

Г. С. ПИСАРЕНКО, В. А. АГАРЕВ, А. Л. КВИТКА,
В. Г. ПОПКОВ, Э. С. УМАНСКИЙ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией акад. АН УССР
Г. С. Писаренко

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
машиностроительных специальностей
высших учебных заведений*

Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под общ. ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. — 4-е изд., перераб. и доп. — Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. — 696 с. 30106. 2105000000

В учебнике освещены основные вопросы сопротивления материалов, отражающие современный уровень науки и техники. Достаточно подробно изложены общие методы определения перемещений и метод сил, вопросы упругих колебаний, расчеты при действии повторно-переменных и ударных нагрузок. Приведены элементы теории тонкостенных оболочек, дано большое количество детально разобранных примеров. Обновлен и дополнен материал по методам расчетов. Дополнены также справочные данные.

Для студентов всех форм обучения машиностроительных специальностей технических вузов.

Табл. 28. Ил. 605. Список лит.: 20 назв.

Р е ц е н з е н т: кафедра динамики и прочности машин Московского энергетического института

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению
Зав. редакцией *О. А. Добровольский*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи научно-технического прогресса нашей страны на 10-ю пятилетку, намеченные решениями XXV съезда КПСС, вызывают необходимость и дальше повышать качество подготовки научных и инженерных кадров, способных решать сложные проблемы. Успех подготовки этих кадров в значительной степени зависит от наличия соответствующих средств обучения, и в частности учебников и учебных пособий.

Настоящий учебник написан с учетом многолетнего опыта преподавания курса сопротивления материалов в Киевском политехническом институте, а также использования первых трех изданий книги (1963, 1967 и 1973 гг.).

Учебник имеет ряд особенностей, отличающих его от большинства учебников, ранее изданных другими авторами. Учитывая затруднения, которые испытывают студенты при изучении курса и преследуя цель равномерно распределить домашние расчетно-проектировочные работы, авторы сочли целесообразным изменить обычно принятую последовательность изложения материала. В частности, такой раздел, как «Геометрические характеристики плоских сечений», носящий вспомогательный характер, помещен в начале курса, что позволяет уже в первые дни выдавать студентам домашнее расчетно-проектировочное задание. Затем в самостоятельную главу выделены вопросы построения эпюр внутренних усилий — раздел, усвоение которого вызывает у студентов определенные трудности. Особенность книги состоит также в том, что решение основных задач сопротивления материалов в ней излагается по единому плану: сначала рассматривается статическая сторона задачи, затем — геометрическая, физическая и, наконец, их синтез.

В настоящем учебнике нашли отражение такие важные для студентов машиностроительных и политехнических высших учебных заведений разделы, как колебания, усталость, а также расчеты при действии ударных нагрузок. Авторы стремились создать такой учебник, который в максимальной степени был бы интересен и полезен студентам. Судя по опыту использования трех предыдущих изданий, поставленная задача в известной степени решена. По-видимому, этому способствовало обилие примеров расчетов и решений задач по всем без исключения разделам курса, а также стремление в рамках студенческого курса в какой-то мере отразить

современные тенденции развития учения о прочности в инженерном деле.

Книга рассчитана на максимальное число учебных часов по программе для студентов машиностроительных специальностей технических вузов. В то же время ею могут пользоваться студенты и других специальностей, так как материалы, предусмотренные любой программой, в компактном виде изложены в соответствующих главах и параграфах.

При подготовке четвертого издания авторы уточнили некоторые положения, внесли дополнения, продиктованные динамичным развитием учения о прочности и новыми тенденциями в методике преподавания в высшей школе. В частности, авторы сочли необходимым включить параграф о малоцикловой усталости, имея в виду практическую важность этой характеристики материалов при решении задач механики деформируемого твердого тела. Авторам представлялось важным в курсе сопротивления материалов осветить современные проблемы прочности, которые могут заинтересовать учащуюся молодежь, приобщающуюся к научной работе со 2—3-го года обучения в институте.

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность сотрудникам кафедры сопротивления материалов КПИ и Института проблем прочности АН УССР за полезные рекомендации, которые учтены при подготовке учебника. Авторы искренне признательны Е. Е. Зеленюк, Л. А. Тютюнник, В. С. Носальскому, Н. С. Мишиной за оказанную помощь при подготовке книги.

Все отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа».

§ 1. НАУКА О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ. ИЗУЧАЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Сопротивлением материалов называют науку об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

В процессе эксплуатации машин и сооружений их элементы (стержни, балки, пластины, болты, заклепки и др.) в той или иной степени участвуют в работе конструкции и подвергаются действию различных сил — нагрузок. Для обеспечения нормальной работы конструкция должна удовлетворять необходимым условиям прочности, жесткости и устойчивости.

Под *прочностью* понимают способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь.

Под *жесткостью* подразумевают способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформации (изменения формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенной величины, устанавливаемой в соответствии с требованиями, предъявляемыми к конструкции.

Устойчивостью называют способность конструкции или ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Чтобы конструкция в целом отвечала требованиям прочности, жесткости и устойчивости, а следовательно, была надежной в эксплуатации, необходимо придать ее элементам наиболее рациональную форму и, зная свойства материалов, из которых они будут изготавливаться, определить соответствующие размеры в зависимости от величины и характера действующих сил.

На первый взгляд может показаться, что для надежного сопротивления элементов конструкции внешним нагрузкам достаточно увеличить их размеры. Действительно, иногда это приводит к желаемым результатам. Однако в тех случаях, когда собственный вес составляет существенную часть действующей на конструкцию нагрузки, увеличение размеров ее элементов, а значит и веса, не приведет к увеличению прочности. Увеличение размеров движущихся деталей механизмов и машин приводит к возрастанию сил инерции, увеличивает нагрузку, а это нежелательно, поскольку также может привести к разрушению.

Увеличение размеров, не вызванное требованиями надежности работы конструкции, приводит к излишнему расходу материалов и повышению ее стоимости. Машины и сооружения нужно строить прочными и надежными в эксплуатации, но, в то же время, легкими и дешевыми.

Сопротивление материалов решает указанные задачи прочности, основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение. В теоретической части эта наука базируется на теоретической механике и математике, а в экспериментальной — на физике и материаловедении.

Сопротивление материалов является исключительно важной общинженерной наукой, необходимой для формирования инженеров

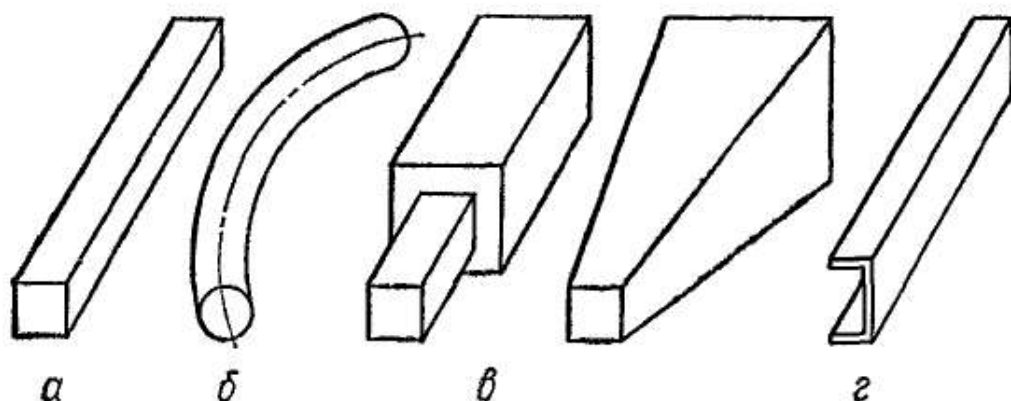


Рис. 1

любой специальности. Без фундаментальных знаний в этой области невозможно создать такие конструкции, как различного рода машины и механизмы, гражданские и промышленные сооружения, мосты, линии электропередач и антенны, ангары, корабли, самолеты и вертолеты, турбомашин, электрические машины, агрегаты атомной энергии, ракетной и реактивной техники и др.

Таким образом, сопротивление материалов — это наиболее общая наука о прочности машин и сооружений. Однако она не исчерпывает всех вопросов механики деформируемых тел. Этими вопросами занимается ряд других смежных дисциплин: строительная механика стержневых систем, теория упругости и теория пластичности. Между указанными дисциплинами нельзя установить строгой границы. Основная же роль при решении задач прочности принадлежит сопротивлению материалов.

При всем разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. К ним относятся стержни, оболочки, пластинки и массивные тела.

Стержнем, или *брусом*, называется тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других (поперечных) размера (рис. 1, а).

В машинах и сооружениях встречаются стержни как прямолинейные (рис. 1, а), так и криволинейные (рис. 1, б), как призматические (рис. 1, а), так и переменного сечения (рис. 1, в). Примерами прямых стержней являются валы, оси, балки. Примерами кривых стержней могут служить грузоподъемные крюки, звенья цепей и др.

Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров поперечного сечения, называют тонкостенными (рис. 1, г). В настоящее время они широко применяются в строительных конструкциях, судо- и особенно в авиастроении.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга.

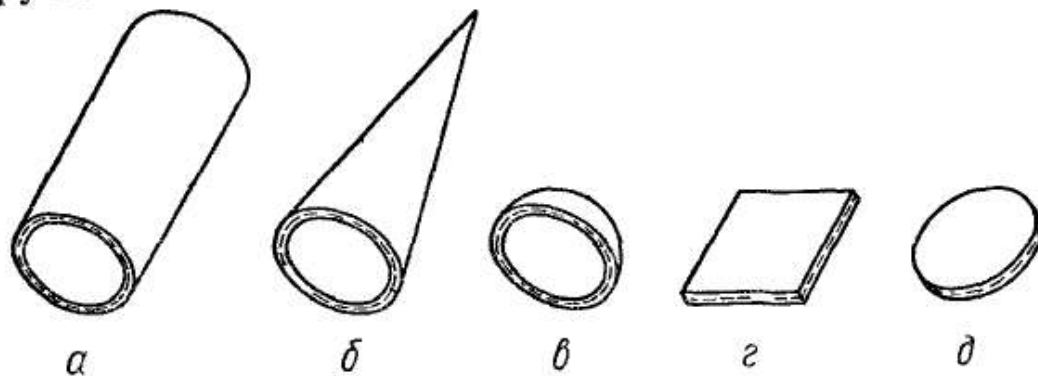


Рис. 2

Поверхность, которая делит толщину оболочки на равные части, называется срединной. По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические (рис. 2, а), конические (рис. 2, б), сферические (рис. 2, в) и др. К оболочкам относятся неплоские стенки тонкостенных резервуаров, котлов, купола зданий, обшивка фюзеляжа, крыла и других частей летательных аппаратов, корпуса подводных лодок и т. д.

Если срединная поверхность представляет собой плоскость, то расчетный объект называют пластинкой (рис. 2, г). Встречаются пластинки круглые (рис. 2, д), прямоугольные (рис. 2, г) и других очертаний. К пластинкам могут быть отнесены плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Тела, у которых все три размера одного порядка, называют массивными телами. К ним относятся фундаменты сооружений, подпорные стенки и т. п.

В сопротивлении материалов задачи, как правило, решаются простыми математическими методами с привлечением упрощающих гипотез и использованием экспериментальных данных; решения при этом доводят до расчетных формул, пригодных для применения в инженерной практике.

Возникновение науки о сопротивлении материалов связывают с именем знаменитого итальянского ученого Галилео Галилея (1564—1642), проводившего опыты по изучению прочности, хотя

истоки этой науки мы видим уже в творениях великого Леонардо да Винчи.

В 1678 г. английский ученый Роберт Гук (1635—1703) установил закон деформирования упругих тел, согласно которому деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию. Этот закон является основным в теории сопротивления материалов.

Быстрое развитие науки о сопротивлении материалов началось в конце XVIII ст. в связи с бурным прогрессом промышленности и транспорта. Проблемами прочности занимались академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер, выдающиеся русские ученые Н. А. Белелюбский, И. Г. Бубнов, А. М. Воропаев, А. В. Гадолин, Х. С. Головин, Д. И. Журавский, В. Л. Кирпичев, С. П. Тимошенко, Ф. С. Ясинский. Развитию сопротивления материалов содействовали работы иностранных ученых Д. Бернулли, Т. Кармана, А. Кастильяно, О. Коши, Ш. Кулона, Г. Ламе, А. Лява, Д. Максвелла, К. Мора, Л. Навье, Л. Прандтля, С. Пуассона и др.

После Великой Октябрьской социалистической революции большой вклад в науку о прочности внесли советские ученые Н. М. Еляев, В. В. Болотин, В. З. Власов, Б. Г. Галеркин, Н. Н. Давиденков, А. Н. Динник, А. А. Ильюшин, А. Н. Крылов, В. Н. Корноухов, Н. И. Мухелишвили, В. В. Новожилов, П. Ф. Папкович, С. Д. Пономарев, И. М. Рабинович, Ю. Н. Работнов, С. В. Серенсен, В. В. Соколовский, А. А. Уманский, В. И. Феодосьев и др.

§ 2. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЯ.

ПОНЯТИЕ О ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ МАТЕРИАЛА

Реальные тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Деформации тел происходят вследствие нагружения их внешними силами или изменения температуры. При деформировании тела его точки, а также мысленно проведенные линии или сечения перемещаются в плоскости или в пространстве относительно своего исходного положения.

При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия между частицами, оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое те занимали до деформации.

Деформации бывают упругие, т. е. исчезающие после прекращения действия вызвавших их сил, и пластические, или остаточные, — не исчезающие.

С увеличением внешних сил внутренние силы также увеличиваются, однако до известного предела, зависящего от свойств материала. Наступает момент, когда тело уже не в состоянии сопротивляться дальнейшему увеличению внешних сил. Тогда оно разрушается. В большинстве случаев для величины деформаций элементов конструкции устанавливают определенные ограничения.

Основным объектом, рассматриваемым в сопротивлении материалов, является стержень с прямолинейной осью.

В сопротивлении материалов изучают следующие основные виды деформаций стержня: растяжение и сжатие, сдвиг (срез), кручение и изгиб. Рассматривают и более сложные деформации, получающиеся в результате сочетания нескольких основных.

Растяжение или сжатие возникает, например, в случае, когда к стержню по его оси приложены противоположно направленные силы (рис. 3). При этом происходит перемещение сечений вдоль оси стержня, который при растяжении удлиняется, а при сжатии укорачивается. Изменение Δl первоначальной длины l стержня называют абсолютным удлинением при растяжении или абсолютным укорочением при сжатии. Отношение абсолютного удлинения (укорочения) Δl к первоначальной длине l стержня называют средним относительным удлинением на длине l и обозначают обычно буквой $\epsilon_{\text{ср}}$:

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}.$$

На растяжение или сжатие работают многие элементы конструкций: стержни ферм, колонны, штоки паровых машин и поршневых насосов, стяжные винты и другие детали.

Сдвиг или срез возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения стержня одно относительно другого

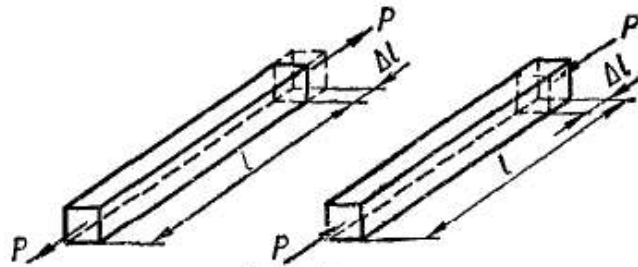


Рис. 3

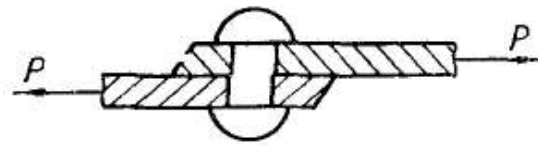
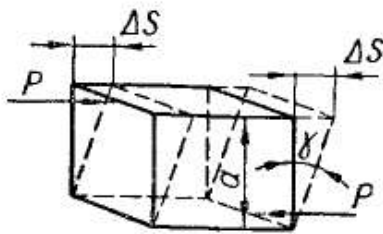


Рис. 4

при неизменном расстоянии между ними (рис. 4). Величина смещения Δs называется абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию a между смещающимися плоскостями (тангенс угла γ) называют относительным сдвигом. Вследствие малости угла γ при упругих деформациях его тангенс принимают равным углу перекоса рассматриваемого элемента. Следовательно, относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Относительный сдвиг является угловой деформацией, характеризующей перекося элемента. На сдвиг или срез работают, например, заклепки и болты, скрепляющие элементы, которые внешние силы стремятся сдвинуть один относительно другого.

Кручение возникает при действии на стержень внешних сил, образующих момент относительно оси стержня (рис. 5). Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня относительно друг друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии l , называют углом закручивания на длине l . Отношение угла закручивания φ к длине l называют относительным углом закручивания:

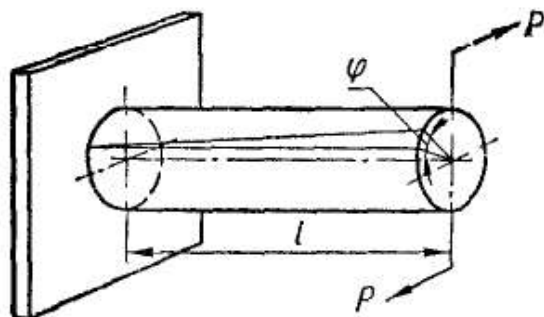


Рис. 5

$$\Theta = \frac{\varphi}{l}.$$

На кручение работают валы, шпиндели токарных и сверлильных станков и другие детали.

Деформация изгиба (рис. 6) заключается в искривлении оси прямого стержня или в изменении кривизны кривого стержня.

Происходящее при этом перемещение какой-либо точки оси стержня выражается вектором, начало которого совмещено с первоначальным положением точки, а конец — с положением той же точки в деформированном стержне. В прямых стержнях перемещения точек, направленные перпендикулярно к начальному положению оси, называют прогибами и обозначают буквой w . При изгибе происходит также поворот сечений стержня вокруг осей, лежащих в плоскостях сечений. Углы поворота сечений относительно их начальных положений обозначаются буквой θ . На изгиб работают, например, оси железнодорожных вагонов, листовые рессоры, зубья шестерен, спицы колес, балки междуэтажных перекрытий, рычаги и многие другие детали.

В результате одновременного действия на тело сил, вызывающих различные виды указанных основных деформаций, возникает более сложная деформация. Так, часто элементы машин и конструкций подвергаются действию сил, вызывающих одновременно изгиб и кручение, изгиб и растяжение или сжатие и др.



Рис. 6

Описанные деформации стержня дают представление об изменении его формы и размеров в целом, но ничего не говорят о степени и характере деформированного состояния материала. Исследования показывают, что деформированное состояние тела, вообще говоря, неравномерно и изменяется от точки к точке.

Для определения деформации в какой-либо точке A (рис. 7) проведем в недеформированном теле отрезок прямой AB , исходящий из этой точки в произвольном направлении и имеющий длину s . После деформации точки A и B переместятся и займут положения A_1 и B_1 соответственно, а расстояние s между ними изменится на

величину Δs . Отношение $\frac{\Delta s}{s} = \epsilon_{cp}$ называется средней относительной линейной деформацией отрезка AB . Приближая точку B к точке A , т. е. уменьшая длину отрезка s , в пределе получим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} = \epsilon_{AB}$$

Величина ϵ_{AB} представляет собой относительную линейную деформацию в точке A по направлению AB . Если известно, что расстояние между точками A и B увеличивается, то ϵ_{AB} называют относительным удлинением, при уменьшении этого расстояния — относительным укорочением.

В одной и той же точке A относительные линейные деформации по различным направлениям могут быть различны. Обычно в качестве основных принимают направления, параллельные осям выбранной прямоугольной системы координат. Тогда относительные линейные деформации в точке обозначают соответственно через $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Для полной характеристики деформации в точке вводят еще и угловые деформации. Если до деформации тела из точки A (рис. 8) провести два отрезка AB и AC , образующих прямой угол, то после

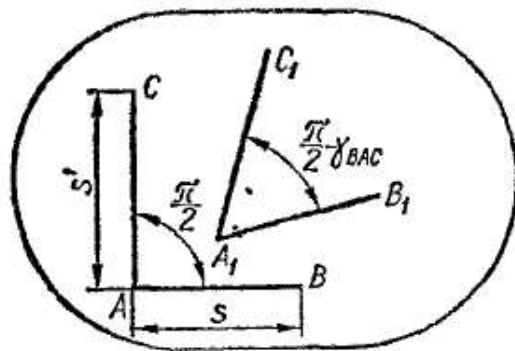


Рис. 8

перемещения точек вследствие деформации тела отрезки займут положения A_1B_1 и A_1C_1 , а угол между ними изменится на величину $\angle BAC - \angle B_1A_1C_1$. Приближая точки B и C к точке A , в пределе получим изменение первоначально прямого угла на величину

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s' \rightarrow 0}} (\angle BAC - \angle B_1A_1C_1) = \gamma_{BAC}$$

Это изменение прямого угла, выраженное в радианах, называется относительной угловой деформацией в точке A в плоскости, где лежат отрезки AB и AC . В той же точке A относительные угловые деформации в различных плоскостях различны. Обычно относительные угловые деформации определяют в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях. Тогда их обозначают соответственно через $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

Деформированное состояние в точке тела полностью определяется шестью компонентами деформации — тремя относительными линейными деформациями $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и тремя относительными угловыми деформациями $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

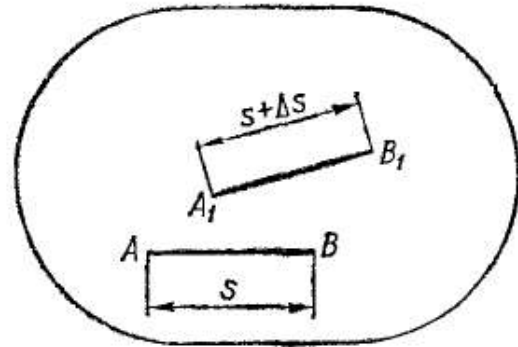


Рис. 7

§ 3. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Для построения теории сопротивления материалов принимают некоторые гипотезы относительно структуры и свойств материалов, а также о характере деформаций. Эти гипотезы следующие:

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Предполагается, что материал сплошь заполняет форму тела. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Материал предполагается однородным и изотропным, т. е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. Хотя кристаллы, из которых состоят металлы, анизотропны, но их хаотическое расположение дает возможность считать макрообъемы металлов изотропными.

В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон существенно различны, армированные материалы и т. п.

3. *Гипотеза о малости деформаций.* Предполагается, что деформации малы по сравнению с размерами тела. Это позволяет в большинстве случаев пренебречь изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела. В некоторых случаях от этого принципа приходится отступать. Такие отступления оговариваются особо.

Малые относительные деформации рассматривают как бесконечно малые величины.

4. *Гипотеза об идеальной упругости материала.* Все тела предполагаются абсолютно упругими. Отклонения от идеальной упругости, которые всегда наблюдаются при нагружении реальных тел, несущественны и ими пренебрегают до определенных пределов деформирования.

Большинство задач сопротивления материалов решают в предположении линейно деформируемого тела, т. е. такого, при котором справедлив закон Гука, выражающий прямую пропорциональность между деформациями и нагрузками.

Приняв гипотезы о малости деформаций и о линейной зависимости между деформациями и усилиями, можно при решении большинства задач сопротивления материалов применять принцип суперпозиции (принцип независимости и сложения действия сил). Например, усилия в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, температурными воздействиями), равны сумме усилий, вызванных каждым из этих факторов, и не зависят от порядка их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.

Перечисленные выше гипотезы, а также некоторые другие, о которых будет сказано дальше, позволяют решать широкий круг задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными практики.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Как уже отмечалось, основным объектом, изучаемым в курсе сопротивления материалов, является стержень.

Сопротивление стержня различным видам деформации часто зависит не только от его материала и размеров, но и от очертаний оси, формы поперечных сечений и их расположения. Поэтому в настоящей главе, отвлекаясь от физических свойств изучаемого объекта, рассмотрим основные геометрические характеристики его поперечных сечений, определяющие сопротивление различным видам деформаций. К ним относятся площади поперечных сечений, статические моменты и моменты инерции.

§ 4. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПЛОЩАДИ

Рассмотрим произвольную фигуру (поперечное сечение бруса), связанную с координатными осями Oz и Oy (рис. 9). Выделим элемент площади dF с координатами z, y . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение и для момента площади, которое называется *статическим моментом*. Так, произведение элемента площади dF на расстояние y от оси Oz

$$dS_z = ydF$$

называется статическим моментом элемента площади относительно оси Oz . Аналогично $dS_y = zdF$ — статический момент элемента площади относительно оси Oy . Просуммировав такие произведения по всей площади фигуры, получим соответственно статические моменты относительно осей z и y :

$$S_z = \int_F ydF; \quad S_y = \int_F zdF. \quad (2.1)$$

Статические моменты измеряются в единицах длины в кубе (например, см^3).

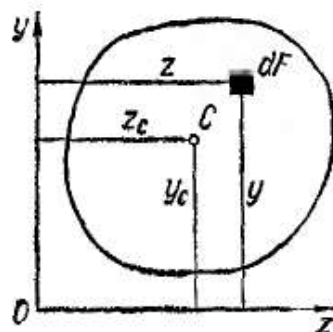


Рис. 9

Пусть z_c, y_c — координаты центра тяжести (ц. т.) фигуры. Продолжая аналогию с моментами сил, на основании теоремы о моменте равнодействующей можно написать следующие выражения:

$$S_z = Fy_c; \quad S_y = Fz_c \quad (2.2)$$

где F — площадь фигуры.

Отсюда координаты центра тяжести

$$z_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_z}{F}. \quad (2.3)$$

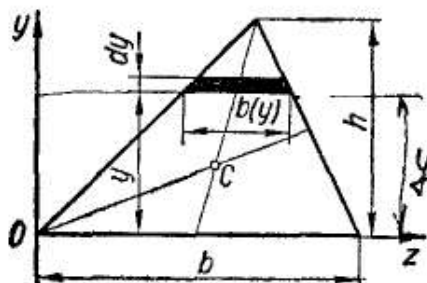


Рис. 10

Из формул (2.2) следует, что статические моменты площади относительно центральных осей (осей, проходящих через центр тяжести) равны нулю.

В качестве примера вычислим статический момент треугольника (рис. 10) относительно оси, проходящей через основание. На расстоянии y от неё выделим элементарную площадку в виде полоски, параллельной оси z . Площадь полоски

$$dF = b(y) dy. \quad \frac{b}{b(y)} = \frac{y}{h}$$

Учитывая, что

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y), \quad \text{или } \frac{b}{h} = \frac{y}{h}$$

имеем

$$S_z = \int_F y dF = \frac{b}{h} \int_0^h y(h - y) dy = \frac{bh^2}{6}.$$

Еще проще решить эту задачу, пользуясь формулой (2.2). Очевидно, что

$$F = \frac{1}{2}bh; \quad y_c = \frac{1}{3}h, \quad \text{или } \frac{1}{2}bh$$

следовательно,

$$S_z = \frac{1}{2}bh \cdot \frac{1}{3}h = \frac{bh^2}{6}.$$

Для вычисления статических моментов сложной фигуры ее разбирают на простые части (рис. 11), для каждой из которых известна площадь F_i и положение центра тяжести z_i и y_i . Статический момент площади всей фигуры относительно данной оси определяется как сумма статических моментов каждой части:

$$S_z = F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n = \sum_{i=1}^n F_iy_i; \quad (2.4)$$

$$S_y = F_1z_1 + F_2z_2 + \dots + F_nz_n = \sum_{i=1}^n F_iz_i.$$

По формулам (2.3) и (2.4) легко найти координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.5)$$

Определим, например, положение центра тяжести фигуры, показанной на рис. 12.

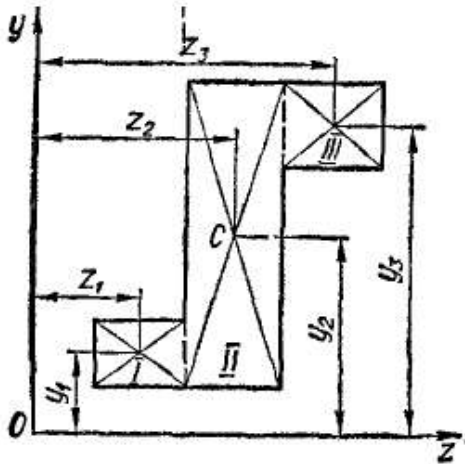


Рис. 11

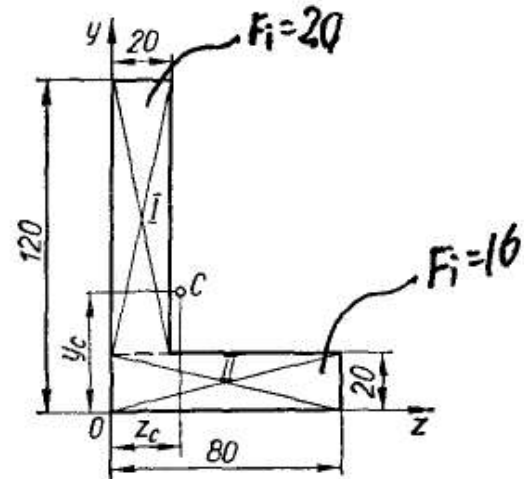


Рис. 12

Разбиваем фигуру на два прямоугольника. Результаты вычислений сводим в табл. 1.

Таблица 1

№ части фигуры	Площадь F_i участка, см ²	Координаты центра тяжести участка в системе zy , см		$S_1 = F_i z_i$	$S_2 = F_i y_i$	$z_c; y_c$, см
		z_i	y_i			
I	20	1	7	20	140	—
II	16	4	1	64	16	
Для всей фигуры	36	—	—	84	156	$z_c = \frac{84}{36} = 2,33$ $y_c = \frac{156}{36} = 4,33$

§ 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Осевым, или экваториальным, моментом инерции площади фигуры называют интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от рассматриваемой оси. Так, моменты

инерции произвольной фигуры (рис. 13) относительно осей z и y соответственно

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF. \quad (2.6)$$

Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса O) называют интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от полюса:

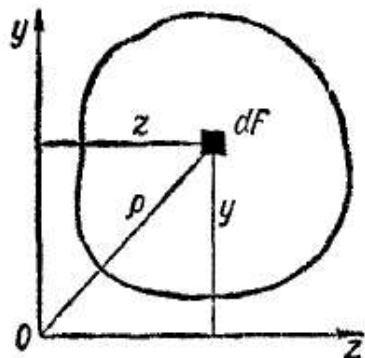


Рис. 13

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.7)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей z и y , то $\rho^2 = z^2 + y^2$. Из выражения (2.7) имеем

$$J_p = \int_F (y^2 + z^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF = J_z + J_y. \quad (2.8)$$

Отметим, что величины осевых и полярных моментов инерции всегда положительны.

Центробежным моментом инерции называют интеграл произведений площадей элементарных площадок на их расстояния от координатных осей z и y :

$$J_{zy} = \int_F zy dF. \quad (2.9)$$

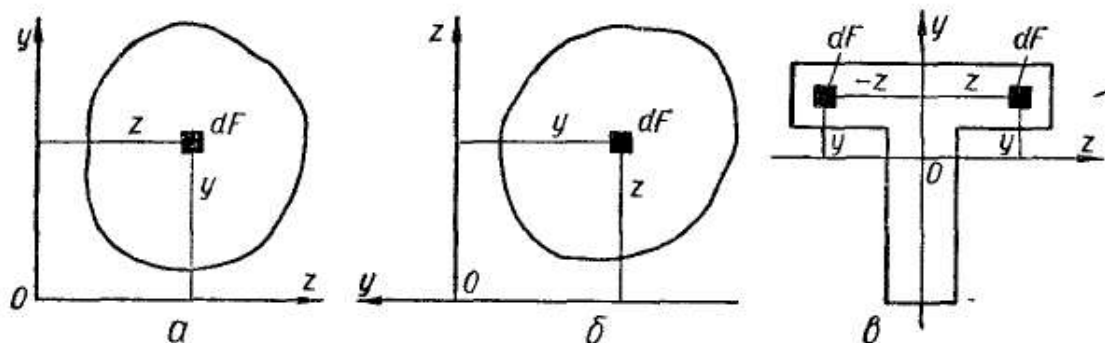


Рис. 14

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равным нулю. В самом деле, центробежный момент инерции площади фигуры, показанной на рис. 14, а, относительно выбранной системы осей положителен, так как координаты z , y всех элементов положительны. При повороте осей вокруг начала координат на 90° (рис. 14, б) знак центробежного момента инерции фигуры меняется на обратный, так как в этом положении координаты z всех элементов положительны, а координаты y — отрицательны.

Очевидно, постепенно поворачивая оси, можно найти такое их положение, при котором центробежный момент инерции равен нулю. Такие оси называют *главными осями инерции*. Две взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна является осью симметрии фигуры, всегда будут ее главными осями инерции, поскольку в этом случае каждой положительной величине $zy dF$ соответствует такая же отрицательная по другую сторону от оси симметрии (рис. 14, в) и их сумма по всей площади фигуры равна нулю. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют *главными центральными осями*.

Измеряются моменты инерции в единицах длины в четвертой степени (например, см^4).

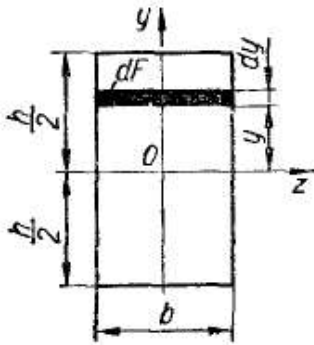


Рис. 15

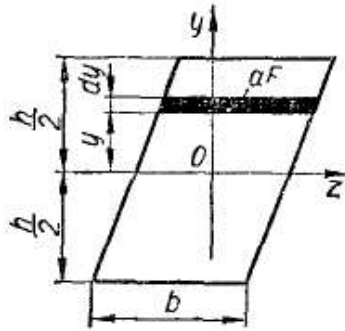


Рис. 16

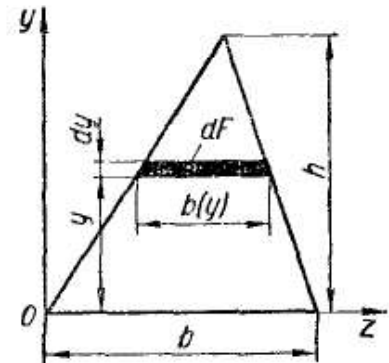


Рис. 17

Вычислим моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей z , y , параллельных его сторонам (рис. 15).

Для определения момента инерции относительно оси z выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси z . Ширина элемента b , высота — dy . Следовательно,

$$dF = bdy;$$

$$J_z = \int_F y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что

$$J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.11)$$

Заметим, что интеграл J_z не изменится, если все полоски $dF = bdy$ переместить параллельно оси z , относительно которой определяется момент инерции. Таким образом, момент инерции параллелограмма (рис. 16) относительно центральной оси z , параллельной основанию,

$$J_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.12)$$

Найдем момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через его основание (рис. 17).

Разбиваем площадь фигуры, как и в предыдущем примере, на элементарные полоски, параллельные данной оси:

$$dF = b(y) dy.$$

Очевидно, ширина полоски, находящейся на расстоянии y от оси z ,

$$b(y) = \frac{b}{h} (h - y).$$

Следовательно,

$$J_z = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.13)$$

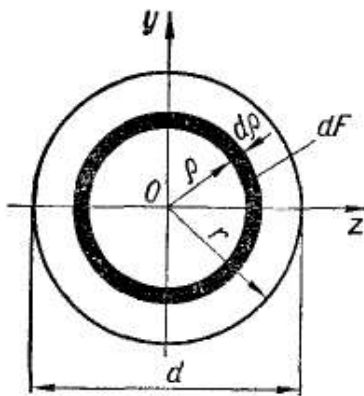


Рис. 18

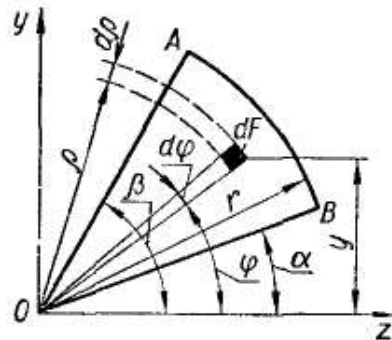


Рис. 19

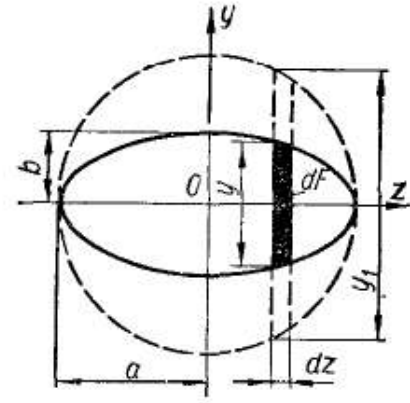


Рис. 20

Вычислим полярный момент инерции к ρ у γ а относительно его центра, а также момент инерции относительно центральной оси.

При вычислении полярного момента инерции выделим элементарную полоску в виде тонкого кольца толщиной $d\rho$ (рис. 18). Площадь такого элемента

$$dF = 2\pi\rho d\rho.$$

Полярный момент инерции

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.14)$$

Моменты инерции круга относительно центральных осей легко найти на основании выражения (2.8):

$$J_\rho = J_z + J_y.$$

В силу симметрии

$$J_z = J_y,$$

следовательно,

$$J_z = J_y = \frac{1}{2} J_\rho = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.15)$$

Найдем осевой момент инерции кругового сектора OAB (рис. 19) относительно оси z .

Пользуясь полярными координатами ρ , φ , выделяем элементарную площадку $dF = \rho d\varphi d\rho$. Так как

$$y = \rho \sin \varphi,$$

то

$$\begin{aligned} J_z &= \int_F y^2 dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \\ &= \frac{r^4}{8} \left[(\beta - \alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для четверти круга $\alpha = 0$; $\beta = \frac{\pi}{2}$. Тогда $J_z = \frac{\pi r^4}{16}$. Полагая $\beta = \pi$, $\alpha = 0$, находим момент инерции полукруга:

$$J_z = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Вычислим момент инерции э л л и п с а с полуосями a , b (рис. 20) относительно центральной оси z .

Задачу можно решить весьма просто, если рассматривать эллипс как проекцию наклонного круга. При этом

$$\frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}.$$

Представим теперь момент инерции эллипса как сумму моментов инерции элементарных прямоугольников высотой y и шириной dz :

$$J_z = \int_F \frac{y^3 dz}{12} = \frac{b^3}{a^3} \int_F \frac{y_1^3 dz}{12}.$$

Последний интеграл в правой части есть момент инерции круга радиуса a относительно оси z ; он равен $\frac{\pi a^4}{4}$. Следовательно, искомый момент инерции эллипса

$$J_z = \frac{b^3}{a^3} \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}. \quad (2.17)$$

Очевидно,

$$J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

§ 6. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

В расчетной практике часто приходится вычислять моменты инерции сложных сечений относительно различных осей, лежащих в плоскости фигуры. Для стандартных поперечных сечений стержней — угловых равнобоких (рис. 21, а) и неравнобоких (рис. 21, б), двутавровых (рис. 21, в), швеллерных (рис. 21, г) и других — моменты инерции относительно различных осей даны в таблицах ГОСТ 8509—72, 8510—72, 8239—72*, 8240—72 наряду с размерами,

площадями сечений, положениями центров тяжести и другими характеристиками. В сортаменте центральные оси сечений обозначаются буквами x, y (рис. 21).

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние можно разбить на отдельные простые части, моменты инерции ко-

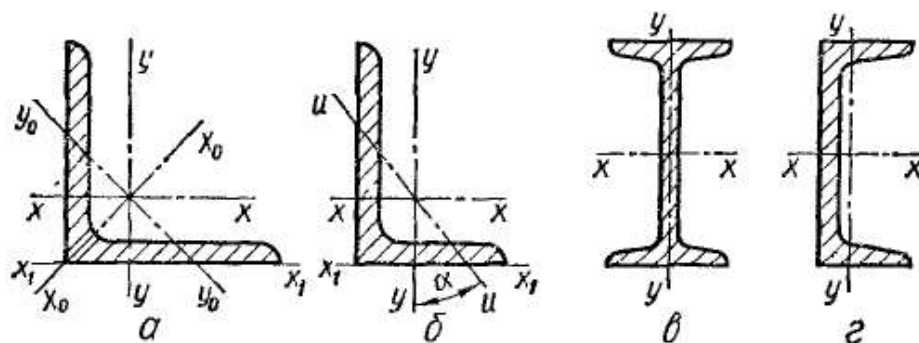


Рис. 21

торых известны. Из основного свойства интеграла суммы следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей.

Пусть, например, требуется определить момент инерции сложной фигуры относительно оси z (рис. 22):

$$J_z = \int_F y^2 dF. \quad (2.18)$$

Разобьем фигуру на простые составляющие I, II и III, например так, как показано на рисунке. При вычислении интеграла (2.18) бу-

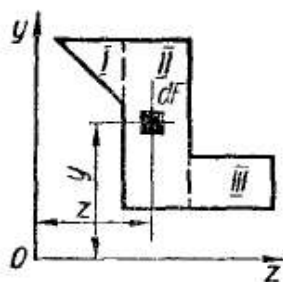


Рис. 22

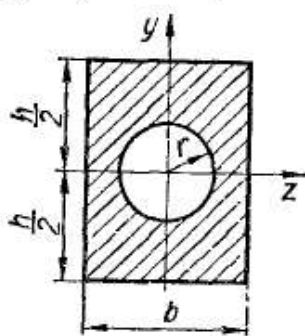


Рис. 23

дем последовательно суммировать произведения $y^2 dF$, охватывая площади F_1, F_2, F_3 простых фигур. Тогда

$$J_z = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \int_{F_3} y^2 dF.$$

Очевидно, каждый из интегралов правой части представляет собой момент инерции соответствующей простой фигуры. Следовательно,

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}. \quad (2.19)$$

Если в сечении есть отверстие, его обычно удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью. Например, сечение, показанное на рис. 23, можно разбить на две простые части — прямоугольник $b \times h$ и отверстие радиуса r отрицательной площади. Тогда

$$J_z = J_z^I - J_z^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

**§ 7. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ**

Пусть известны моменты инерции фигуры относительно центральных осей z, y :

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_{zy} = \int_F zy dF. \quad (2.20)$$

Требуется определить моменты инерции относительно осей, параллельных центральному (рис. 24):

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF. \quad (2.21)$$

Координаты любой точки в новой системе $z_1 O_1 y_1$ можно выразить через координаты в старых осях так:

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

Подставляем эти значения в формулы (2.21) и интегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + a^2 \int_F dF + 2a \int_F y dF; \quad (2.22)$$

$$J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_F (z + b)^2 dF = \int_F z^2 dF + b^2 \int_F dF + 2b \int_F z dF; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF &= \int_F (z + b)(y + a) dF = \int_F zy dF + ab \int_F dF + \\ &+ a \int_F z dF + b \int_F y dF. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Так как интегралы $\int_F y dF = S_z$ и $\int_F z dF = S_y$ равны нулю как статические моменты относительно центральных осей, то формулы (2.22), (2.23), (2.24) с учетом формул (2.20) принимают вид

$$\boxed{J_{z_1} = J_z + a^2 F; \quad (2.25)}$$

$$\boxed{J_{y_1} = J_y + b^2 F; \quad (2.26)}$$

$$\boxed{J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abF.}$$

Следовательно: 1) момент инерции фигуры относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями;

2) центробежный момент инерции относительно любой системы прямоугольных осей равен центробежному моменту относительно системы центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести в новых осях.

Отметим, что координаты a , b , входящие в формулу (2.26), следует подставлять с учетом их знака.

Формулы (2.25) показывают, что из всех моментов инерции относительно ряда параллельных осей центральные моменты инерции будут наименьшими.

Вычислим момент инерции двутаврового сечения относительно центральной оси z (рис. 25).

