frac{4}{3} + (5 - b_1) \ln \frac{7}{6} = \frac{7}{4,2} = 1,667 = 1 \cdot \ln \frac{6}{4}$$

или

$$0,288b_1 + 0,154(5 - b_1) = 1,667 - 0,406 = 1,261 \text{ см,}$$

$$b_1 = 3,67 \text{ см,} \quad b_2 = 5 - 3,67 = 1,33 \text{ см.}$$

4. Определить размер b_1 таврового сечения (рис. 312) так, чтобы σ_{\max} и σ_{\min} при чистом изгибе были численно равны между собой. Даны следующие размеры: $r_1=3$ см, $r_2=7$ см, $r_3=4$ см, $b_2=1$ см.

Ответ. $b_1=3,09$ см.

5. Определить σ_{\max} и σ_{\min} для крюка трапециoidalного поперечного сечения m , представленного на рис. 317, если $P=2000$ кг, $b_1=4$ см, $b_2=1$ см, $r_1=3$ см, $r_2=12$ см.

Решение. Из уравнения (g) имеем

$$r - e = \frac{r}{m+1} = \frac{22,5}{4 \cdot 12 + 1 \cdot 3 \cdot \frac{12}{3} + (4-1)} = \frac{22,5}{3,935} = 5,72 \text{ см.}$$

Радиус оси бруса будет

$$r = r_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3} = 6,6 \text{ см.}$$

Поэтому $e=0,88$ см, $h_2 - e = r - e - r_1 = 5,72 - 3 = 2,72$ см, $h_2 + e = r_2 - r + e = 12 - 5,72 + 0,88 = 7,16$ см, $F = 22,5 \cdot 0,88 = 19,8$ см², $M = Pr = 13200$ кг см. Напряжения от изгиба из уравнений (212) равны

$$\sigma_{\max} = \frac{13200 \cdot 2,72}{19,8 \cdot 3} = 604 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{13200 \cdot 7,16}{19,8 \cdot 12} = -349 \text{ кг/см}^2.$$

К этим напряжениям от изгиба нужно прибавить равномерно распределенные напряжения от растягивающей силы P , равные $P/F = 2000/22,5 = 89$ кг/см². Тогда полные напряжения будут

$$\sigma_{\max} = 604 + 89 = 693 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -349 + 89 = -260 \text{ кг/см}^2.$$

6. Найти наибольшее напряжение в крюке кругового поперечного сечения, если диаметр поперечного сечения $d=2,5$ см, радиус оси $r=2,5$ см и $P=400$ кг.

Ответ. $\sigma_{\max} = 1148$ кг/см².

7. Найти σ_{\max} и σ_{\min} для кривого бруса кругового поперечного сечения, нагруженного как показано на рис. 318, если $h=10$ см, $r=10$ см, $a=10$ см и $P=2$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 695$ кг/см²; $\sigma_{\min} = -266$ кг/см².

8. Решить предыдущую задачу, полагая, что поперечное сечение m имеет форму, показанную на рис. 312, со следующими размерами: $r_1=3$ см, $r_2=7,5$ см, $r_3=22,5$ см, $b_1=10$ см, $b_2=2,5$ см, $a=10$ см, $P=1,6$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 221$ кг/см², $\sigma_{\min} = -114$ кг/см².

9. Решить задачу 7, полагая, что поперечное сечение m является трапециoidalным, как на рис. 311, с размерами $r_1=5$ см, $r_2=10,6$ см, $b_1=5$ см, $b_2=2,5$ см, $a=0$ и $P=1,25$ т.

Ответ. $\sigma_{\max} = 646$ кг/см², $\sigma_{\min} = -380$ кг/см².

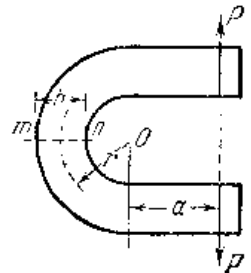


Рис. 318.

80. Деформация кривых брусьев

Деформации кривых брусьев обычно определяются при помощи теоремы Кастилиано¹⁾. Начнем с простейшего случая, когда размеры поперечного сечения бруса малы по сравнению с радиусом кривизны его оси²⁾. В этом случае изменение угла между двумя смежными поперечными сечениями определяется уравнением (214), аналогичным уравнению (a), стр. 123 для прямых брусьев, а энергия деформации при изгибе определяется уравнением

$$U = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI_2}, \quad (223)$$

¹⁾ См. стр. 277.

²⁾ Случай, в котором размеры поперечного сечения не малы, рассмотрен в задаче 6, стр. 325.

в котором интегрирование распространяется на всю длину s бруса. Уравнение (223) аналогично уравнению (190) для прямых брусьев¹⁾ и перемещение точки приложения какой-либо силы P в направлении силы равняется

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

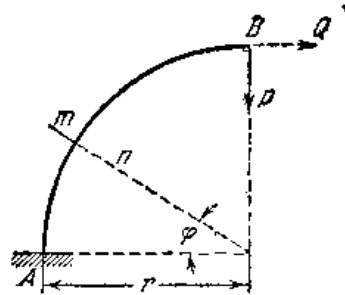


Рис. 319.

В качестве примера возьмем кривой брус постоянного поперечного сечения, ось которого представляет четверть дуги окружности (рис. 319); причем этот брус нижним концом A , имеющим вертикальную касательную, заделан, а на другом конце нагружен вертикальной силой P . Изгибающий момент в каком-либо

поперечном сечении mn равняется $M = -Pr \cos \varphi$. Подставляя это в уравнение (223) и составляя выражение производной $\frac{\partial U}{\partial P}$, найдем вертикальное перемещение конца B :

$$\delta = \frac{d}{dP} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dP} r d\varphi = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \frac{Pr^3}{EJ_z}.$$

Для определения горизонтального перемещения конца B нужно приложить фиктивную горизонтальную силу Q , показанную на рисунке пунктиром. Тогда

$$M = - [Pr \cos \varphi + Qr (1 - \sin \varphi)]$$

и

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -r (1 - \sin \varphi).$$

Горизонтальное перемещение равняется

$$\delta_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{\partial}{\partial Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial Q} r d\varphi.$$

Подставляя $Q=0$ в выражение для M , получим

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr^3 \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi = \frac{Pr^3}{2EJ_z}.$$

¹⁾ В случае тонких кривых стержней потенциальной энергией от продольных и поперечных сил можно пренебречь. См. стр. 322.

Тонкое кольцо. В качестве второго примера рассмотрим случай тонкого кругового кольца, растягиваемого двумя равными и противоположными силами P , приложенными по концам вертикального диаметра (рис. 320). Вследствие симметрии можно рассмот-

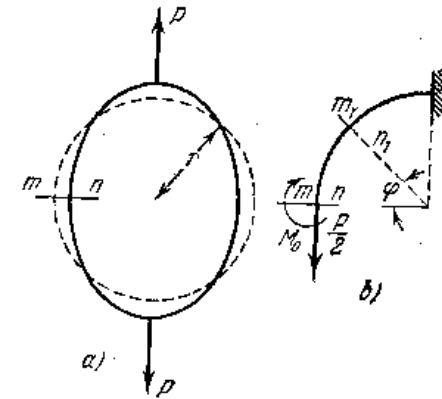


Рис. 320.

реть только один квадрант (рис. 320, b) и вывести заключение, что в поперечном сечении mn касательные усилия отсутствуют, и действуют только растягивающая сила, равна $P/2$, и изгибающий момент M_0 . Величина этого момента является статически неопределимой и может быть найдена при помощи теоремы Кастigliано. Из условия симметрии можно заключить, что поперечное сечение mn при изгибе кольца не поворачивается. Следовательно, перемещение, соответствующее изгибающему моменту на рис. 320, b , равно нулю и

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0, \quad (a)$$

где U есть потенциальная энергия рассматриваемого квадранта. Для какого-либо поперечного сечения $m_1 n_1$, наклоненного под углом φ к горизонтальному диаметру, изгибающий момент равняется¹⁾

$$M = M_0 - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi) \quad (b)$$

и

$$\frac{dM}{dM_0} = 1.$$

Подставляя это в выражение (223) для потенциальной энергии и

¹⁾ Момент, который стремится уменьшить первоначальную кривизну бруса, считаем положительным.

пользуясь уравнением (а), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dM_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dM_0} r d\varphi = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_0 - \frac{Pr}{2} r (1 - \cos \varphi) \right] r d\varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,182 Pr. \quad (224)$$

Подставляя в уравнение (b), получаем

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right). \quad (c)$$

Из этого выражения можно определить изгибающий момент в любом поперечном сечении кольца. Наибольший изгибающий момент будет в точках приложения сил P . Подставляя $\varphi = \pi/2$ в уравнение (c), находим

$$M = -\frac{Pr}{\pi} = -0,318 Pr. \quad (225)$$

Знак минус указывает на то, что изгибающие моменты в точках приложения сил P стремятся увеличить кривизну кольца, в то время как момент M_0 в сечении m стремится уменьшить эту кривизну, и кольцо будет иметь при изгибе форму, показанную на рис. 320, а пунктиром

Увеличение вертикального диаметра кольца также можно определить при помощи теоремы Кастиллиано. Полная энергия деформации, накопленная в кольце, равняется

$$U = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z},$$

причем значение M определяется по уравнению (c). Следовательно, увеличение вертикального диаметра кольца равно

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{dU}{dP} = \frac{4}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{dM}{dP} r d\varphi = \frac{Pr^3}{EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{Pr^3}{EJ_z} = 0,149 \frac{Pr^3}{EJ_z}. \end{aligned} \quad (226)$$

Для определения уменьшения горизонтального диаметра кольца, показанного на рис. 320, следует приложить к концам этого диаметра две равные и противоположно направленные фиктивные силы Q . Тогда, вычислив $\left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$, найдем, что уменьшение горизонтального диаметра будет равно ¹⁾

$$\delta_c = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \frac{Pr^3}{EJ_z} = 0,137 \frac{Pr^3}{EJ_z}. \quad (227)$$

Толстое кольцо. Если размеры поперечного сечения кривого бруса не малы по сравнению с радиусом кривизны его оси, то необходимо принять во внимание не только энергию деформации от изгибающего момента, но также и энергию деформации от продольных и поперечных сил. Изменение угла между двумя смежными сечениями (рис. 321) от действия пар M , на основании уравнения (213), равняется

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{FEe} = \frac{M ds}{FEer},$$

при этом работа изгибающих пар M для элемента, заключенного между двумя смежными сечениями, равняется

$$dU_1 = \frac{1}{2} M \Delta d\varphi = \frac{M^2 ds}{2FEer}. \quad (d)$$

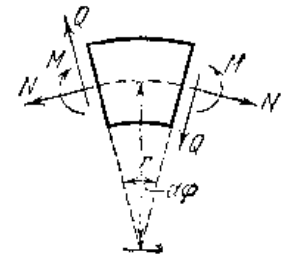


Рис. 321.

Продольная сила N вызывает удлинение элемента между двумя смежными сечениями в направлении оси бруса, равное $\frac{N ds}{FE}$ и увеличивает угол $d\varphi$ на величину $\frac{N ds}{FEr}$ (уравнение (219)). Работа, совершаемая силами N при этом перемещении, равняется $\frac{N^2 ds}{2FE}$. Кроме того, при перемещении от действия продольных сил N парами сила M будет совершена отрицательная работа: $-\frac{MN ds}{FEr}$. Следовательно, полная энергия, накопленная в элементе бруса при действии сил N , равняется

$$dU_2 = \frac{N^2 ds}{2FE} - \frac{MN ds}{FEr}. \quad (e)$$

Поперечная сила Q производит сдвиг одного поперечного сечения относительно другого на величину $\frac{aQ ds}{FG}$, где a есть численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (см. уравнение (217)). Соответствующая потенциальная энергия равняется

$$dU_3 = \frac{aQ^2 ds}{2FG}. \quad (f)$$

¹⁾ Весьма полное исследование круговых колец, находящихся под действием различного рода нагрузок, было сделано С. В. Вязево и его сотрудником Л. Л. Кошлом. Главные результаты их опубликованных работ помещены в книге: Вязево and R. Gramel, Technische Duymatik, 2-е изд., т. 1, стр. 362—395, 1953.

Складывая (d), (e) и (f) и интегрируя по всей длине бруса, получаем полную потенциальную энергию кривого бруса:

$$U = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2GEe} + \frac{N^2}{2FE} - \frac{MN}{TE} + \frac{\alpha Q^2}{2FG} \right) ds. \quad (228)$$

Воспользуемся этим уравнением для решения задачи, представленной на рис. 319. Принимая направления, указанные на рис. 321, за положительные, мы имеем

$$M = -Pr \cos \varphi, \quad N = -P \cos \varphi, \quad Q = P \sin \varphi,$$

где r — радиус оси бруса. Подставляя эти значения в уравнение (228) и применяя теорему Кастилиано, находим вертикальное перемещение точки B :

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{Pr}{FE} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r \frac{\cos^2 \varphi}{e} - \cos^2 \varphi + \frac{\alpha E}{G} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi Pr}{4FE} \left(\frac{r}{e} + \frac{\alpha E}{G} - 1 \right).$$

Если поперечное сечение бруса представляет прямоугольник шириной b и высотой h , то, пользуясь для e приближенным значением $h^2/12r$ (см. стр. 311) и принимая $\alpha = 1,2$ и $E/G = 2,6$, находим

$$\delta = \frac{\pi Pr}{4FE} \left(\frac{12r^2}{h^2} + 2,12 \right).$$

Если h мало по сравнению с r , то вторым членом в скобках, представляющим влияние на перемещение сил N и Q , можно пренебречь, и тогда мы приходим к ранее полученному уравнению (см. стр. 318).

Изложенная выше теория расчета толстых кривых брусьев часто применяется при вычислении напряжений в таких элементах машин, как звенья цепей и проушины (рис. 322). В этих случаях затруднение возникает при отыскании закона распределения давлений по поверхности бруса. Это распределение давлений зависит от величины зазора между болтом и кривым брусом. Удовлетворительное решение задачи можно получить, только пользуясь одновременно аналитическим и экспериментальными методами исследования¹⁾.

Частный случай проушины прямоугольного поперечного сечения (рис. 322) был весьма обстоятельно исследован²⁾. При этом исследовании предполагалось, что зазоров не существует и что болт — абсо-

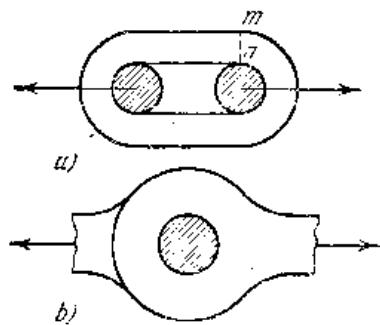


Рис. 322.

¹⁾ О теоретическом исследовании задачи см.: Н. Рейсснер, Jahrb. wiss. Ges. f. Luftfahrt, 1928; также J. Векке, Eisenbau, стр. 233, 1921; F. Вейсх, Theorie und Berechnung der eisern Brücken, стр. 256, 1924; Вильгельм, Z. Ver. deut. Ing., 1907 и Вайтапп, там же, стр. 307, 1908. Эксперименты были сделаны Dr. Matbar'om (Forschungsarb. 306, 1928); см. также D. Рэлли, диссертация, Danzig, 1920; Preuss, Z. Ver. deut. Ing., т. 55, стр. 2173, 1911; М. Воронаев, Известия Киевского политехнич. ин-та, 1910; E. G. Соокер, Photoelasticity, J. Franklin Inst., 1925.

²⁾ Н. Рейсснер and F. Strauch, Ing. Arch., т. 4, стр. 481, 1933.

лютно твердый. Наибольшие растягивающие напряжения имеют место на внутренней поверхности в поперечных сечениях, перпендикулярных оси бруса, их величина может быть представлена формулой

$$\sigma_{\max} = \alpha \frac{8P}{\pi^2 r_1^2 l}, \quad (g)$$

где P есть полная растягивающая сила, передаваемая брусом, α — численный коэффициент, зависящий от отношения r_2/r_1 , наружного радиуса к внутреннему радиусу проушины и l — толщина проушины, перпендикулярная плоскости рисунка. При r_2/r_1 , равном 2 и 4, значения α соответственно равны 4,30 и 4,39. Значения напряжений, получаемые по формуле (g), удовлетворительно согласуются с опытами¹⁾.

Теория изгиба тонких колец нашла применение при расчете колец фюзеляжа в конструкциях самолетов²⁾ и колец жесткости в подводных лодках³⁾.

При вычислении деформаций кривых брусьев мы пользовались до сих пор теорией Кастилиано, но эта задача может быть решена, как в случае прямых брусьев, путем введения фиктивных сил. Вычисления особенно упрощаются в случае тонких стержней, когда можно пренебречь влиянием на деформации продольных и поперечных сил. Рассмотрим стержень AB (рис. 323), заделанный на конце A и нагруженный в его плоскости симметрии xy . Для определения перемещения конца B рассмотрим бесконечно малое перемещение \overline{BC} этого конца вследствие изгиба элемента mn стержня. Пользуясь уравнением (214) для определения изменения угла между двумя смежными поперечными сечениями m и n , находим

$$\overline{BC} = \frac{M ds}{EJ_z} \rho. \quad (h)$$

Замечая, что бесконечно малый треугольник $B'CD$ подобен треугольнику nBn_1 , находим две составляющие этого перемещения:

$$\overline{CD} = \frac{M ds}{EJ_z} (y_0 - y), \quad \overline{DB} = \frac{M ds}{EJ_z} (x_0 - x). \quad (i)$$

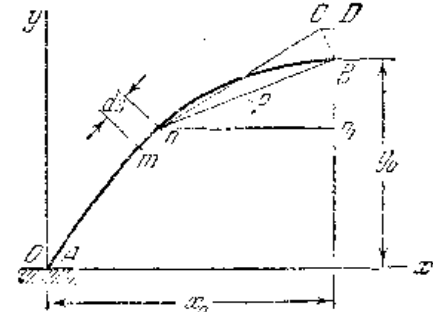


Рис. 323.

Чтобы получить две составляющие полного перемещения конца B , мы должны лишь просуммировать элементарные перемещения (i) для всех элементов стержня. Обозначая эти составляющие через u и v и считая их положительными, если они

¹⁾ См. Gr. Bierett, Mitt. deut. Materialprüfungsanstalt, Spec., № 15, 1931. Исследование проушин фотоэпругим методом было сделано К. Такемига и Y. Носокэва, Rep. Aeronaut. Inst. (Tokyo), т. 18, стр. 128, 1926, см. также M. M. Froehlich and H. N. Hill, J. Appl. Mech., т. 7, стр. 5, 1940. В последней статье исследовано влияние зазора между болтом и отверстием.

²⁾ См. W. Stieda, Luftfahrt-Forsch., т. 18, стр. 214, 1941. Английский перевод см. Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 1004, 1942, см. также D. A. DuPlantier, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 136, 1944; R. Venjantini, там же, т. 19, стр. 585, 1952.

³⁾ Весьма полное исследование таких колец можно найти в книге Г. Ф. Павлова, Строительная механика корабля, Москва, т. 2, стр. 1—816, 1947.

совпадают с положительными направлениями осей x и y , получаем

$$u = - \int_0^s \frac{M ds}{EJ_z} (y_0 - y), \quad v = \int_0^s \frac{M ds}{EJ_z} (x_0 - x) \quad (j)$$

Рассматривая, например, представленный на рис. 319 стержень, имеем

$$M = -Pr \cos \varphi, \quad y_0 - y = r(1 - \sin \varphi), \quad x_0 - x = r \cos \varphi.$$

Подставляя в уравнение (j) и выполняя интегрирование, получаем результаты, совпадающие с результатами, полученными на стр. 319.

Из уравнений (j) видно, что если мы приложим к каждому элементу стержня фиктивную горизонтальную силу величиной $\frac{M ds}{EJ_z}$, то момент этих распределенных сил относительно конца B даст значение перемещения u . Если вместо горизонтальных сил возьмем вертикальные фиктивные силы той же интенсивности, то момент этих сил относительно конца B даст перемещение v .

ЗАДАЧИ

1. Определить вертикальное перемещение конца B тонкого кривого стержня, имеющего постоянное поперечное сечение и ось — дугу полуокруга (рис. 324).
Решение. Энергия деформации изгиба равняется

$$U = \int_0^{\pi} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ_z} = \int_0^{\pi} \frac{P^2 r^2 (1 - \cos \varphi)^2 r d\varphi}{2EJ_z}.$$

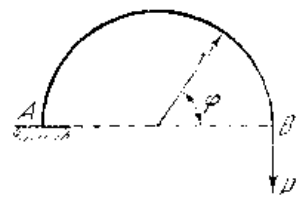


Рис. 324.

Прогиб на конце равняется

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{Pr^2}{EJ_z} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi Pr^3}{2 EJ_z}.$$

2. Определить горизонтальное перемещение конца B в предыдущей задаче.

$$\text{Ответ. } \delta = \frac{2Pr^3}{EJ_z}.$$

3. Определить увеличение расстояния между концами A и B тонкого стержня постоянного поперечного сечения, состоящего из дуги полуокруга CD и двух прямых участков AC и BD (рис. 325).

$$\text{Ответ. } \delta = \frac{2P}{EJ_z} \left[\frac{l^3}{3} + r \left(\frac{\pi}{2} l^2 + \frac{\pi}{4} r^2 + 2lr \right) \right].$$

4. Звено, состоящее из двух полуокругов и двух прямых участков, растягивается двумя равными, но противоположными силами, направленными по вертикальной оси симметрии (рис. 326). Определить наибольший изгибающий момент, полагая, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом r .

Решение. Рассматривая одну четверть звена (рис. 326, б), найдем статически неопределимый момент M_0 из того условия, что поперечное сечение, в котором действует этот момент, при деформации не поворачивается. Тогда

$$\frac{dU}{dM_0} = 0.$$

Замечая, что для прямолинейного участка $M = M_0$, а для криволинейного участка $M = M_0 - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi)$, и принимая во внимание только энергию деформации изгиба, находим

$$\frac{dU}{dM_0} = \frac{d}{dM_0} \left\{ \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l M_0^2 dx + \frac{1}{2EJ_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_0 - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \right]^2 r d\varphi \right\} = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr^2}{2} \frac{\pi - 2}{2l + \pi r}.$$

При $l=0$ это выражение совпадает с уравнением (224), полученным ранее для

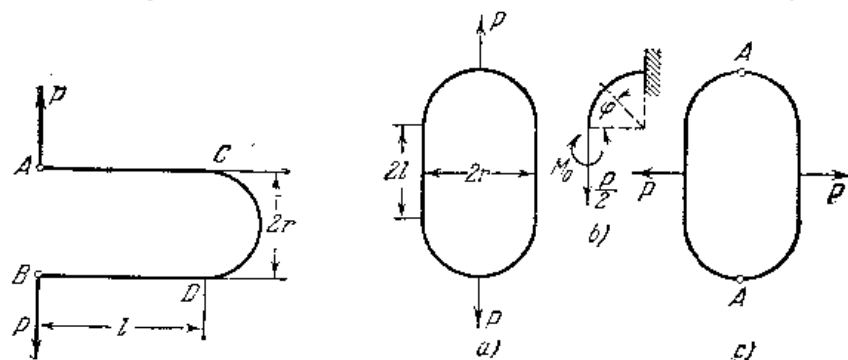


Рис. 325.

Рис. 326.

кругового кольца. Наибольший момент будет в точках приложения сил P и равняется

$$M_1 = M_0 - \frac{Pr}{2}.$$

5. Решить предыдущую задачу, полагая, что силы P приложены, как показано на рис. 326, с.

Ответ. Изгибающий момент в точках A равняется

$$M_1 = \frac{l^3}{2} \frac{r^2 (\pi - 2) + 2rl + l^2}{\pi r + 2l}.$$

При $l=0$ это уравнение совпадает с уравнением для кругового кольца. При $r=0$,

$$M_1 = \frac{Pl}{4}, \text{ как для балки с заделанными концами.}$$

6. Определить изгибающий момент M_0 и увеличение вертикального диаметра кругового кольца, показанного на рис. 320, полагая, что поперечное сечение кольца есть прямоугольник шириной b и высотой h , причем эти размеры не малы по сравнению с радиусом r оси кольца.

Решение. Пользуясь уравнением (228) для потенциальной энергии и уравнением (б) для изгибающего момента, получаем для определения M_0 следующее уравнение:

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{FEe} - \frac{N}{FE} \right) r d\varphi = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi r} \right).$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (224), видим, что третий член в скобках представляет собой влияние продольной силы и не линейного закона распределения напряжений. Величины погрешностей, получающихся при применении приближенной формулы (224) вместо предыдущего точного уравнения, приведены в ниже следующей таблице 9.

Таблица 9

Величины погрешностей приближенного расчета

$r/h =$ $e/r =$ Погрешность в %	1	1,5	2	3
	0,090	0,638	0,021	0,009
	15,8	6,7	3,7	1,6

Из этой таблицы видно, что в большинстве случаев для вычисления M_0 можно пользоваться приближенной формулой (224) и что ошибка имеет существенное значение лишь тогда, когда h приближается к r или делается больше r .