Сечение, состоящее из двух одинаковых полок $b \times \delta$ и стенки $h_1 \times t$, разбиваем на эти три простые части. Тогда

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}.$$

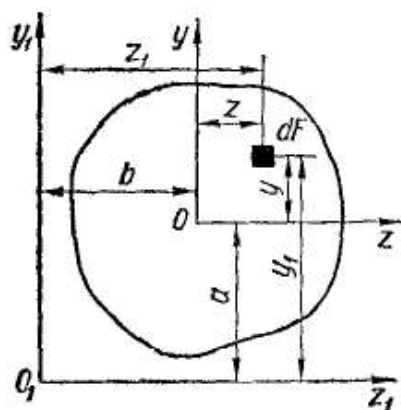


Рис. 24

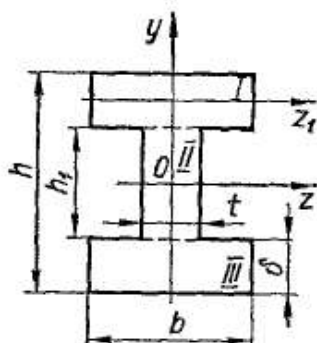


Рис. 25

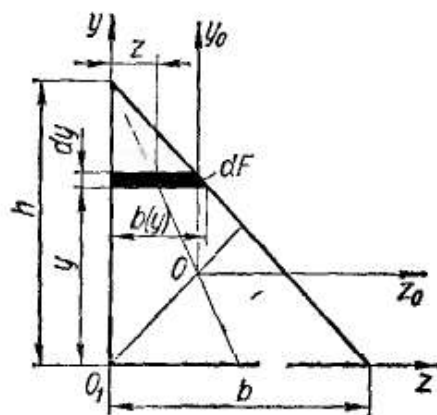


Рис. 26

Момент инерции полки относительно оси z на основании формулы (2.25)

$$J_z^I = J_z^{III} = J_{z_1}^I + \left(\frac{h_1 + \delta}{2} \right)^2 F = \frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2} \right)^2 b\delta.$$

Момент инерции стенки

$$J_c^{II} = \frac{th_1^3}{12}.$$

Искомый момент инерции двутавра

$$J_z = 2 \left[\frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2} \right)^2 b\delta \right] + \frac{th_1^3}{12}. \quad (2.27)$$

Определим центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей z , y (рис. 26), совпадающих с катетами, а также относительно центральных осей z_0 , y_0 , параллельных им.

Выделим элементарную площадку в виде полоски шириной $b(y)$ и высотой dy . Площадь ее

$$dF = b(y) dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

Горизонтальная координата центра тяжести полоски

$$z = \frac{1}{2} b(y) = \frac{h-y}{2h} b.$$

Центробежный момент инерции относительно осей z, y

$$\begin{aligned}
 J_{zy} &= \int_F z y dF = \int_0^h \frac{h-y}{2h} b y \frac{h-y}{h} b dy = \\
 &= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h y (h-y)^2 dy = \frac{b^2 h^2}{24}.
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Момент инерции относительно центральных осей z_0, y_0 на основании формулы (2.26)

$$J_{z_0 y_0} = J_{zy} - a_0 b_0 F,$$

причем

$$a_0 = \frac{h}{3}; \quad b_0 = \frac{b}{3}.$$

Тогда

$$J_{z_0 y_0} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \frac{b}{3} \frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}. \tag{2.29}$$

§ 8. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны моменты инерции произвольной фигуры (рис. 27) относительно координатных осей z, y :

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_{zy} = \int_F z y dF. \tag{2.30}$$

Повернем оси z, y на угол α против часовой стрелки, считая угол поворота осей в этом направлении положительным. Найдем теперь моменты инерции сечения относительно повернутых осей z_1, y_1 :

$$\begin{aligned}
 J_{z_1} &= \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF.
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

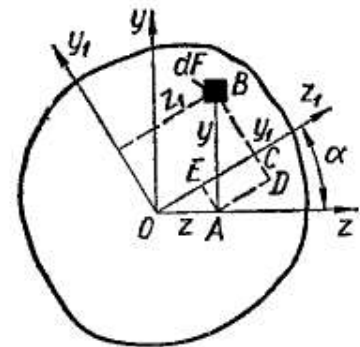


Рис. 27

Координаты произвольной элементарной площадки в новых осях z_1, y_1 выражаются через координаты z, y прежней системы осей следующим образом:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= OC = OE + AD = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \\
 y_1 &= BC = BD - EA = y \cos \alpha - z \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Подставим эти значения в выражения (2.31) и проинтегрируем почленно:

$$J_{z_1} = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF - \sin 2\alpha \int_F zy dF; \\
 J_{y_1} = & \int_F (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF = \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + \\
 & + \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF + \sin 2\alpha \int_F zy dF; \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{z_1 y_1} = & \int_F (z \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - z \sin \alpha) dF = \\
 = & (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F zy dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\int_F y^2 dF - \int_F z^2 dF \right).
 \end{aligned}$$

Учитывая формулы (2.30), окончательно находим

$$\boxed{J_{z_1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; \quad (2.34)}$$

$$\boxed{J_{y_1} = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha; \quad (2.35)}$$

$$\boxed{J_{z_1 y_1} = J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\alpha.}$$

Отметим, что формулы (2.34) и (2.35), полученные при повороте любой системы прямоугольных осей, естественно, справедливы и для центральных осей.

Складывая почленно формулы (2.34), находим

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p. \quad (2.36)$$

Таким образом, при повороте прямоугольных осей сумма моментов инерции не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

При повороте системы осей на угол $\alpha = 90^\circ$

$$J_{z_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_z; \quad J_{z_1 y_1} = -J_{zy}.$$

§ 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Наибольшее практическое значение имеют главные центральные оси, центробежный момент инерции относительно которых равен нулю. Будем обозначать такие оси буквами u , v . Следовательно,

$$J_{uv} = 0.$$

Чтобы определить положение главных центральных осей несимметричной фигуры, повернем произвольную начальную систему центральных осей z , y (рис. 28) на некоторый угол α_0 , при котором центробежный момент инерции становится равным нулю:

$$J_{z_1 y_1} = J_{uv} = 0.$$

Тогда из формулы (2.35)

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_0 = 0, \quad (2.37)$$

откуда

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}} \quad (2.38)$$

Полученные из формулы (2.38) два значения угла α_0 отличаются друг от друга на 90° и дают положение главных осей. Как легко видеть, меньший из этих углов по абсолютной величине не превышает $\frac{\pi}{4}$. В дальнейшем будем пользоваться только меньшим углом. Проведенную под этим углом (положительным или отрицательным) главную ось будем обозначать буквой u . Напомним, что отрицательные углы α_0 откладываются от оси z по ходу часовой стрелки. На рис. 29 приведены некоторые примеры обозначения главных осей в соответствии с указанным правилом. Начальные оси обозначены буквами z и y .

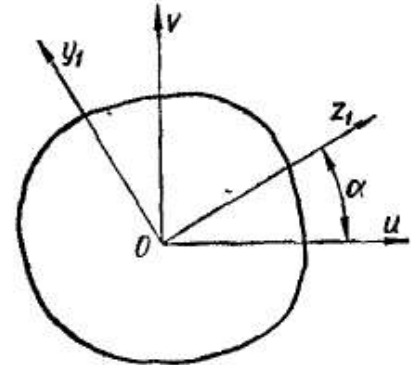


Рис. 28

Значения главных моментов инерции можно получить из общих формул (2.34) перехода к повернутым осям, приняв $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{zy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_z \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{zy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

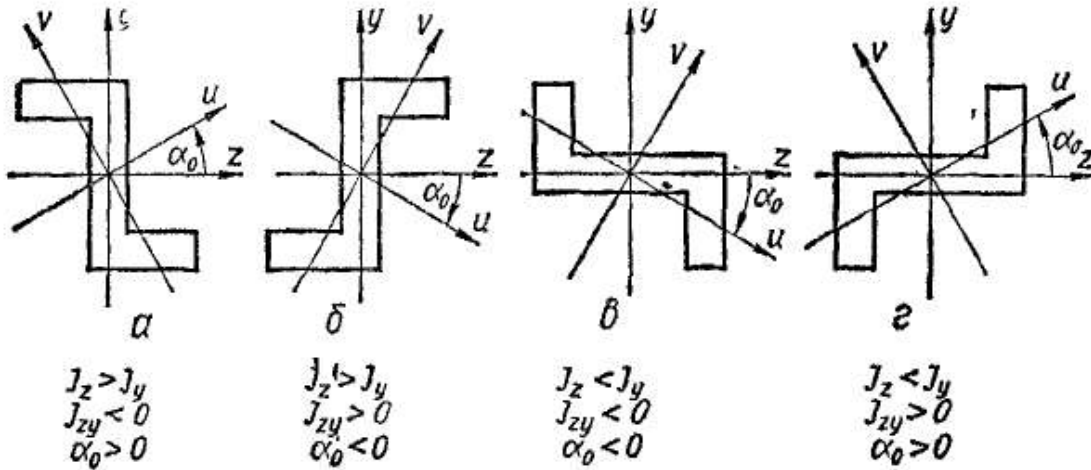


Рис. 29

Преобразуем формулы (2.39) для главных центральных моментов инерции, составив выражения для их суммы и разности. Очевидно, что

$$J_u + J_v = J_z + J_y; \quad (2.40)$$

$$J_u - J_v = (J_z - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{zy} \sin 2\alpha_0 = (J_z - J_y) \frac{4}{\cos 2\alpha_0}, \quad (2.41)$$

причем в выражении (2.41) сделана замена J_{zy} из формулы (2.38):

$$2J_{zy} = (J_y - J_z) \operatorname{tg} 2\alpha_0.$$

Теперь из формул (2.40) и (2.41) находим более удобные выражения:

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_z + J_y) + (J_z - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_z + J_y) - (J_z - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Очевидно, что при $J_z > J_y$ момент $J_u > J_v$.

Используя формулу (2.38), можно исключить из выражений (2.42) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{zy}^2}{(J_z - J_y)^2}}.$$

В результате имеем

$$\boxed{J_u = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) \pm \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}];} \quad (2.43)$$

$$\boxed{J_v = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) \mp \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}];} \quad (2.44)$$

причем верхние знаки следует брать при $J_z > J_y$, а нижние — при $J_z < J_y$.

Таким образом, формулы (2.38), (2.43) и (2.44) позволяют определять положение главных осей и величины главных центральных моментов инерции.

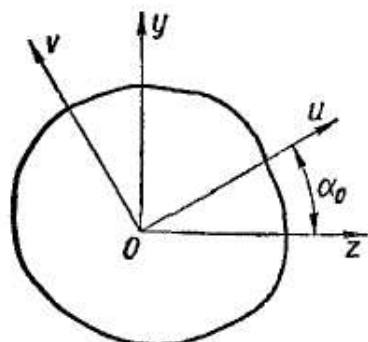


Рис. 30

Если теперь вместо произвольной начальной системы центральных осей zOy принять главные оси (рис. 30), то формулы (2.34), (2.35) перехода к повернутым осям упрощаются:

$$\begin{aligned} J_{z_1} &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha; \\ J_{y_1} &= J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha; \\ J_{z_1 y_1} &= \frac{1}{2} (J_u - J_v) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Важно отметить, что главные моменты инерции обладают свойством экстремальности. В этом легко убедиться, продифференцировав выражение для момента инерции относительно произвольной оси [см. формулы (2.34)] по переменной α :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} &= -J_z \sin 2\alpha + J_y \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left(J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha \right) = -2J_{z_1 y_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что производная $\frac{dJ_{z_1}}{d\alpha}$ обращается в нуль, когда $J_{z_1 y_1} = 0$, а это значит, что экстремальные значения имеют моменты инерции относительно главных осей.

Учитывая, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей — величина постоянная, можно заключить, что относительно одной из главных осей момент инерции имеет максимальное значение, а относительно другой — минимальное.

Отметим, что плоскости, проведенные через ось стержня и главные оси инерции его поперечного сечения, называют *главными плоскостями*.

§ 10. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Вычисление моментов инерции по формулам (2.45) или (2.43), (2.44) можно заменить простым графическим построением. При этом различают прямую и обратную задачи. Первая заключается в определении моментов инерции относительно произвольных центральных осей z, y по известным направлениям главных осей и величинам главных центральных моментов инерции [формулы (2.45)]. Во второй задаче, имеющей наибольшее практическое значение, определяют положение главных осей и величины главных центральных

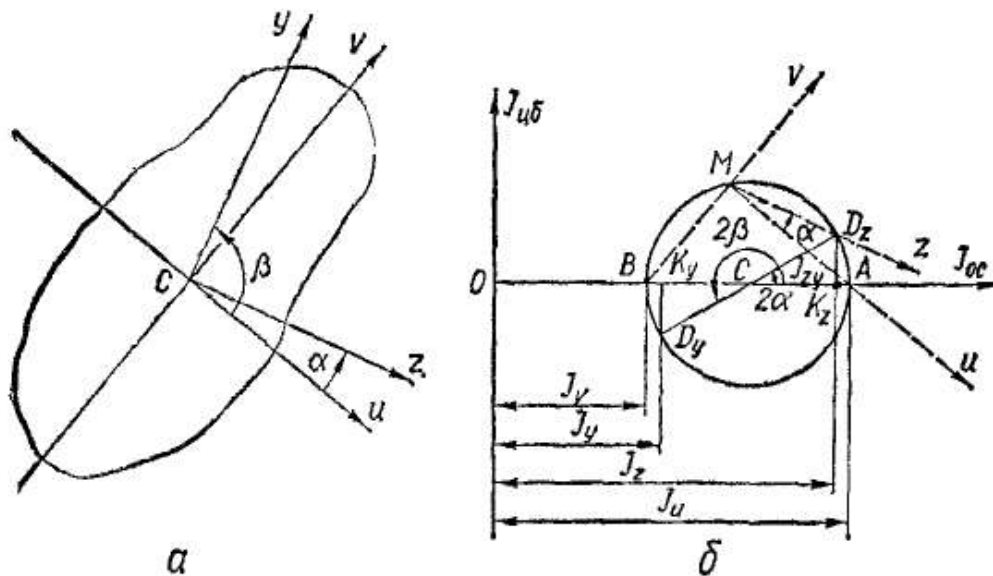


Рис. 31

моментов инерции по известным моментам инерции J_z, J_y, J_{zy} относительно любой системы прямоугольных центральных осей [формулы (2.43), (2.44) и (2.38)].

Прямая задача. Пусть требуется определить моменты инерции J_z, J_y, J_{zy} относительно осей z, y (рис. 31, а) по известным направлениям главных осей и величинам J_u, J_v . Для определенности полагаем $J_u > J_v$.

Аналитическое решение дается формулами (2.45).

Графическое построение осуществляют следующим образом. Введем в рассмотрение геометрическую плоскость и отнесем ее к

прямоугольной системе координат. По оси абсцисс будем откладывать осевые моменты инерции J_{oc} (J_u, J_v, J_z, J_y и т. д.), а по оси ординат — центробежные $J_{цб}$ (J_{zy} и т. д.).

В соответствующем масштабе откладываем от начала координат O вдоль оси абсцисс (рис. 31, б) отрезки OA и OB , равные главным моментам инерции. Отрезок AB делим пополам, так что $BC = CA = \frac{J_u - J_v}{2}$. Из точки C радиусом CA описываем окружность, называемую *кругом инерции*. Для определения момента инерции относительно оси z , проведенной под углом α к главной оси u , из центра круга под углом 2α проводим луч CD_z (положительные углы откладываем против часовой стрелки).

Покажем, что ордината точки D_z круга равна центробежному моменту инерции J_{zy} , а абсцисса — моменту инерции относительно данной оси z . Имеем

$$D_z K_z = CD_z \sin 2\alpha = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.46)$$

Сравнивая формулы (2.46) и (2.45), замечаем, что $D_z K_z = J_{zy}$. Далее,

$$\begin{aligned} OK_z &= OB + BC + CK_z = J_v + \frac{1}{2}(J_u - J_v) + \\ &+ \frac{1}{2}(J_u - J_v) \cos 2\alpha = \frac{1}{2}J_u(1 + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}J_v(1 - \cos 2\alpha) = \\ &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (2.47)$$

На основании формулы (2.45) видим, что $OK_z = J_z$. Таким образом, в соответствующем масштабе абсциссы точек круга инерции дают нам значения осевых моментов инерции, а ординаты — центробежных.

Чтобы получить значение момента инерции относительно оси y , перпендикулярной к оси z и, следовательно, проведенной под положительным углом $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ к главной оси u , проводим из центра круга луч CD_y под углом $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Очевидно, он является продолжением луча CD_z . Абсцисса точки D_y (отрезок OK_y) равна моменту инерции J_y . Ордината этой точки $K_y D_y$ дает нам значение центробежного момента инерции с обратным знаком ($-J_{zy}$), что соответствует повороту осей на 90° .

Отметим, что двум взаимно перпендикулярным осям соответствуют две точки круга (D_z, D_y), лежащие на одном диаметре.

Проведем из точки D_z прямую (штриховая линия на рис. 31, б), параллельную оси z , которой она и соответствует. Точка M ее пересечения с кругом называется *полюсом круга инерции*¹. Легко показать, что линия, соединяющая полюс с любой точкой круга, дает

¹ Иногда эту точку называют *главной точкой* или *фокусом круга инерции*.

направление оси, которой эта точка круга соответствует. Покажем, например, что прямая MA дает направление главной оси u .

По построению угол ACD_z равен удвоенному углу α между осями u и z . Угол D_zMA , как вписанный и опирающийся на ту же дугу AD_z , равен половине центрального угла ACD_z , т. е. α . Следовательно, линия MA , составляющая с направлением оси z угол α , параллельна оси u . Аналогично, прямая MB параллельна главной оси v .

Обратная задача. Пусть известны моменты инерции J_z, J_y, J_{zy} площади сечения бруса относительно некоторой системы

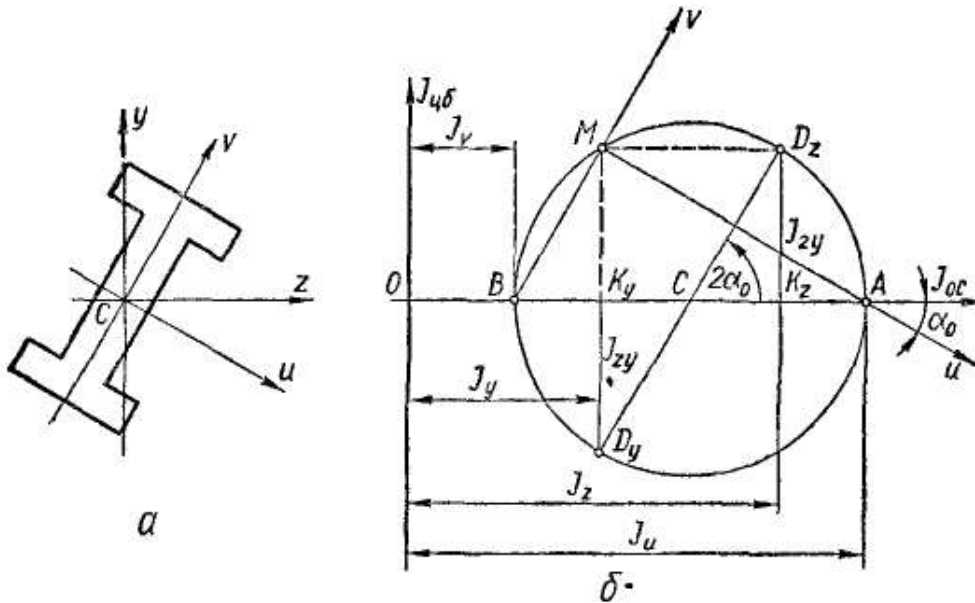


Рис. 32

перпендикулярных осей z, y (рис. 32, а). Требуется определить главные моменты инерции и положение главных осей. Для определенности построения примем, что $J_z > J_y, J_{zy} > 0$.

В геометрической плоскости (рис. 32, б) строим точки D_z и D_y , соответствующие моментам инерции относительно осей z и y . Абсциссами этих точек являются осевые моменты инерции: $OK_z = J_z$; $OK_y = J_y$; ординатами — центробежный момент инерции J_{zy} , причем $K_zD_z = J_{zy}$, $K_yD_y = -J_{zy}$. Так как обе точки принадлежат одному диаметру, то, соединив их, получим центр C круга инерции. Из центра C описываем окружность радиусом

$$CD_z = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}. \quad (2.48)$$

Она пересекает ось абсцисс в точках A и B . Очевидно, что абсциссы этих точек — отрезки OA и OB — и есть искомые главные моменты инерции J_u, J_v . В самом деле:

$$\begin{aligned} OA &= OK_y + K_yC + CA = J_y + \frac{J_z - J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} = \\ &= \frac{1}{2} [(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}]; \end{aligned}$$

$$OB = OK_y + K_y C - CB = J_y + \frac{J_z - J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} [(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}].$$

Чтобы определить направление главных осей, построим фокус круга инерции. Для этого из точки D_z (D_y) проведем линию, парал-

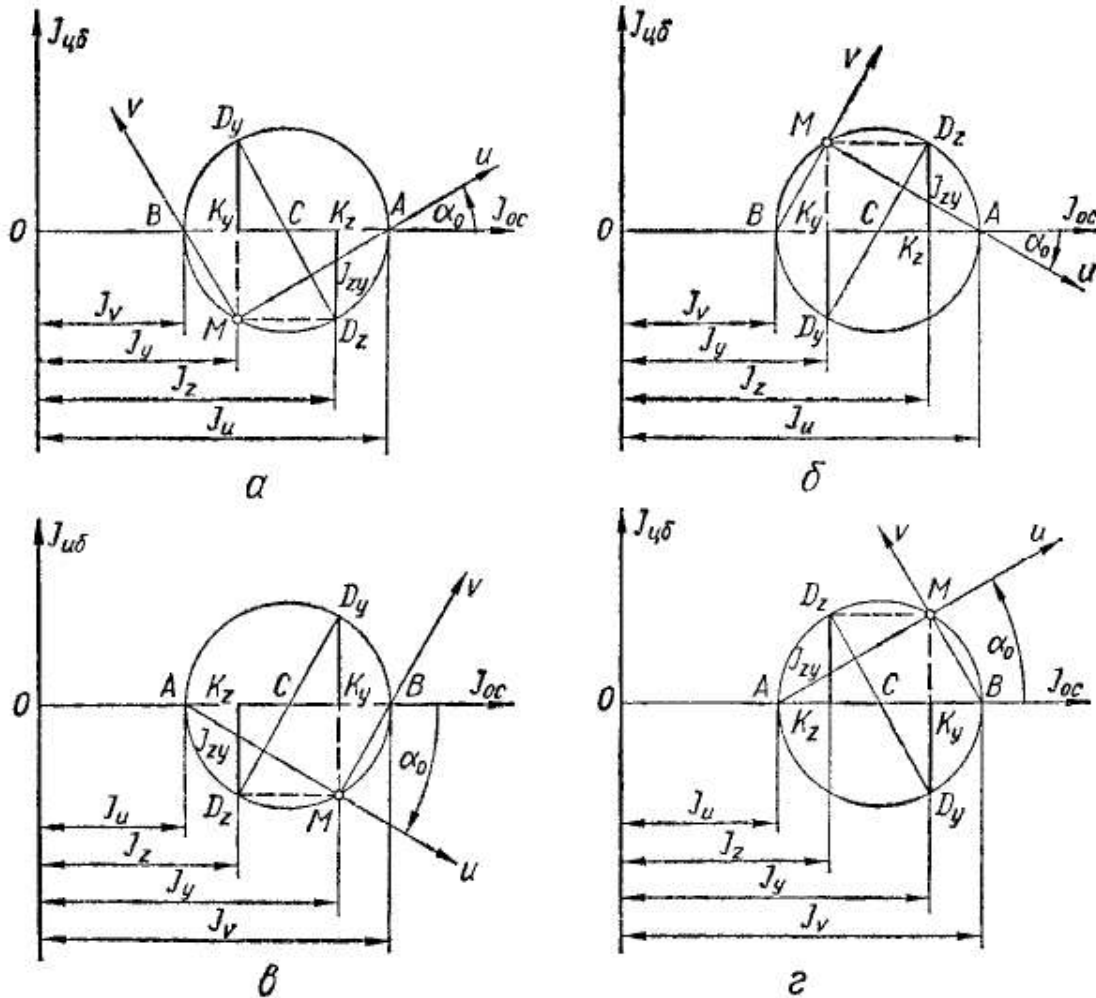


Рис. 33

лельную оси z (y), до пересечения с кругом в фокусе M . Соединяя фокус с точками A , B круга, получим направления главных осей u и v (рис. 32).

Графическое решение обратной задачи соответственно для четырех случаев, изображенных на рис. 29, показано на рис. 33.

§ 11. ПОНЯТИЕ О РАДИУСЕ И ЭЛЛИПСЕ ИНЕРЦИИ

Момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции:

$$J_z = \int_F y^2 dF = F i_z^2, \quad (2.49)$$

где i_z — радиус инерции относительно оси z .

Из выражения (2.49) следует, что

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (2.50)$$

Аналогично радиус инерции площади сечения относительно оси y

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (2.51)$$

Главным центральным осям инерции соответствуют главные радиусы инерции

$$\left[i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \right] \quad (2.52)$$

Например, для прямоугольника, изображенного на рис. 15, главные радиусы инерции

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Построим на главных центральных осях инерции фигуры эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, причем вдоль оси u отложим отрезки i_v , а вдоль оси v — отрезки i_u (рис. 34). Такой эллипс, называемый *эллипсом инерции*, обладает следующим замечательным свойством. Радиус инерции относительно любой центральной оси z определяется как перпендикуляр OA , проведенный из центра эллипса на касательную, параллельную данной оси. Для получения же точки касания достаточно провести параллельно данной оси z любую хорду. Точка пересечения эллипса с прямой, соединяющей центр O и середину хорды, и есть точка касания. Измерив затем отрезок $OA = i_z$, находим момент инерции:

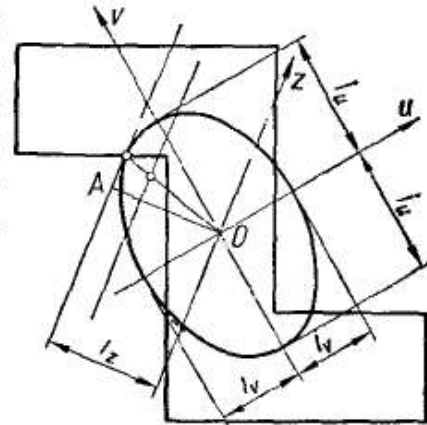


Рис. 34

$$J_z = Fi_z^2.$$

§ 12. ПОРЯДОК РАСЧЕТА

Можно рекомендовать следующий порядок определения положения главных осей и величин главных центральных моментов инерции сложного профиля, состоящего из простых частей, характеристики которых легко определить:

1. Проводим произвольную систему прямоугольных координат. Разбиваем фигуру на простые части и определяем по формулам (2.5) положение ее центра тяжести.

2. Проводим начальную систему центральных осей z, y так, чтобы вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих

осей было наиболее просто. Для этого определяем моменты инерции частей фигуры относительно их центральных осей, проведенных параллельно осям z, y , и используем формулы перехода к параллельным осям — (2.25) и (2.26). Таким образом получаем значения J_z, J_y, J_{zy} .

3. Определяем из формулы (2.38) угол наклона главных центральных осей, причем ось, проведенную под меньшим углом (поло-

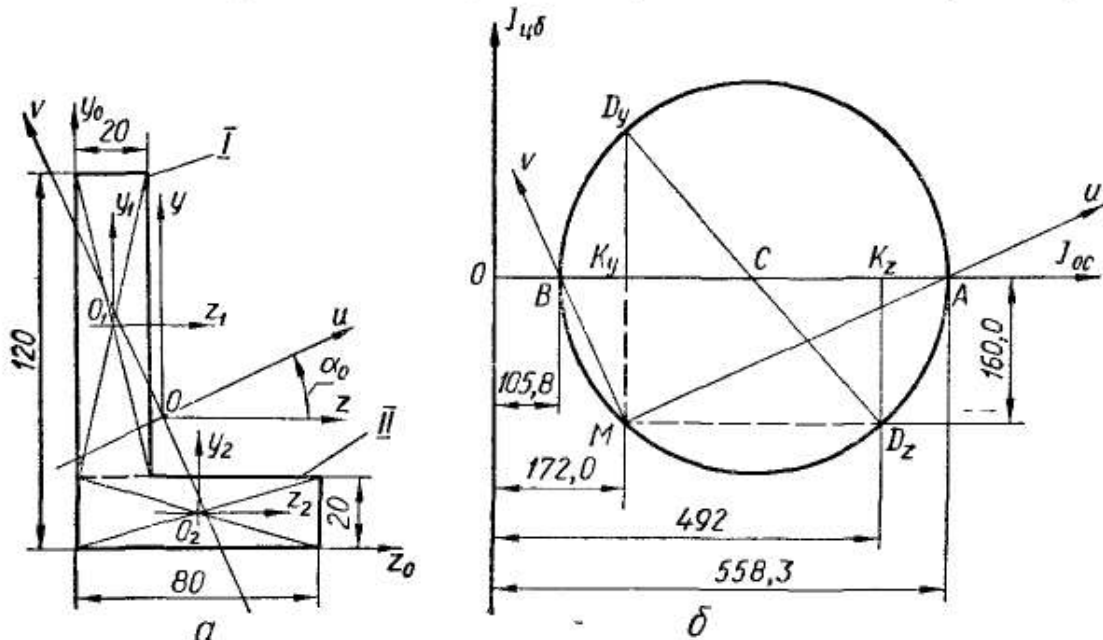


Рис. 35

жительным или отрицательным), обозначаем буквой u , а перпендикулярную к ней — буквой v .

4. По формулам (2.43) и (2.44) определяем значения главных центральных моментов инерции.

Пример 1. Для фигуры, показанной на рис. 35, определить положение главных осей инерции, главные моменты инерции и радиусы инерции.

Положение центра тяжести этой фигуры было найдено в табл. 1. Координаты центра тяжести в системе осей z_0/y_0 таковы: $z_0 = 2,33$ см, $y_0 = 4,33$ см.

Проводим начальную систему центральных осей z, y параллельно сторонам уголка. Для вычисления моментов инерции относительно этих осей разбиваем фигуру на простые части — прямоугольники I и II — и проводим через центры их тяжести центральные оси z_1, y_1 и z_2, y_2 параллельно сторонам.

Моменты инерции каждого прямоугольника относительно центральных осей легко определить по формулам (2.10) и (2.11):

$$J_{z_1}^I = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166,7 \text{ см}^4; \quad J_{y_1}^I = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2}^{II} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ см}^4; \quad J_{y_2}^{II} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции каждой простой фигуры относительно центральных осей z, y вычисляются по формулам перехода к параллельным осям — (2.25) и (2.26). Например:

$$J_z^I = J_{z_1}^I + F_I a_1^2 = 166,7 + 20 \cdot 2,67^2 \text{ см}^4 = 308,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy}^I = J_{z_1 y_1}^I + F_I a_1 b_1 = 0 - 20 \cdot 2,67 \cdot 1,33 \text{ см}^4 = -71 \text{ см}^4.$$

Таблица 2

№ участка фигуры	Площадь участка $F_i, \text{см}^2$	Координаты центра тяжести участка в системе zOy , см		$F_i a_i^2$	$F_i b_i^2$	$F_i a_i b_i$	Моменты инерции участка, см^4 , относительно					
		a_i	b_i				собственных центральных осей			центральных осей фигуры		
				J_{z_i}	J_{y_i}	$J_{z_i y_i}$	J_z^i	J_y^i	J_{zy}^i			
I	20	2,67	-1,33	142,6	35,4	-71	166,7	6,7	0	309,3	42,1	-71
II	16	-3,33	1,67	177,4	44,6	-89	5,3	85,3	0	182,7	129,9	-89

Результаты вычислений сводим в таблицу (табл. 2).

Суммируя последние три столбца таблицы, находим моменты инерции фигуры относительно центральных осей z, y :

$$J_z = 492,0 \text{ см}^4; \quad J_y = 172,0 \text{ см}^4; \quad J_{zy} = -160,0 \text{ см}^4.$$

Угол наклона главных центральных осей к оси z найдем по формуле (2.38):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 160,0}{172,0 - 492,0} = 1,0,$$

откуда

$$\alpha_0 = 22^\circ 30'.$$

Главные центральные моменты инерции определяем по формулам (2.43) и (2.44):

$$J_u = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}] = \frac{1}{2} (664,0 + 452,5) \text{ см}^4 = 558,3 \text{ см}^4;$$

$$J_v = \frac{1}{2} [(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}] = \frac{1}{2} (664,0 - 452,5) \text{ см}^4 = 105,8 \text{ см}^4.$$

Главные центральные радиусы инерции

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558,3}{36}} \text{ см} = 3,94 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105,8}{36}} \text{ см} = 1,71 \text{ см}.$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 35, б.

**ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ.
МЕТОД СЕЧЕНИЙ.
ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ**

§ 13. КЛАССИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

Внешними силами называют силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и связанными с ним телами.

Если внешние силы являются результатом непосредственного, контактного взаимодействия данного тела с другими телами, то они

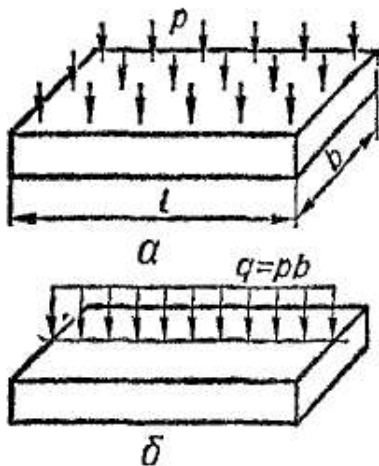


Рис. 36

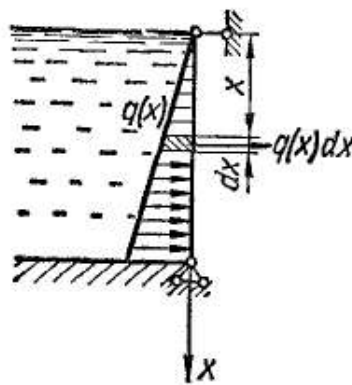


Рис. 37

приложены только к точкам поверхности тела в месте контакта и называются *поверхностными силами*. Поверхностные силы могут быть непрерывно распределены по всей поверхности тела или ее части; например: давление пара в котле, ветровая и снеговая нагрузки, давление газа в цилиндре двигателя. Величина нагрузки, при-

ходящаяся на единицу площади, называется *интенсивностью нагрузки*. Она обозначается обычно p и измеряется¹ в кгс/см², кгс/м² или тс/м². Часто нагрузку, распределенную по поверхности (рис. 36, а), приводят к главной плоскости (рис. 36, б), в результате чего получается нагрузка, распределенная по линии, или *погонная нагрузка*. Интенсивностью такой нагрузки (кгс/см, кгс/м, тс/м) называют величину нагрузки, приходящуюся на единицу длины линии².

Интенсивность может быть переменной по этой длине. Характер изменения нагрузки обычно показывают в виде эпюры (графика) q .

¹ По Проекту ГОСТа на единицы физических величин в соответствии с Международной системой единиц (СИ) единицей силы является ньютон (Н). Это сила, которая сообщает покоящейся массе 1 кг ускорение 1 м/с². Применяемая в настоящем учебнике единица силы системы МКГСС — килограмм-сила (кгс) — находится с ньютонном в следующем соотношении:

$$1 \text{ кгс} \approx 9,81 \text{ Н}; 1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кгс}.$$

Единица давления — паскаль (Па). Паскаль — давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности 1 м². В приближенных инженерных расчетах можно принимать, что

$$1 \text{ кгс/см}^2 \approx 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,0981 \text{ МПа}; 1 \text{ Па} = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ кгс/см}^2.$$

² В СИ погонную нагрузку измеряют в ньютонах на метр (Н/м).

В случае равномерно распределенной нагрузки (рис. 36, а) эпюра q прямоугольная (рис. 36, б). При действии гидростатического давления эпюра нагрузки q треугольная (рис. 37). Встречаются эпюры q и более сложного вида: трапецевидная, синусоидальная и т. д.

Отметим, что *равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади ее эпюры и приложена в центре ее тяжести*.

Если нагрузка распределена по небольшой части поверхности тела, то ее всегда заменяют равнодействующей, которую называют *сосредоточенной силой* P (кгс или тс). Кроме того, встречаются нагрузки, которые могут быть представлены в виде *сосредоточенного момента (пары)*. Моменты M (кгс · см или тс · м)¹ будем изображать обычно одним из двух способов, показанных на рис. 38, а, б.

Иногда момент удобно представлять в виде вектора, перпендикулярного к плоскости действия пары. Вектор момента условимся всегда считать правовинтовым. Чтобы отличать его от вектора силы, линию вектора-момента делают волнистой (рис. 38, г) или ставят две стрелки (рис. 38, в).

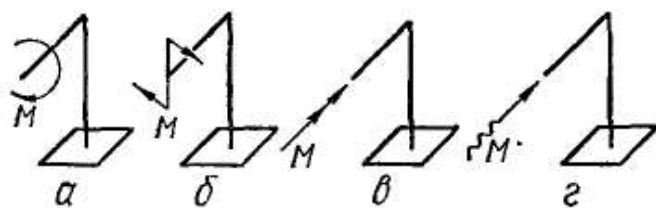


Рис. 38

Встречаются такие нагрузки, которые не являются результатом контакта двух тел, например: собственный вес, силы инерции движущегося тела и пр. Эти силы приложены в каждой точке объема, занятого телом, а потому называются *объемными* или *массовыми силами*.

Собственный вес деталей или частей машин и сооружений обычно значительно меньше других нагрузок, действующих на них. Поэтому, если нет особой оговорки, во всем дальнейшем изложении собственный вес принимать во внимание не будем.

В зависимости от характера приложения сил во времени различают нагрузки статические и динамические. Нагрузка считается *статической*, если она сравнительно медленно и плавно (хотя бы в течение нескольких секунд) возрастает от нуля до своего конечного значения, а затем остается неизменной. При этом можно пренебречь ускорениями деформируемых масс, а значит, и силами инерции.

Динамические нагрузки сопровождаются значительными ускорениями как деформированного тела, так и взаимодействующих с ним тел. При этом возникают силы инерции, которыми нельзя пренебречь. Динамические нагрузки делят на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

¹ Согласно СИ, момент измеряется в ньютон-метрах:

$$1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{м};$$

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} \approx 9,81 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Можно приближенно считать, что

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} \approx 10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Нагрузка считается *мгновенно приложенной*, если она возрастает от нуля до своего конечного значения в течение очень короткого промежутка времени (долей секунды). Такова нагрузка при воспламенении горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания или при трогании с места железнодорожного состава.

Для *ударной* нагрузки характерно то, что в момент ее приложения тело, вызывающее нагрузку, обладает определенной кинетической энергией. Такая нагрузка получается, например, при забивании свай с помощью копра, в деталях механического кузнечного молота и т. д.

Многие детали машин (шатуны, валы, оси железнодорожных вагонов и пр.) подвержены действию нагрузок, непрерывно и периодически меняющихся во времени. Такие нагрузки называют *периодно-переменными*. Они, как правило, сопряжены с циклически повторяющимися движениями детали. Это возвратно-поступательное движение штока поршня, колебания элементов конструкций и др.

§ 14. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ЭПЮРЫ

Между соседними частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами) всегда имеются определенные силы взаимодействия; иначе — внутренние силы. Эти силы во всех случаях стремятся сохранить его как единое целое, противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело. Внешние силы, наоборот, всегда стремятся вызвать деформацию тела, изменить взаимное расположение частиц. Следовательно, величина внутренних сил, действующих между двумя какими-либо частицами, в нагруженном и ненагруженном теле будет различной.

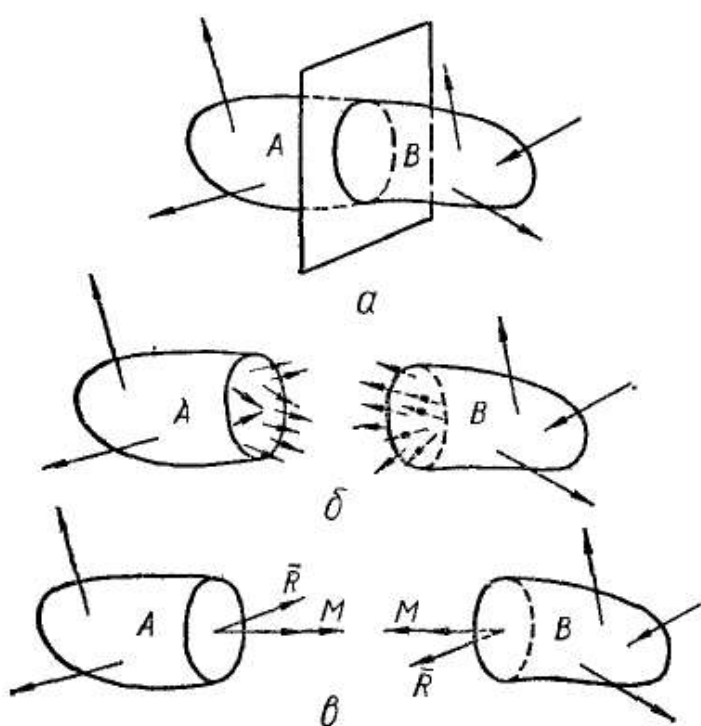


Рис. 39

(ненагруженном) состоянии, а изучают и вычисляют только те дополнительные величины внутренних сил, которые появляются в результате нагружения тела. Поэтому в дальнейшем, говоря о внутренних силах, будем иметь в виду именно эти дополнительные силы взаимодействия, возникающие в результате нагружения. Внутренние силы часто называют *усилиями*.

В сопротивлении материалов не рассматривают и не принимают во внимание внутренние силы, действующие в теле, которое находится в своем естественном

состоянии, а изучают и вычисляют только те дополнительные величины внутренних сил, которые появляются в результате нагружения тела.

Для выявления, а затем и вычисления внутренних сил в сопротивлении материалов широко применяют метод сечений.

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное самоуравновешенной системой сил. В интересующем нас месте мысленно разрежем его некоторой плоскостью на две части — A и B (рис. 39, а). При этом само сечение теперь будет иметь две стороны: одну, принадлежащую части A тела (левую), и вторую, принадлежащую части B (правую). В каждой точке обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия (рис. 39, б). Исходя из введенной гипотезы о сплошности материала следует считать, что внутренние силы действуют во всех точках проведенного сечения и, следовательно, представляют собой распределенную нагрузку. В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних нагрузок интенсивность внутренних сил в различных точках может быть различна.

Следует подчеркнуть, что внутренние силы, действующие по сечению, принадлежащему части A тела, в соответствии с третьим законом

Ньютона равны по величине и противоположны по направлению внутренним силам, действующим по сечению, принадлежащему части B тела (рис. 39, б). Другими словами, внутренние силы, действующие на различные части, взаимны. Как всякую систему сил, их можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения), в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор и главный момент внутренних сил в сечении (рис. 39, в).

Стержень, в частности, рассекают обычно плоскостью, перпендикулярной к оси, т. е. поперечным сечением (рис. 40, а). Если главный вектор и главный момент внутренних сил спроектировать на ось стержня x и главные центральные оси сечения y и z , то на каждой стороне сечения получим шесть внутренних силовых факторов (рис. 40, б): три силы (N , Q_y , Q_z) и три момента (M_x , M_y и M_z). Эти величины называют внутренними усилиями в сечении стержня.

Усилие N вызывает продольную деформацию стержня (растяжение или сжатие); Q_y и Q_z — сдвиг сторон сечения соответственно в направлении осей y и z ; M_x — кручение стержня; M_y и M_z — изгиб стержня в главных плоскостях (zx и yx). Поэтому для усилий и моментов в сечении приняты следующие названия:

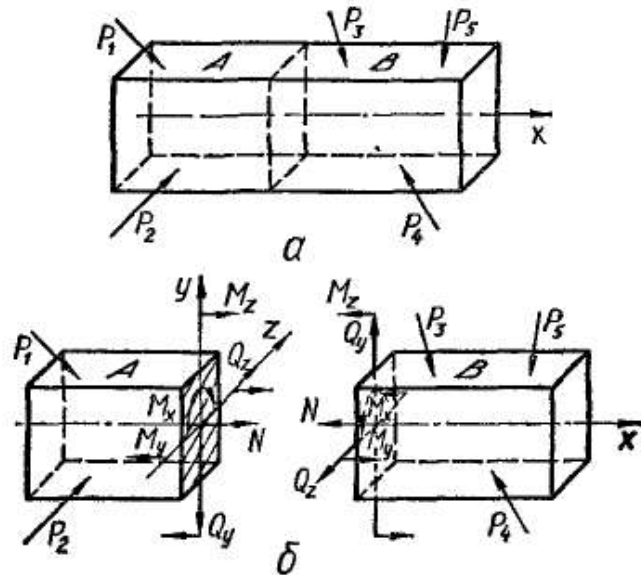


Рис. 40

N — продольная или осевая (направленная по оси стержня) сила;

Q_y, Q_z — поперечные (реже — перерезывающие) силы;

$M_x = M_{кр}$ — крутящий момент;

M_y, M_z — изгибающие моменты.

Для усилий и моментов в сечении можно дать следующие определения: *продольная сила* N — это сумма проекций всех внутренних сил, действующих в сечении, на нормаль к сечению (или на ось стержня); *поперечные силы* Q_y и Q_z — это суммы проекций всех внутренних сил в сечении на главные центральные оси сечения y и z соответственно; *крутящий момент* M_x (или $M_{кр}$) — это сумма моментов всех внутренних сил в сечении относительно оси стержня; *изгибающие моменты* M_y и M_z — это суммы моментов всех внутренних сил в сечении относительно главных центральных осей сечения y и z соответственно.

Каждое из этих усилий или моментов, как уже указывалось, является результатом взаимодействия частей рассеченного тела, а поэтому должно быть представлено в виде двух противоположно направленных, но равных векторов или моментов (рис. 40, б). Совокупность величин N, Q_y, Q_z и т. д., приложенных к правой стороне сечения, заменяет действие удаленной левой части стержня на правую часть; совокупность усилий и моментов, приложенных к левой стороне сечения, выражает действие правой части стержня на левую.

Для практического вычисления усилий и моментов в сечении следует иметь в виду следующее: N численно равно алгебраической сумме проекций на ось стержня (на нормаль к сечению) всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) рассеченного стержня; Q_y — то же, но на ось y ; Q_z — то же, но на ось z ; $M_{кр}$ численно равен алгебраической сумме моментов относительно оси стержня всех внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую) рассеченного стержня; M_y — то же относительно оси y ; M_z — то же, но относительно оси z . К этому выводу легко прийти, если рассмотреть равновесие каждой из частей рассеченного стержня. При этом сумма проекций (или моментов) сил, расположенных слева от сечения, должна быть приложена к правой стороне сечения и наоборот.

Таким образом, метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении стержня при действии любой нагрузки. Для этого нужно:

- 1) найти главные центральные оси поперечных сечений стержня;
- 2) мысленно провести поперечное сечение стержня в том месте, где нужно найти усилия и моменты;

- 3) вычислить силы N, Q_y, Q_z и моменты $M_{кр}, M_y, M_z$ как алгебраические суммы проекций и моментов внешних сил, действующих на одну из частей (левую или правую по отношению к сечению) рассеченного стержня (обычно на ту, где проекции и моменты вычисляются проще).

В качестве иллюстрации к применению метода сечений рассмотрим следующий пример: найти усилия и моменты в сечении, расположенном посередине стержня (рис. 41).

Поскольку сечение стержня представляет собой прямоугольник, то главными центральными осями сечения будут оси симметрии прямоугольника. Усилия и моменты в сечении находим как суммы проекций и моментов сил, действующих на левую часть рассеченного стержня:

$$N = 10P; \quad Q_y = P; \quad Q_z = 0; \quad M_{кр} = 0;$$

$$M_y = 0; \quad M_z = -P \frac{l}{6}.$$

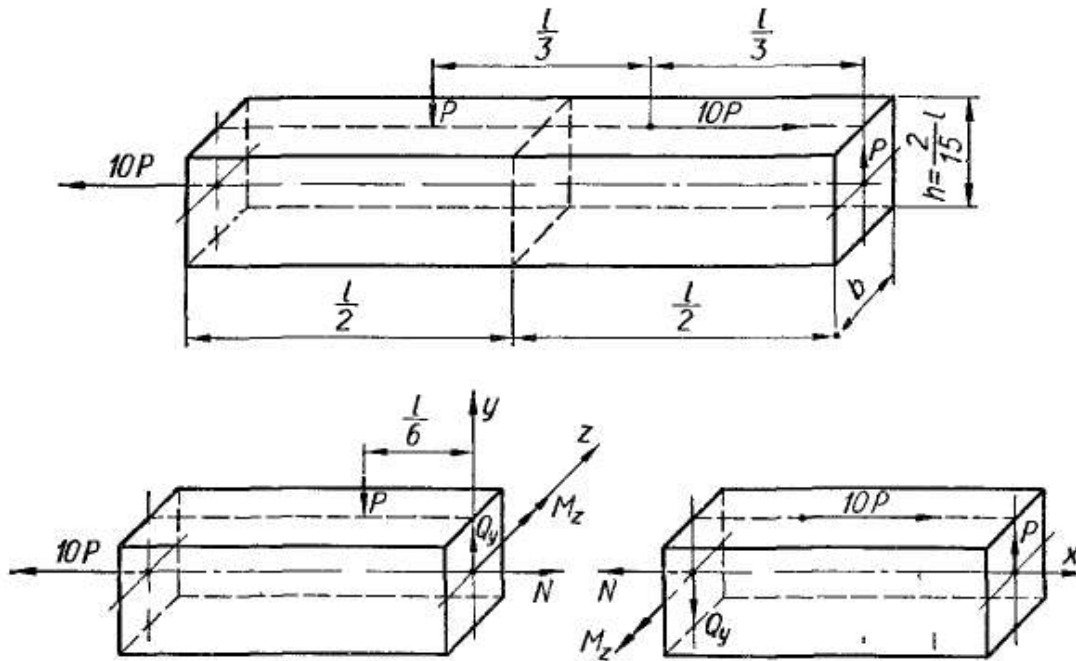


Рис. 41

Нетрудно проверить, что, вычисляя суммы проекций и моментов сил, действующих на правую часть стержня, придем к такому же результату. Например,

$$M_z = -10P \frac{l}{2} \frac{2}{15} + P \frac{l}{2} = -\frac{1}{6} Pl.$$

Усилия и моменты в разных сечениях одного и того же стержня различны. *Графики (диаграммы), показывающие, как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называются эпюрами.* Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна или просто совпадала с осью стержня.

2. Ординаты эпюры откладывают от оси эпюры по перпендикуляру.

3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базе.

4. Для усилий и моментов выбирают некоторый масштаб. Ординаты откладывают строго в масштабе. Кроме того, на эпюрах прокладывают числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

§ 15. ЭПЮРЫ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Продольная (осевая) сила считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной, если вызывает сжатие. Внешние силы сами по себе ни положительные, ни отрицательны, но каждая дает в выражении для N слагаемое определенного знака.

В качестве примера построения эпюр осевых сил рассмотрим стержень (рис. 42), нагруженный в точках A , B и C сосредоточенными силами P_1 , P_2 , P_3 , направленными вдоль оси.

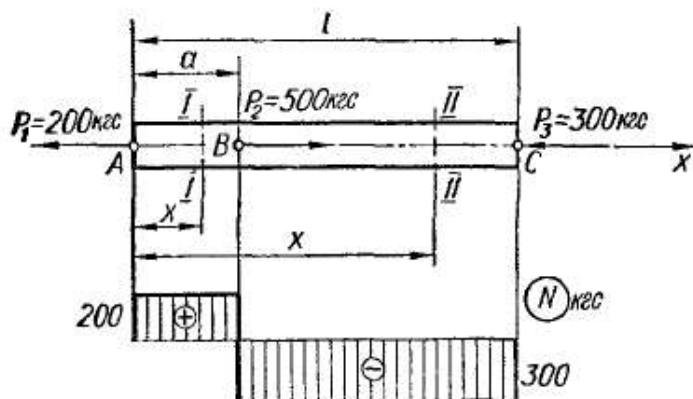


Рис. 42

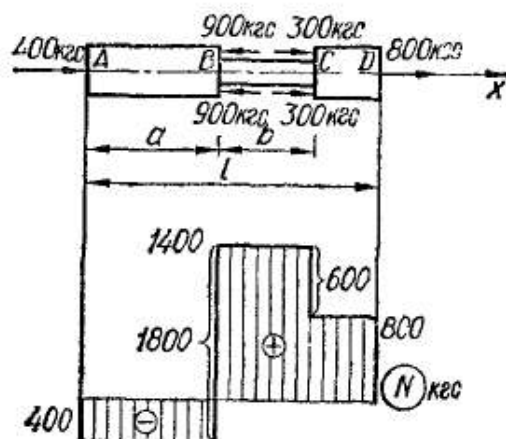


Рис. 43

Приступая к построению эпюры, стержень разбивают на участки. Участком называют часть стержня между точками приложения сосредоточенных сил. Если на стержень действует распределенная нагрузка, участком называют часть стержня, в пределах которого распределенная нагрузка изменяется по одному закону. В рассматриваемом примере два участка — I (AB) и II (BC).

Чтобы построить эпюры, нужно составить выражения для осевых сил в произвольном сечении каждого участка.

Выберем начало координат в крайней левой точке стержня; ось x направим вдоль его оси. В произвольном сечении любого участка на расстоянии x от начала координат находим осевую силу как сумму проекций всех внешних сил, расположенных слева или справа от рассматриваемого сечения:

I участок ($0 \leq x < a$)

слева: $N(x) = P_1 = 200 \text{ кгс}$;

справа: $N(x) = P_2 - P_3 = (500 - 300) \text{ кгс} = 200 \text{ кгс}$.

II участок ($a < x \leq l$)

слева: $N(x) = P_1 - P_2 = (200 - 500) \text{ кгс} = -300 \text{ кгс}$;

справа: $N(x) = -P_3 = -300 \text{ кгс}$.

Поскольку эти величины не зависят от абсцисс сечения, то во всех сечениях первого участка продольная сила $N = 200 \text{ кгс}$, а

для любого сечения второго участка она равна — 300 кгс. Откладывая полученные ординаты от оси эпюры, строим эпюру N . Заметим, что штриховка эпюры показывает откладываемые ординаты. В сечениях A , B и C на эпюре получились скачки, равные соответственно 200, 500 и 300 кгс, т. е. как раз тем силам, которые приложены к стержню в этих сечениях.

Если на стержень действуют только сосредоточенные силы, то линии эпюры параллельны ее оси (эпюра N состоит из прямоугольников и имеет скачки в тех сечениях, где приложены внешние силы). Так, нетрудно убедиться, что для стержня, изображенного на рис. 43, эпюра будет иметь такой вид, как показано на рисунке.

Если стержень расположен вертикально и учитывается его собственный вес, то линия эпюры наклонена к оси (для цилиндрического стержня) или криволинейна (для стержня с непрерывно меняющимися размерами сечения).

Пример 2. Построим эпюру N для ступенчатого стержня (рис. 44) с учетом собственного веса. Площадь сечения верхней части стержня F_1 , нижней — F_2 . Объемный вес γ кгс/см³.

Начало координат выбираем в точке A (на рисунке показана только ось x). Продольную силу в любом сечении вычисляем как сумму вышележащих сил (чтобы не определять предварительно реакции в опоре). Тогда для участка AB

$$N(x) = -P - \gamma F_1 x; \quad (0 \leq x < a);$$

для BC

$$N(x) = -P - \gamma F_1 a - \gamma F_2 (x - a); \quad (a < x \leq l).$$

Это уравнения наклонных прямых, так что эпюра N трапецевидна. Но поскольку площади поперечных сечений на участках различны, наклон эпюры на участках AB и BC неодинаков:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma F_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma F_2.$$

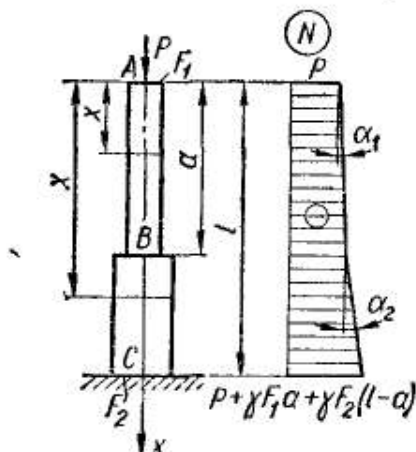


Рис. 44

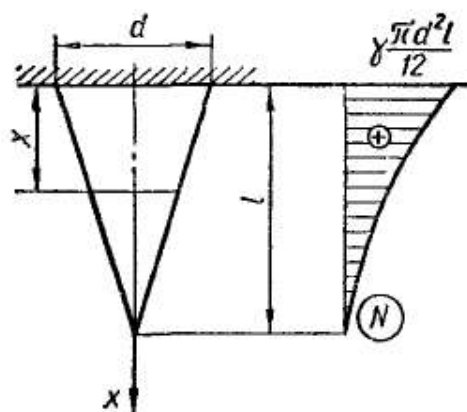


Рис. 45

При $x = l$ из второго уравнения находим наибольшее по величине продольное усилие: $N = -[P + \gamma F_1 a + \gamma F_2 (l - a)]$. Этой же величине равна и реакция в заделке.

Пример 3. Построим эпюру N для конического стержня от собственного веса (рис. 45).

При любом значении x осевое усилие в сечении равно весу нижележащей части конуса. Диаметр основания этой части

$$d(x) = \frac{d}{l} (l - x),$$

поэтому

$$N(x) = \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4l^2} (l-x)^3.$$

Отсюда видно, что кривая эпюры будет кубической параболой, причем

$$\left. \frac{dN(x)}{dx} \right|_{x=l} = - \frac{\pi \gamma d^2}{4l^2} (l-x)^2 \Big|_{x=l} = 0.$$

Следовательно, в нижней точке эпюра касается оси. При $x=0$

$$N_{\max} = \frac{\gamma l d^2 l}{12}.$$

§ 16. ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Деформация кручения наиболее распространена в валах. Если нагрузка на прямолинейный стержень (вал) состоит только из моментов M_k , плоскости которых перпендикулярны к оси стержня, то из шести усилий и моментов в любом сечении остается только крутящий момент $M_{кр}$.

Внутренний момент $M_{кр}$ выражается через внешние M_k : $M_{кр}$ в сечении равен сумме внешних моментов M_k , расположенных по одну сторону от сечения. Если стержень (вал) вращается равномерно,

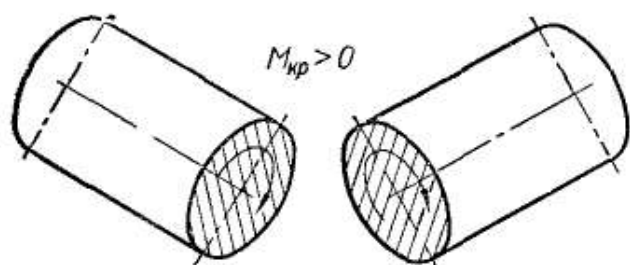
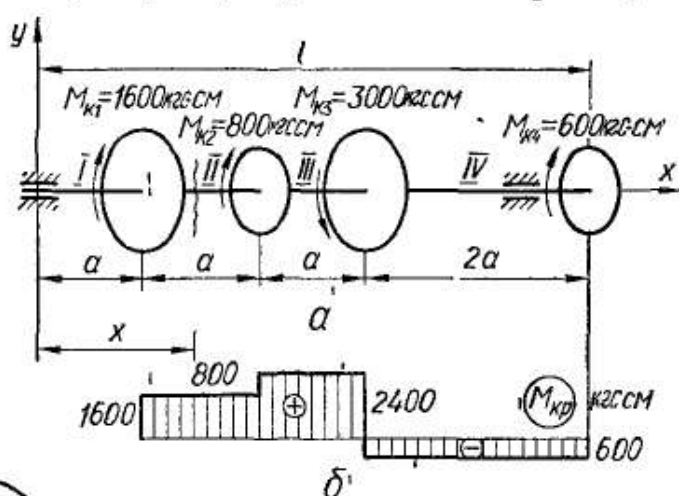


Рис. 46

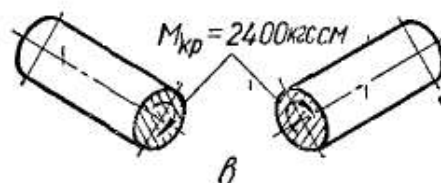


Рис. 47

то алгебраическая сумма всех M_k равна нулю. Поэтому результат получится один и тот же, будем ли при вычислении $M_{кр}$ брать сумму моментов M_k , расположенных слева или справа от сечения.

Крутящий момент $M_{кр}$ считается положительным, если при наблюдении с торца вдоль оси рассматриваемой части он стремится вращать сечение по часовой стрелке (рис. 46).

Рассмотрим в качестве примера построение эпюр крутящих моментов для трансмиссионного вала, схема которого представлена на рис. 47.

Разбиваем стержень на участки I, II, III, IV. Выбираем начало координат в крайней левой точке вала. Так как трением в подшипниках пренебрегаем, то в любом сечении на участке I

$$(0 \leq x < a)$$

$$M_{кр} = 0.$$

Проведя произвольные сечения с переменной абсциссой x , на остальных участках вала получим соответственно:

II участок ($a < x < 2a$): $M_{кр} = M_{к1} = 1600$ кгс · см (слева);

III участок ($2a < x < 3a$): $M_{кр} = M_{к1} + M_{к2} = (1600 + 800)$ кгс · см = 2400 кгс · см (слева);

IV участок ($3a < x \leq 5a$): $M_{кр} = M_{к1} + M_{к2} - M_{к3} = (1600 + 800 - 3000)$ кгс · см = -600 кгс · см (слева);

$$M_{кр} = -M_{к4} = -600 \text{ кгс} \cdot \text{см (справа)}.$$

Величины крутящих моментов на всех участках не зависят от абсциссы сечения, поэтому эпюра крутящих моментов имеет вид трех прямоугольников (рис. 47, б). В тех сечениях, где приложены сосредоточенные внешние моменты M_k , получаются скачки на величину этих моментов. Заметим, что в месте скачка крутящие моменты не определяют. Их вычисляют на бесконечно близких расстояниях слева и справа от скачка.

Построенная эпюра (рис. 47, б) показывает, что, хотя к валу и приложен момент $M_{к3} = 3000$ кгс · см, наибольший крутящий момент в сечении равен лишь 2400 кгс · см. Эту величину и следует использовать при расчете на прочность и жесткость. Направление крутящих моментов в сечениях наиболее загруженной части вала — участке III — показано на рис. 47, в.

На практике часто бывают заданы не моменты M_k кгс · см, приложенные к дискам (шкивам или зубчатым колесам), а передаваемые на них или снимаемые с них мощности N л.с.¹ и число оборотов вала в минуту n . Установим зависимость между этими величинами.

Как известно из курса теоретической механики, момент совершает работу на угле поворота. Обозначив угловую скорость вала через ω , найдем, что за t с диск повернется вместе с валом на угол

$$\omega t = \frac{\pi n}{30} t \text{ рад}$$

и момент M_k кгс · см совершит работу

$$A = M_k \omega t = \frac{\pi n M_k}{30} t \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Тогда мощность (работа за 1 с)

$$N = \frac{A}{t} = \frac{\pi n M_k}{30} \text{ кгс} \cdot \text{см/с}.$$

¹ Согласно СИ, единицей мощности является ватт (Вт) — мощность, при которой работа в один джоуль совершается в одну секунду ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$).

Соотношение между единицами мощности:

$$1 \text{ Вт} = 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{м/с} = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ л. с.};$$

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кгс} \cdot \text{м/с} = 736 \text{ Вт}.$$

Выражая мощность в лошадиных силах, получим

$$N = \frac{1}{75 \cdot 100} N \left[\frac{\text{кгс} \cdot \text{см}}{\text{с}} \right] = \frac{\pi n M_{\text{к}}}{75 \cdot 100 \cdot 30} \text{ л. с.}$$

Отсюда

$$M_{\text{к}} = \frac{75 \cdot 100 \cdot 30}{\pi} \frac{N}{n},$$

или

$$M_{\text{к}} = 71\,620 \frac{N}{n}, \quad (3.1)$$

причем здесь N подставляют в л. с., а n — в об/мин. Тогда $M_{\text{к}}$ получается в кгс · см.

Иногда мощность задают в киловаттах — K кВт. Поскольку $1 \text{ л. с.} \approx 0,736 \text{ кВт}$ и, значит, $K = 0,736 N$, из выражения (3.1) находим, что

$$M_{\text{к}} = \frac{71\,620N}{0,736n} = 97\,360 \frac{K}{n}. \quad (3.2)$$

Пример 4. Построим эпюру крутящих моментов для бруса, нагруженного по схеме, представленной на рис. 48, а.

Легко видеть, что нагрузка, действующая на стержень, эквивалентна распределенным крутящим моментам $m_{\text{к}}$ (рис. 48, б) интенсивностью qb кгс · м/м.

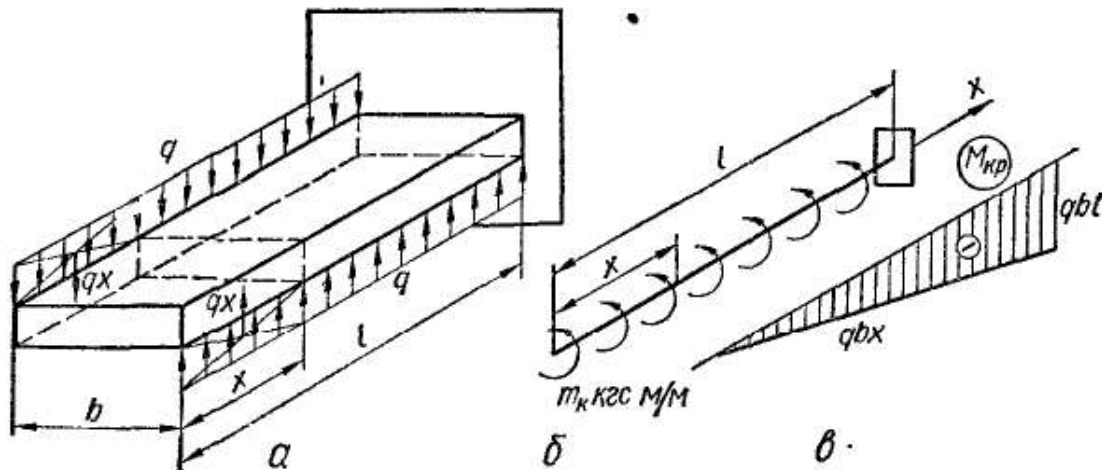


Рис. 48

Брус имеет всего лишь один участок, в произвольном сечении которого на расстоянии x от левого конца крутящий момент

$$M_{\text{кр}}(x) = -m_{\text{к}}x = -qb x, \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$M_{\text{кр}}(0) = 0; \quad M_{\text{кр}}(l) = -qbl.$$

В результате получаем треугольную эпюру, представленную на рис. 48, в, причем $M_{\text{кр.макс}} \approx -qbl$ при $x = l$.

§ 17. БАЛКИ И ИХ ОПОРЫ

Балками будем называть прямолинейные стержни, работающие на изгиб. В сопротивлении материалов термин «балка» значительно шире, чем в обычном употреблении этого слова: с точки зрения

расчета на прочность, жесткость и устойчивость балкой является не только строительная балка, но также и вал, болт, ось железнодорожного вагона, зуб шестерни и т. д.

Вначале ограничимся построением эпюр для простейшего случая изгиба балок, при котором все заданные нагрузки лежат в одной плоскости, называемой *силовой* (на рис. 49, а — плоскость Π), причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки. Такой случай будем называть *плоским изгибом*¹.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью (рис. 49, б). При этом все нагрузки, естественно, должны быть приведены к оси балки и силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

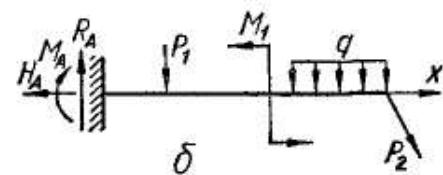
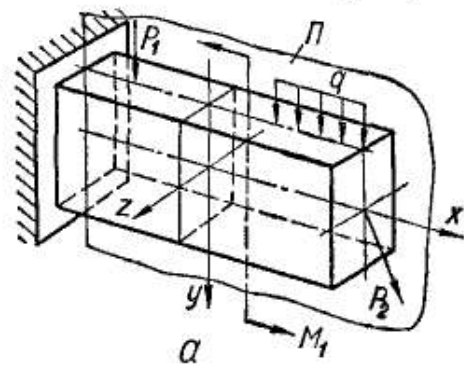


Рис. 49

Как правило, балки имеют те или иные опорные устройства — опоры. Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

а) *шарнирно-подвижная опора* (рис. 50, а), в которой может возникнуть только одна составляющая реакции — R_A , направленная вдоль опорного стерженька;

б) *шарнирно-неподвижная опора* (рис. 50, б), в которой могут возникнуть две составляющие — вертикальная реакция R_A и горизонтальная реакция H_A ;

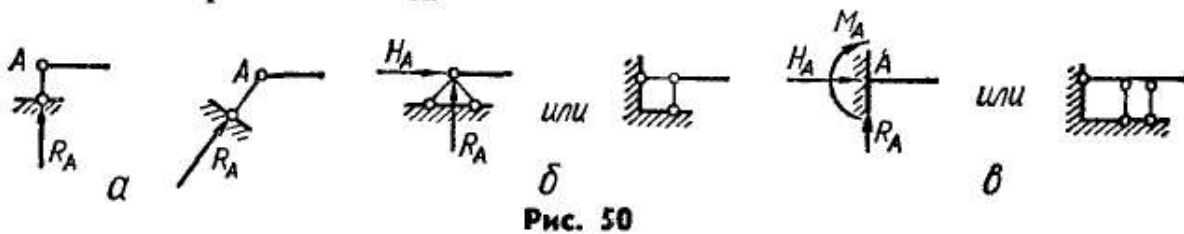


Рис. 50

в) *защемление* (иначе *жесткое защемление* или *заделка*), где могут быть три составляющие — вертикальная R_A и горизонтальная H_A реакции и опорный момент M_A (рис. 50, в).

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке А — центре тяжести опорного сечения.

Балка, показанная на рис. 51, а, называется *простой*, или *однопролетной*, или *двухопорной*, а расстояние l между опорами — *пролетом*.

Консолью называется балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 49, б), или часть балки, свешивающаяся за опоры (часть BC на рис. 51, б; части AC и BD на рис. 51, в). Балки, имеющие свешивающиеся части, называют *консольными* (рис. 51, б, в).

¹ Детально плоский изгиб рассматривается в § 60.

$$M = 71620 \frac{N}{m}$$

Как известно, для плоской системы сил можно составить три уравнения статики для определения неизвестных реакций. Поэтому балка будет статически определимой, если число неизвестных опорных реакций не превышает трех; в противном случае балка статически неопределима. Очевидно, что балки, изображенные на рис. 49 и 51, статически определимы.

Балка, изображенная на рис. 52, а, называется *неразрезной* и является *статически неопределимой*, поскольку имеет пять неиз-

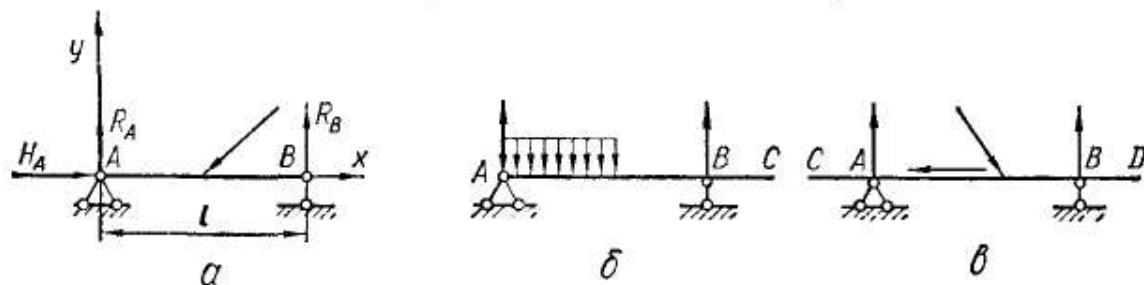


Рис. 51

вестных опорных реакций: три в опоре *A* и по одной в опорах *B* и *C*. Поставив в сечениях балки шарниры, например в точках *D* и *E* (рис. 52, б), получим статически определимую шарнирную балку, ибо каждый такой промежуточный шарнир к трем основным урав-

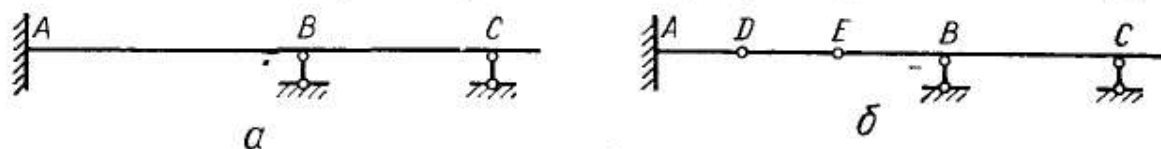


Рис. 52

нениям статики прибавляет одно дополнительное уравнение: *сумма моментов относительно центра шарнира от всех сил, расположенных по одну сторону от него, равна нулю.*

Построение эпюр для статически неопределимых балок требует умения вычислять деформации, а поэтому ограничимся пока исключительно статически определимыми балками.

§ 18. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ

Способы определения опорных реакций изучают в курсе теоретической механики. Поэтому здесь остановимся только на некоторых практических вопросах. Для этого рассмотрим простую балку (рис. 51, а).

1. Опоры обычно обозначают буквами *A* и *B*. Три неизвестные реакции находят из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum X = 0,$$

откуда находят H_A ;

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира *A* равна нулю:

$$\sum M_A = 0,$$

откуда находят R_B ;

в) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира B равна нулю:

$$\sum M_B = 0,$$

откуда находят R_A .

2. Для контроля можно использовать или условие равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum Y = 0,$$

или условие равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки C , отличной от A и B , т. е.

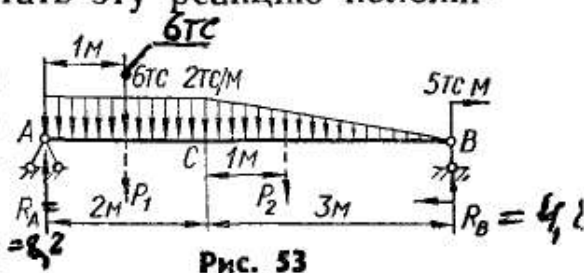
$$\sum M_C = 0.$$

Условием $\sum Y = 0$ пользоваться проще, но оно дает надежную проверку только в тех случаях, когда к балке не приложены сосредоточенные моменты.

3. Перед составлением уравнений равновесия нужно выбрать (вообще говоря, произвольно) направления реакций и изобразить их на рисунке. Если в результате вычислений какая-либо реакция получается отрицательной, нужно изменить на рисунке ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

4. В большинстве случаев нагрузка перпендикулярна к оси балки. Тогда $H_A = 0$ и уравнением $\sum X = 0$ не пользуются.

5. Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций ее заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.



Пример 5. Вычислить опорные реакции для балки, показанной на рис. 53.

Прежде всего находим равнодействующие P_1 и P_2 нагрузок, распределенных на участках AC и CB :

$$P_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ тс}; \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ тс}.$$

Сила P_1 приложена в центре тяжести прямоугольника, а P_2 — в центре тяжести треугольника. Находим реакции:

$$\sum M_A = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 - R_B \cdot 5 = 0; \quad R_B = 4,8 \text{ тс};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 5 = 0; \quad R_A = 8,2 \text{ тс};$$

Проверка:

$$\sum M_C = 8,2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 - 4,8 \cdot 3 = 0.$$

§ 19. ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ В СЕЧЕНИЯХ БАЛКИ

При плоском изгибе вся нагрузка расположена в главной плоскости стержня xy (рис. 49, *a*), поэтому она не дает проекций на ось z и моментов относительно осей x и y . Следовательно, в любом сечении балки

$$Q_z = M_x = M_{кр} = M_y = 0$$

и отличными от нуля останутся только три величины: N , Q_y и M_z . В дальнейшем будем обозначать их N , Q и M . Эти усилия действуют в сечении рам и криволинейных стержней. В балках же, при нагрузке, перпендикулярной к оси, продольная сила так-

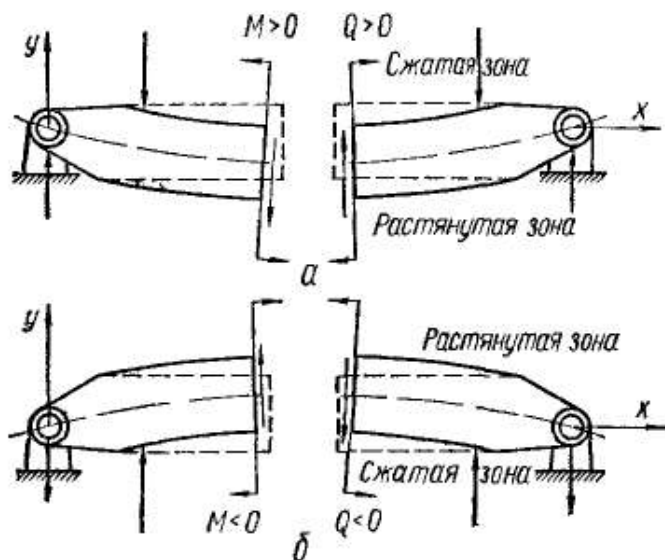


Рис. 54

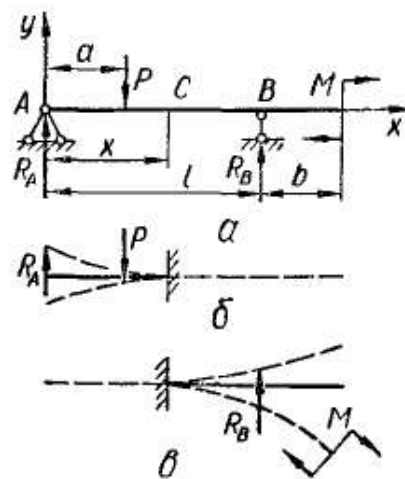


Рис. 55

же будет равна нулю. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в любом сечении балки могут быть два усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Установим следующие правила знаков для Q и M в балках.

1) поперечная сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке (рис. 54, *a*);

2) изгибающий момент M в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхних волокнах балки и направлен так, как показано на рис. 54, *a*.

Отрицательные направления Q и M показаны на рис. 54, *б*.

Для практических вычислений, однако, можно рекомендовать следующее:

1. Если внешняя сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, то в выражении для Q в этом сечении она дает положительное слагаемое. Так, реакция R_A (рис. 55, *a*) стремится повернуть балку относительно сечения C по часовой стрелке, а силы P и R_B — против нее. Поэтому поперечная сила в сечении C

$$Q_C = R_A - P$$

или

$$Q_C = -R_B.$$

2. Если внешняя нагрузка создает относительно рассматриваемого сечения момент, вызывающий сжатие верхних волокон балки, то в выражении для M в этом сечении она дает положительное слагаемое. Наиболее просто выяснить знак M для консоли. Так, на двух верхних консолях, показанных на рис. 56, *a*, нагрузка отгибает балку вверх; сжатыми оказываются верхние волокна, поэтому изгибающий момент положителен. На рис. 56, *б* сжаты нижние волокна и $M < 0$.

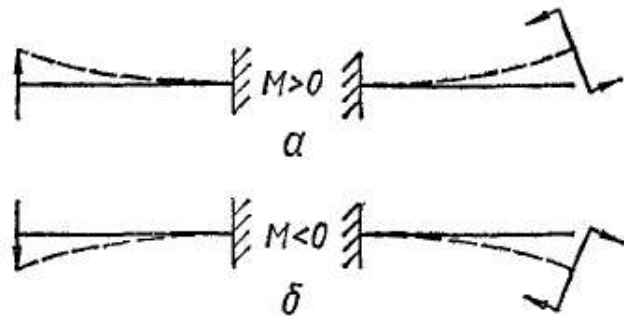


Рис. 56

В более сложных случаях (например, рис. 55) можно мысленно представлять себе, что балка освобождена от всех опор и закреплена в рассматриваемом сечении. Тогда она превращается в две консоли. Нужно рассматривать левую консоль, если изгибающий момент вычисляется как сумма моментов сил, расположенных слева от сечения (рис. 55, *б*). Тогда

$$M_C = M(x) = R_A x - P(x - a).$$

Если же M вычисляется как сумма моментов сил, расположенных справа от сечения (рис. 55, *в*), то

$$M_C = M(x) = R_B(l - x) - M.$$

§ 20. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР Q И M В БАЛКАХ

Рассмотрим порядок построения эпюр Q и M для наиболее характерных случаев нагружения балок.

Сосредоточенная сила на свободном конце консоли (рис. 57). Балка имеет лишь один участок. Начало координат выбираем в крайней левой точке A балки, ось x направляем вдоль оси балки направо.

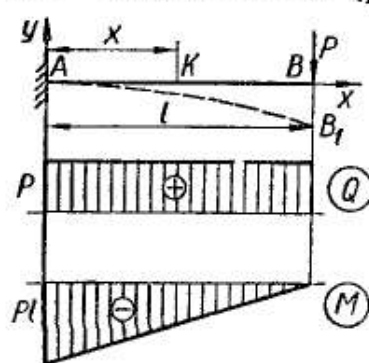


Рис. 57

Вычисляем Q и M в произвольном сечении с абсциссой x . Справа от рассматриваемого сечения действует только одна сила P , поэтому

$$Q(x) = P; \quad M(x) = -P \cdot KB = -P(l - x).$$

Как видно из этих уравнений, поперечная сила одинакова во всех сечениях балки, поэтому эпюра Q имеет вид прямоугольника.

Функция $M(x)$ линейна. Для построения ее графика достаточно получить две точки — в начале и в конце участка:

$$\text{при } x = 0 \text{ (сечение } A) \quad M_A = -Pl;$$

$$\text{при } x = l \text{ (сечение } B) \quad M_B = 0.$$

По этим данным строим эпюру M . Заметим, что положительные ординаты эпюр Q и M откладываем вверх от базы.

На рис. 57 штриховой линией AB_1 показана балка в деформированном состоянии. Как видно из рисунка, сжаты нижние волокна балки. Если совместить базисную линию эпюры изгибающих моментов с осью балки, то эпюра M окажется как бы построенной на сжатых волокнах.

Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q кгс/м на консоли (рис. 58). Поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении K будем вычислять как результат действия распределенной нагрузки, расположенной слева от сечения:

$$Q(x) = -q \cdot AK = -qx;$$

$$M(x) = -q \cdot AK \cdot LK = -\frac{q \cdot AK^2}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

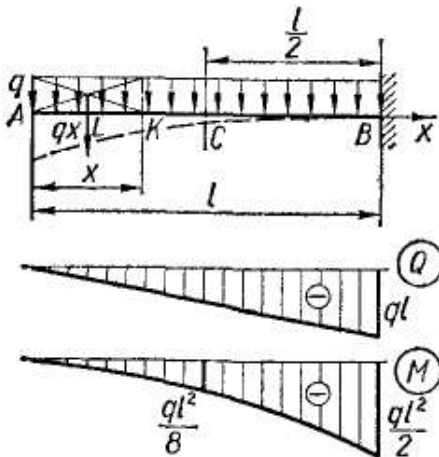


Рис. 58

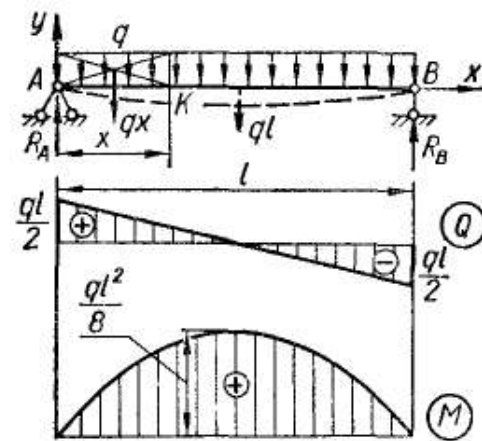


Рис. 59

Следовательно, поперечная сила $Q(x)$ изменяется по закону прямой линии, а изгибающий момент $M(x)$ — по параболическому закону. Для построения эпюры Q вычисляем ординаты в двух точках:

$$\text{при } x = 0 \quad Q_A = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad Q_B = -ql$$

и проводим прямую. Учитывая, что эпюра M криволинейна, для ее построения вычисляем ординаты в трех сечениях:

$$\text{при } x = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x = \frac{l}{2} \quad M_C = -\frac{ql^2}{8};$$

$$\text{при } x = l \quad M_B = -\frac{ql^2}{2}$$

и проводим через полученные три точки кривую.

Нагрузка интенсивностью q кгс/м, равномерно распределенная по всей длине пролета двухопорной балки (рис. 59). В данном случае необходимо сначала определить опорные реакции. Равнодействующую

щая всей распределенной нагрузки равна ql , и линия действия ее проходит через середину балки. Поэтому

$$\sum M_B = R_A l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad \sum M_A = R_B l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Вычисляя поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении K как результат действия сил, расположенных слева от сечения K , получим

$$Q(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$M(x) = R_A x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

Очевидно, что эпюра Q будет прямолинейной, а эпюра M — параболической.

Для построения эпюр вычисляем:

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2};$$

$$M(0) = 0;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8};$$

$$M(l) = \frac{ql}{2} l - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

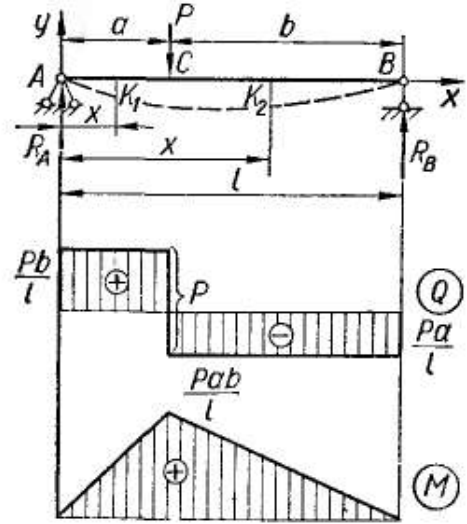


Рис. 60

Чтобы определить экстремальное значение изгибающего момента, приравняем нулю производную от изгибающего момента $M(x)$ по абсциссе x сечения:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0,$$

отсюда

$$x = \frac{l}{2}.$$

Так как вторая производная $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q$, т. е. отрицательна, то в сечении при $x = l/2$ имеем максимальное значение момента:

$$M_{\text{макс}} = M(l/2) = \frac{ql^2}{8}.$$

Эпюры Q и M построены на рис. 59.

Сосредоточенная сила P , приложенная к двухопорной балке (рис. 60). Прежде всего найдем опорные реакции:

$$\sum M_B = R_A l - Pb = 0; \quad R_A = \frac{Pb}{l};$$

$$\sum M_A = Pa - R_B l = 0; \quad R_B = \frac{Pa}{l}.$$

В данном случае имеем на балке два участка.

Вычисляем Q и M в произвольном сечении K_1 , расположенном на участке AC ($0 \leq x \leq a$):

$$Q(x) = R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Следовательно, во всех сечениях участка поперечные силы одинаковы и эпюра Q имеет вид прямоугольника.

Изгибающий момент $M(x)$ изменяется по линейному закону:

$$M(x) = R_A x = \frac{Pb}{l} x.$$

Для построения эпюры вычисляем ординаты на границах участка:

$$\text{при } x = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x = a \quad M_C = \frac{Pab}{l}.$$

В произвольном сечении K_2 на участке CB ($a \leq x \leq l$), рассматривая действие сил, расположенных справа от него, получим

$$Q(x) = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2 B = \frac{Pa}{l} (l - x).$$

К тому же результату мы пришли бы, рассматривая действие сил, расположенных слева:

$$Q(x) = R_A - P; \quad M(x) = R_A \cdot AK_2 - P \cdot CK_2.$$

Как и на участке AC , эпюра Q на участке CB также имеет вид прямоугольника. Для построения эпюры M находим значения ординат в точках C и B :

$$\text{при } x = a \quad M_C = \frac{Pa}{l} (l - a) = \frac{Pab}{l};$$

$$\text{при } x = l \quad M_B = 0.$$

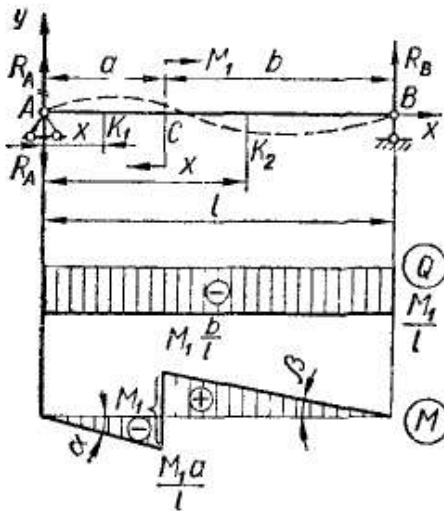


Рис. 61

В результате получаем эпюры, представленные на рис. 60. Они показывают, что при $x = a$ функция $Q(x)$ терпит разрыв и на эпюре Q получается скачок, равный по абсолютной величине внешней силе P в этом сечении:

$$\frac{Pb}{l} + \frac{Pa}{l} = \frac{P(a+b)}{l} = \frac{Pl}{l} = P;$$

на эпюре M в этом сечении имеет место излом (угловая точка).

Сосредоточенный момент в пролете двухопорной балки (рис. 61). Находим опорные реакции, направив их вверх:

$$\sum M_B = R_A l + M_1 = 0;$$

$$\sum M_A = R_B l - M_1 = 0,$$

отсюда

$$R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad R_B = \frac{M_1}{l}.$$

Меняем направление R_A на обратное. Отметив на участках AC и CB произвольные сечения K_1 и K_2 , записываем уравнения для функций $Q(x)$ и $M(x)$:

для участка AC ($0 \leq x \leq a$)

$$Q(x) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -R_A x = -\frac{M_1}{l} x;$$

для участка CB ($a \leq x \leq l$)

$$Q(x) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2 B = \frac{M_1}{l} (l - x).$$

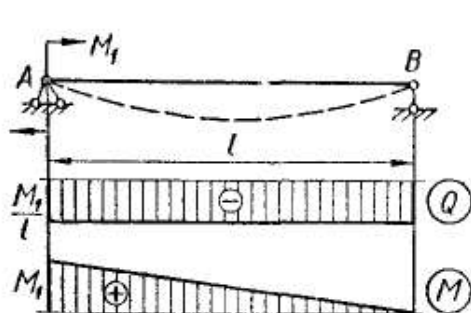


Рис. 62

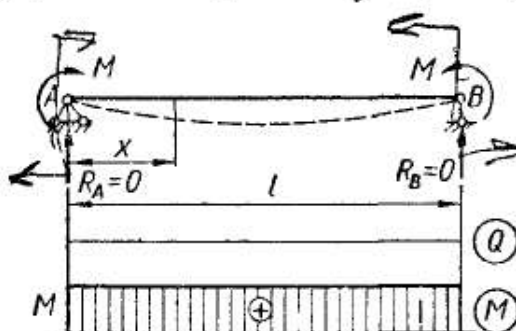


Рис. 63

На основании этих уравнений строим эпюры Q и M . Эпюра M расположена частично под осью, частично над осью. Поскольку она построена на сжатых волокнах, видим, что на участке AC сжаты нижние волокна балки, а на участке CB — верхние. Этому соответствует изображенная штриховой деформированная ось балки. В том сечении, где изгибающий момент меняет знак, на ней будет точка перегиба.