Увеличение вертикального диаметра кольца определяется из уравнения

$$\delta = \frac{dU}{dP}.$$

Пользуясь уравнением (228) для U и подставляя в это уравнение

$$M = M_0 - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi),$$

$$N = \frac{P}{2} \cos \varphi, \quad Q = -\frac{P}{2} \sin \varphi,$$

получим

$$\delta = \frac{Pr^2}{FEe} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{e^2}{r^2} \right) + \frac{2e}{r} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{e}{r} \right) - \frac{\pi}{8} \right] + \frac{\pi a}{4} \frac{E}{G} \frac{e}{r} \right\}$$

Сравнение с уравнением (226) показывает, что влияние продольных и поперечных сил на величину δ обычно очень мало¹⁾.

7. Определить изгибающие моменты в тонком кольце, имеющем две оси симметрии, при действии равномерно распределенного внутреннего давления p .

Решение. Рассмотрим один квадрант (рис. 327) с полуосями a и b . Если M_0 представляет статически неопределимый момент в сечении A , то изгибающий момент в каком-либо сечении C с координатами x и y будет

$$M = M_0 - pa(a-x) + \frac{p(a-x)^2}{2} + \frac{py^2}{2} - M_0 - \frac{pa^2}{2} + \frac{px^2}{2} - \frac{py^2}{2}. \quad (к)$$

¹⁾ Более точное решение задачи, показанной на рис. 320, дано автором; см. Известия Киевского политехнического ин-та, 1910; см. так же Pflüger Mag., т. 44, стр. 1014, 1922 и Theory of Elasticity стр. 121, 1951. Это решение показывает, что изложенная теория, основанная на гипотезе плоских сечений, дает весьма удовлетворительные результаты.

Подставляя это в уравнение $\frac{dU}{dM_0} = 0$, находим

$$\left(M_0 - \frac{pa^2}{2} \right) s + \frac{p}{2} (J_x + J_y) = 0,$$

где s означает длину четверти кольца, а $J_x = \int_0^s y^2 ds$ и $J_y = \int_0^s x^2 ds$ — моменты инерции дуги ACB относительно осей x и y . Следовательно,

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2s} (J_x + J_y). \quad (л)$$

Если кольцо имеет форму звена, показанного на рис. 326, с размерами $a = r$ и $b = 1 + r$, то

$$s = b - a + \frac{\pi a}{2},$$

$$J_x = \frac{1}{3} (b-a)^3 + \frac{\pi a}{2} (b-a)^2 + \frac{\pi}{4} a^3 + 2a^2 (b-a),$$

$$J_y = (b-a)a^2 + \frac{\pi a^3}{4}.$$

Подставив это в уравнение (л), получим

$$M_0 = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2b + (\pi - 2)a} \left[\frac{1}{3} (b-a)^3 + \frac{\pi}{2} a^3 + 3a^2 (b-a) + \frac{\pi}{2} a(b-a)^2 \right].$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении теперь можно получить из уравнения (к).

Для эллиптического кольца вычисления более сложны¹⁾. Обозначая $J_x + J_y = -\alpha a^2 b$, $M_0 = -\beta pa^2$ и момент в сечении B (рис. 327) $M_1 = \gamma pa^2$, приводим ниже таблицу значений числовых коэффициентов α , β и γ для различных значений отношения a/b .

Таблица 10

Коэффициенты для расчета эллиптических колец

$\frac{a}{b}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
α	1,571	1,663	1,795	1,982	2,273	2,736	3,559	5,327
β	0	0,057	0,133	0,237	0,391	0,629	1,049	1,927
γ	0	0,060	0,148	0,283	0,498	0,870	1,576	3,128

8. Плоская спиральная пружина (рис. 328) прикреплена в центре к вертикальному стержню C . К этому стержню приложена пара сил M_0 , которая закручивает пружину. Эта пара уравновешивается горизонтальной силой P , приложенной на

¹⁾ См. J. A. C. H. Bresse, Cours de mécanique appliquée, Paris, 3 изд., стр. 493, 1880. См. также H. Résal, J. math. (Lyonville), т. 3, 1887; M. Marguec, Bull. assoc. tech. maritime, т. 19, 1908; M. Goupil, Ann. ponts. et chaussées, т. 2, стр. 386, 1912; Mayer Mita, Z. Ver. deut. Ing., т. 58, стр. 649, 1914; W. F. Bucke, Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, 414, 1933.

другом конце пружины A , и реакцией стержня. Установить зависимость между моментом M_0 и углом поворота стержня, если все размеры пружины известны. Предполагается, что угол закручивания не настолько велик, чтобы смежные витки соприкасались друг с другом.

Решение. Принимая начало координат в точке A , находим, что изгибающий момент в какой-либо точке пружины на расстоянии y от силы P равняется $M = Py$. Изменение угла между двумя смежными сечениями у рассматриваемой точки, согласно уравнению (214) равняется

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ_2} = \frac{Py ds}{EJ_2}.$$

Полный угол поворота одного конца пружины относительно другого при закручивании будет

$$\varphi = \int_0^s \frac{Py ds}{EJ_2} = \frac{P}{EJ_2} \int_0^s y ds. \quad (m)$$

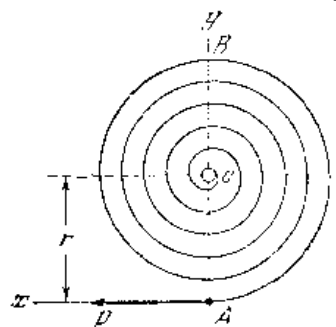


Рис. 328.

Интеграл в правой части этого уравнения представляет собой статический момент оси пружины относительно оси x . Этот момент получается умножением полной длины s спирали на расстояние ее центра тяжести от оси x . В обычном случае с достаточной точностью можно принять это расстояние равным r , т. е. расстоянию от оси стержня C до силы P . Тогда из уравнения (m) получим

$$\varphi = \frac{Prs}{EJ_2} = \frac{M_0 s}{EJ_2}. \quad (n)$$

Если конец A связан с каким-либо стержнем, то вращающий момент M_0 , приложенный в точке C , вызывает реактивную силу P у закрепленного конца A пружины. До тех пор, пока толщина пружины весьма мала, а число витков спирали велико и витки не соприкасаются между собой, принятое допущение о том, что сила P остается горизонтальной, можно считать достаточно точным. Следовательно, для этого случая уравнение (n) будет справедливым¹⁾.

9. Пружина, представленная на рис. 328, находится в ненапряженном состоянии и закреплена в точке A . Определить наибольшее напряжение и количество энергии, накапливаемой в пружине при трех полных оборотах стержня, приняв пружину изготовленной из стали в 1 см шириной, 0,5 мм толщиной и 300 см длиной.

Решение. Подставляя данные значения в уравнение (n), получаем

$$6\pi = M_0 \frac{300 \cdot 12}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,05^3 \cdot 1}$$

откуда

$$M_0 = 1,41 \text{ кг см.}$$

Количество потенциальной энергии

$$U = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} = \frac{P^2}{2EJ} \int_0^s y^2 ds = \frac{P^2}{2EJ} \left(sr^2 + \frac{sr^2}{4} \right) = \frac{5}{8} \frac{M_0^2 s}{EJ} = 17 \text{ кг см.}$$

¹⁾ Более полный разбор этой задачи дан в книге А. Кастильяно, цитированной на стр. 183. См. также E. C. Wadlow, *Engines*, т. 150, стр. 474, 1930 и J. A. Van den Broek, *Trans. A. S. M. E.*, т. 53, стр. 247, 1931.

Наибольшее напряжение будет в точке B , где изгибающий момент может быть принят равным $2Pr = 2M_0$, так что

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 1,44 \cdot 6}{1 \cdot 0,05^2} = 6912 \text{ кг/см}^2.$$

10. Поршневое кольцо внешнего очертания по кругу имеет прямоугольное поперечное сечение постоянной ширины b и переменной высоты h (рис. 329). Определить, какой должен быть закон изменения высоты h , чтобы кольцо, будучи вставлено в поршень и цилиндр, оказывало на стенки цилиндра равномерно распределенное давление.

Решение. Пусть r означает радиус цилиндра и $r + \delta$ — внешний радиус кольца в свободном состоянии. Приближенное решение задачи получится, если взять внешний радиус кольца вместо среднего радиуса кривизны его оси. Тогда, на основании уравнения (214), изменение кривизны вследствие изгиба будет

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r + \delta} = \frac{M}{EJ}. \quad (o)$$

Изгибающий момент M в каком-либо сечении mn кольца, вызываемый давлением p , равномерно распределенным по внешней поверхности кольца, равняется

$$M = -2pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (p)$$

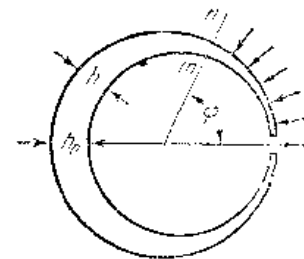


Рис. 329.

Подставив это выражение в (o) и приняв $bh^3/12$ вместо J , а величину δ/r^2 вместо $\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \delta}$, так как δ мало, получим для определения h следующее уравнение:

$$\frac{\delta}{r^2} = \frac{p}{E} \frac{24r^2}{h^3} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (q)$$

откуда

$$h^3 = \frac{p}{E} \frac{24r^4}{\delta} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (r)$$

Полагая $\varphi = \pi$, найдем наибольшую величину h^3 , которую обозначим через h_0^3 .

$$h_0^3 = \frac{p}{E} \frac{24r^4}{\delta}. \quad (s)$$

Наибольшие напряжения от изгиба в каком-либо сечении mn равняются

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{12pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{h^2}. \quad (t)$$

Из выражений (t) и (r) можно видеть, что наибольшие напряжения от изгиба имеют место при $\varphi = \pi$, т. е. в поперечном сечении, противоположном разрезу кольца. Подставляя в уравнение (t) $h = h_0$ и $\varphi = \pi$, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{12pr^2}{h_0^2}. \quad (u)$$

Из этого уравнения можно вычислить h_0 , если заданы допустимое напряжение для кольца и давление p . Значение δ находится путем подстановки h_0 в уравнение (s).

Следует заметить, что если в месте прореза к концам кольца приложить по направлению касательной две равные и противоположные силы P , то они вызовут в каком-либо сечении m кольца изгибающий момент

$$-Pr(1 - \cos \varphi) = -2Pr \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

т. е. этот изгибающий момент изменяется в зависимости от φ точно таким же образом, как и момент M по уравнению (р). Поэтому, если концы разомкнутого кольца стянуть и в таком состоянии обработать его до внутреннего радиуса r цилиндра, то такое кольцо, будучи вставлено в цилиндр, окажет на стенки цилиндра равномерно распределенное давление ¹⁾.

Для примера определим δ и h_0 для чугунного поршневого кольца, если $r=25$ см, $[\sigma]=300$ кг/см², $p=0,1$ кг/см² и $E=8 \cdot 10^5$ кг/см². Подставив эти значения в уравнение (u), найдем $h_0=1,6$ см. Из уравнения (s) получим $\delta=0,29$ см.

11. Вывести формулу (227), данную на стр. 321.

12. На раму, состоящую из двух вертикальных стержней и стержня в виде полуокруга (рис. 330), действует сила P , направленная по оси симметрии рамы. Найти горизонтальные реакции H и изгибающий момент M в точке приложения силы P , полагая, что рама имеет постоянное поперечное сечение и в опорах A и B

имеются шарниры. Влиянием продольной и поперечной силы на деформацию пренебречь.

Решение. Величина сил H получится из уравнения $\frac{dU}{dH}=0$.

Результаты можно представить в виде

$$H=k_1 P, \quad M=k_2 Pr, \quad (v)$$

где k_1 и k_2 — числовые коэффициенты, зависящие от величины отношения l/r . Несколько значений этих коэффициентов дано ниже, в таблице 11.

Таблица 11
Значения коэффициентов к уравнению (v)

$\frac{l}{r} =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,0984	0,0857	0,0754	0,0669	0,0598	0,0537	0,0486	0,0442	0,0403	0,0370
$k_2 =$	0,284	0,294	0,304	0,313	0,321	0,328	0,335	0,341	0,347	0,352

13. Решить предыдущую задачу, полагая, что в опорах A и B концы рамы заделаны.

Ответ. Значения H и M определяются по формулам (v). Числовые значения коэффициентов даны в таблице 12.

¹⁾ Эта теория была разработана H. R e s a Rem, Ann. mines, т. 5, стр. 38, 1874; Compt. rend., т. 73, стр. 542, 1871; см. также E. R e i n h a r d t, Z. Ver. deut. Ing., т. 45, стр. 232, 1901; H. F r i e d m a n n, Z. österr. Ing. Architekt.—Ver., т. 60, стр. 632, 1908; Z. Ver. deut. Ing., т. 68, стр. 254, 1924. Относительно распорных колец см. N. J. H o f f, Edge Reinforcements of Cutouts in Monocoques, J. Appl. Mech., т. 10, стр. 161, 1943.

Таблица 12
Значения коэффициентов к уравнению (v)

$\frac{l}{r} =$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$k_1 =$	0,1659	0,1459	0,1295	0,1157	0,1040	0,0941	0,0855	0,0781	0,0716	0,0659
$k_2 =$	0,2479	0,2590	0,2691	0,2784	0,2870	0,2948	0,3021	0,3067	0,3115	0,3211

Из этой таблицы видно, что при заделанных концах рамы наибольший изгибающий момент M несколько меньше, чем в предыдущей задаче.

Полученные результаты можно использовать для расчета напряжений в звене цепи рис. 326 при условии, что в звено вставлена распорка для того, чтобы препятствовать какому-либо изменению горизонтального размера звена.

14. Найти изгибающий момент M_0 и растягивающее усилие H в поперечном сечении A симметрично нагруженного кругового кольца, показанного на рис. 331.

Ответ.

$$H = P \frac{\pi - \alpha}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha, \quad M_0 = -\frac{Pr}{2\pi} [1 + \sec \alpha - (\pi - \alpha) \operatorname{tg} \alpha].$$

81. Двухшарнирная арка

На рис. 332 показана несущая вертикальную нагрузку арка, концы которой шарнирно прикреплены к неподвижным опорам A и B , находящимся на одном уровне. Вертикальные составляющие реакций опор A и B можно определить из уравнений равновесия совершенно так же, как для балки, свободно лежащей на двух опорах. Го-

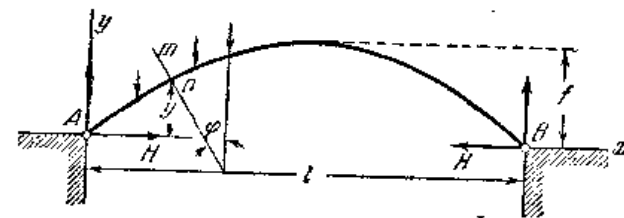


Рис. 332.

ризонтальные составляющие должны быть равны по величине и противоположны по направлению. Величина H этих составляющих называется *распором арки*. Эту величину нельзя получить из уравнений статики, но она может быть определена при помощи теоремы Кастилиано. В случае пологой арки двумя последними членами в общем выражении (228) для потенциальной энергии можно пренебречь и для обычных размеров арок произве-

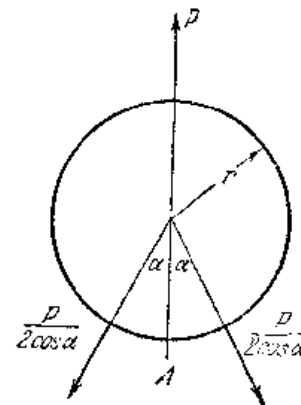


Рис. 331.

дене F_{el} можно заменить моментом инерции поперечного сечения J_z . Тогда уравнение для определения H будет таким:

$$\frac{dU}{dH} = \frac{d}{dH} \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EJ_z} + \frac{N^2}{2lE} \right) ds = 0. \quad (a)$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении ml арки равняется

$$M = M_0 - Hy, \quad (b)$$

где M_0 есть изгибающий момент в соответствующем сечении свободно лежащей балки, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и арка. Второй член под знаком интеграла уравнения (a) представляет собой потенциальную энергию от продольной силы N и имеет второстепенное значение. Для пологих арок можно, с достаточной точностью, допустить, что эта сила N равняется распору H . Подставляя выражение (b) и $N=H$ в уравнение (a), получаем

$$-\int_0^s \frac{(M_0 - Hy)y ds}{EJ_z} + \int_0^s \frac{H^2 ds}{lE} = 0,$$

откуда

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EJ_z}}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ_z} + \int_0^s \frac{ds}{lE}}. \quad (229)$$

Для арки постоянного поперечного сечения при помощи обозначения $l^2 = J_z/F$ уравнение (229) можно представить в таком виде:

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds + l^2 \int_0^s ds}. \quad (230)$$

Второй член в знаменателе представляет собой влияние укорочения оси арки вследствие продольного сжатия. Во многих случаях оно мало и им можно пренебречь. Тогда

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds}. \quad (231)$$

Возьмем, например, случай параболической арки, несущей постоянную нагрузку, равномерно распределенную по длине пролета, с осью, определяемой уравнением

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \quad (c)$$

Тогда

$$M_0 = \frac{q}{2} x(l-x). \quad (d)$$

Подставляя (c) и (d) в уравнение (231), получаем

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (e)$$

Действительный распор H будет меньше определяемого из уравнения (e). Чтобы дать некоторое представление о возможной погрешности ΔH , в нижеследующей таблице 13 приведены отношения $\frac{\Delta H}{H}$ для различных арок¹⁾. При вычислении величин, входящих в эту таблицу, было применено полное выражение (228) для потенциальной энергии, а также было принято, что для какого-либо сечения арки

$$F = \frac{I_0}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad EJ_z = \frac{EJ_0}{\cos \varphi},$$

где F_0 и EJ_0 — соответственно площадь поперечного сечения и жесткость при изгибе сечения арки в ключе, угол φ — угол между поперечным сечением и осью y , а h — высота поперечного сечения в ключе арки. При вычислении величины H , входящей в отношение $\frac{\Delta H}{H}$, было применено уравнение (e).

Таблица 13

		Отношение $\frac{\Delta H}{H}$ для арок								
$\frac{f}{l} =$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$				
$\frac{h}{l} =$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
$\frac{\Delta H}{H} =$		0,1771	0,0513	0,0235	0,0837	0,0221	0,0101	0,0175	0,00444	0,00198

Эта таблица показывает, что погрешность от применения уравнения (e) имеет существенное значение лишь для пологих арок значительной толщины.

¹⁾ См. работу автора «Calcul des arcs élastiques», Paris, éd. Bergerel, 1922.

Так как опоры арки неподвижны, то изменение температуры может вызвать значительные напряжения в сооружении. Чтобы вычислить распор от изменения температуры на t° , предположим, что одна из опор является подвижной. Тогда, вследствие температурного расширения, пролет арки увеличится на alt , где a есть коэффициент линейного расширения материала арки. Распор найдется из того условия, что он препятствует такому расширению арки, производя уменьшение пролета на величину, равную alt . Применяя теорему Кастиллиано, получаем

$$\frac{dU}{dH} = \frac{d}{dH} \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EJ_z} + \frac{N^2}{2FE} \right) ds = alt. \quad (f)$$

Принимая во внимание лишь влияние температуры и полагая $M_0=0$ и $N=H$, из уравнения (f) получаем

$$H = \frac{alt}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ_z} + \int_0^s \frac{ds}{FE}}. \quad (232)$$

Более подробное исследование усилий в арках может быть найдено в книгах по теории сооружений.

82. Напряжения в ободе махового колеса ¹⁾

Благодаря влиянию спиц обод вращающегося махового колеса испытывает не только растяжение, но также и изгиб. Выделим часть обода (рис. 333, б) двумя поперечными сечениями A и B , делящими пополам углы между смежными спицами, и рассмотрим ее как свободное тело.

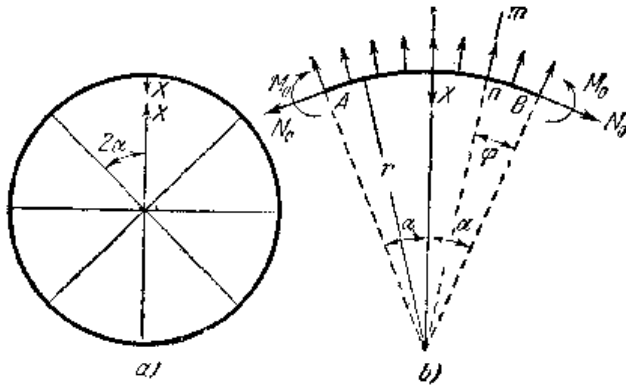


Рис. 333.

Пусть r — радиус оси обода, F — площадь поперечного сечения обода, F_1 — площадь поперечного сечения спицы, J — момент инерции поперечного

¹⁾ Весьма полное исследование изгиба круговых колец со спицами дано С. В. Визепо и R. Гапштейн, цитированным на стр. 321.

сечения обода, 2α — угол между двумя смежными спицами, q — вес единицы длины обода, q_1 — вес единицы длины спицы, ω — угловая скорость махового колеса.

Из условий симметрии заключаем, что по сечениям A и B не может быть касательных напряжений и что силы, действующие на эти сечения, приводятся к продольной силе N_0 и изгибающему моменту M_0 . Если X означает силу, растягивающую спицу, то уравнение равновесия части AB обода будет

$$2N_0 \sin \alpha + X - 2r^2 \frac{q}{g} \omega^2 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N_0 = \frac{q}{g} \omega^2 r^2 - \frac{X}{2 \sin \alpha}. \quad (a)$$

Продольная сила N в каком-либо сечении mn равняется

$$N = N_0 \cos \varphi + \frac{q\omega^2 r}{g} 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{q\omega^2 r^2}{g} - \frac{X \cos \varphi}{2 \sin \alpha}. \quad (b)$$

Изгибающий момент в том же сечении будет

$$M = M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) + \frac{q\omega^2 r^3}{g} 2 \sin^3 \frac{\varphi}{2} = M_0 + \frac{Xr}{\sin \alpha} \sin^3 \frac{\varphi}{2}. \quad (c)$$

Сила X и момент M_0 не могут быть определены из уравнений статики, но могут быть найдены при помощи теоремы о наименьшей работе. Потенциальная энергия деформации выделенной части AB обода представится в таком виде ¹⁾:

$$U_1 = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M^2 r d\varphi}{2EJ} + 2 \int_0^{\alpha} \frac{N^2 r d\varphi}{2EF}. \quad (d)$$

Растягивающая сила N_1 в каком-либо сечении спицы в расстоянии ρ от центра колеса равняется ²⁾

$$N_1 = X + \frac{q_1 \omega^2}{2g} (r^2 - \rho^2).$$

Следовательно, энергия деформации спицы будет

$$U_2 = \int_0^r \frac{N_1^2 d\rho}{2F_1 E}. \quad (e)$$

Уравнения для определения M_0 и X представятся в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial M_0} (U_1 + U_2) = 0, \quad (f)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_1 + U_2) = 0. \quad (g)$$

¹⁾ Предполагается, что толщина обода мала по сравнению с r и принимается во внимание только энергия изгиба и растяжения.

²⁾ Длина спицы принята равной r . В действительности она будет несколько меньше r .

Из уравнений (f) и (g), после подстановки в них (d) и (e), получим

$$M_0 = -\frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (233)$$

$$X = \frac{2}{3} \frac{q\omega^2 r^2}{g} \frac{1}{\frac{Fr^2}{J} f_2(\alpha) + \frac{J_1(\alpha)}{J} + \frac{1}{Fr}}, \quad (234)$$

где

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}.$$

В нижеследующей таблице 14 приведены значения функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ для различного числа спиц n .

Таблица 14
Значения функций к уравнению (234)

$n=$	4	6	8
$f_1(\alpha)$	0,643	0,957	1,274
$f_2(\alpha)$	0,00608	0,00169	0,00076

Пользуясь этой таблицей, мы легко определяем натяжение спицы X по формуле (234) и изгибающий момент M_0 по формуле (233). После этого продольная сила и изгибающий момент в каком-либо сечении m обода могут быть найдены из уравнений (a), (b) и (c)¹⁾.

В качестве примера возьмем стальное маховое колесо, делающее 600 оборотов в минуту, с радиусом $r=1,5$ м, с квадратным поперечным сечением обода 30×30 см² и с шестью спицами площадью поперечного сечения $F_1=150$ см² каждая. Обод рассматриваем как свободно вращающееся кольцо; тогда растягивающие напряжения, возникающие от центробежной силы, будут равняться (см. уравнение (15))

$$\sigma_0 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = \frac{0,0078}{981} \cdot 62,8^2 \cdot 150^2 = 705,5 \text{ кг/см}^2,$$

При шести спицах $\alpha=30^\circ$, $f_1(\alpha)=0,957$, $f_2(\alpha)=0,00169$. Следовательно, усилие, действующее в каждой спице, согласно уравнению (234), равно

$$X = \frac{2}{3} \frac{q\omega^2 r^2}{g} \frac{1}{300 - 0,00169 + 0,957 + 6} = 0,0893 \frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

¹⁾ Изложенная теория была разработана R. Vred'ом, Z. Ver. dent. Ing., т. 45, стр. 267, 1901 и H. Vranс'ом, Dingtlers Politech J., стр. 353, 1908. См. также J. G. Longbottom, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), стр. 43, 1924 и K. Reinhardt, Forschungsarb., 226, 1920. Подобная задача возникает при расчете напряжений в укрепляющих кольцах больших турбогенераторов, см. E. Schwaerlin, Electrotech. Z., стр. 40, 1931.