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{M_1}{l}$$

и, значит, прямые на эпюре M на участках AC и CB параллельны.

Обратим внимание на то, что там, где приложен внешний момент (сечение C), на эпюре Q изменений нет, а функция $M(x)$ претерпевает разрыв и на эпюре M получается скачок, равный по величине внешнему моменту.

В частном случае, когда момент приложен в опорном сечении, на основании приведенных выше формул при $a = 0$ получим эпюры, приведенные на рис. 62.

Сосредоточенные моменты на опорах однопролетной балки (рис. 63). Находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_B = R_A l + M - M &= 0; \quad R_A = 0; \\ \sum M_A = -R_B l + M - M &= 0; \quad R_B = 0. \end{aligned}$$

Тогда для произвольного сечения, находящегося на расстоянии x от левой опоры,

$$Q(x) = R_A = 0; \quad M(x) = M = \text{const.}$$

Итак, в любом сечении $Q = 0$, а изгибающий момент постоянен вдоль балки. Такой случай изгиба носит название *чистого изгиба*.

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЭПЮР Q И M

Установим некоторые характерные особенности эпюр Q и M , значение которых облегчит построение эпюр и даст возможность в известной степени контролировать их правильность.

Рассмотрим какую-нибудь балку с произвольной нагрузкой (рис. 64, а). Распределенную нагрузку условимся считать положи-

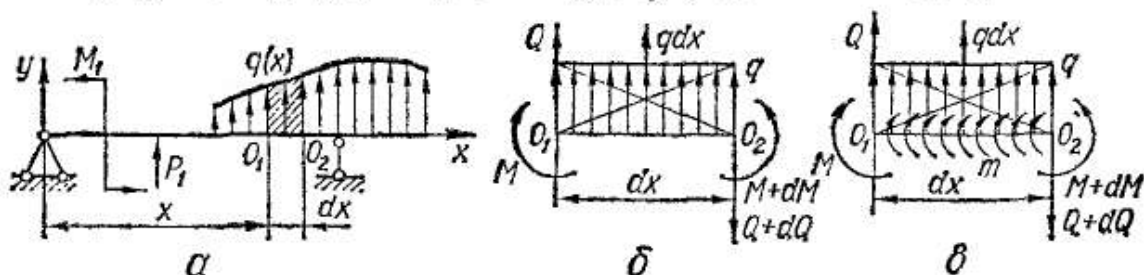


Рис. 64

тельной, если она направлена вверх (такая нагрузка дает положительную составляющую для изгибающего момента в любом сечении).

Выделим на участке, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент балки O_1O_2 . Он находится в равновесии под действием внешней нагрузки, поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях O_1 и O_2 (рис. 64, б). Поскольку в общем случае Q и M меняются вдоль оси балки, то в сечении O_1 имеем $Q(x)$ и $M(x)$, а в сечении O_2 имеем $Q(x) + dQ$ и $M(x) + dM$. Для вывода, как всегда, изображаем их положительно направленными. Из условия равновесия выделенного элемента получим

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_{O_2} = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Первое уравнение дает условие

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} = q.} \quad (3.3)$$

Из второго уравнения, пренебрегая членом $qdx \frac{dx}{2}$, найдем

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q.} \quad (3.4)$$

Из формул (3.3) и (3.4) следует, что

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = q.} \quad (3.5)$$

Когда на рассматриваемом участке действует, кроме того, распределенный момент интенсивностью m кгс · см/м (рис. 64, в), формула (3.4) принимает следующий вид:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q + m;} \quad (3.6)$$

формулы (3.3) и (3.5) при этом остаются без изменения.

Соотношения (3.3) — (3.6) называют *дифференциальными зависимостями при изгибе*. Эти зависимости и анализ примеров предыдущего параграфа позволяют установить некоторые особенности эпюр изгибающих моментов и поперечных сил:

1. На участках, где нет распределенной нагрузки, эпюры Q ограничены прямыми, параллельными базе, а эпюры M в общем случае — наклонными прямыми (рис. 65).

2. На участках, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M — квадратичными параболом (рис. 66). Поскольку эпюру M

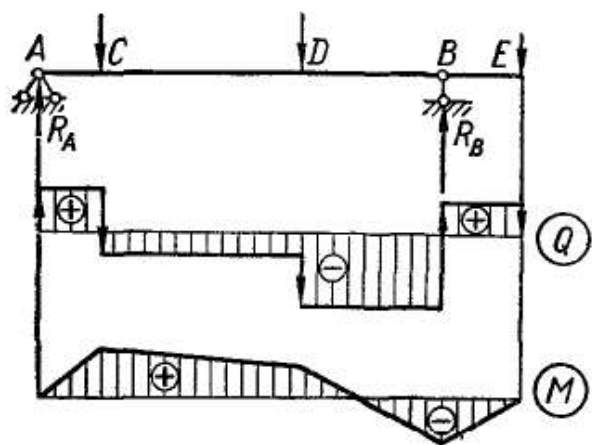


Рис. 65

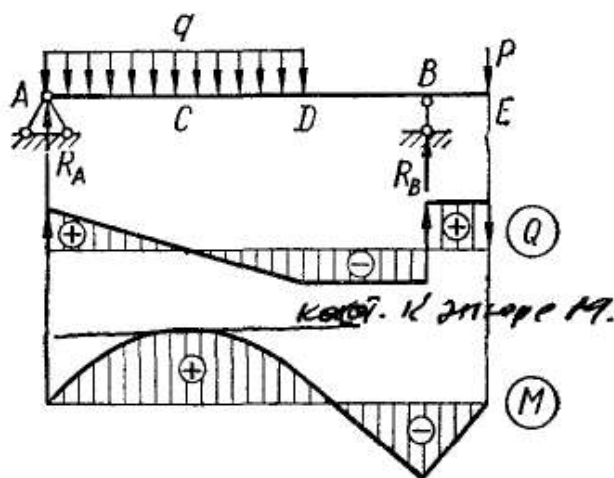


Рис. 66

строим на сжатых волокнах, то выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки q (рис. 67, а, б).

3. В сечениях, где $Q = 0$, касательная к эпюре M параллельна базе эпюры (рис. 66 и 67).

4. На участках, где $Q > 0$, момент M возрастает, т. е. слева направо положительные ординаты эпюры M увеличиваются, а отрицательные — уменьшаются (рис. 65, 66, участки AC и BE); на участках, где $Q < 0$, момент M убывает (рис. 65, 66, участки CD и DB).

б. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:
 а) на эюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил (на рис. 65 и 66 эти скачки отмечены толстыми линиями со стрелками);

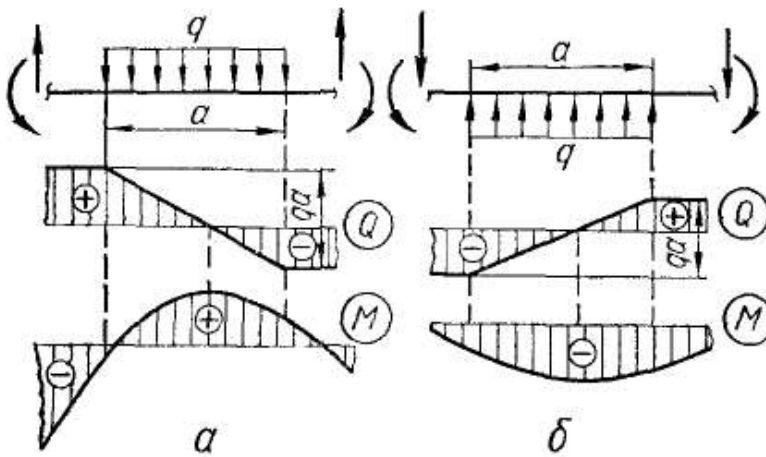


Рис. 67

б) на эюре M будут переломы (рис. 68), причем острие перелома направлено против действия силы (см. также сечения C, D и B на рис. 65 и сечение B на рис. 66).

б. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эюре M будут скачки на величину этих моментов (на эюре Q изменений не будет). Направление скачка зависит от направления внешнего момента (рис. 69). Ветви эюры до скачка и за ним параллельны. Так, на рис. 69 линия $AB \parallel CD \parallel EF$ (см. также рис. 61 и

Рис. 68 shows bending moment diagrams for beams with concentrated forces. Case 'a' shows a beam with a concentrated force P at the end, resulting in a sharp peak in the moment diagram. Case 'б' shows a beam with a concentrated moment M at the end, resulting in a sharp change in the moment diagram.

Рис. 68

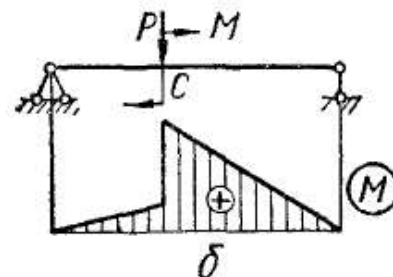
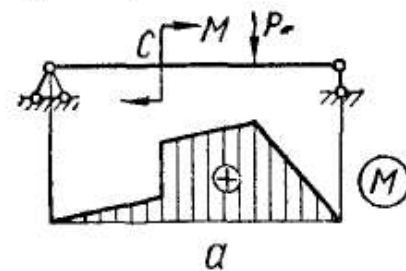


Рис. 70

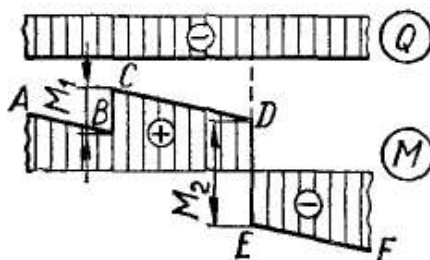
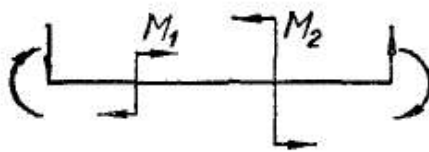


Рис. 69

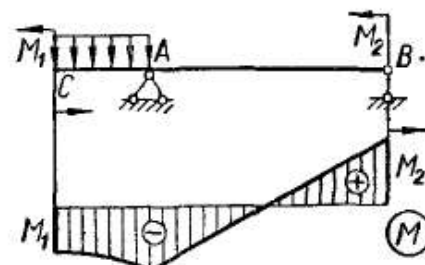


Рис. 71

70, а). Это не относится к случаю, когда в одной точке приложены и сила и момент (рис. 70, б), — сила вызывает перелом и нарушает параллельность.

7. Если на конце консоли или в концевой опоре к балке приложен сосредоточенный момент, то в этом сечении изгибающий момент равен внешнему моменту (рис. 71, сечения B и C). Если же в концевой шарнирной опоре или на конце консоли балка не нагружена внешним моментом, то в них $M = 0$, что имеет место в большинстве случаев (рис. 65 и 66, сечения A и E).

8. Эпюра Q представляет собой диаграмму производной от эпюры M . Значит, ординаты эпюры Q пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре M .

Для обоснования перечисленных свойств эпюр рассмотрим следующее. Если нет распределенной нагрузки, то

$$\frac{dQ}{dx} = q = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$Q(x) = C_1 = \text{const.} \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\frac{dM}{dx} = Q = C_1,$$

откуда

$$M(x) = C_1x + C_2. \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7) и (3.8) доказывают свойство 1, так как для функции (3.7) график будет представлять собой горизонтальную прямую, а для функции (3.8) — в общем случае наклонную прямую (если $C_1 \neq 0$). Аналогично доказываются и остальные свойства.

Заметим, однако, что появление скачков на эпюре Q связано с введением условного понятия о сосредоточенной силе. Как уже говорилось, сосредоточенной силой мы считаем нагрузку, распределенную на небольшой длине. Если загрузить балку такой действительной нагрузкой, то никаких скачков на эпюре Q и переломов на эпюре M не будет (рис. 72). Это замечание относится и к действию сосредоточенного внешнего момента.

Рассмотрим более сложные случаи построения эпюр Q и M .

Пример 6. Построим эпюры Q и M для простой балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону (рис. 73).

Определяем опорные реакции. Равнодействующая всей распределенной нагрузки равна $\frac{ql}{2}$ и проходит через центр тяжести грузовой эпюры, который удален на $\frac{l}{3}$ от правой опоры. Поэтому

$$\sum M_B = R_A l - \frac{ql}{2} \frac{l}{3} = 0;$$

$$\sum M_A = R_B l - \frac{ql}{2} \frac{2}{3} l = 0.$$

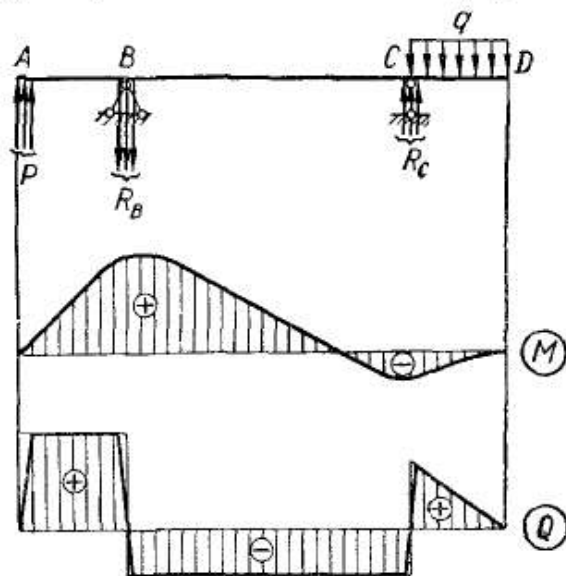


Рис. 72

Отсюда

$$R_A = \frac{ql}{6}; \quad R_B = \frac{ql}{3}.$$

Поперечную силу и изгибающий момент в произвольном сечении K вычисляем как результат действия сил, расположенных слева от сечения K , — реакции R_A и равнодействующей распределенной нагрузки $\frac{1}{2} q(x)x$. Из подобия треугольников

$$q(x) = q \frac{x}{l}.$$

Поэтому

$$Q(x) = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}; \quad M(x) = \frac{ql}{6}x - \frac{qx^3}{6l}.$$

Из этих уравнений видно, что эпюра Q очерчена квадратичной параболой, а эпюра M — кубической. Для построения их вычисляем ординаты в характерных точках:

$$\text{при } x=0 \quad Q_A = \frac{ql}{6}; \quad \text{при } x=l \quad Q_B = -\frac{ql}{3};$$

$$Q=0 \text{ при } \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = 0, \text{ т. е. при } x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}};$$

$$\text{при } x=0 \quad \frac{dQ}{dx} = -\frac{qx}{l} = 0.$$

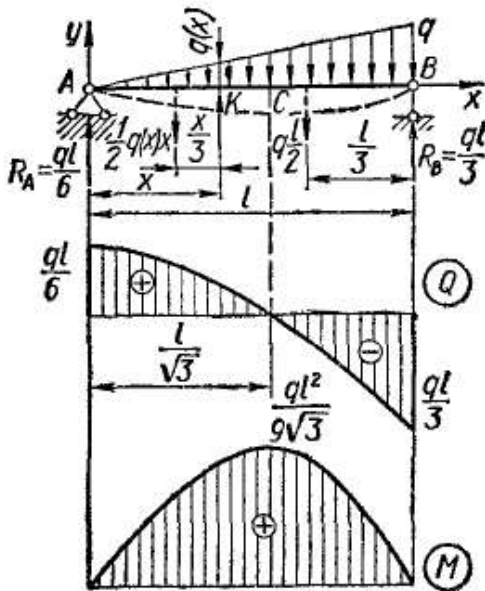


Рис. 73

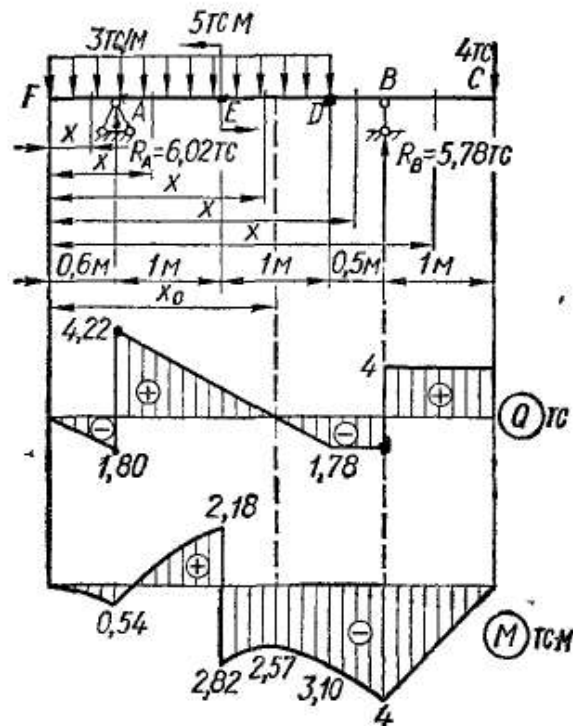


Рис. 74

Следовательно, эпюра Q имеет такой вид, как показано на рис. 73, причем в сечении A ($x=0$) касательная к эпюре Q параллельна оси.

Далее,

$$\text{при } x=0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x=l \quad M_B = 0.$$

При $x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ производная

$$\frac{dM}{dx} = \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = Q(x_0)$$

обращается в нуль, а

$$\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{\sqrt{3}}} = -\left(\frac{qx}{l}\right)_{x=\frac{l}{\sqrt{3}}} = -\frac{q}{\sqrt{3}} < 0.$$

Значит, в сечении $x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$ имеем максимум M , причем

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql}{6} \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6l} \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}.$$

Пример 7. Построим эпюры Q и M для балки, показанной на рис. 74. Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 3 \cdot 2,6 \cdot 0,7 - 5 - R_B \cdot 2,5 + 4 \cdot 3,5 = 0; \quad R_B = 5,78 \text{ тс},$$

$$\sum M_B = -3 \cdot 2,6 \cdot 1,8 + R_A \cdot 2,5 - 5 + 4 \cdot 1 = 0, \quad R_A = 6,02 \text{ тс}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 6,02 - 3 \cdot 2,6 + 5,78 - 4 = 11,80 - 11,80 = 0.$$

Балка имеет пять участков. В произвольных сечениях каждого из них записываем выражения для Q и M , проверяя при этом, выполняется ли равенство

$Q = \frac{dM}{dx}$, и вычисляем Q и M в характерных сечениях.

Для участка FA ($0 \leq x \leq 0,6$ м)

$$Q(x) = -3x; \quad M(x) = -\frac{3x^2}{2};$$

$$Q_F = Q(0) = 0, \quad M_F = M(0) = 0;$$

$$Q_{A_{\text{лев}}} = Q(0,6) = -3 \cdot 0,6 \text{ тс} = -1,80 \text{ тс};$$

$$M_A = M(0,6) = -\frac{3 \cdot 0,6^2}{2} \text{ тс} \cdot \text{м} = -0,54 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

Для участка AE ($0,6 \text{ м} \leq x \leq 1,6 \text{ м}$)

$$Q(x) = -3x + 6,02; \quad M(x) = -\frac{3x^2}{2} + 6,02(x - 0,6);$$

$$Q_{A_{\text{пр}}} = Q(0,6) = (-3 \cdot 0,6 + 6,02) \text{ тс} = 4,22 \text{ тс};$$

$$M_A = M(0,6) = \left(-\frac{3 \cdot 0,6^2}{2} + 0\right) \text{ тс} \cdot \text{м} = -0,54 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$Q_E = Q(1,6) = (-3 \cdot 1,6 + 6,02) \text{ тс} = 1,22 \text{ тс};$$

$$M_{E_{\text{лев}}} = M(1,6) = \left[-\frac{3 \cdot 1,6^2}{2} + 6,02(1,6 - 0,6)\right] \text{ тс} \cdot \text{м} = 2,18 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

Для участка ED ($1,6 \text{ м} \leq x \leq 2,6 \text{ м}$)

$$Q(x) = -3x + 6,02; \quad M(x) = -\frac{3x^2}{2} + 6,02(x - 0,6) - 5;$$

$$Q_E = Q(1,6) = (-3 \cdot 1,6 + 6,02) \text{ тс} = 1,22 \text{ тс};$$

$$M_{E_{\text{пр}}} = M(1,6) = \left[-\frac{3 \cdot 1,6^2}{2} + 6,02(1,6 - 0,6) - 5 \right] \text{ тс} \cdot \text{м} = -2,82 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$Q_D = Q(2,6) = (-3 \cdot 2,6 + 6,02) \text{ тс} = -1,78 \text{ тс};$$

$$M_D = M(2,6) = \left[-\frac{3 \cdot 2,6^2}{2} + 6,02(2,6 - 0,6) - 5 \right] \text{ тс} \cdot \text{м} = -3,10 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

Для участка DB ($2,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1 \text{ м}$)

$$Q(x) = (-5,78 + 4) \text{ тс} = -1,78 \text{ тс};$$

$$M(x) = 5,78(3,1 - x) - 4(4,1 - x) = -1,78x + 1,52;$$

$$M_D = M(2,6) = (-1,78 \cdot 2,6 + 1,52) \text{ тс} \cdot \text{м} = -3,10 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$M_B = M(3,1) = (-1,78 \cdot 3,1 + 1,52) \text{ тс} \cdot \text{м} = -4 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

Для участка BC ($3,1 \text{ м} \leq x \leq 4,1 \text{ м}$)

$$Q(x) = 4 \text{ тс}; \quad M(x) = -4(4,1 - x);$$

$$M_B = M(3,1) = -4(4,1 - 3,1) = -4 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$M_C = M(4,1) = -4(4,1 - 4,1) = 0.$$

Построив по этим данным эпюру Q , обнаруживаем, что в некотором сечении x_0 на участке ED усилие Q обращается в нуль, а значит, здесь касательная к эпюре M будет горизонтальной. Для построения эпюры M необходимо еще вычислить ординату $M(x_0)$. Воспользовавшись выражением для $Q(x)$ на участке ED , находим x_0 из условия

$$Q(x_0) = -3x_0 + 6,02 = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{6,02}{3} \text{ м} = 2,01 \text{ м}.$$

Тогда

$$M(x_0) = \left[-\frac{3 \cdot 2,01^2}{2} + 6,02(2,01 - 0,6) - 5 \right] \text{ тс} \cdot \text{м} = -2,57 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру M .

Рассматривая эпюры Q , M и нагрузку на балку с точки зрения общих свойств эпюр, обнаруживаем, что построенные эпюры не содержат принципиальных ошибок: например, всюду, где $Q > 0$, момент M возрастает, а где $Q < 0$ — убывает; в сечении E на эпюре M получился скачок на величину $5 \text{ тс} \cdot \text{м}$, в сечениях F и C $M = 0$ и т. д.

В ряде случаев можно строить эпюры, не составляя выражения Q и M для произвольных сечений участков. Достаточно лишь вычислить величины Q и M в характерных сечениях. Для этих случаев можно рекомендовать следующий порядок построения эпюр:

1. Найти опорные реакции (для консоли их можно не находить).
2. По скачкам и наклонам, идя вдоль балки обязательно слева направо, построить эпюру Q (никаких записей для этого делать не нужно).
3. Найти характерные сечения балки. Характерными сечениями считаются те, в которых приложены сосредоточенные силы и моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка, а также те, в которых Q обращается в нуль.

4. Вычислить в характерных сечениях величины M и по найденным ординатам построить эпюру M . При этом следует руководствоваться общими свойствами эпюр, а для консольных частей балок целесообразно пользоваться известными для них эпюрами (рис. 57 и 58).

Пример 8. Построим эпюры Q и M для шарнирной балки (рис. 75).

Эта балка имеет четыре неизвестных составляющих опорных реакций — M_A , H_A , R_A и R_E . Вследствие отсутствия горизонтальных составляющих внешней нагрузки $H_A = 0$. Наличие промежуточного шарнира в точке C дает одно

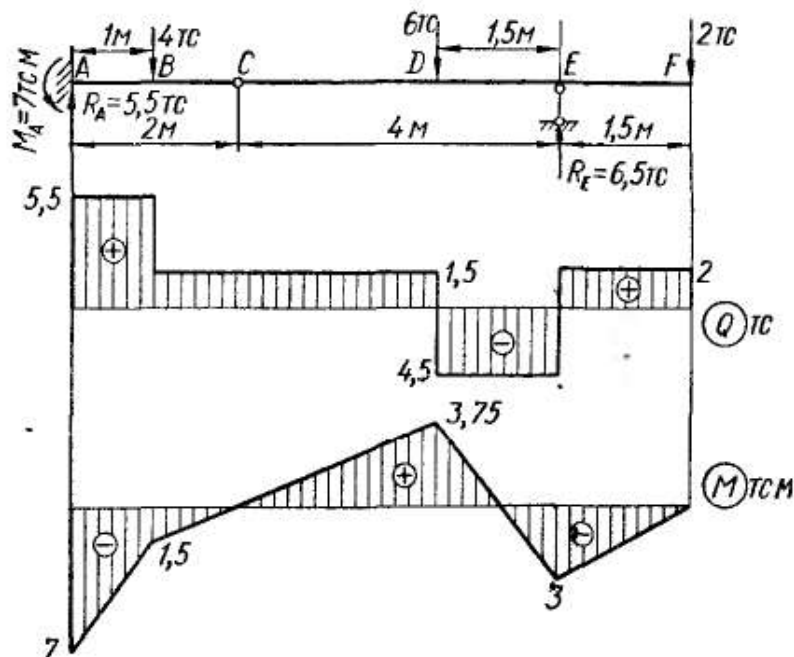


Рис. 75

дополнительное уравнение статики и превращает балку в статически определимую шарнирную.

Найдем опорные реакции:

$$\sum_{\text{пр}} M_C = 2 \cdot 5,5 - R_E \cdot 4 + 6 \cdot 2,5 = 0; \quad R_E = 6,5 \text{ тс};$$

$$\sum Y = R_A - 4 - 6 + 6,5 - 2 = 0; \quad R_A = 5,5 \text{ тс};$$

$$\sum_{\text{лев}} M_C = -M_A + 5,5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0; \quad M_A = 7 \text{ тс} \cdot \text{м}.$$

Проверка:

$$\sum M_F = -7 + 5,5 \cdot 7,5 - 4 \cdot 6,5 - 6 \cdot 3 + 6,5 \cdot 1,5 = 0.$$

Теперь обычным способом по скачкам строим эпюру Q , а затем, определив

$$M_A = -7 \text{ тс} \cdot \text{м}; \quad M_B = (-7 + 5,5 \cdot 1) \text{ тс} \cdot \text{м} = -1,5 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$M_D = (-2 \cdot 3 + 6,5 \cdot 1,5) \text{ тс} \cdot \text{м} = 3,75 \text{ тс} \cdot \text{м};$$

$$M_E = -2 \cdot 1,5 \text{ тс} \cdot \text{м} = -3 \text{ тс} \cdot \text{м}; \quad M_F = 0,$$

строим эпюру M .

Следует обратить внимание на то, что на эпюре M обязательно должна быть нулевая ордината для того сечения, где расположен промежуточный шарнир (точка C).

§ 22. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ РАМ

Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных жесткими узлами. Вертикально расположенные стержни рамы принято называть *стойками*, горизонтальные — *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, т. е. в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый прямолинейный участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому, чтобы построить какую-либо эпюру для рамы, нужно построить ее для каждой отдельной балки, входящей в состав рамы. В отличие от обыкновенных балок в сечениях стержней рамы, кроме изгибающих моментов M и поперечных сил Q , обычно действуют еще и продольные силы N . Следовательно, для рам нужно строить эпюры N , Q и M .

Для N и Q сохраняются ранее принятые правила знаков:

$N > 0$, если продольные силы вызывают растяжение;

$Q > 0$, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной рамы (относительно точек, близких к сечению) по часовой стрелке.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а при составлении выражений для $M(x)$ принимают по собственному усмотрению какой-либо момент положительным.

Выражения для $N(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ записывают очень редко — главным образом для тех участков, где действует распределенная нагрузка. Чаще всего просто вычисляют значения N , Q и M в характерных сечениях (на границах участков и в экстремальных точках), а затем проводят линии эпюр, учитывая их свойства, отмеченные в § 21.

Ординаты эпюр, как и всегда, откладываем перпендикулярно к оси рамы, причем положительные ординаты Q и N с внешней стороны рамы, а отрицательные — с внутренней (если, конечно, рама такой конфигурации, что можно различить ее наружную и внутреннюю стороны). Эпюры M условимся и для рам строить на сжатых волокнах.

Если рама имеет более одной опоры, то прежде чем приступить к построению эпюр, нужно обычными методами статики найти опорные реакции.

Построим эпюры N , Q и M для рамы, изображенной на рис. 76. Заметим, что ввиду отсутствия распределенной нагрузки все эпюры будут прямолинейными.

Чтобы построить эпюру N , нужно спроектировать силы, приложенные к части рамы, лежащей по одну сторону от сечения, на ось стержня. Таким образом, для любого сечения получим $N = 0$ на участке AB ; $N = P$ на участке BD (растяжение); $N = -2P$ на участке DK (сжатие). По этим данным строим эпюру N . Она имеет вид двух прямоугольников, расположенных на ригеле и левой стойке.

Перейдем к построению эпюры Q .

Для любого сечения на участке AB сумма проекций нижележащих сил на сечение одинакова, равна P и дает отрицательную величину Q , т. е. $Q = -P$. Точно так же в любом сечении стержня DK сила $Q = P$. Чтобы пояснить знаки Q в этом случае, на рис. 77 показаны направления векторов Q , например, в сечениях I и IV .

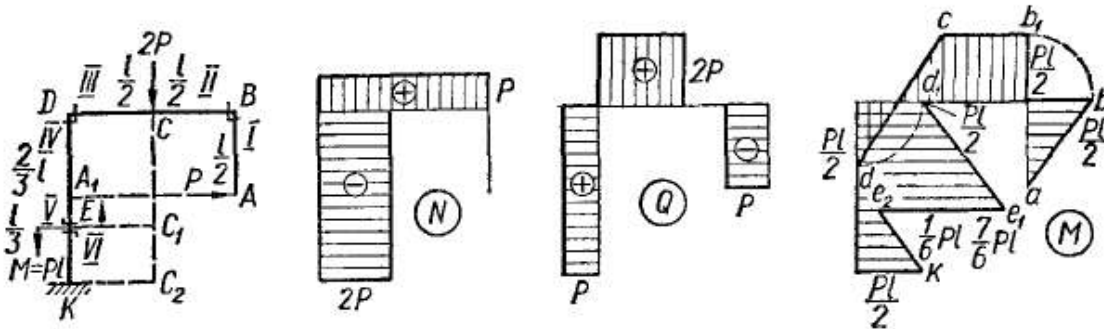


Рис. 76

На рис. 77, а векторы стремятся повернуть части рассеченной рамы против часовой стрелки, значит здесь $Q < 0$, а на рис. 77, б — по часовой стрелке, поэтому здесь $Q > 0$.

В сечении II , как и в любом сечении участка BC , сумма проекций на сечение (на вертикаль) сил, приложенных к части рамы, лежащей справа от сечения (т. е. одна сила P), равна нулю. Следовательно, на участке BC усилие $Q = 0$.

Для сечения III и вообще для любого сечения участка CD проектироваться на сечение будет только сила $2P$, поэтому в этих сечениях $Q = 2P$.

Итак, на участке AB $Q = -P$; на участке BC $Q = 0$; на участке CD $Q = 2P$; на участке DK $Q = P$. Эпюра Q на этих участках представлена тремя прямоугольниками.

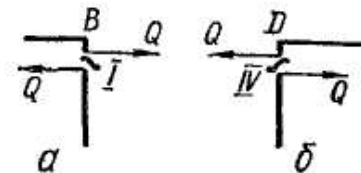


Рис. 77

Для построения эпюры M будем вычислять величины изгибающих моментов в характерных сечениях A, B, C, D, E и K . Очевидно, $M_A = 0$. В сечении B стержня AB (т. е. в сечении I , бесконечно близком к B) имеем

$$M_B = P \cdot AB = \frac{Pl}{2},$$

причем от действия этого момента сжаты внешние (правые) волокна, так как изгибающий момент, приложенный к верхней стороне сечения I , направлен против часовой стрелки. Поэтому на эпюре M из точки B откладываем с внешней стороны ординату, равную $\frac{Pl}{2}$, и проводим прямую ab .

В сечении B стержня BD (т. е. в сечении II , бесконечно близком к B) имеем ту же величину:

$$M_B = P \cdot AB = P \frac{l}{2}$$

и сжаты вновь наружные (верхние) волокна. Такой же изгибающий момент будет и в сечении C :

$$M_C = \frac{Pl}{2}.$$

Откладываем в сечениях B и C с внешней стороны ординаты $\frac{Pl}{2}$ и проводим прямую b_1c . Продолжать эту прямую дальше влево нельзя, так как в этом сечении на эпюре M должен быть перелом.

В сечении D стержня DB (сечении III) изгибающий момент должен быть вычислен от действия сил P и $2P$. Приняв, например, что для стержня DB положительным будет такой изгибающий момент, который вызывает сжатие верхних волокон, находим, что

$$M_D = P \cdot A_1D - 2P \cdot CD = P \frac{l}{2} - 2P \frac{l}{2} = -\frac{Pl}{2}.$$

Знак «минус» говорит о том, что в сечении III сжаты нижние волокна. Откладываем вниз ординату, равную $\frac{Pl}{2}$, и проводим на эпюре M прямую cd .

Переходим к построению эпюры на стойке DK , считая, например, что изгибающий момент положителен, если он вызывает сжатие внутренних (правых) волокон. Тогда в сечении IV

$$M_D = -P \cdot A_1D + 2P \cdot CD = -P \frac{l}{2} + 2P \frac{l}{2} = \frac{Pl}{2}.$$

В сечении E на эпюре M должен быть скачок, поэтому значение M вычисляем отдельно:

в сечении V

$$M'_E = P \cdot A_1E + 2P \cdot EC_1 = P \frac{l}{6} + 2P \frac{l}{2} = \frac{7}{6} Pl,$$

а в сечении VI

$$M''_E = P \cdot A_1E + 2P \cdot EC_1 - M = P \frac{l}{6} + 2P \frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{6} Pl.$$

Наконец, в сечении K

$$M_K = P \cdot A_1K + 2P \cdot KC_2 - M = P \frac{l}{2} + 2P \frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{2} Pl.$$

Все моменты получились положительными. Следовательно, во всех этих сечениях, согласно принятому для стойки DK правилу знаков, сжаты правые волокна. Поэтому откладываем соответствующие ординаты и, проведя прямые d_1e_1 и e_2k , заканчиваем построение эпюры M .

Пример 9. Построим эпюры N , Q и M для рамы, изображенной на рис. 78. Поскольку эта рама не консольная, то прежде всего определим опорные реакции. В каждом неподвижном опорном шарнире A и B будет по две составляющих реакции: вертикальные R_A и R_B и горизонтальные H_A и H_B . Действительные направления этих реакций еще не известны, поэтому направим их пока про-

извольно, например, вертикальные реакции вверх, а горизонтальные — направо (почему реакции H_A и R_B зачеркнуты, станет ясно позже).

Для определения четырех неизвестных R_A , R_B , H_A и H_B кроме обычных уравнений статики имеем еще условие равенства нулю суммы моментов относительно точки C всех сил, расположенных по одну сторону от нее (иначе говоря, равенство нулю изгибающего момента в сечении C , где есть шарнир).

Можно выбрать различные варианты четырех уравнений статики для нахождения реакций. Наиболее удобно рассмотреть суммы моментов относительно

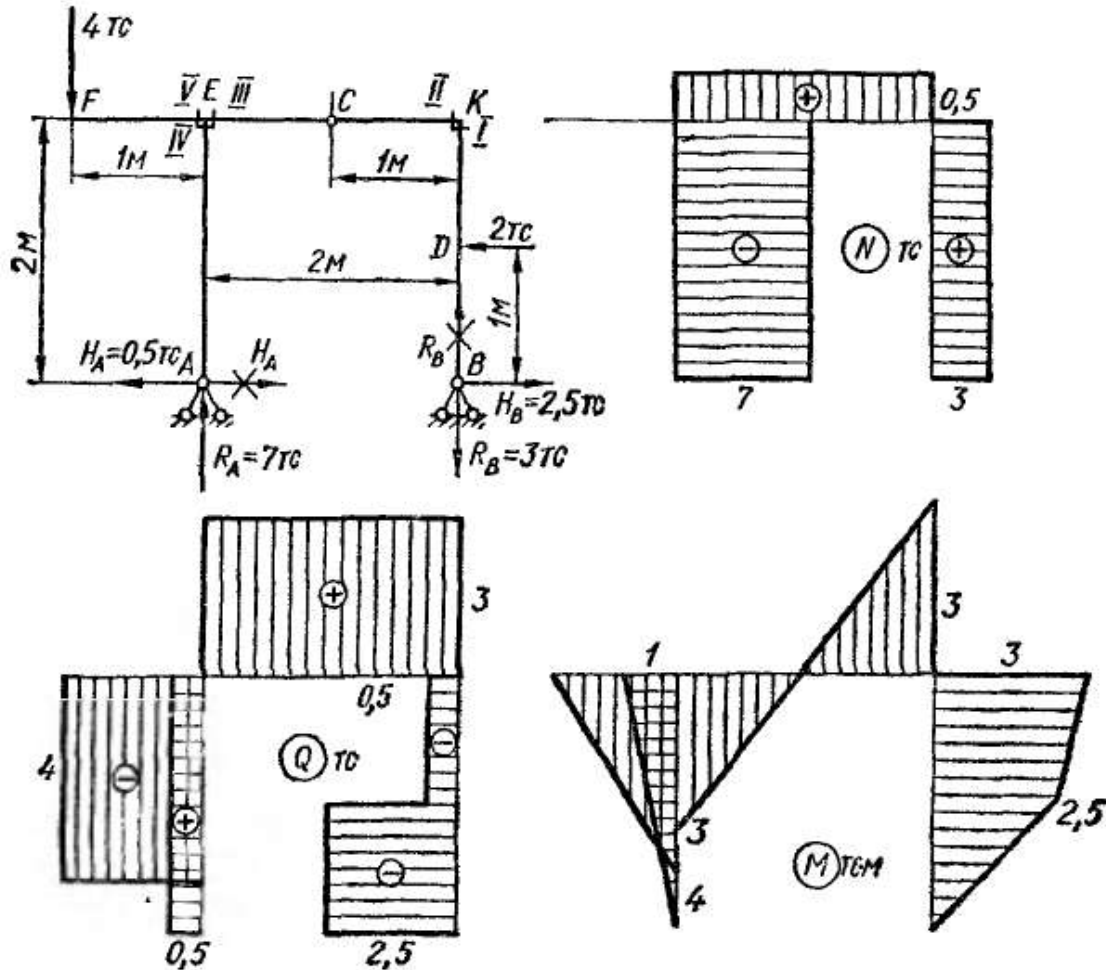


Рис. 78

шарниров A , B и C . При составлении уравнений принимаем во внимание зачеркнутый вариант реакций H_A и R_B :

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 0; & R_A &= 7 \text{ тс;} \\ \sum M_A &= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + R_B \cdot 2 = 0; & R_B &= -3 \text{ тс;} \\ \sum_{\text{лев}} M_C &= -7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + H_A \cdot 2 = 0; & H_A &= -0,5 \text{ тс;} \\ \sum_{\text{прав}} M_C &= -2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + H_B \cdot 2 = 0; & H_B &= 2,5 \text{ тс.} \end{aligned}$$

Реакции R_A и H_B получились положительными, значит они действительно направлены так, как было принято: R_A — вверх, H_B — направо; реакции H_A и R_B отрицательны, значит, имеют направление, противоположное принятому, а именно: H_A направлена влево, а R_B — вниз. Изменим на чертеже направление этих реакций на противоположное и будем теперь считать все реакции положительными: $R_A = 7$ тс; $H_A = 0,5$ тс; $R_B = 3$ тс; $H_B = 2,5$ тс.

Проверим, правильно ли найдены реакции:

$$\Sigma X = -H_A - 2 + H_B = -0,5 - 2 + 2,5 = 0;$$

$$\Sigma Y = R_A - 4 - R_B = 7 - 4 - 3 = 0.$$

Теперь можно построить эпюры M , Q и N таким же способом, как это было сделано в предыдущем примере, так как опорные реакции определены и, значит, известны все внешние силы, приложенные к раме.

Прежде всего сделаем некоторые замечания относительно общего вида эпюр M и Q . Поскольку распределенной нагрузки нет, эпюры M и Q будут прямолинейными, причем эпюра Q будет состоять из прямоугольников. В точке D на ней будет скачок, а на эпюре M — перелом. В точках A , B , C и F изгибающий момент равен нулю.

Для построения эпюры N находим, что

$$\text{на участке } BK \quad N = R_B = 3 \text{ тс};$$

$$\text{» » } KE \quad N = H_A = 0,5 \text{ тс};$$

$$\text{» » } AE \quad N = -R_A = -7 \text{ тс};$$

$$\text{» » } FE \quad N = 0.$$

По этим данным строим эпюру N .

Для построения эпюры Q вычисляем характерные ординаты:

$$\text{на участке } BD \quad Q = -H_B = -2,5 \text{ тс};$$

$$\text{» » } DK \quad Q = -H_B + 2 = (-2,5 + 2) \text{ тс} = -0,5 \text{ тс};$$

$$\text{» » } KE \quad Q = R_B = 3 \text{ тс};$$

$$\text{» » } FE \quad Q = -4 \text{ тс};$$

$$\text{» » } AE \quad Q = H_A = 0,5 \text{ тс}.$$

По этим данным строим эпюру Q .

Теперь вычисляем значения изгибающих моментов:

$$M_D = H_B \cdot 1 = 2,5 \cdot 1 \text{ тс} \cdot \text{м} = 2,5 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты правые волокна);}$$

$$M_I = H_B \cdot 2 - 2 \cdot 1 = (2,5 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \text{ тс} \cdot \text{м} = 3 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты правые волокна);}$$

$$M_{II} = M_I = 3 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты верхние волокна);}$$

$$M_{III} = H_A \cdot 2 - 4 \cdot 1 =$$

$$= (0,5 \cdot 2 - 4 \cdot 1) \text{ тс} \cdot \text{м} = -3 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна);}$$

$$M_{IV} = H_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 \text{ тс} \cdot \text{м} = 1 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты левые волокна);}$$

$$M_V = 4 \cdot 1 \text{ тс} \cdot \text{м} = 4 \text{ тс} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна)}$$

и строим по этим данным эпюру M .

§ 23. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В поперечных сечениях плоского кривого бруса могут действовать, как и в рамах, три внутренних силовых фактора — N , Q и M . Наиболее часто имеют дело со стержнями, ось которых очерчена по дуге окружности. В этом случае положение любого сечения удобно определять при помощи полярной системы координат, тогда продольная, поперечная силы и изгибающий момент будут функциями угла φ : $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$.

Для N и Q примем обычное правило знаков (см. § 15 и 19), эпюры M будем, как и в рамах, строить на сжатых волокнах.

В качестве примера рассмотрим плоский кривой брус, схема которого показана на рис. 79, а. Напишем значения $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ для произвольного сечения C .

Чтобы получить $N(\varphi)$, нужно силы P_1 и P_2 спроектировать на направление оси стержня в точке C , т. е. на касательную KL . Для удобства проектирования их можно перенести мысленно в точку C (на рис. 79, а они показаны штриховыми линиями). Тогда

$$N(\varphi) = P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi.$$

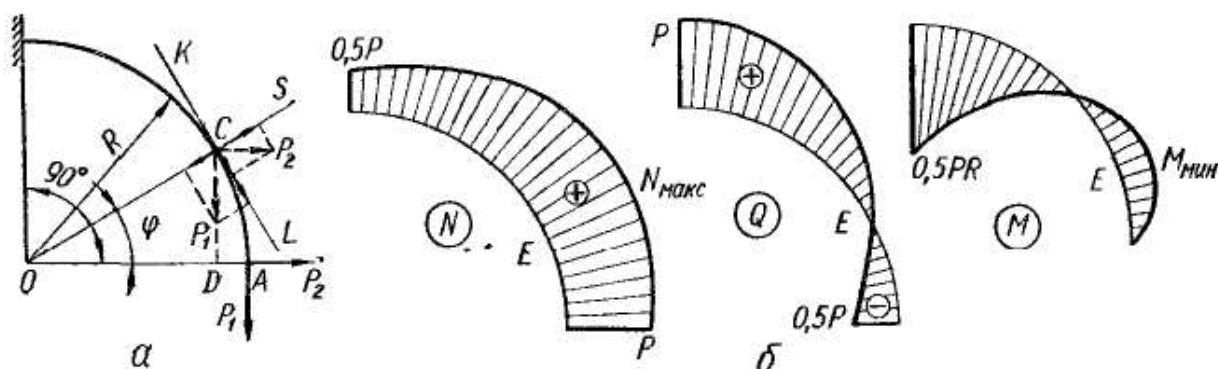


Рис. 79

Чтобы получить $Q(\varphi)$, нужно спроектировать силы, приложенные к части AC , на плоскость сечения, т. е. на направление OS :

$$Q(\varphi) = P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi.$$

При составлении выражения для изгибающего момента в произвольном сечении условимся, например, считать изгибающий момент положительным, если он вызывает сжатие волокон, лежащих с внутренней стороны стержня (т. е., если он увеличивает кривизну стержня). Будем иметь

$$M(\varphi) = P_1 \cdot AD - P_2 \cdot CD = P_1 R (1 - \cos \varphi) - P_2 R \sin \varphi.$$

Полученные формулы позволяют строить эпюры N , Q и M . Примем для определенности, что $P_1 = P$, а $P_2 = 0,5P$. Тогда

$$N(\varphi) = (\cos \varphi + 0,5 \sin \varphi) P;$$

$$Q(\varphi) = (\sin \varphi - 0,5 \cos \varphi) P; \quad (3.9)$$

$$M(\varphi) = (1 - \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi) PR.$$

Вычислим значения N , Q и M в нескольких сечениях (табл. 3).

Разметив ось стержня через 10° , откладываем в масштабе по нормали к оси (т. е. по радиусу) соответствующие ординаты для Q , N (положительные — наружу, отрицательные — внутрь) и для M (на сжатых волокнах), соединяем концы ординат плавной кривой и получаем эпюры N , Q и M (рис. 79, б).

Рассмотрим некоторые общие вопросы построения эпюр для криволинейных стержней.

К криволинейным стержням, как и к другим стержневым системам, иногда бывает приложена равномерно распределенная нагрузка. Для вычисления усилий и моментов от такой нагрузки полезно иметь в виду следующую теорему: *равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, приложенной к дуге любого очертания, равна произведению величины интенсивности нагрузки на длину хорды, стягивающей эту дугу, перпендикулярна к этой хорде и проходит через ее середину.*

Таблица 3

φ°	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$0,5 \sin \varphi$	$0,5 \cos \varphi$	$N(\varphi)/P$	$Q(\varphi)/P$	$M(\varphi)/PR$
0	0	1,000	0	0,500	1,000	-0,500	0
10	0,174	0,985	0,087	0,498	1,072	-0,324	-0,072
20	0,342	0,940	0,171	0,470	1,111	-0,128	-0,111
30	0,500	0,866	0,250	0,433	1,116	0,067	-0,116
40	0,643	0,766	0,322	0,383	1,088	0,260	-0,088
50	0,766	0,643	0,383	0,322	1,026	0,444	-0,026
60	0,866	0,500	0,433	0,250	0,933	0,616	0,067
70	0,940	0,342	0,470	0,171	0,812	0,769	0,188
80	0,985	0,174	0,498	0,087	0,672	0,898	0,328
90	1,000	0	0,500	0	0,5	1,000	0,500

Для доказательства рассмотрим произвольный плоский криволинейный стержень ACB , нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 80).

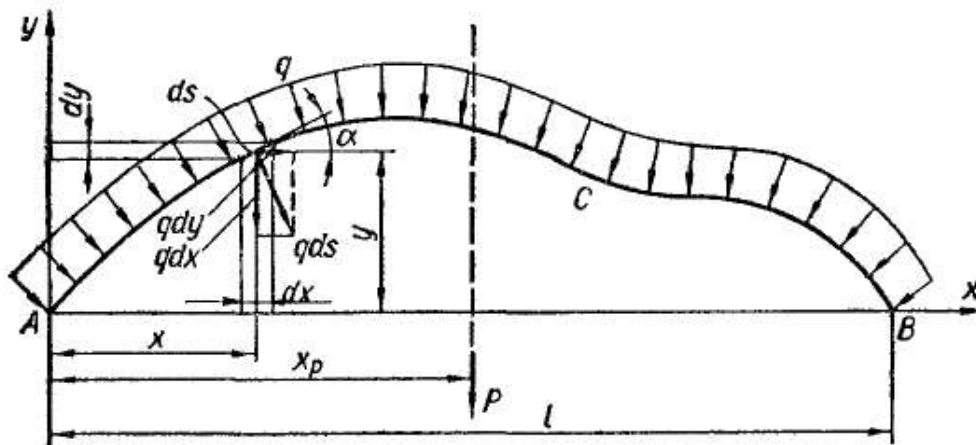


Рис. 80

Выделим элемент дуги ds , центр которого имеет координаты x и y , а касательная к дуге в точке x, y образует с осью абсцисс угол α .

На этот элемент действует сила qds , составляющая которой по оси x равна $qds \sin \alpha$, а по оси y — $qds \cos \alpha$. Но $ds \cos \alpha = dx$, а $ds \sin \alpha = dy$, поэтому составляющие будут соответственно равны qdy и qdx (рис. 80).

Обозначим равнодействующую нагрузки (т. е. элементарных сил qds) через P . Проекция P_x равнодействующей на ось x равна сумме

проекций элементарных сил qds , т. е. сумме qdy :

$$P_x = \int_{ACB} qdy = q \int_A^B dy = q \int_0^l dy = 0.$$

Аналогично находим, что проекция равнодействующей на ось y

$$P_y = \int_{ACB} qdx = q \int_A^B dx = q \int_0^l dx = ql.$$

Отсюда видно, что равнодействующая

$$P = P_y = ql,$$

т. е. равна произведению величины интенсивности нагрузки на длину хорды l , стягивающей дугу ACB .

Так как $P_x = 0$, то равнодействующая перпендикулярна к оси x , т. е. к хорде, поскольку ось x направлена по хорде.

Теперь вычислим сумму моментов элементарных сил относительно начала координат:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= \int_{ACB} qdx \cdot x + \int_{ACB} qdy \cdot y = q \int_A^B xdx + q \int_A^B ydy = \\ &= q \int_0^l xdx + q \int_0^l ydy = \frac{ql^2}{2}. \end{aligned}$$

Пусть плечо равнодействующей относительно начала координат равно x_P . Тогда по теореме о моменте равнодействующей

$$Px_P = \sum M_A, \text{ или } ql \cdot x_P = \frac{ql^2}{2},$$

откуда $x_P = \frac{l}{2}$. Значит, равнодействующая проходит через середину хорды. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации применения этой теоремы рассмотрим следующий пример.

Найдем выражения для изгибающего момента, поперечной и продольной сил в сечениях кругового криволинейного стержня AC (рис. 81, a), нагруженного на части AB равномерно распределенной нагрузкой (считаем заданными величины q , R , α и β).

В этом примере криволинейный стержень имеет два участка — AB и BC .

В произвольном сечении D_1 на участке AB ($0 \leq \varphi \leq \alpha$) вычисляем усилия и моменты как результат действия нагрузки, приложенной к дуге AD_1 . Равнодействующая этой нагрузки

$$P_1 = q \cdot AD_1 = 2qR \sin \frac{\varphi}{2}$$

перпендикулярна к хорде AD_1 и проходит через ее середину, следовательно, направлена по биссектрисе угла AOD_1 . Поэтому при

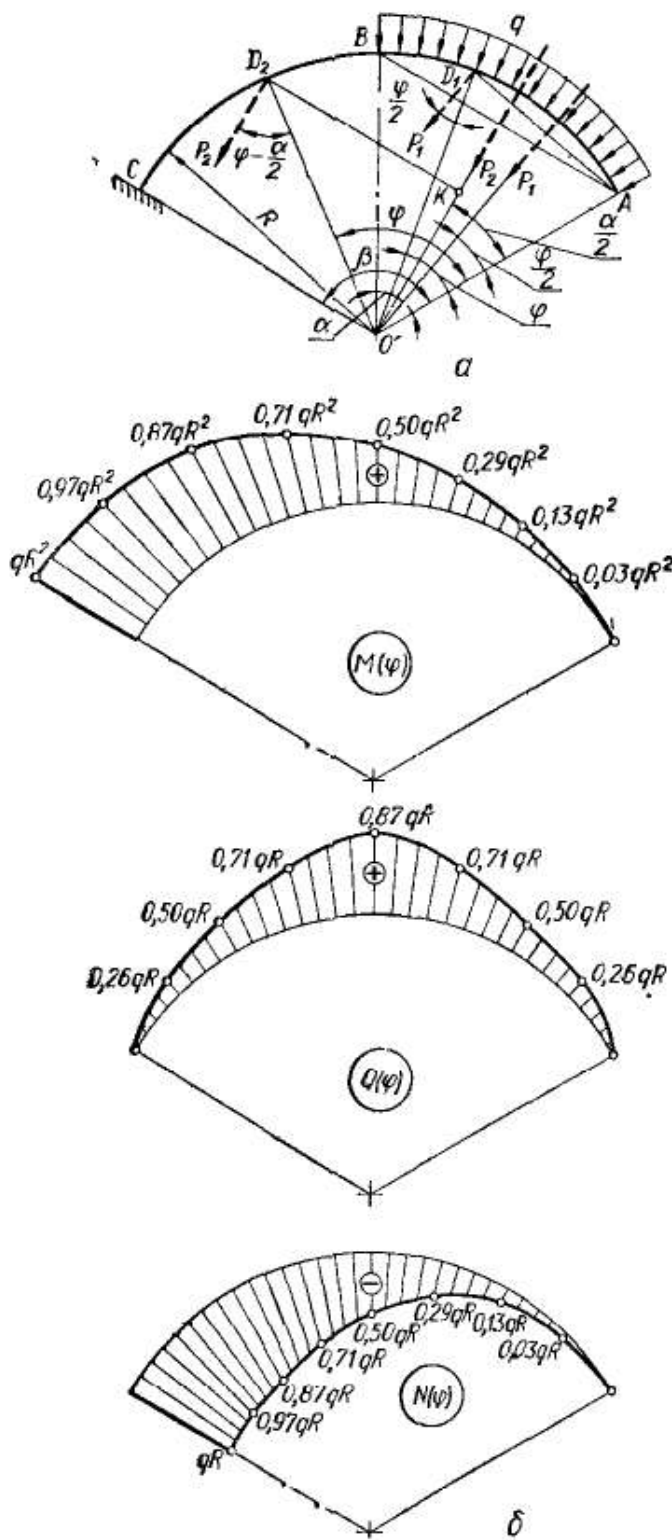


Рис. 81

$0 \leq \varphi \leq \alpha$ (для удобства вычисления N и Q равнодействующая сила P_1 показана также и в текущем сечении D_1)

$$\begin{aligned}
 N(\varphi) &= -P_1 \sin \frac{\varphi}{2} = \\
 &= -2qR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \\
 &= -qR(1 - \cos \varphi); \\
 Q(\varphi) &= P_1 \cos \frac{\varphi}{2} = \\
 &= 2qR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \\
 &= qR \sin \varphi; \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= P_1 \cdot \frac{AD_1}{2} = \\
 &= 2qR^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \\
 &= qR^2(1 - \cos \varphi).
 \end{aligned}$$

Усилия и изгибающий момент в произвольном сечении D_2 участка BC ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) являются результатом действия всей распределенной нагрузки. Ее равнодействующая

$$P_2 = q \cdot AB = 2qR \sin \frac{\alpha}{2}$$

перпендикулярна к хорде AB и направлена по биссектрисе угла AOB . Поэтому при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$\begin{aligned}
 N(\varphi) &= -P_2 \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = -2qR \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right); \\
 Q(\varphi) &= P_2 \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right); \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$M(\varphi) = P_2 \cdot D_2K = P_2 R \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Задавшись величинами углов α и β , вычислим значения $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ при различных значениях φ и построим эпюры. Зна-

Таблица 4

φ°	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$1 - \cos \varphi$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
0	0	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,259	0,966	0,034	-0,034	0,259	0,034
30	0,500	0,866	0,134	-0,134	0,500	0,134
45	0,707	0,707	0,293	-0,293	0,707	0,293
60	0,866	0,500	0,500	-0,500	0,866	0,500

Таблица 5

φ°	$\varphi - 30^\circ$	$\sin(\varphi - 30^\circ)$	$\cos(\varphi - 30^\circ)$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
60	30	0,500	0,866	-0,500	0,866	0,500
75	45	0,707	0,707	-0,707	0,707	0,707
90	60	0,866	0,500	-0,866	0,500	0,866
105	75	0,966	0,259	-0,966	0,259	0,966
120	90	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000

чения $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ при $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ приведены в табл. 4 и 5, а эпюры показаны на рис. 81, б.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Пусть на криволинейный стержень¹ действует произвольная нагрузка (рис. 82). Проведя два бесконечно близких сечения под углами φ и $\varphi + d\varphi$, выделим произвольный элемент AB так, чтобы

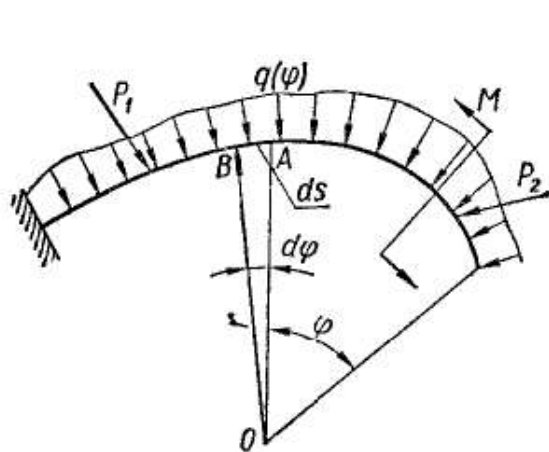


Рис. 82

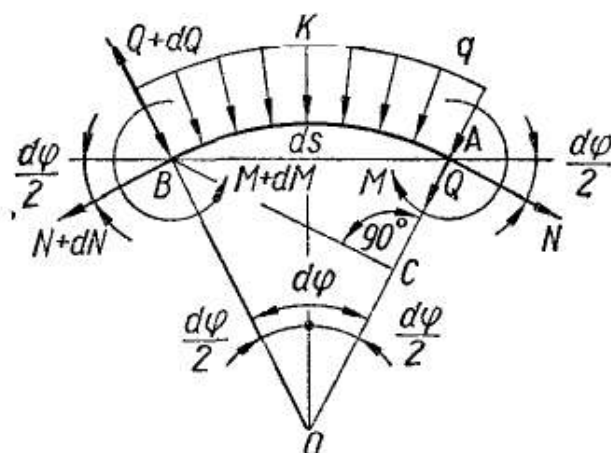


Рис. 83

в его пределах не было сосредоточенных воздействий. Положительный угол φ откладываем, как обычно, против часовой стрелки. Длина

¹ Чтобы избежать несущественных, но усложняющих рассуждения вопросов о знаках изгибающих моментов, ограничимся случаем стержня, ось которого не имеет точек перегиба.

дуги выделенного элемента равна ds , радиус кривизны — r , центральный угол, соответствующий дуге AB , равен $d\varphi$.

В сечениях, ограничивающих элемент, действуют продольные силы N и $N + dN$, поперечные силы Q и $Q + dQ$, изгибающие моменты M и $M + dM$ (рис. 83), заменяющие действие отброшенных частей стержня.

При выводе зависимостей для криволинейного стержня будем полагать, что *изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие внутренних волокон стержня (волокон, расположенных на вогнутой стороне), а распределенная нагрузка положительна, если направлена к центру кривизны.*

Рассмотрим условия равновесия элемента (рис. 83) — суммы проекций всех сил на оси AB и OK соответственно и сумму моментов сил относительно точки B :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Пр. на } AB} &= (Q + dQ) \sin \frac{d\varphi}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\varphi}{2} + \\ &+ Q \sin \frac{d\varphi}{2} - N \cos \frac{d\varphi}{2} = 0; \\ \sum_{\text{Пр. на } OK} &= (Q + dQ) \cos \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - \\ &- Q \cos \frac{d\varphi}{2} - N \sin \frac{d\varphi}{2} - q \cdot AB = 0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sum M_B = -(M + dM) + M + Q \cdot BC + N \cdot AC + q \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 0.$$

Учитывая, что

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1;$$

$$AB = 2r \sin \frac{d\varphi}{2} \approx r d\varphi;$$

$$AC = r(1 - \cos d\varphi) \approx 0; \quad BC = r \cdot \sin d\varphi \approx r d\varphi,$$

и пренебрегая произведением дифференциалов, получаем

$$\begin{aligned} Qd\varphi + dN &= 0; \\ dQ - Nd\varphi - qr d\varphi &= 0; \\ -dM + Qr d\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Разделив каждое уравнение на $d\varphi$, имеем

$$\boxed{\frac{dN}{d\varphi} = -Q;} \quad (3.13)$$

$$\boxed{\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr;} \quad (3.14)$$

$$\boxed{\frac{dM}{d\varphi} = Qr.} \quad (3.15)$$

Это и есть искомые дифференциальные зависимости при изгибе криволинейного стержня. Поскольку $rd\varphi = ds$, их можно записать еще и в таком виде:

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \quad (3.16)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \quad (3.17)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \quad (3.18)$$

Зависимости (3.13) — (3.15) позволяют проверять правильность составления выражений для $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $M(\varphi)$ при изгибе, в частности кругового криволинейного стержня. Так, нетрудно убедиться, что выражения (3.9) — (3.11) в рассмотренных примерах составлены правильно.

Из формул (3.13) и (3.15) следует, что в сечениях, где M и N достигают экстремальных значений, $Q = 0$. Это обстоятельство дает возможность в известной степени контролировать правильность построения эпюр N , Q и M . Так, на эпюрах рис. 79, б в сечении E , где $Q = 0$, момент $M = M_{\min}$, а усилие $N = N_{\max}$. Экстремальные значения M и N можно найти следующим образом. Из второго уравнения (3.9) видно, что $Q = 0$, когда

$$\sin \varphi - 0,5 \cos \varphi = 0,$$

т. е., когда $\operatorname{tg} \varphi = 0,5$; $\varphi = 26^\circ 34'$; $\sin \varphi = 0,447$; $\cos \varphi = 0,894$. Подставив эти значения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в первое и третье уравнения (3.9), найдем

$$M_{\min} = (1 - 0,894 - 0,5 \cdot 0,447) PR = -0,118PR;$$

$$N_{\max} = (0,894 + 0,5 \cdot 0,447) P = 1,118P.$$

Зависимость (3.14) дает возможность найти экстремальные точки на эпюре Q . В тех сечениях, где $Q = Q_{\max}$ или $Q = Q_{\min}$,

$$N = -qr, \quad (3.19)$$

если сечение находится на участке стержня с распределенной нагрузкой, или

$$N = 0, \quad (3.20)$$

если сечение находится на участке стержня без распределенной нагрузки. Вследствие этого, на рис. 79, например, усилие Q нигде не достигнет экстремальных значений (касательная к эпюре Q ни в какой точке не будет параллельна касательной к оси стержня в том же сечении), так как распределенной нагрузки нет, а N нигде не равно нулю.

Заметим, что условия $Q = 0$, (3.19) и (3.20) необходимы, но не достаточны для достижения функциями $N(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ экстремальных значений; при выполнении их экстремума может и не быть, но тогда на соответствующей эпюре будет точка перегиба, причем

касательная к эпюре обязательно будет параллельна оси стержня в этом сечении.

Эпюры N , Q и M для криволинейных стержней обладают следующими свойствами [часть их вытекает из определения N , Q и M , остальные — из формул (3.13) — (3.15)]:

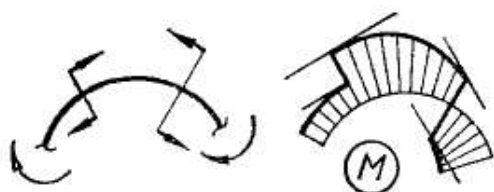


Рис. 84

1) в концевой шарнирной опоре и на свободном конце консоли, если они не загружены внешними моментами, $M = 0$;

2) в сечениях, где к стержню приложен сосредоточенный момент, на эпюре M будет скачок (рис. 84), причем касательные к эпюре до скачка и за ним параллельны;

3) в сечениях, где к стержню приложены сосредоточенные силы, нормальные к оси стержня (т. е. направленные по радиусу), на эпюре Q будут скачки, а на эпюрах M и N — переломы (рис. 85);

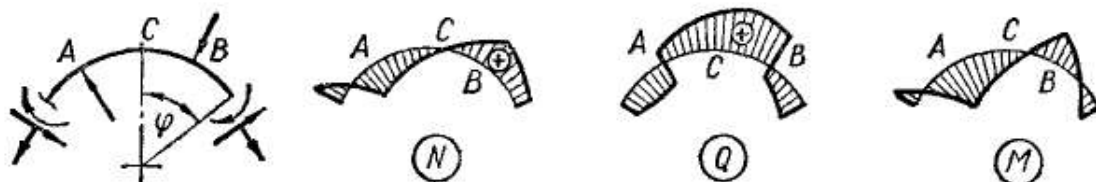


Рис. 85

4) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, направленные по касательной к оси стержня, на эпюре N будут скачки, а на эпюрах Q и M — переломы (рис. 86);

5) в сечениях, где $Q = 0$, на эпюрах M и N будут экстремумы, т. е. касательные к эпюрам будут параллельны касательным к оси стержня в этих сечениях (рис. 86);

6) в сечениях, где $N = 0$, на эпюре Q будут экстремумы (рис. 85);

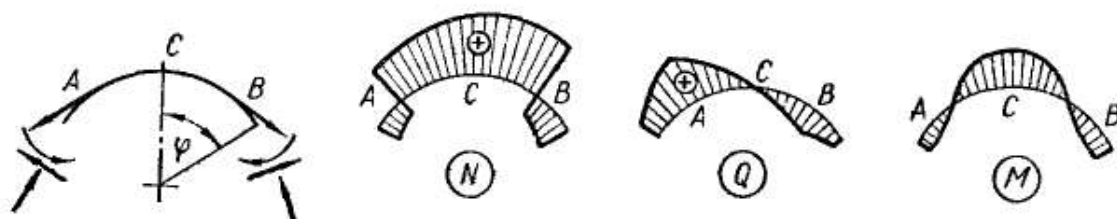


Рис. 86

7) на участках, где $Q > 0$, M возрастает, а N убывает в направлении отсчета φ ; там же, где $Q < 0$, M убывает, а N возрастает (рис. 85 и 86);

8) на участках, где $N > 0$, Q возрастает в направлении отсчета φ , а где $N < 0$, Q убывает (рис. 85 и 86).

Пример 10. Построить эпюры M , Q и N для стержня, показанного на рис. 87, а. 1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -R_B \cdot 4 - 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 (1 - \cos 30^\circ) = 0; \quad R_B = 0,18 \text{ тс};$$

$$\sum M_B = -2 \cdot 2 - 3 - 1 \cdot 2(1 + \cos 30^\circ) + R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = 2,68 \text{ тс};$$

$$\sum M_C = -0,18 \cdot 2 - H_B \cdot 2 - 3 - 1 \cdot 2(1 - \sin 30^\circ) + 2,68 \cdot 2 = 0; \quad H_B = 0,5 \text{ тс}.$$

Проверка:

$$\sum X = 0,5 - 1 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 - 0,5 = 0;$$

$$\sum Y = -0,18 + 2 + 1 \cdot \cos 30^\circ - 2,68 = 2,87 - 2,86 = 0,01 \text{ тс}.$$

Погрешность в 0,4% получилась вследствие округлений.

2. Выбираем произвольные сечения:

K_1 на участке AD ($0 \leq \varphi \leq 30^\circ$);

K_2 на участке DC ($30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$);

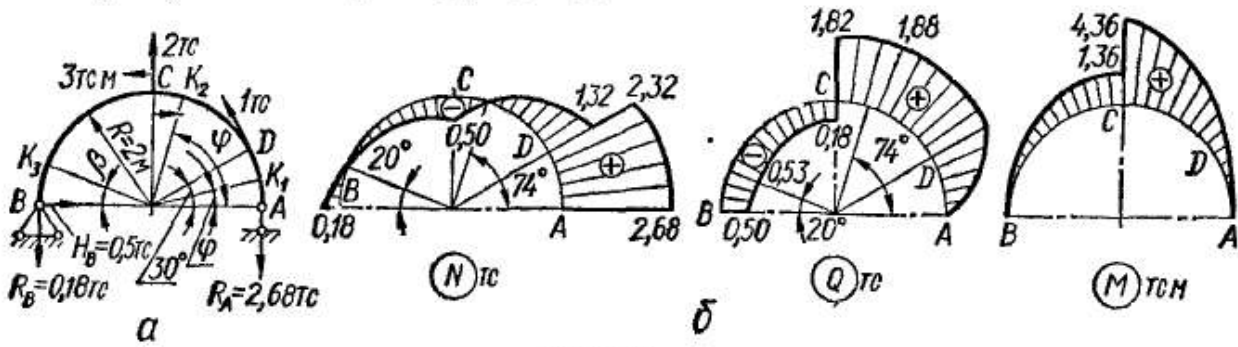


Рис. 87

K_3 на участке CB ($90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$, или $0 \leq \beta \leq 90^\circ$). Очевидно, на участке BC удобнее пользоваться углом $\beta = 180^\circ - \varphi$.

Записываем для этих сечений выражения $M(\varphi)$, $Q(\varphi)$ и $N(\varphi)$:
участок AD

$$M(\varphi) = 2,68 \cdot 2(1 - \cos \varphi) = 5,36(1 - \cos \varphi);$$

$$Q(\varphi) = 2,68 \sin \varphi; \quad (3.21)$$

$$N(\varphi) = 2,68 \cos \varphi;$$

участок DC

$$M(\varphi) = 2,68 \cdot 2(1 - \cos \varphi) - 1 \cdot 2[1 - \cos(\varphi - 30^\circ)];$$

$$Q(\varphi) = 2,68 \sin \varphi - 1 \cdot \sin(\varphi - 30^\circ); \quad (3.22)$$

$$N(\varphi) = 2,68 \cos \varphi - 1 \cdot \cos(\varphi - 30^\circ);$$

участок BC

$$M(\beta) = 0,18 \cdot 2(1 - \cos \beta) + 0,5 \cdot 2 \sin \beta;$$

$$Q(\beta) = -0,18 \sin \beta - 0,5 \cos \beta; \quad (3.23)$$

$$N(\beta) = 0,18 \cos \beta - 0,5 \sin \beta,$$

или, поскольку $\beta = 180^\circ - \varphi$, то $\cos \beta = -\cos \varphi$, а $\sin \beta = \sin \varphi$ и тогда

$$M(\varphi) = 0,36(1 + \cos \varphi) + \sin \varphi;$$

$$Q(\varphi) = -0,18 \sin \varphi + 0,5 \cos \varphi; \quad (3.24)$$

$$N(\varphi) = -0,18 \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi.$$

Выражения (3.24) приведены для того, чтобы можно было осуществить проверку, так как дифференцирование ведется по углу φ , который должен отсчитываться против часовой стрелки. Для вычислений же удобнее формулы (3.23), так как угол β острый, а φ — тупой.

3. Подставляя выражения (3.21), (3.22) и (3.24) в формулы (3.13) — (3.15), убеждаемся в их правильности. Например, для выражений (3.24)

$$\frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{2} (-0,36 \sin \varphi + \cos \varphi) = Q(\varphi);$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = 0,18 \sin \varphi - 0,5 \cos \varphi = -Q(\varphi); \quad (3.25)$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = -0,18 \cos \varphi - 0,5 \sin \varphi = N(\varphi).$$

4. Пользуясь формулами (3.21) — (3.23), составляем таблицы значений M , Q и N : табл. 6 — для участка AD ; табл. 7 — для DC ; табл. 8 — для BC ¹.

Откладываем вычисленные ординаты на эпюрах M , N и Q (рис. 87, б).

5. По версам отложенных ординат обнаруживаем, что Q обращается в нуль только в сечении A . Значит, только для этого сечения касательные к эпюрам M и N будут перпендикулярны к радиусу стержня.

На эпюре N кривая, мысленно проведенная через вершины ординат, два раза проходит через нуль: на участке DC и на участке BC . Пользуясь формулами (3.22) и (3.23), находим угловые координаты этих точек:

на участке DC

$$2,68 \cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 - 30^\circ) = 0;$$

$$2,68 \cos \varphi_0 - \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi_0 - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi_0 = 0;$$

$$1,81 \cos \varphi_0 = 0,5 \sin \varphi_0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1,81}{0,5} = 3,62; \quad \varphi_0 = 74^\circ 35'; \quad \sin \varphi_0 = 0,964,$$

значит,

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= Q(\varphi_0) = 2,68 \sin \varphi_0 - \sin(\varphi_0 - 30^\circ) = \\ &= 2,68 \cdot 0,964 - \sin 44^\circ 35' = 1,88 \text{ тс}; \end{aligned}$$

на участке BC

$$0,18 \cos \beta_0 - 0,5 \sin \beta_0 = 0; \quad \operatorname{tg} \beta_0 = 0,36; \quad \beta_0 = 19^\circ 45';$$

$$\sin \beta_0 = 0,338; \quad \cos \beta_0 = 0,941,$$

значит,

$$\begin{aligned} Q_{\min} &= Q(\beta_0) = -0,18 \sin \beta_0 - 0,5 \cos \beta_0 = \\ &= -(0,18 \cdot 0,338 + 0,5 \cdot 0,941) \text{ тс} = -0,53 \text{ тс}. \end{aligned}$$

6. Откладываем ординаты Q_{\max} и Q_{\min} и проводим кривые эпюр (рис. 87, б).

7. Анализируем эпюры с точки зрения общих свойств:

а) в шарнирах A и B момент $M = 0$;

б) в сечении C приложен момент $M = 3 \text{ тс} \cdot \text{м}$ и на эпюре получается скачок на эту величину;

в) в сечении C приложена сила 2 тс , чему на эпюре Q отвечает скачок, а на эпюрах M и N — переломы;

г) в сечении D приложена сила 1 тс , чему на эпюре N отвечает скачок, а на эпюре Q — перелом;

д) в сечении A усилие $Q = 0$ и касательные в этой точке к эпюрам M и N вертикальны (перпендикулярны к радиусу);

е) в сечениях $\varphi = \varphi_0$ и $\beta = \beta_0$ усилие $N = 0$ и на эпюре Q в этих сечениях есть экстремумы;

ж) на участке AC усилие $Q > 0$, M возрастает, а N убывает (если двигаться вдоль стержня в направлении отсчета φ , т. е. из точки A против часовой стрелки); на участке CB усилие $Q < 0$, M убывает, а N возрастает;

з) на участке $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ и $0 \leq \beta \leq \beta_0$ усилие $N > 0$ и Q возрастает, а на участке между φ_0 и β_0 $N < 0$ и Q убывает;

и) значения Q и N в сечениях A и B соответствуют величинам опорных реакций.

¹ Здесь и далее цифры в квадратных скобках, помещенные в головках таблиц, указывают значение соответствующей графы.

Таблица 6

1	2	3	4	5	6	7
φ°	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$1 - \cos \varphi$	$M(\varphi) =$ $= 5,36 \cdot [4]$ тс м	$Q(\varphi) =$ $= 2,68 \cdot [2]$	$N(\varphi) =$ $= 2,68 \cdot [3]$
					тс	
0	0	1,000	0	0	0	2,68
15	0,259	0,966	0,031	0,18	0,69	2,59
30	0,500	0,866	0,134	0,72	1,34	2,32

Таблица 7

1	2	3	4	5	6	7	8
φ°	$\varphi - 30^\circ$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin(\varphi -$ $- 30^\circ)$	$\cos(\varphi -$ $- 30^\circ)$	$1 - \cos \varphi$	$1 - \cos \varphi \times$ $\times (\varphi - 30^\circ)$
30	0	0,500	0,866	0	1,000	0,134	0
45	15	0,707	0,707	0,259	0,966	0,293	0,034
60	30	0,866	0,500	0,500	0,866	0,500	0,134
75	45	0,966	0,259	0,707	0,707	0,741	0,293
90	60	1,000	0	0,866	0,500	1,000	0,500

1	9	10	11	12	13	14	15
φ°	$5,36 \cdot [7]$	$2 \cdot [8]$	$M(\varphi) =$ $= [9] -$ $- [10]$ тс · м	$2,68 \cdot [3]$	$Q(\varphi) =$ $= [12] -$ $- [5]$ тс	$2,68 \cdot [4]$	$N(\varphi) =$ $= [14] -$ $- [6]$ тс
30	0,72	0	0,72	1,34	1,34	2,32	1,32
45	1,57	0,07	1,50	1,89	1,63	1,89	0,92
60	2,68	0,27	2,41	2,32	1,82	1,34	0,47
75	3,97	0,59	3,38	2,59	1,88	0,69	-0,02
90	5,36	1,00	4,36	2,68	1,82	0	-0,50

Таблица 8

1	2	3	4	5	6	7
β	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$1 - \cos \beta$	$0,36 \cdot [4]$	$M(\beta) =$ $= [2] +$ $+ [5]$ тс · м	$-0,18 \cdot [2]$
0	0	1,000	0	0	0	0
15	0,259	0,966	0,034	0,01	0,27	-0,05
30	0,500	0,866	0,134	0,05	0,55	-0,09
45	0,707	0,707	0,293	0,11	0,82	-0,13
60	0,866	0,500	0,500	0,18	1,05	-0,16
75	0,966	0,259	0,741	0,27	1,24	-0,17
90	1,000	0	1,000	0,36	1,36	-0,18

1	8	9	10	11	12
β	$-0,5 \cdot [3]$	$Q(\beta) = [7] + [8] \tau c$	$0,18 \cdot [3]$	$-0,5 \cdot [2]$	$N(\beta) = [10] + [11] \tau c$
0	-0,50	-0,50	0,18	0	0,18
15	-0,48	-0,53	0,17	-0,13	0,04
30	-0,43	-0,52	0,16	-0,25	-0,09
45	-0,35	-0,48	0,13	-0,35	-0,22
60	-0,25	-0,41	0,09	-0,43	-0,34
75	-0,13	-0,30	0,05	-0,48	-0,43
90	0	-0,18	0	-0,50	-0,50

Если стержень имеет прямолинейные и криволинейные участки, то на прямолинейных участках эпюры строят так, как для балок или рам, а на криволинейных, — как было показано в предыдущем примере.

§ 25. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В конструкциях встречаются стержни, оси которых не лежат в одной плоскости, а также и плоские системы, находящиеся под воздействием пространственной нагрузки. В поперечных сечениях таких систем могут действовать все шесть внутренних силовых факторов: N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z (см. рис. 40).

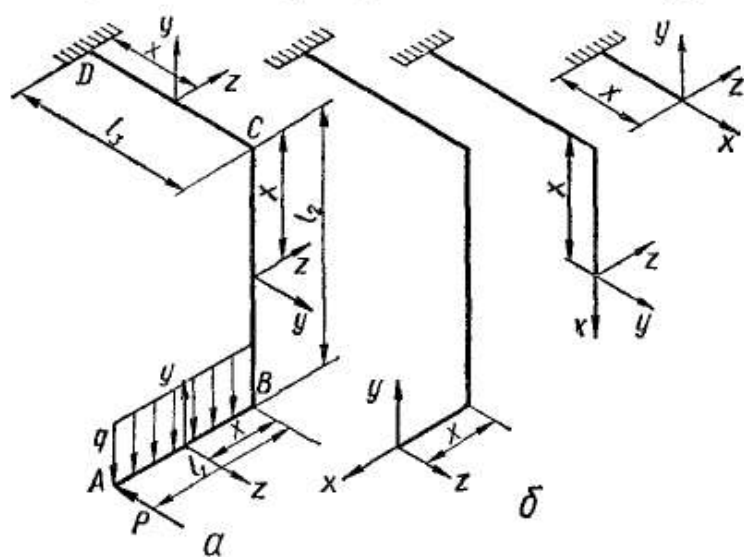


Рис. 88

С методикой построения эпюр в этом случае познакомимся на примере стержня, ось которого представляет собой пространственную ломаную линию (рис. 88). Условимся при переходе от одного стержня системы к другому совмещать ось x с осью рассматриваемого стержня, соответственно располагая положительные направления осей y и z (рис. 88, а, б).

Эпюры изгибающих моментов по-прежнему будем строить на сжатых волокнах, причем ориентировать их нужно так, чтобы плоскость эпюры совпадала с плоскостью действия пары того изгибающего момента, для которого она построена. Знак изгибающего момента вводится произвольно и притом только в случае необходимости записать соответствующее уравнение (как для плоских рам

и криволинейных стержней). Для продольных сил и крутящих моментов сохраняются прежние правила знаков. Эпюры N и $M_{кр}$ могут быть ориентированы как угодно, но ординаты всегда откладывают по нормали к оси стержня. Поперечные силы в сечении считаем положительными, если их направления совпадают с положительными направлениями осей y и z .

Построение начинаем с участка AB . Для произвольного сечения, находящегося на расстоянии x от точки B , определяем результат действия сил, расположенных слева от сечения (т. е. силы P и равнодействующей распределенной нагрузки q):

$$N \equiv 0, \quad Q_y = -q(l_1 - x); \quad Q_z = -P; \quad M_{кр} \equiv 0;$$

$$M_z = \frac{q(l_1 - x)^2}{2} \quad (\text{сжаты нижние волокна});$$

$$M_y = P(l_1 - x) \quad (\text{сжаты левые волокна}).$$

В сечении B (при $x = 0$)

$$N = 0; \quad Q_y = -ql_1; \quad Q_z = -P; \quad M_{кр} = 0;$$

$$M_z = \frac{ql_1^2}{2}; \quad M_y = Pl_1.$$

По этим данным строим эпюры для участка AB (рис. 89). Пара момента M_z действует в вертикальной плоскости xy , в этой плоскос-

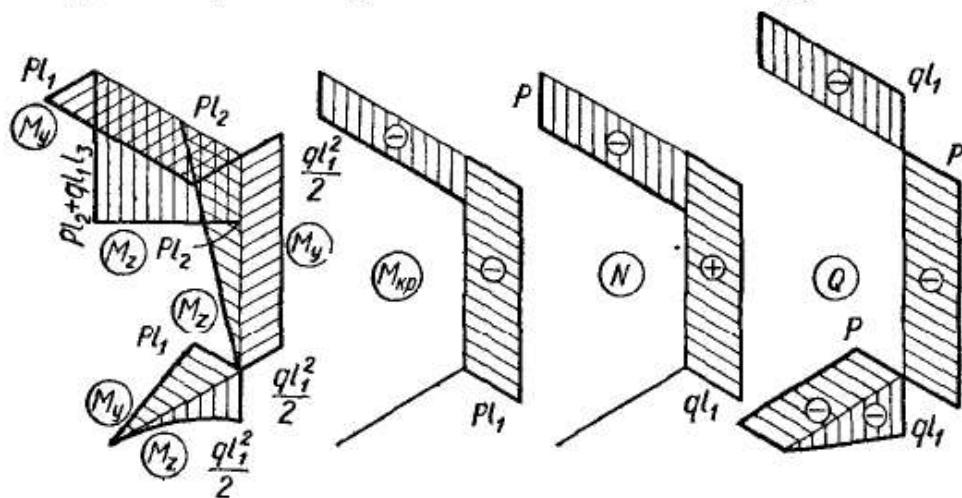


Рис. 89

ти и ориентируем параболическую эпюру. Пара момента M_y действует в горизонтальной плоскости xz , в этой плоскости и ориентируем треугольную эпюру M_y .

Переходим к участку BC . Проекцию на ось стержня дает только распределенная нагрузка, значит $N = ql_1$ и эпюра N на участке BC прямоугольна. Легко видеть, что $Q_z = 0$, а $Q_y = -P$, следовательно, эпюра Q_y прямоугольна.

Момент относительно оси стержня получается только от силы P , причем к верхней стороне любого сечения он приложен против часовой стрелки (смотреть снизу вверх, т. е. против направления оси

х). В соответствии с принятым правилом знаков для крутящих моментов на участке BC

$$M_{кр} = -Pl_1,$$

и эпюра $M_{кр}$ здесь прямоугольна.

Эпюры изгибающих моментов M_y и M_z на участке BC прямолинейны, поскольку распределенной нагрузки на нем нет. Следовательно, достаточно вычислить значения изгибающих моментов в двух сечениях, например в B и C . В сечении B момент $M_z = 0$, так как и сила P и равнодействующая распределенной нагрузки проходят через ось z этого сечения. В сечении C

$$M_z = Pl_2.$$

Равнодействующая распределенной нагрузки момента M_z не дает и в этом сечении, так как пересекает ось z сечения C . По этим данным строим треугольник эпюры M_z (рис. 89) на сжатых волокнах, располагая его в плоскости xy , в которой действует пара изгибающего момента M_z .

Для изгибающего момента M_y в сечениях B и C

$$M_y = ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{ql_1^2}{2}.$$

Сила P не дает момента относительно осей y в сечениях B и C , так как она параллельна этим осям. Следовательно, эпюра M_y на участке BC прямоугольна. На рис. 89 прямоугольник построен на сжатых волокнах и располагается в плоскости xz .

Осталось построить эпюры на участке CD . На ось x проектируется только сила P , причем она вызывает сжатие. Поэтому здесь

$$N = -P$$

и эпюра продольных сил прямоугольна.

В произвольном сечении участка $Q_z = 0$, а $Q_y = -ql_1$, следовательно, эпюра Q_y прямоугольна.

Момент относительно оси x получается только от действия q (P параллельна оси x), причем, согласно принятому правилу знаков для крутящих моментов, этот момент отрицателен:

$$M_{кр} = -ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} = -\frac{ql_1^2}{2}.$$

Эпюра $M_{кр}$ вновь получается прямоугольной.

Поскольку эпюры изгибающих моментов M_y и M_z будут прямолинейными, вычислим их значения только в двух сечениях — в C и D :

в сечении C

$$M_z = P \cdot BC = Pl_2 \text{ (сжаты нижние волокна);}$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \text{ (сжаты левые волокна);}$$

в сечении D

$$M_z = P \cdot BC + ql_1 \cdot CD = Pl_2 + ql_1 l_3 \text{ (сжаты нижние волокна);}$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \text{ (сжаты левые волокна).}$$

По этим данным строим прямоугольную эпюру изгибающего момента M_y в горизонтальной плоскости и трапециевидную эпюру изгибающего момента M_z в вертикальной плоскости.

Пользуясь построенными эпюрами (рис. 89), можно в любом сечении пространственного стержня найти величины и направления

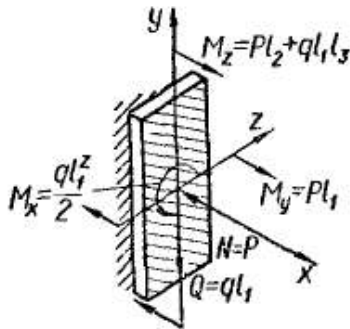


Рис. 90

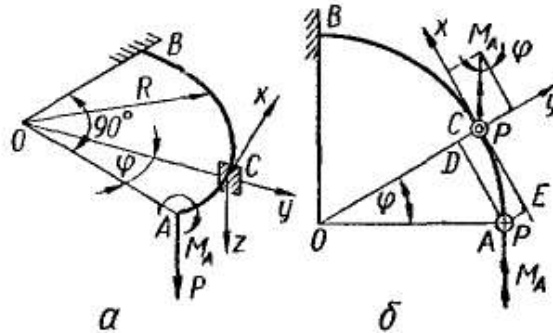


Рис. 91

изгибающих и крутящих моментов, продольной и поперечной сил. В качестве иллюстрации показаны усилия и моменты в сечении D (рис. 90).

Пример 11. Построим эпюры для пространственно нагруженного криволинейного стержня (рис. 91, а), расположенного в горизонтальной плоскости. Сечения его (например, показанное на рисунке пунктиром прямоугольное) таковы, что одна из главных центральных осей y совпадает с направлением радиуса, проведенного в центр тяжести (ц. т.) сечения, а вторая — z — вертикальна. Касательная к окружности дает для каждого сечения направление оси стержня (оси x). Сила P вертикальна, а внешний момент M приложен в плоскости конечного сечения A .

Таблица 9

1	φ°	0	15	30	45	60	75	90
2	$\sin \varphi$	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966	1
3	$\cos \varphi$	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0
4	$8000 \cdot [3]$	8000	7730	6930	5660	4000	2070	0
5	$M_{кр} = [4] - 6000$	2000	1730	930	-340	-2000	-3930	-6000
6	$M = 8000 \cdot [2]$	0	2070	4000	5660	6930	7730	8000

В данном случае, чтобы построить эпюры, нужно ввести угловую координату φ и записать выражения для усилий и моментов. При этом проще рассматривать проекцию стержня на горизонтальную плоскость (рис. 91, б). Ось z тогда совпадает с точкой C и отмечена точкой в кружочке, а сила P — с точкой A и отмечена крестиком в кружочке; приложенный внешний момент представлен в виде вектора-момента.