Продольная сила для сечения, делящего пополам угол между спицами, по уравнению (a), будет:

$$N_0 = \frac{q\omega^2 r^2}{g} = 0,0893 \frac{q\omega^2 r^2}{g} = 0,9 \frac{q\omega^2 r^2}{g}.$$

Изгибающий момент в том же сечении, по уравнению (233), будет:

$$M_0 = -0,605 \frac{q\omega^2 r^2}{g} \text{ кг см.}$$

Наибольшее напряжение в этом сечении равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{N_0}{F} - \frac{M_0}{W} = 644 + 85 = 729 \text{ кг/см}^2.$$

Для поперечного сечения обода, взятого по оси спицы, уравнения (b) и (c) дают

$$(N)_{\varphi=\alpha} = 0,923 \frac{q\omega^2 r^2}{g}, \quad (M)_{\varphi=\alpha} = 1,19 \frac{q\omega^2 r^2}{g} \text{ кг см.}$$

Наибольшее напряжение в этом сечении равняется

$$\sigma_{\max} = 652 + 167 = 819 \text{ кг/см}^2.$$

Видно, что в данном случае влияние изгиба обода на величину наибольшего напряжения незначительно и расчет напряжений в обode, как в свободно вращающемся кольце, дает удовлетворительные результаты.

83. Уравнение изогнутой оси для бруса с круговой осью

Для тонкого кривого бруса с круговой осью дифференциальное уравнение изогнутой оси будет аналогично уравнению для прямого бруса (уравнение (79) стр. 124). Пусть $ABCD$ (рис. 334) представляет ось кругового кольца после деформации и u означает малые радиальные перемещения отдельных точек этой оси. Изменение кривизны оси стержня при изгибе можно исследовать, рассматривая элемент mn кольца по деформации и соответствующий, заключенный между теми же радиусами, элемент m_1n_1 деформированного кольца (рис. 334, б). Первоначальная длина элемента mn и его первоначальная кривизна будут:

$$ds = r d\varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{r d\varphi} = \frac{1}{r}. \quad (a)$$

При малых деформациях кривизна того же элемента после деформации может быть принята равной кривизне элемента m_1n_1 . Последняя определяется уравнением

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds}. \quad (b)$$

в котором $d\varphi + \Delta d\varphi$ означает угол между поперечными сечениями m_1 и n_1 деформированного стержня, а $ds + \Delta ds$ — длину элемента $m_1 n_1$. Перемещения u считаем положительными, если они направлены к центру кольца, и очень малыми по сравнению с радиусом кольца.

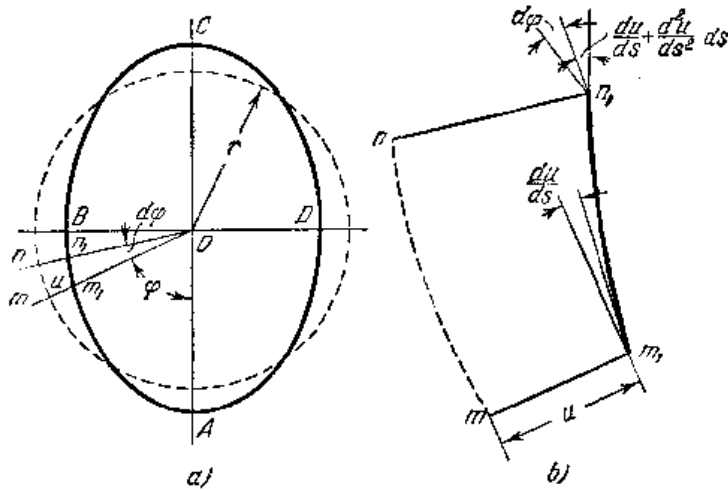


Рис. 334.

Тогда угол между касательной к оси стержня в m_1 и нормалью к радиусу $m_1 O$ будет $\frac{du}{ds}$. Соответствующий угол в сечении n_1 будет

$$\frac{du}{ds} + \frac{d^2 u}{ds^2} ds.$$

Тогда

$$\Delta d\varphi = \frac{d^2 u}{ds^2} ds. \quad (c)$$

При сравнении длины элемента $m_1 n_1$ с длиной элемента $m n$ малым углом $\frac{du}{ds}$ можно пренебречь и длину $m_1 n_1$ принять равной $(r-u)d\varphi$.

Тогда

$$\Delta ds = -u d\varphi = -\frac{u ds}{r}. \quad (d)$$

Подставляя (c) и (d) в уравнение (b), получаем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi + \frac{d^2 u}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{u}{r}\right)},$$

или, пренебрегая бесконечно малыми величинами высшего порядка, находим

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{ds} \left(1 + \frac{u}{r}\right) + \frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r}\right) + \frac{d^2 u}{ds^2},$$

откуда

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{u}{r^2} + \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (e)$$

Зависимость между приращением кривизны и величиной изгибающего момента для тонких стержней, на основании уравнения (214), выразится в следующем виде:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{M}{EJ}. \quad (f)$$

Знак минус в правой части этого уравнения зависит от знака изгибающего момента, который считается положительным, если он вызывает уменьшение первоначальной кривизны стержня (рис. 308). Из уравнений (e) и (f) следует, что

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (235)$$

Это и есть дифференциальное уравнение изогнутой оси тонкого стержня с круговой осью. Для бесконечно большого r это уравнение совпадает с уравнением (79) для прямого бруса.

В качестве примера на применение уравнения (235) рассмотрим задачу, представленную на рис. 320. Изгибающий момент в каком-либо сечении $m_1 n_1$, согласно уравнению (c), стр. 320 будет:

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right),$$

и уравнение (235) представится в таком виде:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{Pr}{2EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right)$$

или

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{Pr^2}{2EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right).$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{Pr^2}{EJ\pi} - \frac{Pr^2}{4EJ} \varphi \sin \varphi.$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из условий симметрии:

$$\frac{du}{d\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

что дает

$$B = 0, \quad A = -\frac{Pr^2}{4EJ}.$$

Тогда

$$u = \frac{Pr^3}{EJ\pi} - \frac{Pr^3}{4EJ} \varphi \sin \varphi - \frac{Pr^3}{4EJ} \cos \varphi.$$

При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$ получаем

$$(u)_{\varphi=0} = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right),$$

$$(u)_{\varphi=\pi/2} = \frac{Pr^3}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8} \right).$$

Эти результаты полностью совпадают с уравнениями (227) и (226), полученными ранее при помощи теоремы Кастилиано¹⁾.

84. Изгиб кривых труб

При выводе закона распределения напряжения от изгиба в кривых брусках (§ 77) предполагалось, что форма поперечного сечения остается без изменения. Это предположение справедливо до тех пор, пока имеется сплошной брус, так как весьма малые перемещения в плоскости поперечного сечения вследствие поперечного сжатия или расширения не имеют существенного влияния на распределение напряжений. Однако условия совершенно меняются при изгибе тонких кривых труб. Известно, что кривые трубы со сравнительно тонкими стенками проявляют при изгибе меньшую жесткость, чем то следовало бы ожидать согласно обычной теории кривых брусков²⁾. Поэтому в таких случаях необходимо принимать во внимание искажение поперечного сечения при изгибе³⁾.

¹⁾ Дифференциальное уравнение изогнутой оси кругового кольца было выведено Н. Рёса (см. его «Traité du mécanisme général», т. 5, стр. 78, 1880. См. также J. B o u s s i n e s q. Compt. rend., т. 97, стр. 843, 1883; H. L a m b, Proc. London Math. Soc., т. 19, стр. 365, 1888. Различные примеры применения этого уравнения даны в статье R. M a y e r'a, Z. angew. Math. u. Phys., т. 61, стр. 246, 1913; см. также K. F e d e r l i o f e r, Wasserkraft u. Wasserwirtsch., т. 38, стр. 237, 1943.

²⁾ Большая экспериментальная работа по изгибу кривых труб была произведена А. В а n t l i n'o м, Z. Ver. deut. Ing., т. 54, стр. 45, 1910; Forschungsarb. 96; см. также W. H o v g a a r d, J. Math. and Phys., т. 7, 1928 и A. M. W a h l, Trans. A.S.M.E., т. 49, 1927. Вопрос об изгибе кривых труб имеет практическое значение при расчете напряжений в труболпроводах. Новейшая литература по этому предмету дана в статье J. E. В r o s k, J. Appl. Mech., т. 19, стр. 501, 1952. См. также статью N. G o s s'a, представленную собранию общества Инженеров механиков, London, декабрь 1952.

³⁾ Этот вопрос для труб круглого поперечного сечения рассмотрел Th. K á r m á n, Z. Ver. deut. Ing., т. 55, стр. 1889, 1911. Изгиб труб эллиптического поперечного сечения был исследован M. T. H u b e r'o м, см. Proc. 7-th Internat. Congr. Appl. Math. Mech., том I, стр. 322, 1948. Случай кривых труб произвольного поперечного сечения был исследован автором; см. Trans. A.S.M.E., т. 65, стр. 135, 1923.

Рассмотрим заключенный между двумя смежными поперечными сечениями элемент кривой круглой трубы (рис. 335), которая изгибается парами сил в указанном направлении. Так как при изгибе растягивающие усилия на выпуклой стороне трубы и сжимающие усилия на вогнутой стороне дают равнодействующие, направленные к нейтральной оси, то первоначально круговые поперечные сечения трубы сплющиваются, превращаясь в эллиптические. Это сплющивание поперечного сечения оказывает в свою очередь влияние на деформацию продольных волокон трубы. Допустим, что внешнее волокно ab после изгиба занимает положение a_1b_1 ; обозначим его перемещение по направлению к нейтральной оси через δ . Тогда полное удлинение этого волокна будет

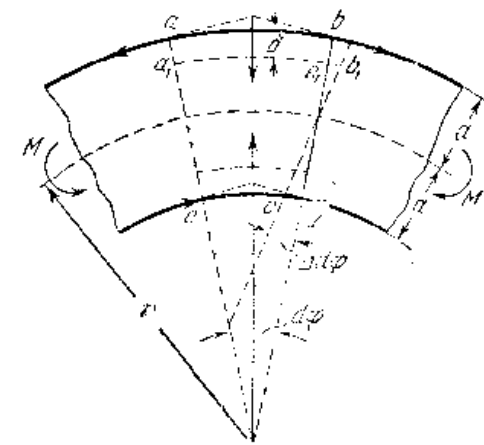


Рис. 335.

Тогда полное удлинение этого волокна будет

$$a_1b_1 - ab = a_1b_1 - a_1e_1 - (ab - a_1e_1). \quad (a)$$

Обозначим через $d\varphi$ угол между двумя смежными сечениями ac и bd до деформации, $\Delta d\varphi$ — изменение этого угла при изгибе, r — радиус оси трубы и a — радиус поперечного сечения трубы. Предположим, что отношение a/r настолько мало, что можно считать нейтральную ось проходящей через центр тяжести поперечного сечения. Тогда из рисунка получаем

$$a_1b_1 - a_1e_1 = (a - \delta) \Delta d\varphi \approx a \Delta d\varphi^1).$$

Полное удлинение волокна ab , определяемое уравнением (a), равняется

$$a \Delta d\varphi - \delta d\varphi$$

и относительное удлинение этого волокна будет:

$$\varepsilon = \frac{a \Delta d\varphi - \delta d\varphi}{(r+a) d\varphi} = \frac{a}{r+a} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\delta}{r+a}. \quad (b)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет собой деформацию волокна вследствие поворота сечения bd относительно сечения ac . Это есть удлинение, которое рассматривалось при изгибе сплошных кривых брусков. Второй член в правой части уравнения (b) представляет собой влияние сплющивания поперечного

¹⁾ Перемещение δ считается весьма малым по сравнению с радиусом a .

сечения. Очевидно, что это влияние может быть весьма значительным. Возьмем, например, $r+a=150$ см и $\delta=0,05$ см. Тогда величина $\frac{\delta}{r+a}=1/3000$ и соответствующее ей напряжение для стальной трубы будет равно $\frac{E\delta}{r+a}=2,1 \cdot 10^3 \cdot 1/3000=700$ кг/см². Следовательно, весьма малое сплющивание поперечного сечения вызывает значительное уменьшение напряжения в крайнем волокне ab . Подобное же заключение можно вывести и для волокна cd , расположенного на вогнутой поверхности трубы.