Рассмотрев результат действия приложенных к стержню сил в текущем сечении C , получим

$$N(\varphi) = \sum X = 0; \quad Q_z(\varphi) = P, \quad Q_y(\varphi) = 0;$$

$$M_z(\varphi) = \sum M_z = 0.$$

Изгибающий момент $M = M_y$ и крутящий $M_{кр} = M_x$ от силы P вычислим, умножая P на соответствующие плечи: $AD = R \sin \varphi$ и $AE = DC = R(1 - \cos \varphi)$.

Чтобы вычислить составляющие M и $M_{кр}$ от действия момента M_A , перенесем мысленно вектор M_A в точку C (рис. 91, б). Проекции этого вектора на оси y и x дадут соответственно составляющие изгибающего и крутящего моментов в

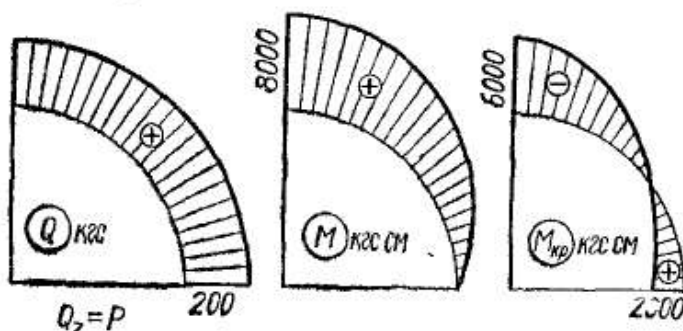


Рис. 92

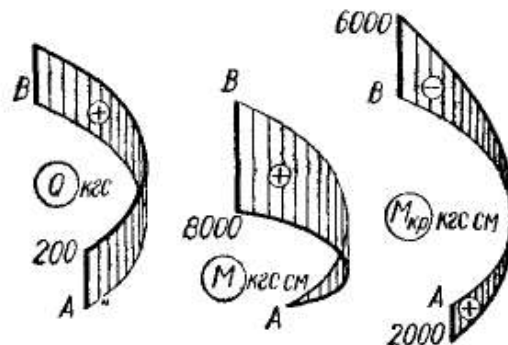


Рис. 93

сечении C . Придерживаясь принятого правила знаков для $M_{кр}$ и считая M положительным, если он вызывает сжатие в нижних волокнах стержня, получим следующее:

$$M(\varphi) = M_y(\varphi) = PR \sin \varphi + M_A \sin \varphi = (PR + M_A) \sin \varphi;$$

$$M_{кр}(\varphi) = M_x(\varphi) = -PR(1 - \cos \varphi) + M_A \cos \varphi = (PR + M_A) \cos \varphi - PR.$$

При $P = 200$ кгс, $M_A = 2000$ кгс · см, $R = 30$ см

$$M(\varphi) = 8000 \sin \varphi \text{ кгс · см};$$

$$M_{кр}(\varphi) = (8000 \cos \varphi - 6000) \text{ кгс · см}.$$

Составляем таблицу (табл. 9) и по полученным данным строим эпюры M и $M_{кр}$ (рис. 92).

Иногда эпюры для пространственно нагруженных криволинейных стержней строят не на проекции стержня, как это сделано на рис. 92, а в перспективе (рис. 93).

§ 26. НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИИ

Как уже говорилось (§ 14), в сечениях нагруженного стержня действуют непрерывно распределенные по сечению внутренние усилия. Приводя их к центру тяжести сечения, получаем главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} , проекции которых на главные центральные оси сечения y , z и ось стержня x дают величины N , Q_y , O_z , M_y , M_z , $M_{кр}$, называемые усилиями и моментами в сечении. На рис. 94, а показаны распределенные по левой стороне сечения усилия, являющиеся результатом действия правой части стержня (изображена штриховой) на левую, их главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} . Вектор \vec{R} представляет собой некоторую сумму усилий, распределенных по всей площади сечения.

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади dF (рис. 94, б). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и

направлению. Тогда равнодействующая их \vec{dR} будет проходить через центр тяжести элемента dF , координаты которого равны y и z . Следовательно, приводя эти усилия к центру тяжести элемента dF , получим главный вектор \vec{dR} и главный момент, равный нулю.

Проекциями \vec{dR} на оси x, y, z будут элементарная продольная сила dN и элементарные поперечные силы dQ_y и dQ_z . Поскольку, как было сказано, усилия на элементе можно считать распределенными равномерно, то, разделив величины dN, dQ_y , и dQ_z на площадь dF , получим величины продольных и поперечных сил, приходящихся на единицу площади:

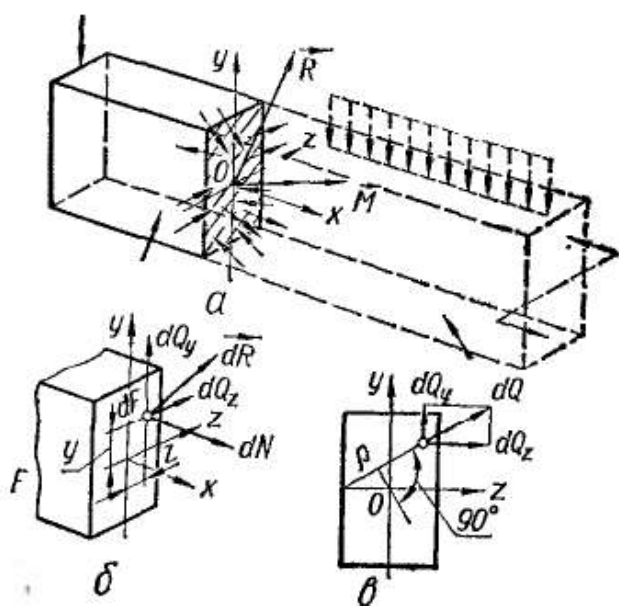


Рис. 94

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dF}. \quad (3.26)$$

Эти величины называют напряжениями в точке y, z проведенного сечения стержня, причем

- σ — нормальное напряжение;
- τ — касательное напряжение.

Они измеряются в единицах силы, деленных на квадрат длины. В расчетах σ и τ всегда будем выражать в кгс/см²¹. При экспериментальных исследованиях свойств материалов, а также в справочных таблицах напряжения часто выражают в кгс/мм².

Таким образом, напряжением называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

Иногда кроме нормальных напряжений σ и касательных τ_y, τ_z рассматривают еще и полное напряжение

$$p = \frac{dR}{dF}, \quad (3.27)$$

т. е. величину полного усилия, приходящегося на единицу площади. Очевидно,

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (3.28)$$

¹ Согласно СИ, напряжения, как и давление, измеряют в паскалях (Па) (см. § 13).

В общем случае нагружения тела напряжения различны в разных точках сечения (как принято говорить, напряжения распределены по сечению неравномерно), но встречается также и равномерное распределение напряжений.

Понятие «напряжение» играет очень важную роль в расчетах на прочность. Поэтому значительная часть курса сопротивления материалов отводится изучению способов вычисления напряжений σ и τ .

Нетрудно установить общие зависимости между σ и τ с одной стороны и N , Q_y , Q_z , M_y , M_z и $M_{кр}$ — с другой. Исходя из определений для усилий и моментов (§ 14) и учитывая формулы (3.26), имеем

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma dF; \quad (3.29)$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y dF; \quad (3.30)$$

$$Q_z = \int_F dQ_z = \int_F \tau_z dF; \quad (3.31)$$

$$M_y = \int_F zdN = \int_F \sigma z dF; \quad (3.32)$$

$$M_z = \int_F ydN = \int_F \sigma y dF; \quad (3.33)$$

$$M_{кр} = \int_F (y dQ_z - z dQ_y) = \int_F (y \tau_z - z \tau_y) dF = \int_F \rho \tau dF. \quad (3.34)$$

В последнем выражении τ представляет собой полное касательное напряжение в точке рассматриваемой площади:

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \sqrt{\frac{dQ_y^2 + dQ_z^2}{dF}} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

а ρ — расстояние от центра тяжести сечения до линии действия dQ (рис. 94, в).

Полученные выражения (3.29) — (3.34), устанавливающие связь между напряжениями и внутренними усилиями, будем называть *статическими уравнениями* или *интегральными уравнениями равновесия*.

Хотя величины компонентов внутренних сил в любом сечении стержня обычно легко определить, например из эпюр, однако для практических расчетов полученные зависимости непосредственно использовать нельзя, так как закон распределения напряжений по сечению не известен. Следовательно, задача вычисления напряжений всегда статически неопределима. Например, зная величину изгибающего момента M_y в сечении, нельзя найти нормальные напряжения из формул (3.32). Все же, если, пользуясь теми или иными

соображениями, удастся установить закон распределения σ или τ по сечению, то по формулам (3.29) — (3.34) можно найти и сами величины напряжений.

Выводить формулы для напряжений в стержнях будем всегда по такой схеме:

1. Рассматриваем статическую сторону поставленной задачи, т. е. записываем те из уравнений (3.29) — (3.34), которые нужны для вывода.

2. Рассматриваем геометрическую сторону задачи: на основе *опытного изучения* данного вида деформации стержня и определенных гипотез (в частности, гипотезы плоских сечений) устанавливаем зависимости между перемещениями точек стержня и их положением в сечении относительно принятой системы координат. Эти зависимости называют *геометрическими уравнениями*.

3. Рассматриваем физическую сторону: базирываясь на экспериментальном исследовании физических свойств материала, определяем зависимость между напряжениями и деформациями (или перемещениями). Эти зависимости называют *физическими уравнениями*.

4. Проводим синтез, т. е. совместное решение уравнений, полученных в п. 1—3, и путем исключения деформаций (или перемещений) получаем формулы, выражающие напряжения через усилия или моменты в сечении.

Глава 4

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

§ 27. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Растяжение или сжатие стержня вызывается силами, действующими вдоль его оси. В этом случае в поперечных сечениях стержня из шести внутренних силовых факторов возникает только один — продольная (осевая) сила N . Простейший случай растяжения стержня и эпюра продольных сил показаны на рис. 95, а, б. Осевая сила в сечении является равнодействующей возникающих в каждой из точек сечения нормальных напряжений. Отсутствие поперечных сил дает основание предположить, что касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения равны нулю.

Выведем формулу для определения нормальных напряжений. При решении этой задачи будем придерживаться указанной в § 26 последовательности.

Рассечем стержень произвольным поперечным сечением $n - n$ (рис. 95, в). Статическая сторона задачи выражается уже известным уравнением (3.29):

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Из уравнения (4.1) нельзя определить величину σ , так как закон распределения последних в точках поперечного сечения не известен.

Рассмотрим геометрическую сторону задачи. При наблюдении деформации растяжения стержня, на поверхности которого нанесены линии, перпендикулярные к оси бруса (рис. 95, а), можно

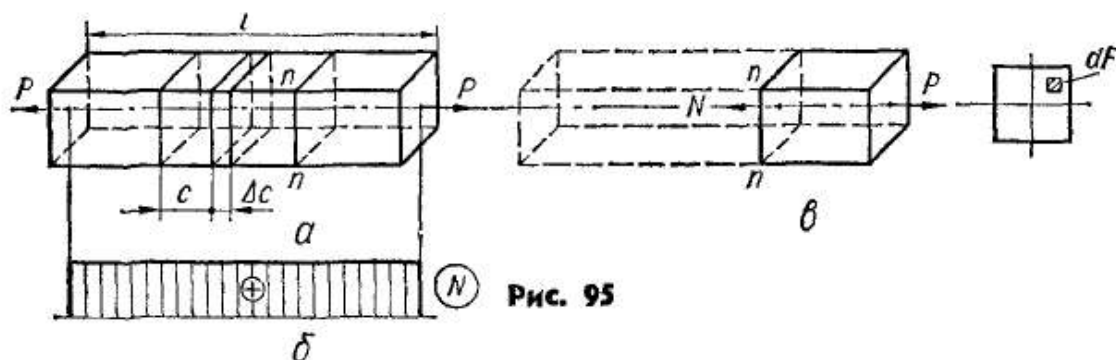


Рис. 95

отметить, что эти линии, смещаясь параллельно самим себе, остаются прямыми и перпендикулярными к оси бруса. Предполагая, что указанная картина перемещения сечений имеет место и внутри стержня, приходим к гипотезе плоских сечений: поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее, перемещаясь поступательно вдоль оси стержня. Разобьем теперь стержень на продольные (параллельные оси стержня) элементы бесконечно малых поперечных сечений и будем в дальнейшем называть их волокнами. На основании гипотезы плоских сечений следует заключить, что все волокна удлиняются на одну и ту же величину и их относительные удлинения ε одинаковы:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}. \quad (4.2)$$

Это аналитическое выражение геометрической стороны задачи.

Физическая сторона рассматриваемой задачи заключается в установлении зависимости деформаций от напряжений. При упругих деформациях эта зависимость линейна и, как известно, называется *законом Гука*:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ или } \boxed{\sigma = E\varepsilon}, \quad (4.3)$$

где E — коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости, модулем упругости первого рода или модулем Юнга. Модуль упругости — это одна из физических констант материала. Измеряется модуль упругости в единицах напряжения.

Учитывая постоянство модуля упругости E для однородного и изотропного материала, а также выражения (4.2) и (4.3), находим, что

$$\sigma = E\varepsilon = \text{const.} \quad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в формулу (4.1), получаем

$$N = \int_F E\varepsilon dF = E\varepsilon \int_F dF = E\varepsilon F = \sigma F, \quad (4.5)$$

откуда

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F}} \quad (4.6)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении. В случае сжатия напряжения считают отрицательными.

Отметим, что формула (4.6) справедлива лишь для сечений, достаточно удаленных от мест приложения сосредоточенных нагрузок. Вблизи приложения нагрузок распределение напряжений носит сложный характер и требует более точных методов исследования.

Определяя напряжения при растяжении, сжатии и при других видах деформаций, в сопротивлении материалов, а также в теории упругости широко пользуются следующим весьма важным положением, носящим название принципа Сен-Венана: *если тело нагружается статически эквивалентными системами сил, т. е. такими, у которых главный вектор и главный момент одинаковы, и при этом размеры области приложения нагрузок невелики по сравнению с размерами тела, то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения сил, напряжения мало зависят от способа нагружения.* Общего теоретического доказательства принцип Сен-Венана не имеет, но его справедливость подтверждается многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Поясним этот принцип на следующем примере.

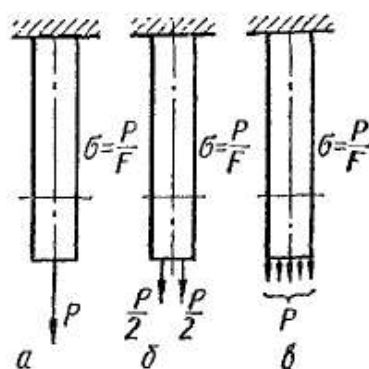


Рис. 96

Один и тот же стержень, закрепленный верхним концом (рис. 96), нагружается на свободном конце статически эквивалентными нагрузками, равнодействующие которых выражаются величиной вектора P . Нагрузки приложены различными способами: a — в виде сосредоточенной осевой силы; b — в виде двух сил; c — в виде распределенной нагрузки. Исследования показывают, что во всех случаях в поперечном сечении, удаленном на расстояние, превышающее в 1,5—2 раза его поперечные размеры, напряжения практически одинаковы. В сечениях же, расположенных близко от места приложения сил, величина напряжений и характер их распределения различны.

Перейдем к определению деформаций стержня. Из выражения (4.5) можно найти относительное удлинение:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{N}{EF}} \quad \begin{array}{l} \text{Относительное} \\ \text{удлинение} \\ \text{стержня} \end{array} \quad (4.7)$$

В пределах призматического участка стержня длиной l , выполненного из однородного материала ($E = \text{const}$), в сечениях которого действуют одинаковые продольные силы N , удлинение каждой единицы длины одинаково и, следовательно, абсолютное удлинение

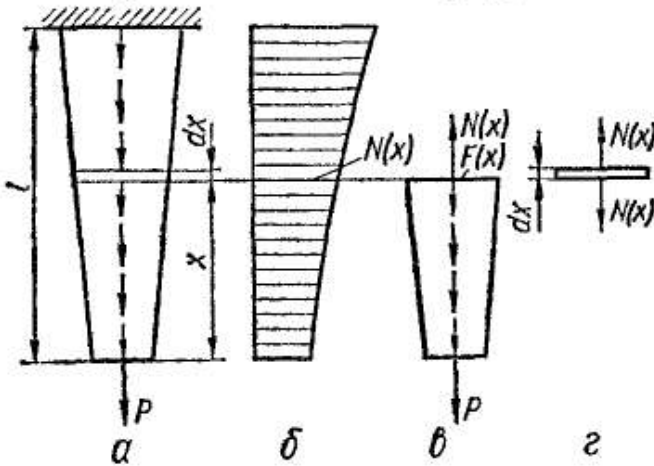


Рис. 97

абсолютное удлинение стержня

$$\boxed{\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}} \quad (4.8)$$

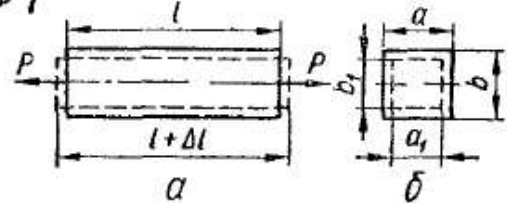


Рис. 98

Формула (4.8) выражает закон Гука для абсолютных удлинений. Произведение EF в знаменателе формулы называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении и сжатии и имеет размерность силы. Величину $\boxed{c = \frac{EF}{l}}$ называют жесткостью стержня.

Если на рассматриваемом участке продольная сила и поперечное сечение переменны (рис. 97, а — в), то для элемента бесконечно малой длины dx (рис. 97, г) на основании формулы (4.8) можно записать

$$\Delta(dx) = \frac{N(x) dx}{EF(x)}$$

Полное удлинение участка длиной l получим, суммируя удлинения всех бесконечно малых участков:

$$\boxed{\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EF(x)}} \quad (4.9)$$

Заметим, что перемещение некоторого сечения относительно другого равно продольной деформации участка стержня, заключенного между рассматриваемыми сечениями, и обозначается буквой λ .

Растяжение и сжатие сопровождаются изменением поперечных размеров стержня (рис. 98). При растяжении они уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются.

По аналогии с продольной деформацией разность соответствующих поперечных размеров после деформации и до нее назовем аб-

сопутной поперечной деформацией:

$$\begin{aligned}\Delta a &= a_1 - a; \\ \Delta b &= b_1 - b.\end{aligned}\tag{4.10}$$

При растяжении поперечные деформации отрицательны, а при сжатии — положительны.

Разделив абсолютную поперечную деформацию на соответствующий первоначальный размер, получим относительную поперечную деформацию, обозначаемую ϵ' . Относительная поперечная деформация для изотропных материалов по всем поперечным направлениям одинакова:

$$\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}.\tag{4.11}$$

Между поперечной и продольной относительными деформациями при простом растяжении и сжатии в пределах применимости закона Гука существует постоянное отношение. Абсолютная величина этого отношения носит название коэффициента Пуассона и обозначается буквой μ :

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|.\tag{4.12}$$

Коэффициент Пуассона — безразмерная величина.

Учитывая, что продольная и поперечная деформации всегда имеют противоположные знаки, получаем

$$\epsilon' = -\mu \epsilon,\tag{4.13}$$

или, согласно формуле (4.3),

$$\epsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad \text{модуль упругости } E \text{ } \sigma \text{ } \epsilon'$$

При сжатии напряжение в формулу (4.14) следует подставлять со знаком «минус».

Коэффициент Пуассона μ наряду с модулем упругости E характеризует упругие свойства материала. Для всех изотропных материалов значения коэффициента Пуассона лежат в пределах 0—0,5. В частности, для пробки μ близок к нулю, для каучука — к 0,5, для стали $\mu \approx 0,3$. Значения модулей упругости E и коэффициентов μ для некоторых материалов приведены в приложении 9.

§ 28. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ. ВИДЫ РАСЧЕТОВ

Основная задача сопротивления материалов — обеспечить надежные размеры деталей, подверженных тому или иному силовому, температурному или другому воздействию. Такие размеры можно определить из расчета на прочность и жесткость. В большинстве случаев основным бывает расчет на прочность.

Рассмотрим условия прочности и жесткости для случаев простого растяжения и сжатия.

Отметим прежде всего, что опасность наступления разрушения характеризуется не столько величинами внутренних усилий и моментов в сечении, сколько величинами наибольших нормальных и касательных напряжений, а также их комбинацией, которые действуют в опасных (т. е. наиболее напряженных) точках сечения. Физически очевидно, что сколь угодно большие напряжения материал выдерживать не в состоянии. Поэтому величины наибольших напряжений из условия надежности работы детали необходимо ограничивать некоторыми допустимыми значениями. Их называют *допускаемыми напряжениями*. При растяжении и сжатии допускаемые напряжения обозначают соответственно $[\sigma_+]$ и $[\sigma_-]$, при сдвиге — $[\tau]$ ¹.

Если известны допускаемые напряжения и есть формулы, выражающие напряжения через усилия и моменты в сечении, то в принципе рассчитать на прочность можно любую деталь.

В случае растяжения или сжатия стержня находят опасные сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений по абсолютной величине, и для этих сечений записывают условие

прочности:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

При растяжении в правую часть этого условия подставляют допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_+]$, а при сжатии — допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-]$.

Используя условие прочности (4.15), можно решать три типа задач:

1) по известным нагрузкам для выбранного материала найти надежные с точки зрения прочности размеры поперечного сечения стержня (проектировочный расчет);

2) по известным размерам и материалу детали проверить, может ли она выдержать заданную нагрузку (проверочный расчет);

3) по известным размерам детали, материалу и схеме загрузки определить допустимую величину нагрузки.

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы машин и сооружений размеры их деталей нужно выбирать так, чтобы обеспечивалось условие жесткости. При растяжении (сжатии) условие жесткости имеет следующий вид:

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x) dx}{EF(x)} \leq [\Delta l], \quad (4.16)$$

где Δl — изменение размеров детали;

$[\Delta l]$ — допускаемая величина этого изменения.

Напомним, что расчет по условию жесткости всегда следует дополнять расчетом на прочность. Если условие жесткости выпол-

¹ Некоторые соображения о выборе допускаемых напряжений будут даны в § 34.

нено, а условие прочности не удовлетворяется, то задачу необходимо решать из условия прочности.

Аналогично ведут расчет на прочность и жесткость при других видах простых деформаций стержня. Соображения о расчете на прочность при сложных напряженных состояниях изложены в гл. 7.

§ 29. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ

При проектировании и расчетах на прочность, жесткость и устойчивость элементов механизмов, машин и сооружений необходимо знать свойства материалов. Поэтому материалы испытывают на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб и твердость. Подробные описания всех видов механических испытаний, а также применяемых при этом машин и приборов приведены в специальных курсах и руководствах к лабораторным работам по сопротивлению материалов¹. Ограничимся лишь кратким описанием некоторых распространенных видов механических испытаний и получаемых при этом результатов.

Одним из основных видов испытаний материалов является испытание на растяжение, так как при этом обнаруживаются наиболее важные их свойства. Из испытуемого материала изготовляют специальные образцы. Чаще всего их делают цилиндрическими (рис. 99, а); из листового металла обычно изготовляют плоские образцы (рис. 99, б).

В цилиндрических образцах должно быть выдержано соотношение между расчетной длиной образца l_0 и диаметром d_0 : у длинных образцов $l_0 = 10d_0$, у коротких $l_0 = 5d_0$. Эти соотношения можно выразить в несколько иной форме. Учитывая, что

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1,13 \sqrt{F_0},$$

где F_0 — площадь поперечного сечения образца, получаем для длинного образца

$$l_0 = 11,3 \sqrt{F_0}; \quad (4.17)$$

для короткого образца

$$l_0 = 5,65 \sqrt{F_0}. \quad (4.18)$$

Чтобы соблюсти подобие при испытаниях, эти соотношения нужно выдерживать и для плоских образцов.

В качестве основных применяют образцы с диаметром $d_0 = 10$ мм; при этом рабочая длина $l_0 = 100$ мм. Допускается

¹ См., например, А. М. Афанасьев, В. А. Марьин. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. 2-е изд. М., Наука, 1975.

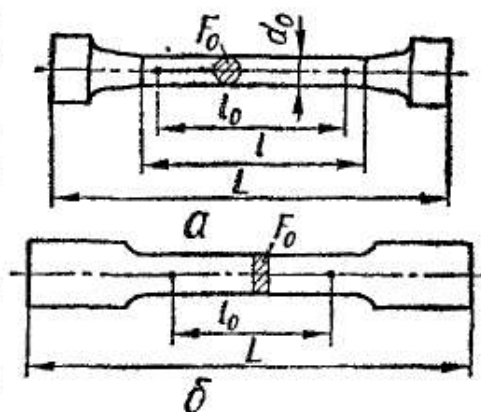


Рис. 99

применение образцов и других диаметров при условии, что рабочая длина их $l_0 = 10 d_0$ или $l_0 = 5d_0$. Такие образцы называют *пропорциональными*.

Диаграммы растяжения. Для испытаний на растяжение применяют разрывные машины, позволяющие в процессе испытания определять усилия и соответствующие им деформации образца. По этим данным строят первичную диаграмму растяжения, в которой по оси ординат откладывают усилия, а по оси абсцисс — соответствующие им удлинения. Диаграмма растяжения может быть полу-

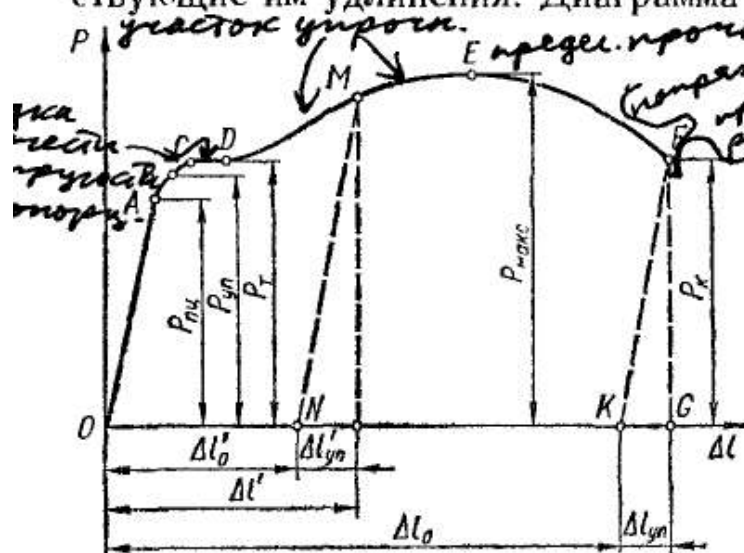


Рис. 100

чена и автоматически при помощи специальных диаграммных аппаратов. Характер диаграммы растяжения зависит от свойств испытуемого материала. Типичный вид такой диаграммы для малоуглеродистой стали изображен на рис. 100.

Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы, а также соответствующие им стадии деформирования образца.

От начала нагружения до определенного значения растягивающей силы имеет место прямая пропорциональная зависимость между удлинением образца и силой. Эта зависимость на диаграмме выражается прямой *OA*. На этой стадии растяжения справедлив закон Гука.

Обозначим силу, при которой закон пропорциональности прекращает свое действие, через $P_{пц}$. Этому значению силы на диаграмме соответствует точка *A*. Напряжение, вызванное силой $P_{пц}$, называется пределом пропорциональности и вычисляется по формуле

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0} \quad \text{по формуле поперечного сечения образца (4.19)}$$

Таким образом, пределом пропорциональности называется напряжение, после которого нарушается закон Гука.

Как уже указывалось, деформация называется *упругой*, если она полностью исчезает после разгрузки. Допустим, что постепенно повышая нагрузку P , будем при каждом ее значении проводить полную разгрузку образца. Пока сила P не достигнет определенной величины, вызванные ею деформации будут исчезать при разгрузке. Процесс разгрузки при этом изобразится той же линией, что и нагружение.

Обозначим через $P_{уп}$ наибольшее значение силы, при котором образец еще не дает при разгрузке остаточной деформации. Этому

значению на диаграмме соответствует точка B , а упругой стадии растяжения образца — участок диаграммы OB .

Наибольшее напряжение, до которого остаточная деформация при разгрузке не обнаруживается, называется **пределом упругости**. Это напряжение вызывается силой $P_{уп}$ и определяется по формуле

$$\sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{F_0} \quad (4.20)$$

Предел упругости является характеристикой, не связанной с законом Гука. Точка B может располагаться как выше, так и ниже точки A . Эти точки, а следовательно и значения напряжений $\sigma_{пл}$ и $\sigma_{уп}$, близки друг к другу и обычно различием между ними пренебрегают.

После точки A при дальнейшем растяжении образца кривая растяжения становится криволинейной и плавно поднимается до точки C , где наблюдается переход к горизонтальному участку CD , называемому *площадкой текучести*. На этой стадии растяжения удлинение образца растет при постоянном значении растягивающей силы, обозначаемой через $P_{т}$. Такой процесс деформации, называемый *текучестью материала*, сопровождается остаточным (пластическим) удлинением, не исчезающим после разгрузки.

Таким образом, **пределом текучести $\sigma_{т}$** называется наименьшее напряжение, при котором деформация образца происходит при постоянном растягивающем усилии. Величина предела текучести вычисляется по формуле

$$\sigma_{т} = \frac{P_{т}}{F_0} \quad (4.21)$$

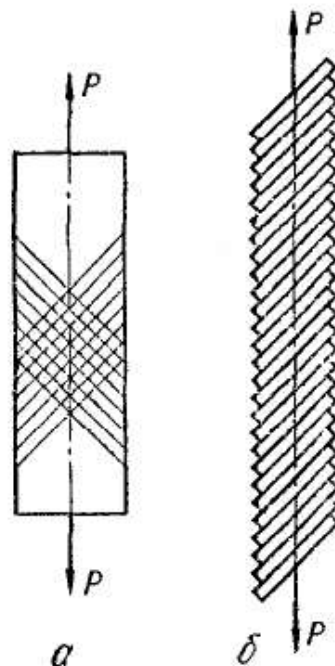


Рис. 101

Начало пластической деформации соответствует наступлению некоторого критического состояния металла, которое можно обнаружить не только по остаточным деформациям, но и по другим признакам. При пластической деформации повышается температура образца; у стали изменяются электропроводность и магнитные свойства; на полированной поверхности образцов, особенно плоских, заметно потускнение, являющееся результатом появления густой сетки линий, носящих название *линий Чернова* (линий Людерса). Последние наклонены к оси образца приблизительно под углом 45° (рис. 101, а) и представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие сдвигов в тех плоскостях кристаллов, где действуют наибольшие касательные напряжения. В результате сдвигов по наклонным плоскостям образец получает остаточные деформации. Механизм образования их упрощенно показан на рис. 101, б.

После стадии текучести материал вновь приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации и воспринимает возрастающее до некоторого предела усилие. Этому отвечает восходящий участок DE (рис. 100) кривой растяжения, называемый участком упрочнения. Точка E соответствует наибольшему усилию $P_{\text{макс}}$, которое может воспринять образец.

Напряжение, соответствующее максимальной силе $P_{\text{макс}}$, называется временным сопротивлением $\sigma_{\text{в}}$ или пределом прочности $\sigma_{\text{пч}}$. Его вычисляют по формуле

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{P_{\text{макс}}}{F_0} \quad (4.22)$$

До этого момента удлинения распределялись равномерно по всей длине l_0 образца, площади поперечных сечений расчетной части образца изменялись незначительно и также равномерно по длине.

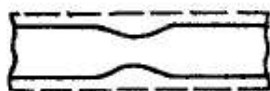


Рис. 102

Поэтому для вычисления $\sigma_{\text{пч}}$, $\sigma_{\text{уп}}$, $\sigma_{\text{т}}$ и $\sigma_{\text{в}}$ в расчетные формулы вводилось первоначальное значение площади F_0 .

После достижения усилия $P_{\text{макс}}$ при дальнейшем растяжении образца деформация происходит, главным образом, на небольшой длине образца. Это ведет к образованию местного сужения в виде шейки (рис. 102) и к падению силы P , несмотря на то что напряжение в сечении шейки непрерывно растет. Падение растягивающей силы P наблюдается лишь при испытании образца в машине, ограничивающей скорость нарастания деформации. При нагружении путем подвешивания грузов разрушение произойдет при постоянной нагрузке, но со все возрастающей скоростью деформации.

Обозначив через $P_{\text{к}}$ величину растягивающей силы в момент разрыва, получим

$$\sigma_{\text{к}} = \frac{P_{\text{к}}}{F_0} \quad (4.23)$$

Определяемое таким образом напряжение при разрыве образца весьма условно и не может быть использовано в качестве характеристики механических свойств стали. Условность состоит в том, что получено оно делением силы в момент разрыва на первоначальную площадь поперечного сечения образца, а не на действительную его площадь при разрыве, которая значительно меньше начальной вследствие образования шейки.

Основными характеристиками упругости и прочности материалов, используемыми в практических расчетах, являются *предел упругости $\sigma_{\text{уп}}$, предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ и временное сопротивление (предел прочности) $\sigma_{\text{в}}$ ($\sigma_{\text{пч}}$)*. Для малоуглеродистой стали, имеющей площадку текучести, например для стали Ст2, эти характеристики следующие: $\sigma_{\text{уп}} = 2000$ кгс/см², $\sigma_{\text{т}} = 2200 \div 2600$ кгс/см², $\sigma_{\text{в}} = 3400 \div 4200$ кгс/см².

Для металлов, не имеющих площадки текучести, *предел текучести определяют условно как напряжение, при котором остаточная деформация составляет величину, установленную ГОСТом или тех-*

ническими условиями. По ГОСТ 1497—73 величина остаточной деформации составляет 0,2% от измеряемой длины образца. Условные пределы текучести отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной деформации, например: $\sigma_{0,2}$.

Учитывая, что практически трудно установить начало отклонения от закона пропорциональности и начало появления первых остаточных деформаций, вводят также понятия условных предела пропорциональности и предела упругости.

Условным пределом пропорциональности называют наименьшее напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости между напряжением и деформацией достигает некоторой величины, устанавливаемой техническими условиями (например 0,002% от измеряемой длины образца).

Условным пределом упругости называют наименьшее напряжение, при котором остаточная деформация достигает заданной величины (обычно 0,001% — 0,05% от измеряемой длины образца). Его отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной остаточной деформации (например, $\sigma_{0,001}$ и $\sigma_{0,05}$).

Важнейшие механические характеристики некоторых широко применяемых материалов приведены в приложениях 2—8.

Разгрузка и повторное нагружение. Как уже было сказано, если при усилии растяжения, вызывающем напряжение не выше предела упругости, прекратить нагружение, а затем разгружать образец, то процесс разгрузки изобразится на диаграмме линией, практически совпадающей с линией нагрузки. После окончательной разгрузки образца его удлинение полностью исчезнет. Повторное нагружение на диаграмме пойдет по той же линии OB , полученной при первом нагружении образца.

Иначе будет, если к началу разгрузки напряжение в образце превышает предел упругости. Произведя разгрузку, например, после достижения силой значения, изображаемого ординатой точки M (рис. 100), заметим, что процесс разгрузки на диаграмме описывается уже не кривой, совпадающей с кривой $OABCDM$ нагружения, а прямой MN , параллельной прямолинейному участку OA диаграммы. Удлинение $\Delta l'$, полученное образцом до начала разгрузки, при разгрузке полностью не исчезнет. Исчезнувшая часть удлинения на диаграмме изобразится отрезком $\Delta l'_{уп}$, а оставшаяся — отрезком $\Delta l'_0$. Следовательно, полное удлинение образца за пределом упругости состоит из двух частей — упругой и пластической:

$$\Delta l' = \Delta l'_{уп} + \Delta l'_0$$

— упругое удлинение
— пластич. удлинение

Так будет вплоть до разрыва образца. После разрыва упругая составляющая полного удлинения в обеих частях образца (отрезок $\Delta l'_{уп}$) исчезает. Оставшееся удлинение изображается отрезком $\Delta l'_0$.

Будем вновь нагружать образец, который был растянут силой, вызвавшей в нем напряжение выше предела текучести, а затем разгружен. При этом окажется, что линия повторного нагружения

почти совпадает на диаграмме с линией разгрузки MN . Предел пропорциональности повысится и станет приблизительно равным тому напряжению, до которого первоначально был растянут образец. При дальнейшем увеличении растягивающей силы кривая диаграммы совпадет с MEF . Часть диаграммы, расположенная левее линии NM , окажется отсеченной, т. е. начало координат переместится в точку N . Остаточное удлинение после разрыва будет меньше, чем в образце, не подвергавшемся предварительной пластической деформации.

Таким образом, предварительная вытяжка за предел текучести изменяет некоторые механические свойства стали — повышает предел пропорциональности и уменьшает остаточное удлинение после разрыва, т. е. делает ее более хрупкой. Изменение свойств материала в результате деформации за пределом текучести называется *наклепом*. В некоторых случаях явление наклепа нежелательно и его стремятся устранить, в других же, наоборот, наклеп полезен и его создают искусственно.

Относительное удлинение и сужение после разрыва. Полное удлинение, полученное образцом перед разрушением, уменьшится после разрыва, так как в частях образца исчезнут упругие деформации. Относительным удлинением после разрыва δ называют отношение в процентах приращения расчетной длины образца после разрыва к его первоначальной длине:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% \quad (4.24)$$

приращение
начальной длины

Относительное удлинение после разрыва характеризует пластичность материала. В зависимости от величины этого удлинения материалы делят на пластичные и хрупкие. Для первых можно условно принять $\delta > 5\%$, а для вторых — $\delta < 5\%$. К пластичным материалам относят малоуглеродистую сталь, медь, свинец и другие, а к хрупким — закаленную сталь, чугун, стекло, камень, бетон и др. Например, для углеродистой стали марки Ст2 относительное удлинение после разрыва $\delta \approx 31\%$.

Относительное сужение образца после разрыва Ψ определяется делением абсолютного уменьшения площади поперечного сечения в шейке на первоначальную площадь и выражается в процентах от начальной площади поперечного сечения:

$$\Psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} \cdot 100\% \quad (4.25)$$

Чем больше относительное сужение после разрыва, тем пластичнее материал. Например, для мягкой углеродистой стали марки Ст2 $\Psi = 55 \div 65\%$.

Относительное удлинение δ и относительное сужение Ψ являются характеристиками пластичности материала. Они в определенной степени условны, так как приращение длины в формуле (4.24) и уменьшение площади поперечного сечения образца в выражении (4.25) относят к первоначальной длине и первоначальной площади

поперечного сечения. В действительности пластическая деформация развивается на непрерывно изменяющейся длине образца. Обозначая через dl приращение длины l образца в данный момент испытания, находим так называемое *истинное относительное удлинение*:

$$e = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0}. \quad (4.26)$$

Здесь l_0 и l_k соответственно начальная и конечная длины образца. Поскольку

$$l_k = l_0 + \Delta l \text{ и } \delta = \frac{\Delta l}{l},$$

то

$$e = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln (1 + \delta).$$

Разлагая правую часть этой формулы в ряд по степеням δ , получим

$$e = \ln (1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \dots$$

Как видим, при малых значениях δ условная и истинная деформации практически совпадают. Так, уже при $\delta = 10\%$ истинное удлинение $e = 9,95\%$.

Аналогично можно определить истинное поперечное сужение:

$$\tilde{\Psi} = - \int_{F_0}^{F_k} \frac{dF}{F} = \ln \frac{F_0}{F_k} = \ln \frac{F_0}{F_0 - \Delta F} = \ln \frac{l}{1 - \Psi}. \quad (4.27)$$

Как показывают опыты, при пластической деформации объем тела не изменяется:

$$F_0 l_0 = F_k l_k$$

или

$$\frac{l_k}{l_0} = \frac{F_0}{F_k}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{\Psi} = e$.

Работа деформации. Кроме названных уже характеристик механических свойств материала диаграмма растяжения дает возможность определить еще и энергетические его характеристики.

Величина площади диаграммы растяжения в координатах $P - \Delta l$ характеризует работу, затраченную на разрыв образца. Это можно показать следующим образом.

Пусть некоторой растягивающей силе P соответствует деформация λ образца (рис. 103). Дадим силе P бесконечно малое приращение dP , при этом деформация получит приращение $d\lambda$. Очевидно,

работа внешних сил на этом перемещении

$$dA = (P + dP) d\lambda \approx Pd\lambda.$$

Работа, затраченная на растяжение образца до удлинения λ_1 ,

$$A = \int_0^{\lambda_1} Pd\lambda. \quad (4.28)$$

Как видно из рис. 103, интеграл представляет собой площадь $OABCDMNO$ диаграммы растяжения. Работа, затраченная на разрыв образца, будет равна всей площади $OABCEFGO$ диаграммы растяжения.

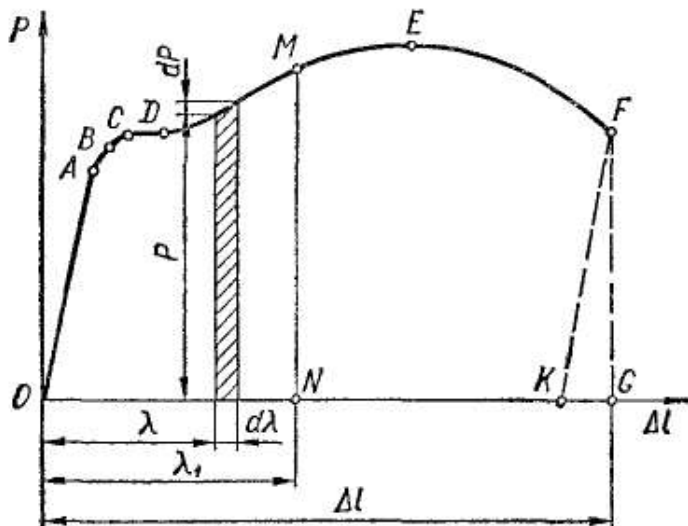


Рис. 103

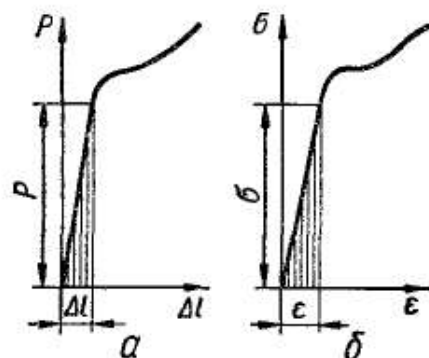


Рис. 104

В пределах упругости полная работа деформации выражается площадью треугольника (рис. 104, а):

$$A_{\text{уп}} = \frac{P\Delta l}{2}. \quad (4.29)$$

Разделив полную работу деформации A на объем рабочей части образца, получим удельную работу деформации, т. е. работу, затраченную на деформирование единицы объема материала:

$$a_{\text{уп}} = \frac{A}{V}. \quad \text{удел. роб-деф.} \quad (4.30)$$

Подставив в формулу (4.30) значение A из формулы (4.29) и $V = F_0 l_0$, получим

$$a_{\text{уп}} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma \epsilon}{2}. \quad (4.31)$$

Удельная работа деформации в пределах упругости выражается площадью треугольника на диаграмме $\sigma - \epsilon$ (рис. 104, б).

Удельная работа деформации характеризует способность материала сопротивляться ударному действию нагрузки: чем больше удельная работа деформации до разрыва, тем лучше материал сопротивляется ударным нагрузкам.

Диаграмма растяжения в координатах $\sigma - \epsilon$. Вид диаграммы растяжения в координатах $P - \Delta l$ зависит не только от свойств материала, но и от размеров испытуемого образца.

Чтобы получить диаграмму, характеризующую только механические свойства материала, первичную диаграмму растяжения перестраивают в координатах $\sigma - \epsilon$. Ординаты такой диаграммы получают делением значений растягивающей силы на первоначальную площадь поперечного сечения образца ($\sigma = \frac{P}{F_0}$), а абсциссы — делением абсолютных удлинений расчетной части образца на первоначальную ее длину ($\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$). В частности, для характерных точек диаграммы ординаты вычисляют по формулам (4.19) — (4.23).
 Диаграмма в координатах $\sigma - \epsilon$, соответствующая первичной

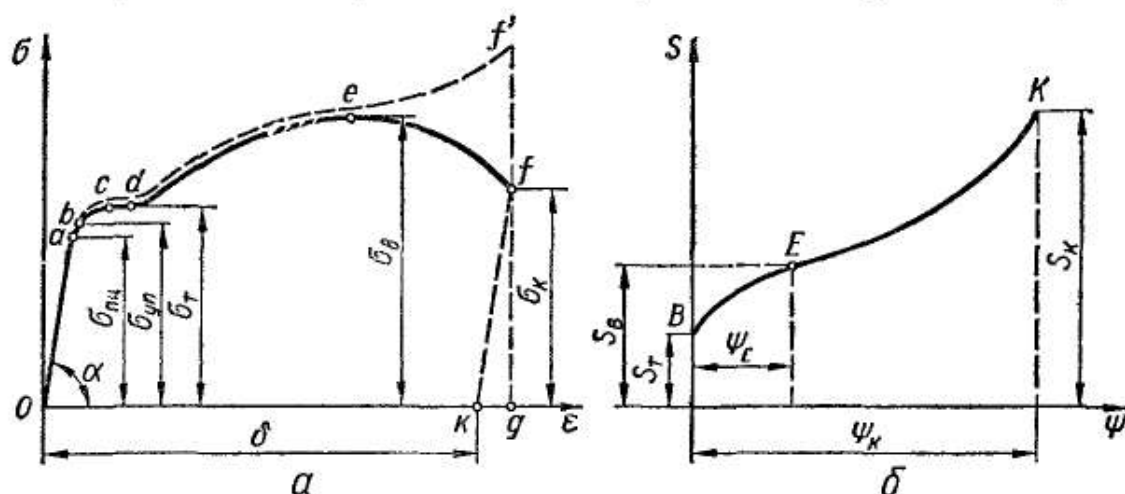


Рис. 105

диаграмме (рис. 100), изображена на рис. 105, а. Точкам O, A, B, C, D, E, F первичной диаграммы соответствуют точки O, a, b, c, d, e, f диаграммы $\sigma - \epsilon$.