Изменение направления изгибающего момента влечет за собой изменение знака нормальных напряжений; в результате этого вместо сплющивания трубы в радиальном направлении, произойдет сплющивание в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, и благодаря этому сплющиванию волокно ab будет перемещаться наружу. Путем таких же рассуждений, как и выше, можно показать, что и в этом случае сплющивание поперечного сечения вызывает уменьшение напряжений в наиболее удаленных волокнах. Поэтому, можно заключить, что волокна трубы, наиболее удаленные от нейтральной оси, не принимают того участия в распределении напряжений, которое предусматривается обычной теорией изгиба. Это влияет на изгиб трубы точно таким же образом, как и уменьшение ее момента инерции. Поэтому вместо уравнения (214), которое было выведено для сплошных кривых брусьев, нужно при определении деформаций тонких кривых труб пользоваться следующим уравнением:

$$\Delta d\varphi = \frac{Mr d\varphi}{kEJ_z}, \quad (236)$$

в котором k есть численный коэффициент, меньший единицы и учитывающий влияние сплющивания. Этот коэффициент зависит от размеров трубы и может быть вычислен по следующей приближенной формуле ¹⁾:

$$k = 1 - \frac{9}{10+12\left(\frac{tr}{a^2}\right)^2}, \quad (237)$$

где t —толщина стенок трубы. Эта формула показывает, что влияние сплющивания зависит лишь от величины отношения tr/a^2 .

Что же касается влияния сплющивания на распределение напряжений, то Карман показал, что вместо обычной формулы для нормальных напряжений при изгибе $\sigma = \frac{My}{J_z}$ ²⁾, где y означает расстояние

¹⁾ См. статью Th. Kármán'a, цитированную на стр. 340.

²⁾ Предполагается, что r велико по сравнению с a и что гипотеза линейного распределения напряжений достаточно точна.

от нейтральной оси, нужно пользоваться следующей, более сложной, формулой

$$\sigma = \frac{My}{kJ_z} \left(1 - \beta \frac{y^2}{a^2}\right), \quad (c)$$

где

$$\beta = \frac{6}{5-6\left(\frac{tr}{a^2}\right)^2}.$$

Наибольшее напряжение, определяемое из уравнения (c), равняется

$$\sigma_{\max} = k_1 \frac{Md}{2J_z}, \quad (238)$$

где d есть внешний диаметр трубы, а

$$k_1 = \frac{2}{3k\sqrt{3\beta}}$$

—численный коэффициент, зависящий от размеров трубы. В нижеприведенной таблице 15 приведено несколько значений k_1 :

Таблица 15
Значение k_1 к формуле (238)

$\frac{tr}{a^2}$	0,3	0,5	1,0
k_1	1,98	1,30	0,88

Отсюда видно, что когда отношение tr/a^2 мало, действительные наибольшие напряжения значительно выше напряжений, определяемых на основании обычной теории, в которой пренебрегается влиянием сплющивания поперечного сечения.

Выводы, аналогичные предыдущим, можно сделать также и для трубы прямоугольного поперечного сечения ¹⁾. Например, найдено, что для тонкой трубы квадратного поперечного сечения коэффициент k в уравнении (236) зависит от величины отношения

$$n = \frac{b^4}{r^2t^2},$$

где t — толщина стенок трубы, r — радиус оси трубы, b — длина стороны квадрата, и определяется из следующего уравнения:

$$k = \frac{1+0,0270n}{1+0,0656n}. \quad (239)$$

¹⁾ Такая задача встречается, например, при проектировании краев Фейрбайна, см. сноску 3, стр. 340.

Например, при $b/r=0,1$ и $b/t=50$ получим $n=25$ и $k=0,63$. Наибольшие напряжения в трубах прямоугольного поперечного сечения увеличиваются обратно пропорционально жесткости, т. е. в приведенном выше примере искажение поперечного сечения увеличивает наибольшие напряжения приблизительно на 60%¹⁾.

Если поперечное сечение кривого бруса имеет полки значительной ширины, то вопрос об искажении поперечного сечения опять-таки имеет практическое значение. Такую задачу, например, мы имеем при исследовании напряжений от изгиба в узле жесткой рамы двутаврового поперечного сечения (рис. 336). Рассматривая элемент рамы, заключенный между двумя смежными поперечными сечениями m, n и m', n' , мы видим, что продольные напряжения от изгиба σ в полках имеют составляющие в радиальном направлении, которые стремятся вызвать изгиб полок (рис. 336, б). В результате этого изгиба получается некоторое уменьшение продольных напряжений от изгиба σ в частях полок, расположенных на значительном расстоянии от стенки. Чтобы принять во внимание это обстоятельство,

нужно в формулу (i), на стр. 313, для двутаврового сечения вместо действительной ширины подставить полезную ширину ab полки. Естественно, что величина коэффициента α , определяющего полезную ширину полки, зависит от гибкости полок, которая выражается величиной

$$\beta = 1,32 \frac{b}{\sqrt{tr}}, \quad (d)$$

где t —толщина полки и r —радиус кривизны полки. Для внутренней полки $r=r_1$, а для наружной полки $r=r_2$. Вычисления показывают, что если $\beta < 0,65$, то изгибом полок можно пренебречь, и мы можем непосредственно применять теорию, изложенную в § 79. При больших значениях β для вычисления полезной ширины полки можно пользоваться формулой²⁾

$$ab = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{i}{2\pi\beta^3} \right) b. \quad (e)$$

¹⁾ О дальнейшем развитии теории изгиба кривых труб см. L. Veski, J. Appl. Mech., т. 12, 1945; E. Reissner, Proc. Nat. Acad. Sci., т. 35, стр. 204, 1949; R. A. Clark, T. G. G. Gou and E. Reissner, J. Appl. Mech., т. 19, 1952.

²⁾ Вывод этой формулы см. в докторской диссертации Otto Steinhilber, Darmstadt, 1938. Результаты опытов проведенных Steinhilberом, удовлетворительно согласуются с формулой.

Предположим, например, что мы имеем ширину полки $b=15$ см, соответствующий радиус $r=20$ см и толщину $t=2,5$ см. Тогда по формуле (d) получим $\beta=2,80$ и полезная ширина полки равняется $0,35 \cdot 15 = 5,25$ см.

85. Изгиб кривого бруса не в плоскости его начальной кривизны

Выше мы излагали вопрос об изгибе кривых брусьев в плоскости их начальной кривизны. Однако имеются случаи, когда силы, действующие на кривой брус, не лежат в плоскости оси бруса¹⁾. В таких случаях необходимо рассматривать изгиб бруса в двух перпендикулярных плоскостях и кручение бруса. Простая задача такого рода показана на рис. 337, а, в которой часть горизонтального кругового кольца, заделанная в сечении А, нагружена вертикальной нагрузкой P , приложенной на конце В²⁾. Рассматривая поперечное сечение D бруса и принимая координатные оси, как показано на рисунках 337, б и 337, в³⁾, находим, что моменты внешней силы P относительно этих осей равняются

$$\begin{aligned} M_x &= -Pr \sin(\alpha - \varphi), & M_y &= 0, \\ M_z &= Pr [1 - \cos(\alpha - \varphi)]. \end{aligned} \quad (a)$$

При помощи этих выражений можно вычислить в любом поперечном сечении напряжения от изгиба и кручения. При вычислении

¹⁾ Несколько задач такого рода были рассмотрены I. Stutz'ом, Z. österr. Architekt. u. Ing. Ver., стр. 682, 1904; H. Müllер—Weslaу, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 2 изд., стр. 258, 1913 и 4 изд., стр. 265; В. Г. Капелберг, Eisenbau, стр. 329, 1913. Случай кругового кольца, опертого в нескольких точках и нагруженного силами, перпендикулярными плоскости кольца, был рассмотрен F. Düstergel'ом, Eisenbau, стр. 73, 1920 и G. Ubold, Forschungsarb., № 225, 1922. Та же задача была рассмотрена С. В. Biezeno при помощи теоремы о наименьшей работе, Ingenieur (Archit.), 1927 и Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 237, 1928. Применение тригонометрических рядов к той же задаче показано Biezeno и J. J. Kosh'ом там же, т. 16, стр. 321, 1936. Эта задача имеет практическое значение при проектировании паропроводов. Соответствующая библиография дана в статье H. E. Maugou, J. Appl. Mech., т. 4, стр. 89, 1937. См. также A. H. Gibson and E. G. Ritchie, A Study of the Circular—Arc Bow—Girder, London, 1914. Полное исследование вопроса можно найти в книге Biezeno и R. Grammel, упомянутой на стр. 321; см. также опубликованные работы: M. B. Hogan, Bull. Univ. of Utah, т. 34, 1943—1944; т. 35, 1945 и 1947; т. 36, 1947; т. 38, 1948. В последнем бюллетене дан список многочисленных опубликованных работ относящихся к расчету круговых колец.

²⁾ Эта задача была рассмотрена St. Venant'ом, см. его статьи в Compt. rend., т. 17, 1843.

³⁾ Предполагается, что горизонтальная ось x и вертикальная ось y являются осями симметрии поперечного сечения и что ось z —касательная к оси кольца в точке D.

перемещения конца B применяется теорема Кастилиано, для чего необходимо иметь выражение для потенциальной энергии бруса.

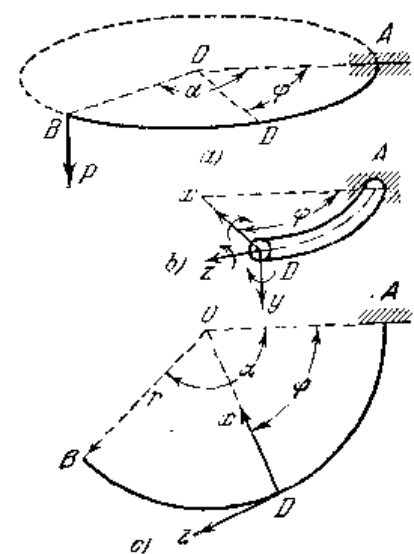


Рис. 337.

Полагая, что размеры поперечного сечения бруса малы по сравнению с радиусом r , применяем здесь те же формулы, которые ранее были выведены для прямого бруса (см. уравнения (186) и (190)). Поэтому выражение для потенциальной энергии бруса представится в таком виде:

$$U = \int_0^\alpha \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_z^2}{2C} \right) r d\varphi, \quad (b)$$

где C означает жесткость при кручении бруса¹⁾. Тогда искомое перемещение δ получится из уравнения

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

Подставляя вместо U выражение (b) и замечая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -r \sin(\alpha - \varphi) \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_z}{\partial P} = r [1 - \cos(\alpha - \varphi)],$$

получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \int_0^\alpha \left\{ \sin^2(\alpha - \varphi) + \frac{EJ_x}{C} [1 - \cos(\alpha - \varphi)]^2 \right\} d\varphi. \quad (240)$$

В частном случае при $\alpha = \pi/2$ имеем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{EJ_x}{C} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \right]. \quad (c)$$

Если поперечное сечение кольца является круговым, то $C = GJ_\rho = 2GJ_x$, полагая $E = 2,6G$, получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ_x} \left[\frac{\pi}{4} + 1,3 \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \right] = 1,248 \frac{Pr^3}{EJ_x}. \quad (241)$$

В качестве примера статически неопределимой задачи рассмотрим горизонтальный брус в виде полукруга с заделанными концами и нагруженный посередине (рис. 338, a). Рассматривая

только малые вертикальные перемещения бруса, мы можем вполне пренебречь перемещениями в горизонтальной плоскости, как малыми величинами высшего порядка. Следовательно, не будет ни изгиба кольца в его плоскости, ни сил или моментов в этой плоскости на концах A и B . Рассматривая заделанный конец B , мы заключаем из условий равновесия, что там будут действовать вертикальная реакция $P/2$ и момент $M_{z_0} = Pr/2$. Момент M_x , также будет действовать, препятствуя концевому сечению B поворачиваться относительно оси z_0 . Величина этого момента не может быть определена из уравнений статики. Мы пойдем ее при помощи теоремы о наименьшей работе, согласно которой имеем

$$\frac{\partial U}{\partial M_{z_0}} = 0. \quad (d)$$

При выводе выражения для потенциальной энергии бруса мы изображаем моменты, приложенные к концу B , векторами $Pr/2$ и M_{z_0} , как показано на рис. 338, b. Тогда моменты M_x и M_z в каком-либо поперечном сечении D будут

$$M_x = \frac{Pr}{2} \cos \varphi - M_{z_0} \sin \varphi - \frac{Pr}{2} \sin \varphi, \quad (e)$$

$$M_z = \frac{Pr}{2} \sin \varphi + M_{z_0} \cos \varphi - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi), \quad (f)$$

и выражение для потенциальной энергии представится в таком виде:

$$U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_z^2}{2C} \right) r d\varphi. \quad (g)$$

Подставляя это выражение в уравнение (d) и замечая, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_{z_0}} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial M_z}{\partial M_{z_0}} = \cos \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EJ_x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{Pr}{2} \sin^2 \varphi + M_{z_0} \sin^2 \varphi - \frac{Pr}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi + \\ & + \frac{1}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{Pr}{2} \sin \varphi \cos \varphi + M_{z_0} \cos^2 \varphi - \frac{Pr}{2} (1 - \cos \varphi) \cos \varphi \right] d\varphi = 0, \end{aligned}$$

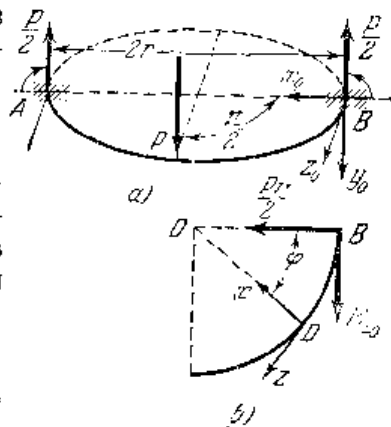


Рис. 338.

¹⁾ Вычисление C для различных форм поперечного сечения рассмотрено в главе VII, часть II. О более строгом изложении вопроса о напряжениях в части кольца см. Theory of Elasticity, стр. 391, 1951.

откуда

$$M_z = \frac{Pr}{2} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) = -0,182Pr. \quad (242)$$

Знак минус указывает на то, что направление M_z противоположно тому, что показано на рис. 338, а. Зная M_{z_0} , мы можем из выражений (e) и (i) получить изгибающий и крутящий моменты в любом поперечном сечении.

Наибольший прогиб, очевидно, будет под нагрузкой, и мы легко получим его из уравнения Кастилиано:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (h)$$

Подставляя выражение (g) для U и замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial P} &= \frac{r}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi), \\ \frac{\partial M_z}{\partial P} &= \frac{r}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi - 1), \end{aligned} \quad (i)$$

получаем

$$\delta = \frac{Pr^3}{2EJ_x} \left\{ (2 - 0,363) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{EJ_x}{C} \left[(2 - 0,363) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - 1 + 0,363 \right] \right\} = 0,514 \frac{Pr^3}{2EJ_x}. \quad (j)$$

При нахождении частных производных (i) мы пренебрегли тем обстоятельством, что крутящий момент M_z не является независимой величиной, но представляет функцию от P , определяемую выражением (242). Если мы примем это во внимание, то правая часть уравнения (h) будет написана в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M_z} \frac{dM_z}{dP}. \quad (k)$$

Но второй член в этом выражении отпадает, согласно уравнению (d). Следовательно, наш предыдущий способ определения прогиба δ является обоснованным.

Иногда мы должны рассматривать кривые брусья, ось которых не является плоской кривой и в этом случае мы будем иметь пространственную задачу. Задачи такого рода встречаются например при расчете укрепляющего ребра в трубчатых фюзеляжах. Здесь опять может быть применен с пользой метод Кастилиано⁴⁾.

⁴⁾ См. статью K. Mangnerle, Luftfahrt Forsch., 18 стр. 253—61, 1941, Nat. Advisory Comm. Aeronaut, Mem. No 1005, 1942, См. также N. J. Hoff, цитированн. на стр. 330.

ЗАДАЧИ

1. Кривой брус с круговой осью и с $\alpha = \pi/2$ (рис. 337) нагружен на конце скручивающей парой $M_z = T$. Найти перемещение конца B в вертикальном направлении.

Ответ. Полагая $EJ_x/C = 1,3$, находим $\sigma = 0,506 \frac{Tr^2}{EJ_x}$.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что к концу B приложена изгибающая пара $M_x = M_0$ в вертикальной плоскости, касательной к оси в точке B .

Ответ. $\sigma = 1,150 \frac{M_0 r^2}{EJ_x}$.

3. Брус в виде полукруга с осью в горизонтальной плоскости заделан в сечениях A и B и нагружен симметрично двумя вертикальными грузами P в сечениях C и D (рис. 339). Найти крутящие моменты M_{z_0} в заделанных концах.

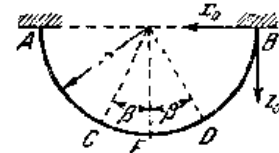


Рис. 339.

Ответ. $M_{z_0} = -\frac{2}{\pi} Pr \left(\frac{\pi}{2} - \cos \beta - \beta \sin \beta \right)$.

4. Решить предыдущую задачу для случая равномерной вертикальной нагрузки интенсивностью q , распределенной по всей длине бруса.

Ответ. $M_{z_0} = -qr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = -0,32qr^2$.

5. Горизонтальный брус в виде полукруга, показанный на рис. 339 и равномерно нагруженный, как в предыдущей задаче, опирается в среднем поперечном сечении F . Найти вертикальную реакцию N опоры F .

Ответ. $N = 2qr$.

Таким же образом момент инерции прямоугольника относительно оси y будет

$$J_y = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = \frac{hb^3}{12}.$$

Уравнение (244) можно применять также к вычислению J_z для параллелограмма, показанного на рис. 342, так как этот параллелограмм можно получить из прямоугольника, показанного пунктиром, перемещением параллельно оси z элементов, из которых один изображен на фигуре. Площади элементов и их расстояния от оси z остаются неизменными при таком перемещении, так что J_z является таким же, как и для прямоугольника.

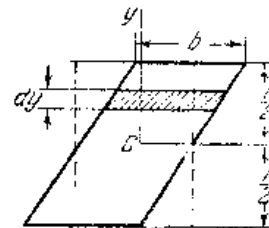


Рис. 342.

При вычислении момента инерции треугольника относительно основания (рис. 343) площадь элемента, показанного на рисунке, равняется

$$dF = b \frac{h-y}{h} dy$$

и уравнение (243) дает

$$J_z = \int_0^h b \frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Метод вычисления, иллюстрированный предыдущими примерами может быть применен в самом общем случае. Момент инерции получается делением фигуры на бесконечно малые полоски, параллельные оси, и затем интегрированием как в уравнении (243).

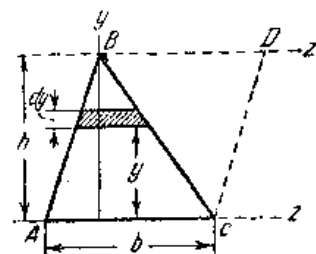


Рис. 343.

Вычисление часто можно упростить если фигура может быть разбита на части, моменты инерции которых относительно оси известны. В таком случае полный момент инерции равен сумме моментов инерции всех частей.

Из определения (уравнение (243)) следует, что момент инерции площади относительно оси имеет размеры длины

возведенной в четвертую степень. Следовательно, делением момента инерции относительно некоторой оси на площадь фигуры получается квадрат некоторой длины. Эта длина i называется *радиусом инерции* относительно этой оси. Для осей y и z радиусы инерции будут

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (245)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в ее плоскости

При исследовании изгиба балок мы встречались с интегралами такого типа:

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad (243)$$

в котором каждая элементарная площадь dF умножается на квадрат ее расстояния от оси z и интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения балки (рис. 340). Такой ин-

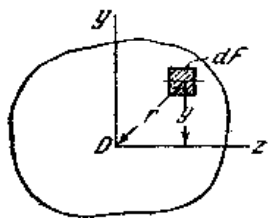


Рис. 340.

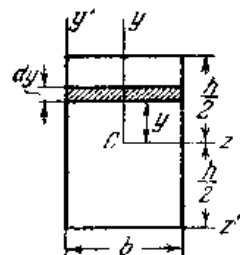


Рис. 341.

теграл называется *моментом инерции* площади F относительно оси z . В простых случаях моменты инерции могут быть легко вычислены аналитически. Возьмем, например, прямоугольник (рис. 341). При вычислении момента инерции этого прямоугольника относительно горизонтальной оси симметрии z мы можем разбить прямоугольник на бесконечно малые элементы, как показано на фигуре заштрихованной площадью. Тогда

$$J_z = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (244)$$

ЗАДАЧИ

1. Найти момент инерции прямоугольника на рис. 341 относительно основания.

Ответ. $J_z = \frac{bh^3}{3}$.

2. Найти момент инерции треугольника ABC относительно оси z' (рис. 343).
Решение. Этот момент инерции представляет разность моментов инерции параллелограмма $ABDC$ и треугольника BDC . Следовательно,

$$J_{z'} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}$$

3. Найти J_z для поперечных сечений, показанных на рис. 344.

Ответ. Для (а) $J_z = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2h)^4}{12}$; для (б) и (с) $J_z = \frac{ba^3}{12} - \frac{(b-h_1)(a-2h)^3}{12}$.

4. Найти момент инерции квадрата со сторонами a относительно диагонали.

Ответ. $J = \frac{a^4}{12}$.

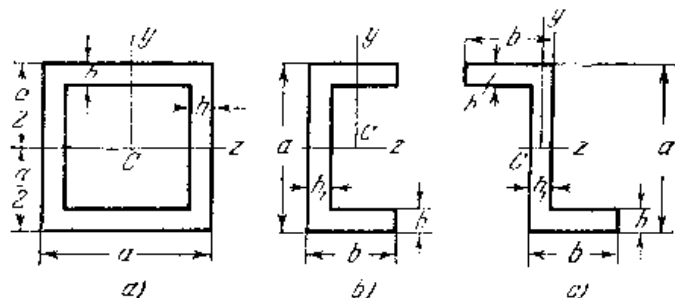


Рис. 344.

5. Найти i_y и i_z для прямоугольника, показанного на рис. 341.

Ответ. $i_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, $i_z = \frac{h}{2\sqrt{3}}$.

6. Найти i_z для фигур 344, а и 344 б.

II. Полярный момент инерции плоской фигуры

Момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, называется *полярным моментом инерции* относительно точки, где ось пересекает плоскость (точка O на рис. 340), и определяется интегралом

$$J_p = \int_F r^2 dF, \quad (246)$$

в котором каждая элементарная площадка dF умножается на квад-

рат ее расстояния до оси. При этом интегрирование распространяется по всей площади фигуры.

Из рис. 340 мы имеем $r^2 = y^2 + z^2$, и тогда из уравнения (246) получим

$$J_p = \int_F (y^2 + z^2) dF = J_z + J_y, \quad (247)$$

т. е. полярный момент инерции относительно какой-либо точки O равен сумме моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей y и z , проходящих через ту же точку.

Рассмотрим *круговое поперечное сечение*. Мы встречали полярный момент инерции круга относительно его центра при исследовании кручения круглого вала (см. § 61). Если мы разобьем

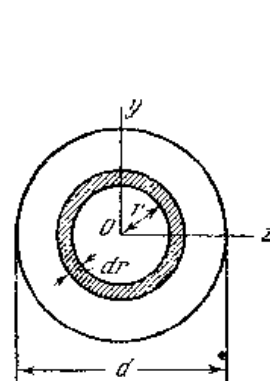


Рис. 345.

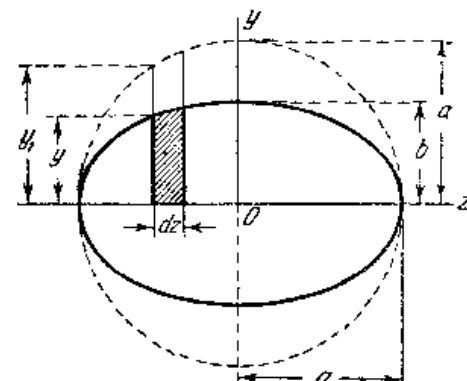


Рис. 346.

площадь круга на тонкие элементарные кольца, как показано на рис. 345, то мы будем иметь $dF = 2\pi r dr$ и из уравнения (246) получим

$$J_p = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (248)$$

Мы знаем, что в этом случае вследствие симметрии $J_y = J_z$, поэтому из уравнений (247) и (248) получаем

$$J_y = J_z = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (249)$$

Момент инерции эллипса относительно главной оси z (рис. 346) может быть получен путем сравнения эллипса с кругом, показанным на рисунке пунктиром. Высота y какого-либо элемента эллипса, например, показанного штриховкой, может быть получена уменьшением высоты y_1 соответствующего элемента круга в отношении b/a . Из уравнения (241) следует, что моменты инерции этих двух

элементов относительно оси z будут находиться в отношении b^3/a^3 . Моменты инерции эллипса и круга, очевидно, будут паходиться в том же отношении; следовательно, момент инерции эллипса равняется

$$J_z = \frac{\pi (2a)^4 b^3}{64 a^3} = \frac{\pi ab^3}{4}. \quad (250)$$

Таким же образом находим для вертикальной оси

$$J_y = \frac{\pi ba^3}{4},$$

тогда полярный момент инерции эллипса, на основании уравнения (247), будет

$$J_p = J_y + J_z = \frac{\pi ab^3}{4} + \frac{\pi ba^3}{4}. \quad (251)$$

ЗАДАЧИ

1. Найти полярный момент инерции прямоугольника относительно центра тяжести (рис. 341).

$$\text{Ответ. } J_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}.$$

2. Найти полярный момент инерции площадей, показанных на рис. 344, относительно центров тяжести.