Из диаграммы $\sigma - \epsilon$ видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E, \quad (4.32)$$

т. е. модуль упругости при растяжении равен тангенсу угла наклона прямолинейного участка диаграммы к оси абсцисс.

Площадь диаграммы напряжений $\sigma - \epsilon$ в соответствующем масштабе равна удельной работе деформации.

Нисходящий участок ef диаграммы носит условный характер, поскольку действительная площадь поперечного сечения образца после образования шейки и первоначальная площадь, по которой определяют ординаты диаграммы, значительно отличаются друг от друга. Деля величину силы на действительную площадь поперечного сечения образца, можно получить значения истинных напряжений и построить соответствующую диаграмму (рис. 105, а — штриховая линия).

Так как после образования шейки относительная продольная деформация распределяется по длине образца неравномерно, то истинные диаграммы принято строить в таких координатах: относительное сужение Ψ поперечного сечения в шейке — истинное

напряжение S , где $\Psi = \frac{F_0 - F_t}{F_0}$, $S = \frac{P_t}{F_t}$, а P_t и F_t — соответственно усилие и наименьшая площадь поперечного сечения в данный момент испытания.

Кривая истинных напряжений при растяжении малоуглеродистой стали представлена на рис. 105, б. Точке B соответствует начало возникновения остаточной деформации и истинное напряжение, являющееся пределом текучести. Точке E отвечает наибольшая сила $P_{\text{макс}}$, которую выдержал образец во время испытания. По ней определяется величина истинного временного сопротивления S_b . Деформация образца от начала растяжения до момента, отвечающего точке E , равномерна по длине образца. Абсцисса точки E (Ψ_E) представляет наибольшее равномерное сужение. Точка K диаграммы

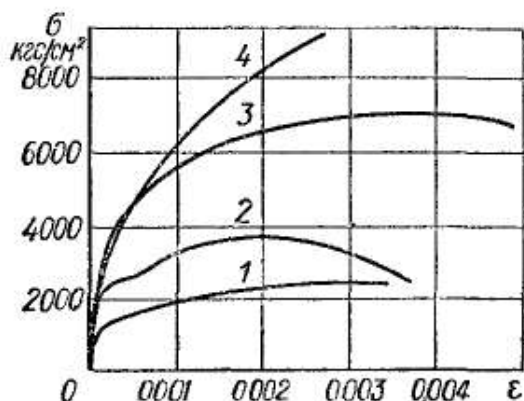


Рис. 106

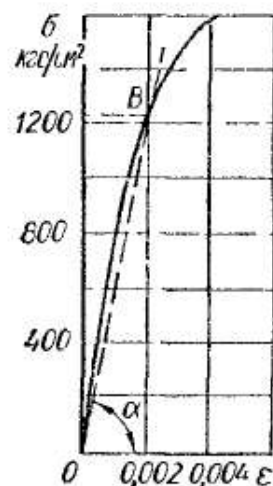


Рис. 107

соответствует моменту разрыва образца. Ее абсцисса представляет собой наибольшее сужение сечения Ψ_k , а ордината — истинное сопротивление разрыву S_k . Как видно из истинной диаграммы, сопротивление пластическому деформированию растет вплоть до момента разрушения.

Для определения механических характеристик на практике используют условные диаграммы растяжения в координатах $\sigma - \epsilon$. Построение диаграмм истинных напряжений значительно сложнее, и служат они главным образом целям теоретических исследований.

Заметим еще, что площадка текучести есть у сравнительно немногих металлов — малоуглеродистой стали, латуни и некоторых отожженных марганцовистых и алюминиевых бронз. Большинству же металлов свойственен постепенный переход в пластическую область. Для сравнения на рис. 106 изображены диаграммы растяжения нескольких металлов: кривая 1 — бронзы ($\sigma_b = 2470$ кгс/см², $\delta = 36\%$); 2 — углеродистой стали ($\sigma_b = 3580$ кгс/см², $\delta = 38\%$); 3 — никелевой стали ($\sigma_b = 7150$ кгс/см², $\delta = 54\%$) и 4 — марганцовистой стали ($\sigma_b = 9160$ кгс/см², $\delta = 30\%$).

Разрыв образцов из хрупких материалов происходит при весьма незначительном удлинении и без образования шейки. На рис. 107 приведена диаграмма растяжения серого чугуна СЧ 28-48, типичная для таких материалов. Диаграмма не имеет выраженного на-

чального прямолинейного участка. Однако, определяя деформации в чугуновых деталях, все же пользуются формулой, выражающей закон Гука. Значение модуля упругости E находят как тангенс угла наклона прямой, проведенной через начальную точку O диаграммы и точку B , соответствующую напряжению, при котором определяют деформацию. Такой модуль называют *секущим*.

§ 30. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ВИДЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Испытания на сжатие, несмотря на их простоту, проводят реже, чем на растяжение. Объясняется это следующим.

Для пластичных материалов модуль упругости E , предел упругости и предел текучести при сжатии примерно те же, что и при растяжении. Напряжение, соответствующее разрушающей силе, при сжатии пластичных материалов получить нельзя, так как образец не разрушается, а превращается в диск и сжимающая сила постоянно возрастает. Характеристики, аналогичные относительному удлинению и относительному сужению при разрыве, при испытании пластичных материалов на сжатие также нельзя получить.

Испытанию на сжатие подвергают главным образом хрупкие материалы, которые, как правило, лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и применяются для изготовления элементов, рабо-

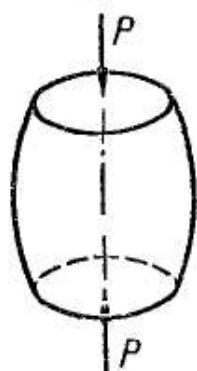


Рис. 108

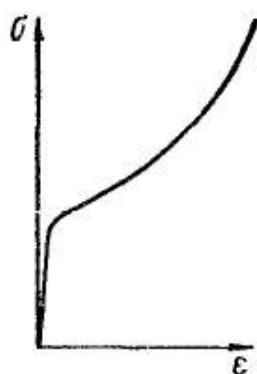


Рис. 109

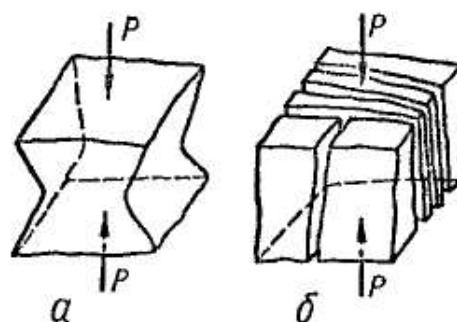


Рис. 110

тающих на сжатие. Для их расчета на прочность необходимо знать характеристики материала, получаемые при испытании на сжатие.

Испытание материалов на сжатие проводят на специальных прессах или универсальных испытательных машинах. Для этого изготовляют образцы в виде цилиндров небольшой высоты (обычно от одного до трех диаметров) или кубиков. Трение, возникающее во время испытания на сжатие между плитами машины и торцами образца, существенно влияет на результаты испытания и на характер разрушения. Цилиндрический образец из малоуглеродистой стали принимает при этом бочкообразную форму (рис. 108). Диаграмма сжатия, полученная испытанием образца из такого материала, изображена на рис. 109. На рис. 110, *a* показан характер разрушения образца из камня под действием сжимающих усилий P при наличии

сил трения между плитами машины и торцами образца. Если уменьшить силы трения, нанеся слой парафина на торцы образца, разрушение произойдет иначе (рис. 110, б): образец даст трещины, параллельные направлению сжимающих сил, и расслоится. Как образец из камня, разрушается бетонный образец.

Разрушение при сжатии чугунного образца происходит вследствие сдвига одной части образца относительно другой (рис. 111). Диаграмма сжатия чугуна показана на рис. 112.



Рис. 111

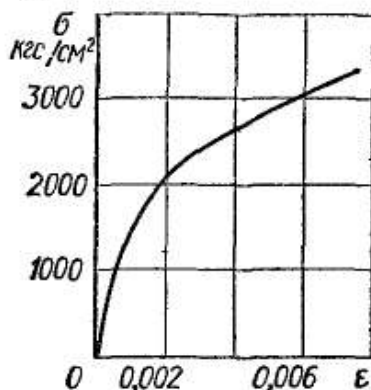


Рис. 112

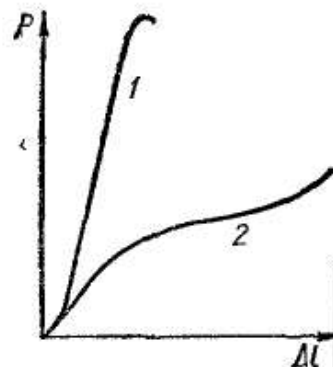


Рис. 113

Древесина, являющаяся анизотропным материалом, при сжатии, как и при растяжении, обладает различной прочностью в зависимости от направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон. На рис. 113 изображены диаграммы сжатия двух кубиков из древесины одной породы. Кривая 1 иллюстрирует сжатие кубика вдоль волокон, а кривая 2 — поперек волокон.

Таблица 10

Материал	$\sigma_{в сж}$ кгс/см ²	Материал	$\sigma_{в сж}$ кгс/см ²
Чугун серый обычно	6000—10 000	Сосна (при 15% влажности)	
внешний		вдоль волокон . .	400
Гранит	1200—2600	поперек волокон . .	50
Кирпич	80—300	Дуб (при 15% влажности)	
Бетон	70—500	вдоль волокон . .	500
Текстолит	1300—2500	поперек волокон . .	150
Гетинакс	1500—1800		

При сжатии вдоль волокон древесина значительно прочнее, чем при сжатии поперек волокон. При сжатии вдоль волокон образец разрушается вследствие сдвига одной части относительно другой, а при сжатии поперек волокон древесина склонна к прессованию и не всегда удается определить момент начала разрушения.

В табл. 10 приведены значения временного сопротивления при сжатии некоторых материалов.

Определение твердости материалов. В некоторых случаях для оценки величины временного сопротивления можно воспользоваться косвенным методом, в частности измерением твердости.

Твердостью материала называют способность оказывать сопротивление механическому проникновению в его поверхность другого, более твердого тела. Для определения твердости чаще всего в поверхность материала с определенной силой вдавливают тело (индентор) в виде шарика, конуса или пирамиды. По размерам полученного отпечатка судят о твердости испытуемого материала.

Наиболее распространенным способом определения твердости является способ Бринелля. Стальной закаленный шарик диаметром D (рис. 114) вдавливается в испытуемый образец (изделие) под действием нагрузки P , приложенной в течение определенного времени. После удаления нагрузки измеряется диаметр отпечатка, оставшегося на поверхности образца. Число твердости по Бринеллю HB определяется делением нагрузки P кгс на площадь поверхности сферического отпечатка, мм², и может быть вычислено по формуле

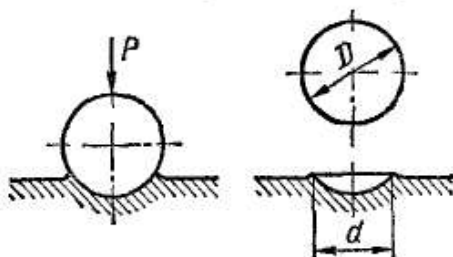


Рис. 114

$$HB = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (4.33)$$

где P — нагрузка, кгс;

D — диаметр шарика, мм;

d — диаметр отпечатка, мм.

Число твердости выражается в кгс/мм², хотя обычно единицу не указывают.

Если твердость измеряют шариком $D = 10$ мм под нагрузкой $P = 3000$ кгс с выдержкой $t = 10$ с, то число твердости по Бринеллю сопровождают обозначением HB , например $HB 300$. При других условиях определения твердости число твердости сопровождают индексами в следующем порядке: диаметр шарика, нагрузка и продолжительность выдержки. Например, $HB 5/250/30 = 200$ означает число твердости по Бринеллю (200) при испытании шариком $D = 5$ мм под нагрузкой $P = 250$ кгс, приложенной в течение $t = 30$ с.

Если твердость материала $HB \geq 400$ кгс/мм², то определить ее, вдавливая шарик, нельзя в связи с заметной деформацией последнего. В этих случаях вместо шарика вдавливают алмазный конус (по Роквеллу) или алмазную пирамиду (по Виккерсу). Применяют и другие способы. Например, твердость определяют по высоте отскока бойка, падающего с определенной высоты на поверхность испытуемого материала; по периоду качаний маятника, упирающегося в поверхность материала.

Твердость, полученная различными методами, при помощи специальных таблиц может быть переведена в твердость по Бринеллю.

Определение твердости — весьма распространенное испытание, что объясняется его чрезвычайной простотой. Твердость можно определять и непосредственно в условиях производства на готовых изделиях, так как остающиеся отпечатки во многих случаях не порят изделия.

Опытным путем установлено, что для некоторых материалов существует определенная связь между числом твердости по Бринеллю и временным сопротивлением при разрыве. Например, для малоуглеродистой стали $\sigma_b \approx 0,36HB$; для стального литья $\sigma_b = (0,3 \div 0,4) HB$, для серого чугуна $\sigma_b = \frac{HB - 40}{6}$.

§ 31. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Различные виды механических испытаний металлов дают лишь внешнее представление о характере упругой и пластической деформации. Приведем краткое и упрощенное изложение современных представлений о процессах, происходящих в металлах при таких деформациях.

Как известно, металлы имеют кристаллическую структуру. При затвердевании металла в расплаве одновременно возникает много центров кристаллизации, вследствие чего рост каждого кристалла стеснен соседними. В результате технический металл состоит из большого числа кристаллов неправильной огранки, называемых *кристаллитами* или *кристаллическими зернами*. Относительно друг друга кристаллические зерна ориентированы самым различным образом. Вместе с тем в каждом из них атомы расположены совершенно определенно и образуют так называемую *кристаллическую решетку*, состоящую из повторяющихся одинаковых ячеек.

Атомы электрически нейтральны, так как отрицательные заряды электронов, вращающихся вокруг ядра, нейтрализованы его положительным зарядом. В металлах при достаточном сближении атомов возникает возможность отрыва валентного электрона одного атома положительно заряженным ядром другого, у этого — следующим и т. д. Таким образом, часть валентных электронов начинает перемещаться вокруг ядер всех взаимодействующих атомов. Эти электроны называются *свободными*, поскольку не связаны с определенными атомами. Металл можно представить себе как постройку из нейтральных атомов и ионов, находящихся в атмосфере электронного газа, который как бы стягивает ионы. Связь между атомами, осуществляемая электростатическими силами в результате взаимодействия положительных ионов и электронного газа, называется *металлической*. Поскольку эти атомы по своей природе одинаковы, то расположиться они должны на таких расстояниях друг от друга и в таких точках пространства, где действующие на них силы притяжения и отталкивания были бы равны. В результате происходит закономерное расположение атомов, наблюдаемое в кристаллической решетке.

Кристаллическую решетку образуют воображаемые линии и плоскости, проходящие через точки пространства, в которых располагаются ионы металла. Более правильно эти точки определить как центры наиболее вероятного расположения ионов, так как те не остаются неподвижными, а колеблются около этих центров. Последние обычно называют *узлами кристаллической решетки*. Наиболее распространенными типами таких решеток металлов являются кубическая объемноцентрированная (рис. 115, а), кубическая гранецентрированная (рис. 115, б) и гексагональная плотноупакованная (рис. 115, в). В них атомы находятся в устойчивом положении равновесия и обладают минимальной потенциальной энергией.

При деформации металла расстояния между атомами под действием внешних сил изменяются по определенным направлениям, линии и плоскости, проходящие через атомы, искривляются, кристаллическая решетка искажается. Так как при этом равнодействующее сил притяжения и отталкивания между атомами уже не равно нулю, то в решетке будут действовать внутренние силы, стремящиеся вернуть атомы в положение равновесия. Зависимость между малыми смещениями атомов и силами взаимодействия с известной степенью приближения можно считать линейной. Суммарно это проявляется в линейной зависимости между смещениями точек тела и внешними силами, выражаемой законом Гука.

При устранении внешних сил атомы вновь занимают свои прежние места в кристаллической решетке, вследствие чего происходит упругое восстановление формы металлического тела. Так объясняется упругая деформация.

Если внешние силы увеличиваются, то возрастают и внутренние. Тогда в зернах металла происходит смещение одной части относительно другой, называемое *скольжением*. Исследованиями установлено, что оно происходит по плоскостям и направлениям, вдоль которых атомы располагаются наиболее плотно. В каждой из кристаллических решеток, изображенных на рис. 115, одна такая плоскость заштрихована, а направления скольжений указаны стрелками. Важной характеристикой этих плоскостей и направлений является величина сдвигающего напряжения τ , вызывающего скольжение.

Рассмотрим механизм образования пластической деформации в пределах одного кристалла с совершенной кристаллической решеткой, упрощенная модель которой изображена на рис. 116, а.

Пусть в такой решетке верхний слой атомов смещается относительно нижнего по плоскости $A - A$. Если предположить, что в

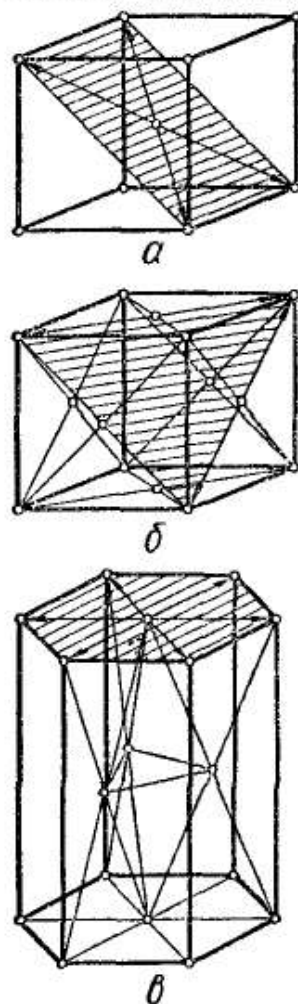


Рис. 115

процессе сдвига кристаллическая решетка не искажается, т. е. в частях ее выше и ниже плоскости $A-A$ расстояния между атомами остаются неизменными, то можно прийти к выводу, что все атомы верхнего слоя смещаются относительно нижнего одновременно и на одну и ту же величину.

Пока взаимное смещение u (рис. 116, б), возрастая, остается меньше половины расстояния между атомами ($\frac{a}{2}$), силы взаимо-

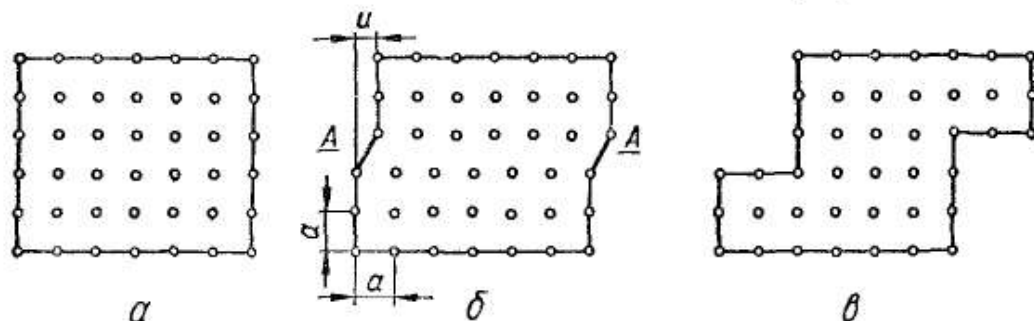
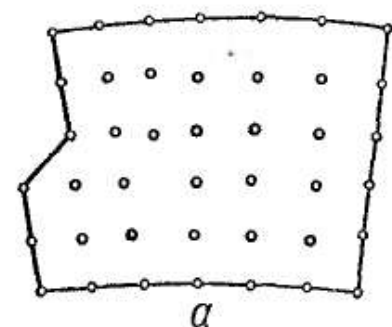


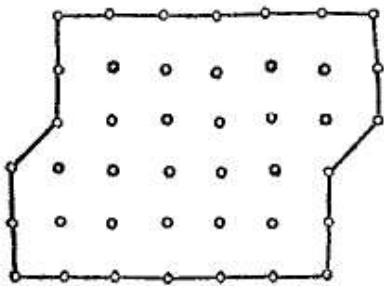
Рис. 116

действия между ними препятствуют сдвигу. Как только это смещение превысит расстояние $\frac{a}{2}$, силы взаимодействия начинают способствовать смещению решетки в новое устойчивое положение равновесия.

Пластическая деформация произойдет в результате смещения части решетки на расстояния, кратные a (рис. 116, в). Наименьшая пластическая деформация соответствует смещению на a . В результате таких смещений каждый предыдущий атом занимает место последующего, все атомы оказываются на местах, присущих данной кристаллической решетке. Кристалл сохраняет свои свойства, меняя лишь конфигурацию.



а



б

Рис. 117

Точные теоретические расчеты, основанные на подобной картине деформации, позволяют определить максимальные касательные напряжения, которые должны возникнуть в кристалле, чтобы появилась пластическая деформация. В действительности она начинает образовываться при напряжениях, в сотни раз меньших, чем

дает теория. Такое расхождение между теоретическим и действительным сопротивлением сдвигу в кристаллах объясняется тем, что переход атомов из одного положения в другое совершается не одновременно, а во времени, подобно волне, с местными искажениями решетки, называемыми *дислокациями*.

На рис. 117, а показана так называемая краевая дислокация. Верхняя часть решетки сдвинута относительно нижней на одно

межатомное расстояние, причем зафиксировано положение, когда сдвиг охватил еще не всю плоскость скольжения. В результате появилось искажение решетки: одна вертикальная атомная плоскость верхней половины не имеет продолжения в нижней.

Отметим, что реальные кристаллы либо с самого своего возникновения содержат дислокации, либо имеют какие-то иные несовершенства и в них дислокации образуются уже при низких напряжениях сдвига. Поэтому-то при низких напряжениях дислокации движутся через кристаллическую решетку, отчего и происходит пластическая деформация кристалла. После того как дислокация выйдет наружу кристалла, форма его изменится, но структура останется прежней (рис. 117, б). Возникают новые дислокации и движутся через кристалл. Суммарно результат этих скольжений в зернах проявляется в виде пластической деформации образца.

Перемещение дислокации через кристалл можно уподобить движению складки по ковра. Когда складка пройдет через весь ковер, он будет несколько сдвинут. Сила, необходимая для перемещения складки, существенно меньше той, которая нужна, чтобы сдвинуть весь ковер целиком.

Так теория дислокаций объясняет механизм образования пластических деформаций и расхождение между теоретической и действительной прочностью металлов.

При массовой пластической деформации дислокации, движущиеся в кристаллической решетке по пересекающимся плоскостям, образуют неподвижные пороги, поэтому перемещение дислокаций тормозится. Суммарно это проявляется в виде упрочнения металла после определенной пластической деформации.

Появление сдвигов в кристаллической решетке, приводящих к пластической деформации, не исключает искажений кристаллической решетки, соответствующих упругим деформациям. Это подтверждается тем, что при любой стадии деформации образца, вплоть до разрыва, полная деформация состоит из упругой и пластической.

Повышение сопротивления движению дислокаций приводит к увеличению прочности металла. Этому достигают введением в металлы специальных примесей, термической обработкой, наклепом и т. п. В настоящее время сделаны первые шаги по созданию металлов, не имеющих дефектов кристаллической решетки. Получены бездислокационные нитевидные металлические кристаллы («усы»), обладающие очень высокой прочностью, приближающейся к теоретической.

§ 32. ПОНЯТИЕ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что равномерное распределение напряжений по площади поперечного сечения растянутого или сжатого стержня, которое дает формула (4.6), будет только в тех случаях, когда по длине стержня поперечные сечения постоянны или изменяются весьма плавно. Резкие

изменения площади поперечного сечения вследствие наличия поперечных отверстий, выкружек, канавок и надрезов приводят к неравномерному распределению напряжений, вызывают *концентрацию напряжений*. На рис. 118, а показан график распределения растягивающих напряжений в сечении полосы, ослабленном круглым отверстием, а на рис. 118, б — в сечении, ослабленном полукруглыми выкружками.

Отметим, что изображенная здесь и в дальнейшем картина концентрации напряжений несколько упрощена, но в основном верно отражает сущность происходящих явлений. Точные исследования

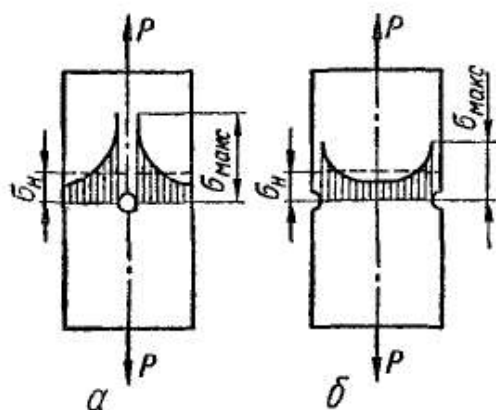


Рис. 118

показывают, что напряженное состояние в местах концентрации имеет более сложный характер.

Факторы, вызывающие концентрацию напряжений (отверстие, надрез и т. п.), называют *концентраторами напряжений*. Максимального значения напряжения достигают в непосредственной близости от него (например, у края отверстия или выкружки) и ограничиваются весьма небольшой частью площади поперечного сечения, т. е. имеют местный характер.

Поэтому напряжения у мест концентрации и называют *местными*.

Остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность в случае концентрации напряжений.

Номинальным напряжением называют напряжение, вычисленное на основе предположений об отсутствии концентрации напряжений.

В рассмотренных примерах (рис. 118, а и б) номинальное напряжение вычисляется как среднее напряжение в ослабленном сечении пластины:

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{мин}}}, \quad (4.34)$$

где N — продольная сила в ослабленном сечении;

$F_{\text{мин}}$ — площадь ослабленного сечения, называемая *площадью нетто*.

Иногда под номинальным напряжением понимают напряжение, вычисленное по площади F сплошного поперечного сечения без учета ее уменьшения за счет отверстия. Эту площадь называют *площадью поперечного сечения брутто*. Тогда

$$\sigma_n = \frac{N}{F}. \quad (4.35)$$

В случае весьма малого отверстия в полосе номинальные напряжения, вычисленные по формулам (4.34) и (4.35), будут практически

одинаковы. В других случаях в величине напряжений может быть существенная разница. Поэтому, используя понятие номинального напряжения, необходимо установить, на базе какого поперечного сечения оно вычислено.

Теоретический и эффективный коэффициенты концентрации напряжений. Количественной характеристикой концентрации напряжений является коэффициент концентрации α , равный отношению наибольшего местного напряжения $\sigma_{\text{макс}}$ к номинальному напряжению σ_n :

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_n} \quad (4.36)$$

Чаще всего коэффициенты концентрации напряжений определяют методами теории упругости, основанными на предположении об однородности, изотропности и совершенной упругости материала. Такие коэффициенты называются *теоретическими коэффициентами концентрации*.

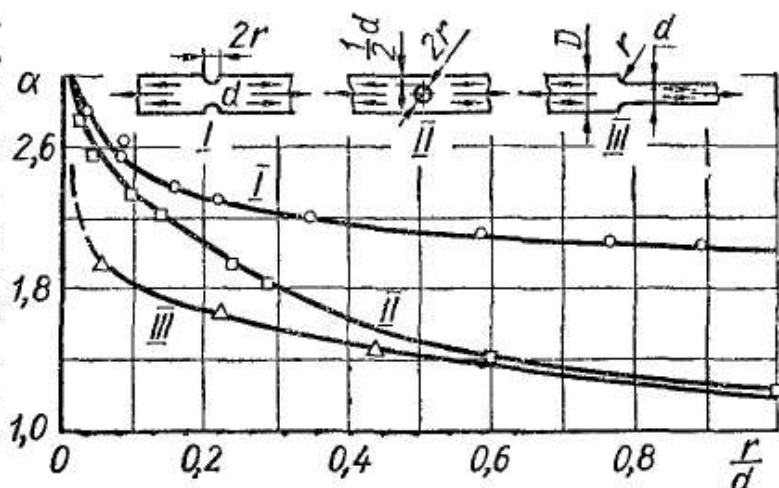


Рис. 119

Величина местных напряжений зависит от вида и размеров концентратора. Например, чем меньше радиус отверстия или выкружки в полосе, тем больше максимальные напряжения отличаются от номинальных. В случае весьма малого радиуса отверстия в полосе (рис. 118, а) у краев отверстия наибольшее напряжение равно трем номинальным ($\alpha = 3$), а у краев полукруглых вырезов (рис. 118, б) — примерно двум номинальным ($\alpha = 2$). Надрезы с острыми входящими углами дают еще большие коэффициенты концентрации напряжений у вершин углов. Для некоторых распространенных концентраторов напряжений в полосе прямоугольного поперечного сечения значения теоретических коэффициентов концентрации приведены на графике рис. 119, а в стержнях круглого поперечного сечения — в табл. 11. Более подробные данные о теоретических коэффициентах концентрации напряжений приводятся в справочниках по расчету на прочность и в специальных курсах.

Определив расчетом номинальное напряжение и зная коэффициент концентрации напряжений для данного концентратора, находят максимальное напряжение в месте концентрации:

$$\sigma_{\text{макс}} = \alpha \sigma_n \quad (4.37)$$

С концентрацией напряжений приходится считаться при конструировании и расчете на прочность деталей машин. Следует по

возможности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений, около которых возникает концентрация напряжений, способствующая в известных условиях преждевременному разрушению материала. Нужно также стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закаленных сталей. Даже мелкие следы от шлифовального круга могут снизить предел прочности твердозакаленной стали при растяжении на 10—20%.

Теоретические коэффициенты концентрации напряжений зависят от геометрии концентратора и не отражают свойств реальных материалов. Совместный учет геометрии концентратора и свойств материалов осуществляется так называемыми *эффективными (действительными) коэффициентами концентрации напряжений*, которые определяют, испытывая образцы из данного материала до разрушения. Они представляют собой отношения предельной нагрузки

Таблица 11

Вид концентратора напряжения	α
Полукруглая выточка при отношении радиуса к диаметру стержня	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
Галтель при отношении радиуса галтели к диаметру стержня	
0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10
Переход под прямым углом	2,0
Острая V-образная выточка	3,0
Отверстие при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня 0,1—0,33	2,0
Риски от резца на поверхности изделия	1,2—1,4

образца без концентратора напряжений к предельной нагрузке такого же образца с концентратором напряжений. При статической нагрузке

$$k = \frac{P_I}{P_{II}}, \quad (4.38)$$

где P_I — разрушающая нагрузка образца без концентратора напряжений;

P_{II} — разрушающая нагрузка образца с концентратором напряжений.

На прочность пластичных и хрупких материалов концентрация напряжений влияет по-разному. Существенное значение при этом имеет также характер нагрузки. Если материал пластичный (диаграмма напряжений имеет площадку текучести значительной протяженности) и нагрузка статическая, то при увеличении последней

рост наибольших местных напряжений приостанавливается, как только они достигнут предела текучести. В остальной части поперечного сечения напряжения будут еще возрастать до величины предела текучести σ_T , при этом зона пластичности у концентратора будет увеличиваться (рис. 120). Таким образом, пластичность способствует выравниванию напряжений. На этом основании принято считать, что при статической нагрузке пластичные материалы мало чувствительны к концентрации напряжений. Эффективный коэффициент концентрации для таких материалов близок к единице. При ударных и повторно-переменных нагрузках, когда деформации и напряжения быстро изменяются во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает и вредное влияние концентрации напряжений сохраняется. Поэтому в расчетах на прочность учитывать концентрацию напряжений необходимо.

Для однородного хрупкого материала неравномерность распределения напряжений из-за концентрации сохраняется на всех стадиях нагружения и при статических нагрузках. В местах действия максимальных напряжений начинается разрушение материала (путем образования трещин). Особенно чувствительна к концентраторам закаленная сталь и тем больше, чем выше ее характеристики прочности. Эффективный коэффициент концентрации напряжений для хрупких однородных материалов весьма близок к теоретическому. Следовательно, для хрупкого материала в расчетах на прочность при статических нагрузках можно пользоваться теоретическими коэффициентами концентрации напряжений.

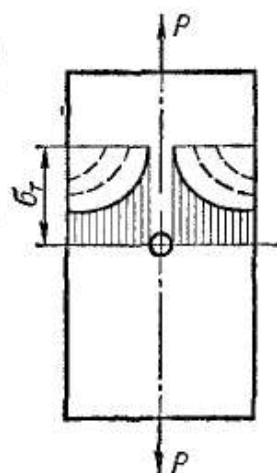


Рис. 120

§ 33. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Механические характеристики материалов зависят от многих факторов. На свойства металлов и сплавов существенное влияние оказывают химический состав, технология их получения, термическая и механическая обработки, условия эксплуатации — температура, среда, характер нагрузки и др.

В последние годы получили развитие новые виды техники: реактивная авиация, ракетная техника, атомные реакторы и др. Применяемые в них материалы подвергаются действию высоких температур, высоких скоростей нагружения, агрессивных жидких и газообразных сред, радиоактивных, особенно нейтронных, проникающих облучений. Для работы в этих условиях создают новые специальные сплавы и композиционные материалы.

Ниже рассматривается влияние некоторых факторов на механические характеристики наиболее важных в машиностроении материалов — сталей, чугуна, алюминия, различных сплавов.

Влияние скорости деформации. При увеличении скорости нарастания нагрузки, и следовательно скорости роста напряжения и деформации, все материалы, находящиеся в пластическом состоянии, обнаруживают общую тенденцию к увеличению сопротивляемости деформированию. Чем выше скорость деформирования, тем выше предел текучести и временное сопротивление. Особенно сильно зависят от скорости нагружения механические свойства пластмасс и других органических материалов. У металлов влияние скорости нагружения заметно проявляется лишь при значительной разнице в скоростях.

Сравнение результатов статических и динамических испытаний малоуглеродистых сталей на растяжение при нормальной температуре (рис. 121) показывает следующее:

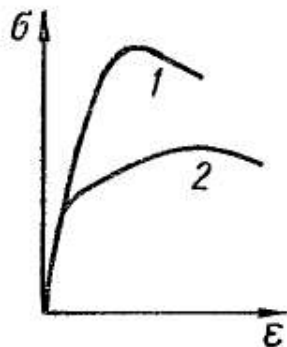


Рис. 121

- 1) кривая 1 динамического растяжения лежит выше кривой 2 статического растяжения;
- 2) максимум диаграммы для динамической нагрузки смещается в сторону начала диаграммы;
- 3) временное сопротивление при динамической нагрузке повышается, но меньше, чем предел текучести;
- 4) модуль упругости при динамической нагрузке практически не изменяется.

Влияние технологических факторов. Конструкционные стали, из которых изготовляют элементы конструкций, можно получить отливкой или прокаткой, ковкой, штамповкой и волочением. Механические свойства стали одного и того же состава весьма сильно изменяются в зависимости от способа ее получения и обработки.

При отливке заготовок возможно образование различных внутренних дефектов в виде пустот, раковин и включений, снижающих прочность изготовленных из заготовок деталей. В связи с этим требуется тщательный контроль качества таких деталей рентгеновским, ультразвуковым или каким-либо другим способом.

Прокатка делает сталь анизотропной. Прокатанная сталь имеет характерную структуру, у которой зерна, вытянутые в направлении прокатки, образуют своего рода волокна. Механические свойства стали в направлении прокатки существенно отличаются от таковых в направлении, перпендикулярном к ней. Образцы, вырезанные таким образом, что их ось совпадает с направлением прокатки, оказываются более прочными, чем те из них, ось которых перпендикулярна к направлению прокатки.

Предварительная вытяжка в холодном состоянии за предел текучести (наклеп) очень сильно повышает предел текучести и прочности, но снижает остаточное удлинение после разрыва. Материал становится более упругим и прочным, но менее пластичным.

Волочение в холодном состоянии, представляющее собой вытяжку с обжатием, еще сильнее влияет на механические свойства стали,

Стальная проволока и стальные ленты, полученные волочением, весьма прочны.

Токарная обработка, обработка поверхности роликами, обдувка дробью, хромирование, никелирование, алитирование, азотирование и другие виды поверхностной обработки могут оказать существенное влияние на прочность деталей, особенно работающих при переменных напряжениях.

Влияние термической обработки. Закалка стали значительно повышает ее твердость, предел текучести и предел прочности, но сильно снижает пластичность. Модуль упругости стали закалка практически не меняет. Если нужна высокая поверхностная твердость

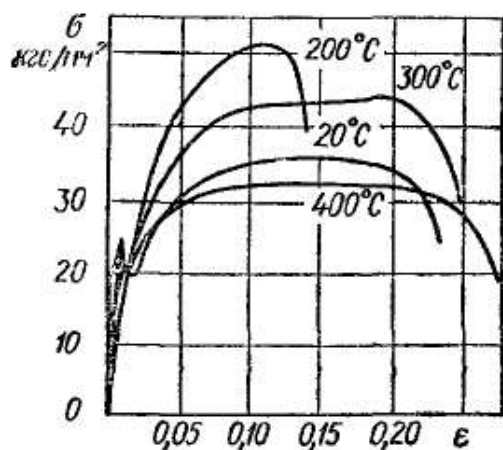


Рис. 122

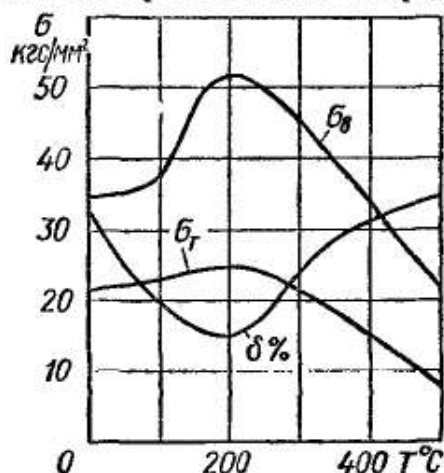


Рис. 123

с сохранением других свойств стали, используют поверхностную закалку токами высокой частоты. Для малоуглеродистых сталей с этой целью применяют цементацию — увеличение в поверхностном слое углерода — с последующей закалкой. При этом закаливается только науглероженный поверхностный слой, а основная часть материала сохраняет свойства малоуглеродистой стали.

Для устранения наклепа используют отжиг. Чтобы выровнять и улучшить структуру, а также улучшить механические свойства стали, применяют нормализацию. Подробно эти виды термической обработки рассматриваются в металловедении.

Влияние температуры. Многие детали современных машин (например, паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и др.) работают при высоких температурах, достигающих 800—1000°C. Испытания показали, что *все механические характеристики металлов существенно изменяются в зависимости от температуры.*

На рис. 122 приведены диаграммы напряжения углеродистой стали при различных температурах, а на рис. 123 — графики зависимости предела текучести, временного сопротивления и относительного удлинения при разрыве от температуры. В интервале температур 150—250°C временное сопротивление достигает наибольшего значения, а относительное удлинение после разрыва — наименьшего; сталь, как говорят, становится синеломкой. При более высоких температурах прочность углеродистой стали быстро падает, поэтому выше 350—400°C такую сталь не применяют.

При повышении температуры также существенно уменьшается модуль упругости E (рис. 124), а коэффициент Пуассона несколько возрастает. Так, при возрастании температуры от комнатной до 500°C коэффициент Пуассона увеличивается с $0,28$ до $0,33$.

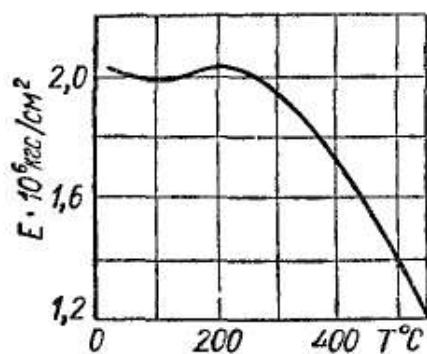


Рис. 124

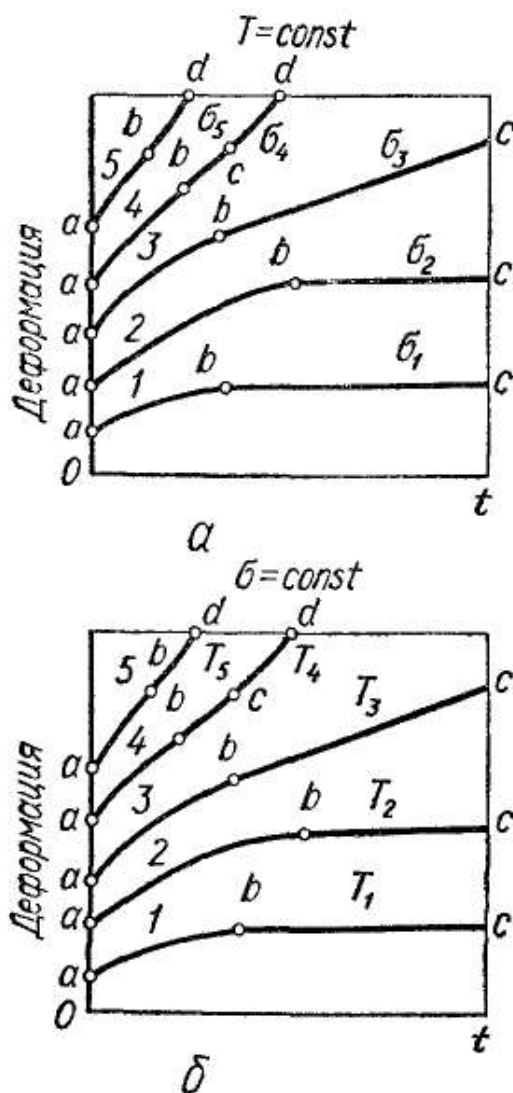


Рис. 125

$< T_4 < T_5$. Как видно из сравнения графиков, увеличение напряжения при постоянной температуре и повышение температуры при постоянном напряжении оказывают одинаковое влияние на ползучесть материала, а именно — скорость ползучести увеличивается.

Отдельные участки кривых рис. 125 характеризуют различные скорости нарастания деформации. Рассмотрим, например, кривую 4.

Углеродистые стали при высоких температурах сильно окисляются, на их поверхности образуется окалина. В связи с этим применяют специальные жаростойкие и жаропрочные стали, содержащие различные легирующие добавки. *Жаростойкостью* называется свойство материала противостоять при высоких температурах химическому разрушению поверхности, а *жаропрочностью* — способность сохранять при высоких температурах механические свойства. В настоящее время созданы специальные сплавы, а также металлокерамические материалы, надежно работающие при температурах до 1000°C .

Ползучесть. При высоких температурах существенное значение имеет явление *ползучести* материалов (крип), заключающееся в росте пластической деформации с течением времени при постоянном напряжении, не вызывающем пластических деформаций при кратковременном действии нагрузки. В зависимости от величины напряжения и температуры деформация, происходящая в результате ползучести, может либо прекратиться, либо продолжаться до разрушения материала.

На рис. 125, а приведены кривые ползучести стали при постоянной температуре для различных напряжений $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$, а на рис. 125, б — кривые ползучести при постоянном напряжении, но различных температурах, причем $T_1 < T_2 < T_3 <$

Вертикальный отрезок Oa изображает удлинение, полученное тотчас после нагружения. Участок ab — это участок неустановившейся ползучести, так как скорость ее здесь со временем убывает. Прямолинейный участок bc называется участком установившейся ползучести, характеризующейся ее постоянной скоростью. Участок cd характеризует возрастание скорости ползучести, заканчивающееся разрушением образца (точка d).

Остальные кривые ползучести отличаются от кривой 4 тем, что у них отсутствует тот или иной участок. Так, кривые 1, 2 и 3 изображают случаи, когда ползучесть не вызывает разрушения (на них отсутствует участок cd). Кривая 5 не имеет участка установившейся ползучести (точки b и c слились). Эта кривая соответствует случаю, когда период неустановившейся ползучести сменяется сразу периодом с возрастающей ее скоростью, который заканчивается разрушением. Граница между этими двумя периодами определяется точкой перегиба b .

Пределом ползучести называется наибольшее напряжение, при котором скорость или деформация ползучести при данной температуре за определенный промежуток времени не превышает установленной величины (например, скорости 0,0001%/ч или деформации 1% за 10000 ч).