III. Теорема о параллельном переносе осей

Если известен момент инерции площади относительно оси, проходящей через центр тяжести (рис. 347), то момент инерции относительно какой-либо параллельной оси может быть вычислен из следующего уравнения, выражающего теорему о моментах инерции относительно параллельных осей:

$$J_{z'} = J_z + Fd^2, \quad (252)$$

в котором F есть площадь фигуры и d — расстояние между осями.

Теорема легко доказывается на основании уравнения (243):

$$J_{z'} = \int_F (y + d)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2 \int_F yd dF + \int_F d^2 dF.$$

Первый интеграл в правой части равен J_z , третий интеграл равен Fd^2 , а второй интеграл обращается в нуль вследствие того, что ось z проходит через центр тяжести площади. Поэтому это

уравнение сводится к уравнению (252). Уравнение (252) особенно полезно при вычислении моментов инерции поперечных сечений составных балок (рис. 348). Положение центров тяжести стандартных уголков и моменты инерции их поперечных сечений относительно осей, проходящих через их центры тяжести, даны в справочниках. При помощи теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей момент инерции такого составного сечения относительно оси z может быть легко вычислен.

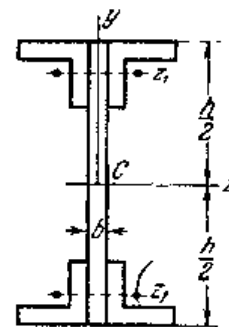


Рис. 348.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей, найти момент инерции треугольника (рис. 343) относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной основанию.

$$\text{Ответ. } J = \frac{bh^3}{36}.$$

2. Найти момент инерции J_z сечения, показанного на рис. 348, если $h=50$ см, $b=1,2$ см и уголки имеют размеры $10 \times 10 \times 1,2$ см.

$$\text{Решение. } J_z = 1,2 \cdot 50^3 / 12 + 4[209 + 22,8(25 - 2,91)^2] = 57\,880 \text{ см}^4.$$

3. Найти момент инерции относительно нейтральной оси площади швеллера в задаче 2, стр. 95.

IV. Центробежный момент инерции. Главные оси

Интеграл

$$J_{yz} = \int_F yz dF, \quad (253)$$

в котором каждая элементарная площадка dF умножается на произведение ее координат и интегрирование распространяется на всю площадь F плоской фигуры, называется *центробежным моментом инерции* фигуры. Если фигура имеет ось симметрии, которая принята за ось y или z (рис. 349), то центробежный момент инерции равен нулю. Это следует из того, что в этом случае для какого-либо элемента, например, dF с положительным z существует равный и симметрично расположенный элемент dF' с отрицательным z . Соответствующие элементарные произведения $yz dF$ уничтожают друг друга, поэтому интеграл (253) обращается в нуль.

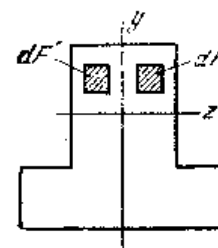


Рис. 349.

В общем случае для какой-либо точки любой плоской фигуры мы можем всегда найти две перпендикулярные оси так, чтобы центробежный момент инерции для этих осей равнялся нулю. Возьмем, например, оси y и z рис. 350. Если оси повернуть около точки O на 90° в направлении часовой стрелки, то новое положение осей будет y' и z' , как показано на рисунке. Тогда получается

следующее соотношение между старыми координатами элемента dF и его новыми координатами:

$$y' = z, \quad z' = -y.$$

Следовательно, центробежный момент инерции для новых координат равен

$$J_{y'z'} = \int_F y'z' dF = - \int_F yz dF = -J_{yz}.$$

Таким образом, при этом повороте центробежный момент инерции изменяет свой знак. Так как центробежный момент инерции изменяется непрерывно вместе с углом поворота, то должны быть такие направления, для которых эта величина становится нулем. Оси в

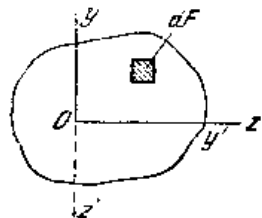


Рис. 350.

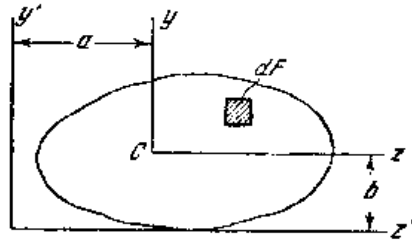


Рис. 351.

этих направлениях называются *главными осями*. Обыкновенно центр тяжести принимается за начало координат, и тогда соответствующие главные оси называются *главными центральными осями*. Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось и ось, ей перпендикулярная, будут главными осями фигуры, так как центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю, как выяснено выше.

Если известен центробежный момент инерции фигуры для осей y и z (рис. 351), проходящих через центр тяжести площади, то центробежный момент инерции для параллельных осей y' и z' может быть найден из уравнения:

$$J_{y'z'} = J_{yz} + Fab. \quad (254)$$

Это выражает теорему о параллельных осях для центробежных моментов инерции и доказывается на основании того, что координаты элемента dF для новых осей будут $y' = y + b$, $z' = z + a$. Следовательно,

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \int_F y'z' dF = \int_F (y + b)(z + a) dF = \\ &= \int_F yz dF + \int_F ab dF + \int_F ya dF + \int_F bz dF. \end{aligned}$$

Последние два интеграла обращаются в нуль, потому что C есть центр тяжести площади, и уравнение сводится к (254).

ЗАДАЧИ

1. Найти $J_{y'z'}$ для прямоугольника на рис. 341.

Ответ. $J_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{4}$.

2. Найти центробежный момент инерции уголка (рис. 352) относительно осей y и z , а также для осей y_1 и z_1 .

Решение. Разбивая фигуру на два прямоугольника и применяя уравнение (254) для каждого из этих прямоугольников, мы находим

$$J_{yz} = \frac{a^2h^2}{4} + \frac{h^2(a^2 - h^2)}{4}.$$

Из условий симметрии $J_{y_1z_1} = 0$.

3. Определить центробежный момент инерции J_{yz} для сечений, показанных на рис. 344, если C есть центр тяжести.

Решение. Для рисунков 344, а и 344, б $J_{yz} = 0$ вследствие симметрии. В случае рис. 344, в, разбивая сечение на три прямоугольника и пользуясь уравнением (254), мы находим

$$J_{yz} = -2(b - h_1)h \left(\frac{a - h}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right).$$

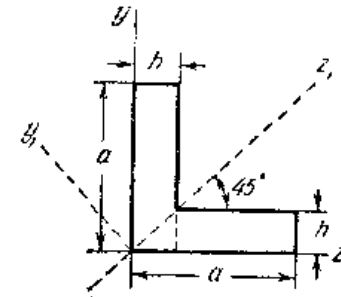


Рис. 352.

V. Изменение направления осей. Определение главных осей

Предположим, что известны моменты инерции

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F z^2 dF \quad (a)$$

и центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \int_F yz dF \quad (b)$$

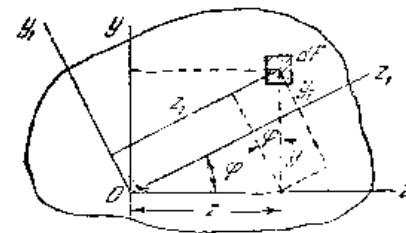


Рис. 353.

и требуется найти те же величины для новых осей y_1 и z_1 (рис. 353). Рассматривая элементарную площадку dF , найдем из чертежа новые координаты

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y_1 &= y \cos \varphi - z \sin \varphi, \end{aligned} \quad (c)$$

где φ есть угол между z и z_1 . Тогда

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 dF = \\ &= \int_F y^2 \cos^2 \varphi dF + \int_F z^2 \sin^2 \varphi dF - \int_F 2yz \sin \varphi \cos \varphi dF. \end{aligned}$$

или, пользуясь (а) и (b), получаем

$$J_{z_1} = J_z \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (255)$$

Таким же образом

$$J_{y_1} = J_z \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi + J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (255')$$

Взяв сумму и разность уравнений (255) и (255'), мы найдем

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y, \quad (256)$$

$$J_{z_1} - J_{y_1} = (J_z - J_y) \cos 2\varphi - 2J_{yz} \sin 2\varphi. \quad (257)$$

Эти уравнения весьма полезны для вычисления J_{z_1} и J_{y_1} . Для вычисления $J_{y_1 z_1}$ мы находим

$$\begin{aligned} J_{y_1 z_1} &= \int_F y_1 z_1 dF = \int_F (y \cos \varphi - z \sin \varphi)(z \cos \varphi + y \sin \varphi) dF = \\ &= \int_F y^2 \sin \varphi \cos \varphi dF - \int_F z^2 \sin \varphi \cos \varphi dF + \int_F yz (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) dF, \end{aligned}$$

или, пользуясь уравнениями (а) и (b), получаем

$$J_{y_1 z_1} = (J_z - J_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + J_{yz} \cos 2\varphi. \quad (258)$$

Центробежный момент инерции равен нулю для главных осей. Следовательно, оси y_1 и z_1 на рис. 353 будут главными осями, если правая часть уравнения (258) обращается в нуль, т. е.

$$(J_z - J_y) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + J_{yz} \cos 2\varphi = 0.$$

Это дает

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}. \quad (259)$$

Уравнение (259) может быть получено путем дифференцирования уравнения (255) по φ и последующего приравнивания нулю результата этого дифференцирования. Это показывает, что моменты инерции относительно главных осей являются один наибольшим, а другой наименьшим.

Определим, например, направления главных осей прямоугольника, проходящих через вершину прямоугольника (рис. 341). В этом случае

$$J_{z'} = \frac{bh^3}{3}, \quad J_{y'} = \frac{hb^3}{3}, \quad J_{y'z'} = \frac{b^2h^2}{4},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{b^2h^2}{2 \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{bh^3}{3} \right)} = \frac{3bh}{2(b^2 - h^2)}. \quad (d)$$

Направление φ определяется тем, что при выводе уравнения (259) угол φ был принят положительным в направлении против часовой стрелки (рис. 353). Уравнение (d) даст два разных значения для φ , отличающихся на 90° . Это будут два перпендикулярных направления главных осей. Зная направления главных осей, можем найти соответствующие моменты инерции из уравнений (256) и (257).

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются *главными радиусами инерции*.

Если y_1 и z_1 являются главными осями инерции (рис. 354) и i_{y_1} и i_{z_1} — главные радиусы инерции, то эллипс с полуосями i_{y_1} и i_{z_1} , как показано на рисунке, называется *эллипсом инерции*. Имея этот эллипс, можем получить радиус инерции i_z для какой-либо оси графически, путем проведения касательной к эллипсу параллельно оси z . Расстояние начала координат O от этой касательной равно длине i_z . Эллипс инерции дает картину изменения момента инерции, когда ось z поворачивается в плоскости фигуры около точки O и показывает, что наибольший и наименьший моменты инерции являются главными моментами инерции.

Для нахождения моментов инерции относительно наклонных осей также можно воспользоваться построением круга Мора. Графический способ вполне аналогичен способу, рассмотренному в главе II для напряжений. Необходимо лишь заменить σ_x , σ_y и τ соответственно J_z , J_y и J_{yz} .

ЗАДАЧИ

1. Определить направления главных центральных осей зетового сечения (рис. 344, с), если $h_1 = 2,5$ см, $b = 12,5$ см, $a = 25$ см.
2. Найти направления главных центральных осей и соответствующие главные моменты инерции для углового сечения $10 \times 5 \times 1$ см.
 Ответ. $\operatorname{tg} 2\varphi = 0,541$; $J_{\max} = 149,84$ см⁴; $J_{\min} = 16,02$ см⁴.
3. Определить полуоси эллипса инерции для эллиптического поперечного сечения (рис. 346).
 Ответ. $i_z = \frac{b}{2}$, $i_y = \frac{a}{2}$.
4. При каких условиях эллипс инерции становится кругом?

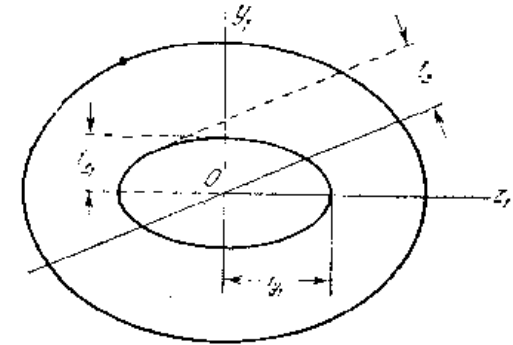


Рис. 354.