Если предел ползучести определяют по величине деформации, то обозначают его буквой σ с тремя числовыми индексами: двумя нижними и одним верхним. Первый нижний индекс отражает заданное удлинение (суммарное или остаточное), %; второй нижний индекс — заданную продолжительность времени испытания, ч; верхний индекс — температуру, °С. Например, запись $\sigma_{0,2/100}^{700}$ означает предел ползучести при допуске на деформацию 0,2% за 100 ч испытания при температуре 700°С. При этом необходимо дополнительно указать, по суммарной или остаточной деформации определялся предел ползучести.

В случае определения предела ползучести по скорости ползучести его следует обозначать буквой σ с двумя числовыми индексами: одним верхним и одним нижним. Нижний индекс отражает заданную скорость ползучести, %/ч; верхний — температуру испытания, °С. Например, $\sigma_{1 \cdot 10^{-5}}^{600}$ — это предел ползучести при скорости ее 1×10^{-5} %/ч при температуре 600°С. При этом необходимо дополнительно указать время испытания, за которое была достигнута заданная скорость ползучести.

Детали, работающие при высоких температурах, рассчитывают на ползучесть специальными методами с использованием экспериментальных данных, характеризующих ползучесть материала. Целью таких расчетов является определение пределов ползучести.

По результатам экспериментального определения скорости ползучести V_0 при растяжении образцов строят графики в логарифмических координатах $\lg \sigma$ — $\lg V_0$. Экспериментальные точки хорошо группируются около некоторой прямой (рис. 126, а).

Отметим, что у некоторых материалов (свинца, бетона, высокополимерных материалов и др.) ползучесть наблюдается и при нормальной температуре.

Длительная прочность. В случае высокой температуры и длительного воздействия нагрузки наблюдается разрушение материала при напряжении, величина которого меньше временного сопротивления материала при данной температуре. В связи с этим возникает необходимость определять длительную прочность материалов.

Пределом длительной прочности называется напряжение, вызывающее разрыв образца после заданного срока непрерывного дей-

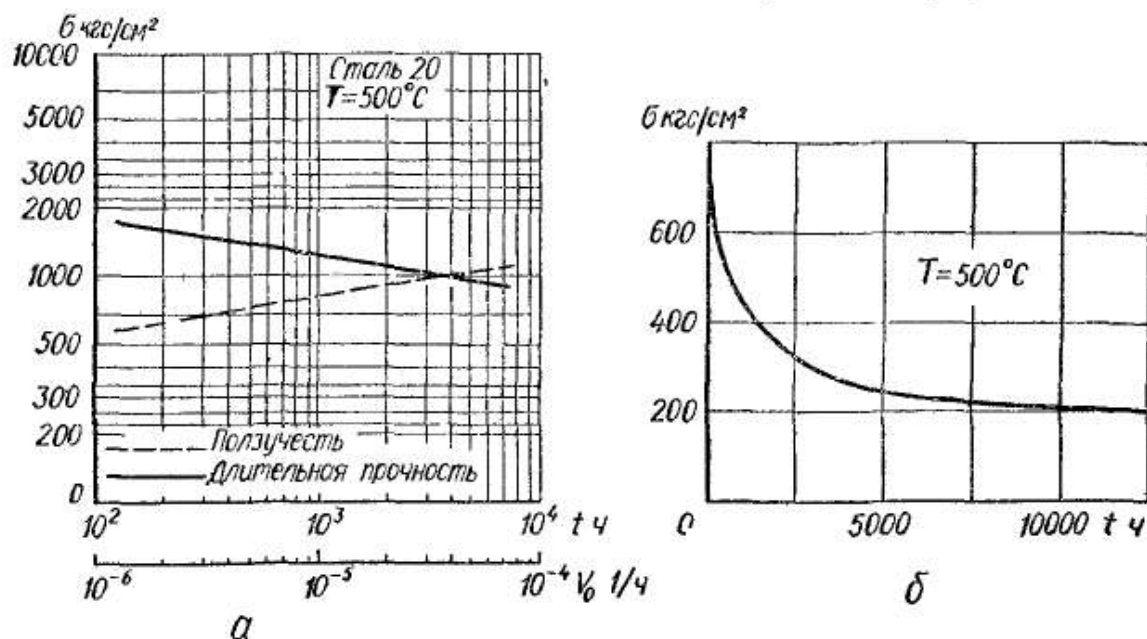


Рис. 126

ствия этого напряжения при определенной температуре. Обозначается предел длительной прочности буквой σ с двумя числовыми индексами. Верхний индекс дает температуру испытания, °С, нижний — заданную продолжительность испытания до разрушения, ч. Последнюю можно обозначать числом часов или цифрой 10 с показателем степени. Например, $\sigma_{10^3}^{700}$ или σ_{1000}^{700} — предел длительной прочности за 1000 ч испытания при температуре 700°С.

Испытания на длительную прочность заключаются в том, что образцы подвергают различным напряжениям при определенной температуре и узнают время до их разрыва. Результат представляют в виде графика (рис. 126, б). Имея кривую длительной прочности материала, можно определить разрушающее напряжение по заданной продолжительности службы детали при данной температуре. Наоборот, по заданному напряжению можно определить время до разрушения. Например, деталь, изготовленная из материала, для которого кривая длительной прочности изображена на рис. 126, б, при напряжении 300 кгс/см² и температуре 500°С разрушится через 2550 ч.

Результаты экспериментального определения длительной прочности удобно представлять в логарифмических координатах $\lg \sigma$ —

$\lg t$, где они достаточно хорошо аппроксимируются прямыми (рис. 126, а).

Отметим, что чем меньше разрушающее напряжение, а значит, больше время до разрыва, тем меньше относительное удлинение при разрыве, т. е. материал становится более хрупким. Это явление называется *охрупчиванием*. Для ряда материалов (например, для

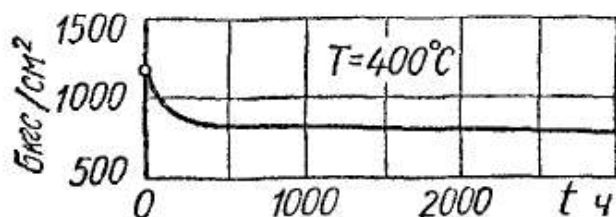


Рис. 127

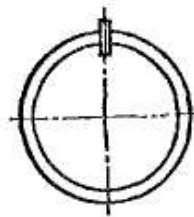


Рис. 128

высокополимеров) указанный эффект проявляется и при комнатной температуре.

Релаксацией напряжений называется уменьшение их с течением времени вследствие ползучести в нагруженной детали при неизменной ее полной деформации. У большинства металлов релаксация заметна лишь при высоких температурах (рис. 127). Для иллюстрации этого явления приведем следующие примеры.

Между разведенными концами разрезанного стального кольца вставим пластинку (рис. 128). Вследствие деформации кольца в нем возникнут напряжения и концы кольца, стремясь сблизиться, с большой силой сожмут пластинку. Если это соединение выдержать некоторое время при высокой температуре, то в кольце произойдет релаксация напряжений, сила зажатия пластинки уменьшится, и ее можно будет легко вынуть.

Известно, что начальная затяжка болтов, работающих при высокой температуре, с течением времени ослабевает и это вызывает необходимость их подтягивать.

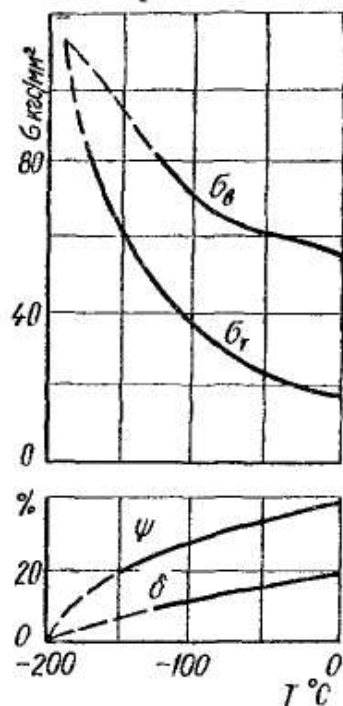


Рис. 129

Влияние низких температур. На механические свойства некоторых материалов существенно влияют низкие температуры. Проявляется это в том, что материалы, пластичные при нормальной температуре, становятся хрупкими при низких температурах. Такие материалы называют *хладноломкими*.

Хладноломкость характерна для металлов, имеющих кристаллическую решетку в виде объемноцентрированного куба или гексагональную. К числу их относится большинство черных металлов, в частности стали, а также цинковые сплавы. Проявляется хладноломкость как при статическом действии нагрузки, так и, в особенности, при динамическом. В качестве примера на рис. 129 приведем

графики изменения предела текучести, временного сопротивления, относительного удлинения и сужения при статических испытаниях углеродистой стали в области низких температур.

Металлы, кристаллизующиеся в системе куба с центрированными гранями (медь, алюминий, никель, серебро, золото и др.), не обнаруживают хладноломкости ни при каком понижении температуры. Например, алюминий при температуре жидкого азота (-196°C) увеличивает прочность приблизительно в 2 раза, увеличивая одновременно относительное удлинение в 4 раза. Аналогично ведут себя медь и никель. Многие сплавы алюминия, меди, а также некоторые стали не обладают свойством хладноломкости.

§ 34. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Как уже указывалось, детали машин и других конструкций должны удовлетворять условию прочности и жесткости. Размеры деталей необходимо подбирать такими, чтобы под действием приложенных нагрузок они не разрушались и не получали деформаций, превышающих допустимые. В большинстве машиностроительных деталей не допускаются, как правило, остаточные деформации.

Заметные остаточные деформации появляются в пластичных материалах, когда напряжения достигают предела текучести. Разрушение наступает, когда напряжения достигают величины временного сопротивления; при этом деформации хрупкого материала могут быть незначительными. Итак, для деталей, изготовленных из пластичного материала, опасным напряжением можно считать предел текучести, а для деталей из хрупкого материала — временное сопротивление.

Естественно, что эти напряжения не могут быть приняты в качестве допускаемых. Их следует уменьшить настолько, чтобы в эксплуатационных условиях действующие напряжения всегда были меньше предела упругости. Таким образом, допускаемое напряжение может быть определено по формуле

$$\boxed{[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}}, \quad (4.39)$$

где σ^0 — опасное напряжение (σ_T или σ_B);

n — коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз допускаемое напряжение меньше опасного.

Выбор величины коэффициента запаса прочности зависит от состояния материала (хрупкое или пластичное), характера приложения нагрузки (статическая, динамическая или повторно-переменная) и некоторых общих факторов, имеющих место в той или иной степени во всех случаях. К таким факторам относятся:

а) неоднородность материала, а следовательно, отличие его механических характеристик в малых образцах и в деталях;

- б) неточность задания величин внешних нагрузок;
- в) приближенность расчетных схем и некоторая приближенность расчетных формул.

Указанные факторы и учитывают коэффициентом запаса прочности n , который иногда называют основным.

Величина запаса прочности зависит от того, какое напряжение считать опасным.

Для пластичных материалов в случае статической нагрузки опасным напряжением, как уже сказано, следует считать предел текучести, т. е. $\sigma^0 = \sigma_T$, а $n = n_T$. Тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (4.40)$$

На основании данных длительной практики конструирования, расчета и эксплуатации машин и сооружений величина запаса прочности n_T для сталей при статической нагрузке принимается равной 1,4—1,6. Очевидно, меньшие значения n_T следует брать в тех случаях, когда материал более однороден, лучше изучены его свойства, полнее учтены нагрузки, точнее метод расчета и расчетные схемы.

Для хрупких материалов при статических нагрузках опасным напряжением является временное сопротивление и тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (4.41)$$

Принимают, что запас прочности $n_B = 2,5 \div 3,0$.

Допускаемые напряжения $[\sigma]$, получаемые по формулам (4.40) и (4.41), называют обычно *основными допускаемыми напряжениями*.

В связи с тем что временное сопротивление определить проще, чем предел текучести, и, к тому же, в производственных условиях последний не всегда можно получить, иногда и для пластичных материалов при определении допускаемых напряжений исходят из временного сопротивления, пользуясь формулой

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (4.42)$$

В этом случае, учитывая, что временное сопротивление превышает предел текучести на 50—70%, запас прочности n_B для пластичных материалов принимают равным 2,4—2,6. Эту величину для пластичных материалов берут несколько меньшей, чем для хрупких, поскольку пластичные материалы, как правило, более однородны по своим физическим и механическим свойствам.

Иногда допускаемые напряжения на растяжение обозначают через $[\sigma_+]$, а на сжатие — через $[\sigma_-]$. Хрупкие материалы лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и для них $[\sigma_-] > [\sigma_+]$. Для сталей и большинства других пластичных материалов можно принять $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ и обозначать допускаемые напряжения в таком случае через $[\sigma]$ без индекса.

Выбор величины допускаемых напряжений весьма важен, так как от правильного установления их значения зависит прочность

и безопасность проектируемой конструкции, а также экономическая сторона расчета — количество затрачиваемого материала. Поэтому установлением величины допускаемых напряжений для основных марок материалов, применяемых в машиностроении и строительном деле, занимаются государственные нормирующие органы. Они издаются соответствующие нормы, которыми и следует руководствоваться в обычных условиях проектирования. По мере улучшения качества материалов и уточнения методов расчета допускаемые напряжения повышаются. Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений, принятых в настоящее время для наиболее распространенных материалов, приведены в приложении 10. В тех же случаях, когда нет данных о допускаемых напряжениях для того или иного материала, вопрос об их величине приходится решать на основании изложенных выше соображений и рекомендаций.

Остановимся кратко на составлении условий прочности в наиболее часто встречающихся случаях.

В пластичных материалах при статической нагрузке концентрация напряжений незначительно влияет на прочность, поэтому в качестве действующего расчетного напряжения можно принять среднее (номинальное) в опасном сечении и записать условие прочности следующим образом:

$$\sigma \leq [\sigma]. \quad (4.43)$$

В случае однородных хрупких материалов (например, закаленных сталей) при статической нагрузке необходимо учитывать концентрацию напряжений и расчет на прочность вести по наибольшим местным напряжениям. В этом случае условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = a\sigma_n \leq [\sigma]. \quad (4.44)$$

К вопросу о выборе величин допускаемых напряжений мы будем неоднократно возвращаться, рассматривая условия прочности при различных деформациях.

Глава 5

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

§ 35. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Рассмотрим некоторые задачи на растяжение и сжатие.

1. Определим диаметр стержня постоянного поперечного сечения длиной $l = 60$ см (рис. 130). Материал стержня — сталь Ст3, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см². Построим также эпюру λ перемещений сечений стержня и определим изменение его общей длины.

Прежде всего строим эпюру продольных усилий, из которой видно, что стержень имеет три участка. В крайних действуют растягивающие усилия $N_I = N_{III} = P = 1200$ кгс, а в среднем — усилие сжатия $N_{II} = 2P = 2400$ кгс.

Так как проектируемый стержень должен быть постоянного поперечного сечения, то подбирать последнее нужно по большему по абсолютной величине усилию, действующему в средней части. Выражение для напряжения в поперечных сечениях этого участка запишется следующим образом:

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F} = \frac{2P}{F}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{II} \leq [\sigma],$$

или

$$\frac{2P}{F} \leq [\sigma],$$

откуда

$$F \geq \frac{2P}{[\sigma]}.$$

Для стали марки Ст3 допускаемое напряжение $[\sigma]$ на растяжение и сжатие одинаково. При статической нагрузке его можно принять равным 1600 кгс/см² (см. приложение 10).

Подставляя числовые значения, получим площадь поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{2 \cdot 1200}{1600} \text{ см}^2 = 1,5 \text{ см}^2$$

и диаметр его:

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} F} = 1,13 \sqrt{1,5} \text{ см} = 1,38 \text{ см}.$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{4F}{\pi}$$

Диаметр необходимо увеличить до ближайшего большего, принятого согласно ГОСТу. Следует взять $d = 14$ мм ($F = 1,54$ см²).

Отметим, что расчет на прочность при сжатии является достаточным только для коротких стержней, в частности для стальных круглых, когда $\frac{l}{d} < 20$. При сжатии же длинных стержней может произойти потеря устойчивости¹. В нашем случае указанное выше условие для сжатой части стержня выполняется.

Определим перемещения сечений стержня. Примем, например, за начало отсчета левый конец стержня (сечение А), условно считая его неподвижным. Напомним, что перемещение любого сечения

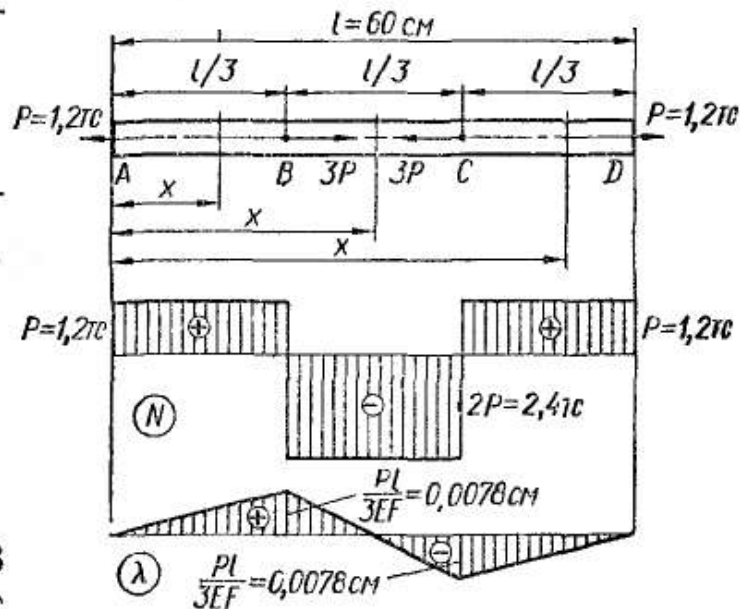


Рис. 130

¹ Расчеты сжатых стержней на устойчивость излагаются в гл. 19.

относительно начала отсчета равно изменению длины участка стержня между неподвижным и рассматриваемым сечениями.

На первом участке перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от левого конца стержня ($0 \leq x \leq \frac{l}{3}$),

$$\lambda(x) = \frac{Px}{EF};$$

— продольная деформация

при $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

при $x = \frac{l}{3}$

$$\lambda_B = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} = \frac{1200 \cdot 60}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,54} \text{ см} = 0,0078 \text{ см.}$$

На втором участке ($\frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} l$) перемещение сечения x

$$\lambda(x) = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \left(x - \frac{l}{3}\right)}{EF};$$

при $x = \frac{l}{3}$

$$\lambda_B = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} = 0,0078 \text{ см};$$

при $x = \frac{2}{3} l$

$$\lambda_C = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \frac{l}{3}}{EF} = -0,0078 \text{ см.}$$

На третьем участке, где $\frac{2}{3} l \leq x \leq l$,

$$\lambda(x) = + \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \frac{l}{3}}{EF} + \frac{P \left(x - \frac{2}{3} l\right)}{EF};$$

при $x = \frac{2}{3} l$

$$\lambda_C = - \frac{Pl}{3EF} = -0,0078 \text{ см};$$

при $x = l$

$$\lambda_D = \frac{P \frac{l}{3}}{EF} - \frac{2P \frac{l}{3}}{EF} + \frac{P \frac{l}{3}}{EF} = 0.$$

Эпюра перемещений представлена на рис. 130. В данном случае длина всего стержня не изменится, так как перемещение его правого конца относительно левого оказалось равным нулю.

2. Построим эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных деформаций и перемещений для ступенчатого стержня (рис. 131).

Стержень состоит из трех участков. В пределах первого из них в сечении, находящемся на расстоянии x от закрепленного конца ($0 \leq x \leq l$), продольная сила, нормальное напряжение и относительное удлинение не зависят от координаты x , т. е. от положения сечения, и имеют следующие значения:

$$N_I = 2P; \quad \sigma = \frac{2P}{1,5F} = \frac{4P}{3F}; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{4P}{3EF}.$$

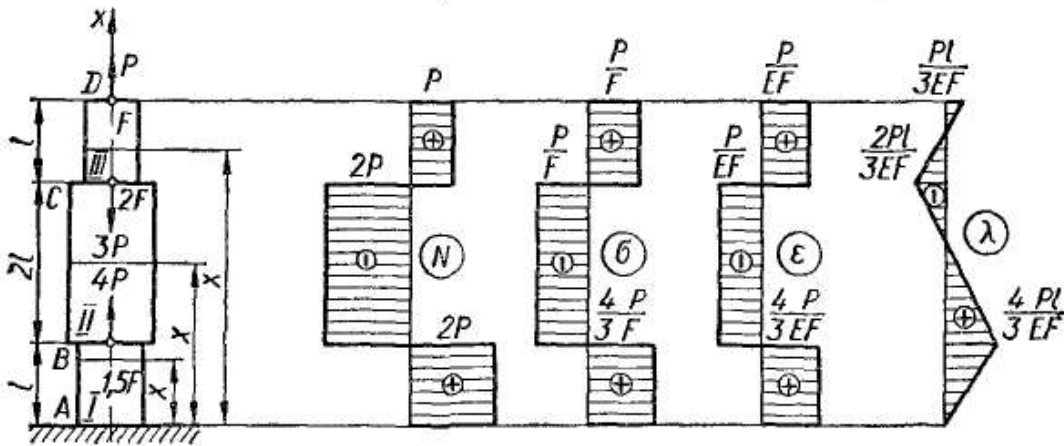


Рис. 131

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от закрепленного конца стержня,

$$\lambda(x) = \epsilon x = \frac{4Px}{3EF}.$$

Следовательно, перемещения изменяются по линейному закону. В начальной и конечной точках участка они имеют следующие значения:

при $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

при $x = l$

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF}.$$

Аналогично на втором участке ($l \leq x \leq 3l$)

$$N_{II} = -2P; \quad \sigma = -\frac{2P}{2F} = -\frac{P}{F}; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{P}{EF}.$$

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от закрепленного конца стержня,

$$\lambda(x) = \frac{4Pl}{3EF} - \frac{P(x-l)}{EF}.$$

В начале второго участка, при $x = l$,

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF},$$

в конце участка, при $x = 3l$,

$$\lambda_C = -\frac{2Pl}{3EF}.$$

Знак «минус» указывает на то, что рассматриваемое сечение перемещается в направлении к сечению, принятому за начало отсчета.

На третьем участке ($3l \leq x \leq 4l$)

$$N = P; \quad \sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{P}{EF}.$$

Перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от конца A ,

$$\lambda(x) = -\frac{2Pl}{3EF} + \frac{P(x-3l)}{EF}.$$

В начале третьего участка, при $x = 3l$,

$$\lambda_C = -\frac{2Pl}{3EF};$$

в конце третьего участка, при $x = 4l$,

$$\lambda_D = \frac{Pl}{3EF}.$$

Эпюры N , σ , ε и λ изображены на рис. 131. Эпюра λ позволяет определить изменение расстояния между любыми двумя сечениями стержня, следовательно, и изменение длины любого его участка.

Определим, например, изменение длины второго участка стержня. Для этого от перемещения сечения в конце участка (сечение C)

нужно вычесть перемещение сечения в начале участка (сечение B). В результате получим

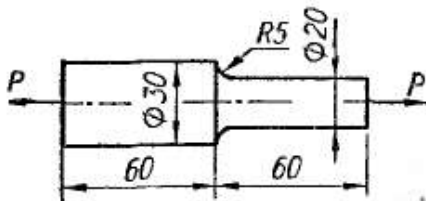


Рис. 132

$$\Delta l_{BC} = -\frac{2Pl}{3EF} - \frac{4Pl}{3EF} = -2 \frac{Pl}{EF}.$$

Знак «минус» показывает, что длина рассмотренного участка уменьшилась.

3. Проверим прочность ступенчатого стержня круглого поперечного сечения (рис. 132). Материал стержня — закаленная высокоуглеродистая сталь с временным сопротивлением $\sigma_b = 9000$ кгс/см². Стержень растягивается силами $P = 8000$ кгс.

В связи с резким изменением поперечного сечения стержня возникает концентрация напряжений. Так как закаленная сталь чувствительна к ней, то проверку прочности нужно проводить по наибольшим местным напряжениям. Чтобы найти эти напряжения, нужно знать коэффициент концентрации напряжений. Последний зависит от отношения радиуса галтели к меньшему диаметру стерж-

ня. В нашем случае $\frac{r}{d} = \frac{5}{20} = 0,25$. По табл. 11 теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha = 1,2$.

Номинальное напряжение вычисляем по меньшей площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{мин}}} = \frac{8000}{\frac{\pi d^2}{4}} = 2550 \text{ кгс/см}^2.$$

Наибольшие местные напряжения найдем на основании формулы (4.37):

$$\sigma_{\text{макс}} = \alpha \sigma_n = 1,2 \cdot 2550 \text{ кгс/см}^2 = 3060 \text{ кгс/см}^2.$$

Запас прочности

$$n_b = \frac{\sigma_b}{\sigma_{\text{макс}}} = \frac{9000}{3060} = 2,95.$$

Для хрупких материалов при статической нагрузке принимают, как уже отмечалось, коэффициент запаса прочности $n_b = 2,5 \div 3$. Коэффициент запаса прочности рассматриваемого стержня лежит в указанных пределах, т. е. стержень при данной нагрузке имеет достаточный запас прочности.

4. Определим размеры поперечных сечений стержней AB и BC кронштейна (рис. 133, а), предназначенного для крепления блока,

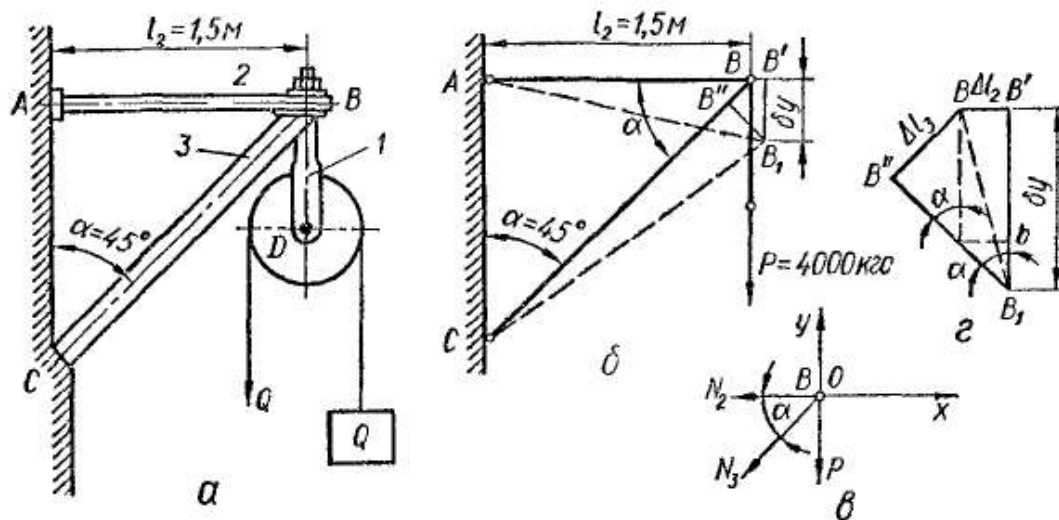


Рис. 133

при помощи которого будут подниматься грузы весом $Q = 2000$ кгс, а также поперечное сечение подвески BD блока. Стержень AB и подвеска BD (в верхней части) имеют круглое поперечное сечение. Материал — сталь Ст3. Стержень BC будет изготовлен из сосны и имеет квадратное поперечное сечение. Определим также вертикальное перемещение узла B кронштейна.

Конструкция кронштейна позволяет при расчете приближенно считать крепления стержней к стенке и соединение их между собой шарнирными. Расчетная схема кронштейна изображена на рис. 133, б.

Прежде всего определим усилие в подвеске блока и равную ему силу, действующую на узел B . Так как при подъеме груза Q ко второй ветви троса, переброшенного через блок, должна быть приложена сила, равная весу поднимаемого груза Q (если пренебречь трением), то в сечении подвески будет действовать усилие $N_1 = 2Q = 4000$ кгс.

К узлу B кронштейна, следовательно, приложена сила $P = N_1 = 4000$ кгс.

Для стали Ст3 допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 1600$ кгс/см², для сосны допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-] = 120$ кгс/см². Модуль упругости для стали $E_c = 2 \times 10^6$ кгс/см², для сосны $E_d = 10^5$ кгс/см².

Найдем необходимую площадь поперечного сечения подвески BD . Нормальное напряжение в подвеске определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1}.$$

Запишем условие прочности *при растяжении (сжатии)*

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma],$$

откуда необходимая площадь поперечного сечения подвески

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{4000}{1600} = 2,5 \text{ см}^2.$$

Определяем диаметр подвески:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} \geq 1,13 \sqrt{2,5} = 1,78 \text{ см} = 17,8 \text{ мм}.$$

Примем ближайший больший стандартный диаметр $d = 18$ мм ($F = 2,54$ см²).

Так как предполагается, что стержни прикреплены к стене и соединены между собой шарнирами, а нагрузка приложена в узле (к шарниру), то стержни будут испытывать только продольные (растягивающие или сжимающие) усилия. Чтобы определить их, рассмотрим равновесие узла B (рис. 133, θ), к которому приложены вертикальная нагрузка P и две неизвестные силы N_2 и N_3 , действующие соответственно со стороны стержней AB и BC и направленные вдоль их осей.

При определении неизвестных усилий в стержнях обычно принято считать их растянутыми и соответственно этому направлять векторы сил от узла. Знак «плюс» в решении для усилия будет подтверждать правильность сделанного предположения о направлении усилия, а знак «минус» укажет на то, что в действительности усилие направлено противоположно и соответствующий стержень сжат. Полагая оба стержня растянутыми, следует усилия N_2 и N_3 направить так, как показано на рис. 133, θ .

Для равновесия узла B в плоскости достаточно, чтобы сумма проекций всех сил, приложенных к узлу, на координатные оси x

и y равнялась нулю. Направим координатные оси, как показано на рис. 133, в. Тогда

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_2 - N_3 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y &= -P - N_3 \sin \alpha = 0.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}N_3 &= -\frac{P}{\sin \alpha} = -\frac{4000 \cdot 2}{\sqrt{2}} \text{ кгс} = -5660 \text{ кгс}; \\ N_2 &= -N_3 \cos \alpha = \left(\frac{4000 \cdot 2}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ кгс} = 4000 \text{ кгс},\end{aligned}$$

т. е. стержень AB растянут, а стержень BC сжат.

Из условия прочности стержня AB

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} \leq [\sigma]$$

определяем необходимую площадь его поперечного сечения:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{4000}{1600} \text{ см}^2 = 2,5 \text{ см}^2.$$

В данном случае она оказалась равной площади поперечного сечения подвески. Следовательно, диаметр стержня AB должен быть равен диаметру подвески, т. е. $d = 18$ мм.

Необходимая площадь поперечного сечения деревянного стержня BC

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma_-]} = \frac{5660}{120} \text{ см}^2 = 47 \text{ см}^2.$$

Сторона квадрата поперечного сечения

$$a = \sqrt{47} \text{ см} = 6,85 \text{ см}.$$

Округляя до ближайшего целого числа, принимаем $a = 70$ мм ($F = 49 \text{ см}^2$).

Определим вертикальное перемещение шарнира B кронштейна. Стержень AB удлинится на величину

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_c F_2} = \frac{4000 \cdot 150}{2 \cdot 10^6 \cdot 2,54} \text{ см} = 0,118 \text{ см}.$$

Стержень BC укоротится на величину

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_d F_3} = \frac{5660 \cdot 150 \sqrt{2}}{10^5 \cdot 49} \text{ см} = 0,245 \text{ см}.$$

Учитывая, что деформации малы, перемещения узла B можно определить следующим образом. Предположим, что стержни в шарнире B разъединены. От точки B направо, в направлении стержня AB , отложим его удлинение BB' , а в направлении BC — укорочение BB'' стержня BC (рис. 133, б, г). На рис. 133, г это показано в масштабе, значительно большем, чем масштаб длины стержней на схеме конструкции. Положение шарнира B после деформации

совпадет с точкой пересечения дуг, описанных из точек A и C радиусами, равными новым длинам AB' и CB'' стержней. Вследствие малости деформаций стержней дуги можно заменить перпендикулярами, восстановленными в точках B' и B'' к направлениям AB и BC . Точка B_1 пересечения перпендикуляров определит новое положение узла B после деформации кронштейна. Отрезок BB_1 изобразит полное перемещение узла B , а отрезок $B'B_1 = \delta_y$ — вертикальную составляющую этого перемещения.

Приведенное здесь построение дает возможность легко установить аналитическую зависимость между перемещениями точки и удлинениями стержней. Вертикальное перемещение узла B (рис. 133, z)

$$\delta_y = \overline{B'B_1} = \overline{B_1b} + b\overline{B'} = \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin \alpha}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\delta_y = \left(0,118 + \frac{0,245 \cdot 2}{\sqrt{2}} \right) \text{ см} = 0,46 \text{ см}.$$

Пример 12. Определить наибольшую величину груза Q , который может быть безопасно подвешен к узлу B стержневой подвески (рис. 134). Стержни подвески изготовлены из стали Ст2, для которой допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 1400 \text{ кгс/см}^2$. Диаметр стержней $d = 2 \text{ см}$.

Наибольшее безопасное нормальное усилие, которое можно допустить в каждом стержне подвески,

$$N = [\sigma] F = 1400 \frac{\pi d^2}{4} = 4400 \text{ кгс}.$$

Наибольшую допускаемую величину груза Q найдем, рассматривая равновесие узла B . Приравняем нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на узел B :

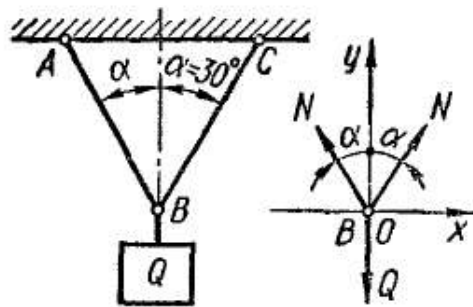


Рис. 134

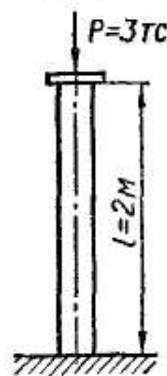


Рис. 135

$$\Sigma Y = -Q + 2N \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q &= \\ &= 2N \cos \alpha = 2 \cdot 4400 \cdot 0,866 \text{ кгс} = \\ &= 7620 \text{ кгс}. \end{aligned}$$

Пример 13. Определить, какой должна быть площадь поперечного сечения деревянной колонны из сосны с модулем упругости (см. приложение 9) $E = 10^5 \text{ кгс/см}^2$ (рис. 135), чтобы опускание верхнего

конца колонны не превышало $[\Delta l] = 0,2 \text{ см}$.

Для определения площади колонны запишем условие жесткости:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \leq [\Delta l],$$

где $N = P$,

Отсюда

$$F \geq \frac{Nl}{E[\Delta l]}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$F = \frac{3000 \cdot 200}{10^3 \cdot 0,2} \text{ см}^2 = 30 \text{ см}^2.$$

Проверим, будет ли выполняться условие прочности при данной площади поперечного сечения. Допускаемое напряжение на сжатие для сосны $[\sigma_-] = 120 \text{ кгс/см}^2$ (см. приложение 10). Напряжение, вызванное силой N ,

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{3000}{30} \text{ кгс/см}^2 = 100 \text{ кгс/см}^2 \leq [\sigma_-] = 120 \text{ кгс/см}^2.$$

Условие прочности выполняется.

§ 36. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА И СИЛ ИНЕРЦИИ

Собственный вес материала элементов конструкций, а также силы инерции движущихся частей машин и механизмов являются внешними нагрузками, распределенными по объему. Ниже рассмотрены некоторые задачи определения напряжений и перемещений при действии таких нагрузок.

Учет собственного веса. В машиностроении, как правило, влияние собственного веса не учитывается, так как машиностроительные

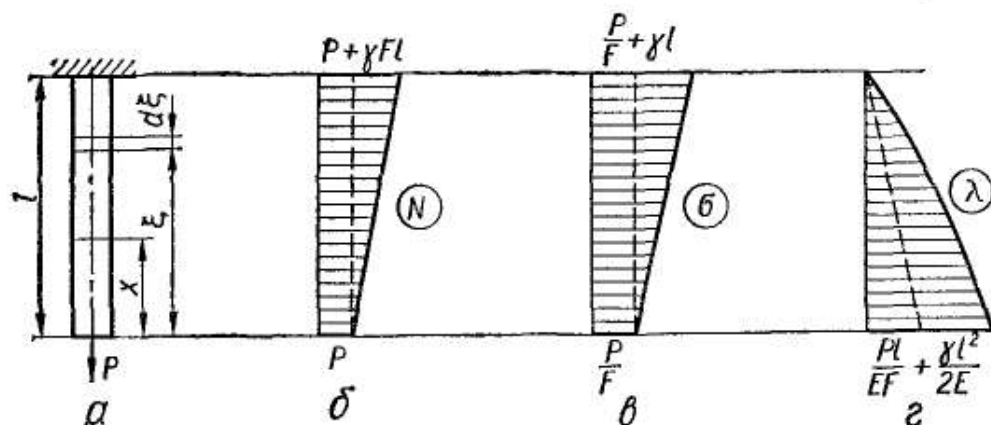


Рис. 136

детали имеют сравнительно небольшие размеры, при которых влияние собственного веса невелико. Однако в ряде инженерных конструкций собственный вес — это одна из основных нагрузок. В случае расчета канатов шахтных подъемников, штанг бурильных устройств, устоев мостов, стен зданий, плотин влияние собственного веса учитывать необходимо.

Предположим, что прямой стержень постоянного поперечного сечения большой длины закреплен верхним концом и нагружен на свободном конце силой P (рис. 136, а). Определим закон изменения продольных усилий и напряжений в поперечных сечениях стержня, а также перемещения сечений по длине стержня, учитывая влияние собственного веса.

В сечении стержня, находящемся на расстоянии x от свободного конца, продольная сила

$$N(x) = P + \gamma Fx, \quad (5.1)$$

где γ — вес единицы объема материала.

Наибольшее значение сила имеет в верхнем закрепленном сечении:

$$N_{\text{макс}} = P + \gamma Fl. \quad (5.2)$$

Эпюра продольных усилий изображена на рис. 136, б.

Нормальное напряжение в сечении стержня на расстоянии x от свободного конца получим, разделив усилие $N(x)$ на площадь сечения:

$$\sigma = \frac{N(x)}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \quad (5.3)$$

Наибольшего значения нормальное напряжение достигает в верхнем закрепленном сечении, которое в этом случае будет опасным:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (5.4)$$

В этой формуле первое слагаемое представляет собой напряжение от силы P , второе — от собственного веса. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 136, в.

Условие прочности для опасного сечения запишется следующим образом:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (5.5)$$

Из выражения (5.5) получим формулу для подбора площади F поперечного сечения стержня при расчете на прочность с учетом влияния собственного веса:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (5.6)$$

Если нагрузки на конце стержня нет, т. е. $P = 0$, то напряжение в опасном сечении, вызванное только собственным весом, согласно выражению (5.4),

$$\sigma_{\text{макс}} = \gamma l. \quad (5.7)$$

Условие прочности принимает следующий вид:

$$\gamma l \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

Отсюда можно определить длину стержня, при которой напряжение только от собственного веса достигает допускаемого и стержень не может нести полезной нагрузки. Эту предельную допустимую длину найдем из условия (5.8), сохранив в нем знак равенства:

$$l_{\text{пр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (5.9)$$

От собственного веса может произойти разрыв стержня. Это будет в случае, когда $\sigma_{\text{макс}}$ в выражении (5.7) достигнет величины временного сопротивления. Длина стержня, при которой он разрывается от собственного веса, называется *критической*. Ее получим из формулы (5.9), заменив допускаемое напряжение временным

сопротивлением материала:

$$l_k = \frac{\sigma_b}{\gamma}. \quad (5.10)$$

Предельная и критическая длины не зависят от площади поперечного сечения стержня.

Подсчитаем, например, критическую длину для стали марки Ст2, у которой $\sigma_b = 3600$ кгс/см². Вес единицы объема стали

$$\gamma = 7,85 \text{ гс/см}^3 = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ кгс/см}^3.$$

Подставляя в формулу (5.10) числовые значения, получим

$$l_k = \frac{3600}{7,85 \cdot 10^{-3}} = 458\,000 \text{ см} \approx 4,6 \text{ км}.$$

В рассматриваемом стержне (рис. 136, а) определим перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от свободного конца. Перемещение равно удлинению части стержня, расположенной выше этого сечения.

В сечении стержня, находящемся на расстоянии ξ от свободного конца (рис. 136, а), имеем $N(\xi) = P + \gamma F \xi$. По формуле (4.9) при $F = \text{const}$ находим

$$\lambda(x) = \int_x^l \frac{N(\xi) d\xi}{EF} = \int_x^l \frac{(P + \gamma F \xi) d\xi}{EF} = \frac{P(l-x)}{EF} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2). \quad (5.11)$$

Удлинение Δl стержня (или равное ему перемещение λ нижнего конца стержня) получим из выражения (5.11), положив $x = 0$:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (5.12)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой удлинение стержня от силы P , второе — от собственного веса.

Учитывая, что полный вес стержня $Q = \gamma Fl$, вместо выражения (5.12) будем иметь

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \quad (5.13)$$

Таким образом, абсолютное удлинение стержня от собственного веса такое же, как удлинение от сосредоточенной силы, равной весу стержня и приложенной в его центре тяжести. Эпюра перемещений сечений изображена на рис. 136, в.

Стержень равного сопротивления. При расчете на прочность стержня постоянного сечения с учетом собственного веса во всех сечениях стержня, кроме опасного, напряжения оказываются ниже допустимого, т. е. материал недогружен (см., например, рис. 136, в). Однако можно спроектировать стержень такого переменного сечения, у которого во всех поперечных сечениях напряжения будут одинаковыми и равными допустимому. Такой стержень

называется *стержнем равного сопротивления* растяжению или сжатию. Установим закон изменения площади его поперечного сечения.

Пусть стержень сжимается силой P (рис. 137). Необходимая площадь верхнего сечения

$$F_0 = \frac{P}{[\sigma]} . \quad (5.14)$$

Площадь поперечного сечения на расстоянии x от верхнего конца стержня обозначим через $F(x)$, а вес части стержня длиной x — через $Q(x)$. По условию напряжение в этом сечении должно равняться допускаемому. Уравнение равновесия части стержня длиной x запишется так:

$$P + Q(x) = [\sigma] F(x) . \quad (5.15)$$

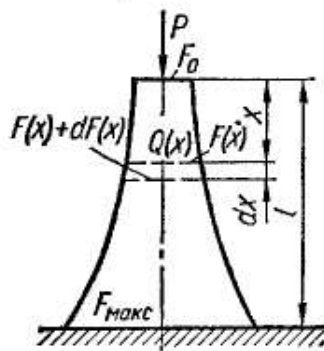


Рис. 137

Перейдем к следующему сечению, отстоящему от первого на расстоянии dx . Площадь этого сечения будет $F(x) + dF(x)$, а вес части бруса, расположенной выше сечения, составит $Q(x) + \gamma F(x) dx$. В этом сечении напряжение

также должно быть равно допускаемому. Условие равновесия части бруса длиной $x + dx$ запишется следующим образом:

$$P + Q(x) + \gamma F(x) dx = [\sigma] [F(x) + dF(x)] . \quad (5.16)$$

Вычитая выражение (5.15) из выражения (5.16), получаем

$$\gamma F(x) dx = [\sigma] dF(x) , \quad (5.17)$$

или, разделяя переменные:

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma dx}{[\sigma]} .$$

Проинтегрировав это выражение, найдем

$$\ln F(x) = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C .$$

Отсюда

$$F(x) = e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]} + C} . \quad (5.18)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $x = 0$ $F(x) = F_0$. Тогда из формулы (5.18) получим

$$F_0 = e^C .$$

Подставляя в формулу (5.18) значение $e^C = F_0$, найдем закон изменения площади поперечного сечения стержня равного сопротивления:

$$\boxed{F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}} .} \quad (5.19)$$

Наибольшая площадь в месте закрепления ($x = l$)

$$F_{\text{макс}} = F_0 e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}},$$

или с учетом выражения (5.14):

$$F_{\text{макс}} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}. \quad (5.20)$$

Найдем полный вес Q бруса равного сопротивления. Проще всего сделать это, исходя из условия равновесия всего бруса:

$$P + Q = [\sigma] F_{\text{макс}}.$$

Отсюда

$$Q = [\sigma] F_{\text{макс}} - P.$$

Учитывая формулу (5.20), получаем

$$Q = P \left(e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1 \right).$$

Легко определить и укорочение стержня. Так как во всех поперечных сечениях напряжения постоянны и равны допускаемому, то и относительная деформация ε по длине стержня равного сопротивления постоянна и равна $\frac{[\sigma]}{E}$. Абсолютное укорочение стержня

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l. \quad (5.21)$$

Ступенчатый стержень. Стержень, состоящий из отдельных участков (ступенек) с постоянной площадью поперечного сечения в пределах каждого участка, занимает промежуточное место между стержнем постоянного поперечного сечения и стержнем равного сопротивления. В ступенчатом стержне материал используется лучше, чем в стержне постоянного сечения, но менее эффективно, чем в стержне равного сопротивления. Последнее полностью окупается простой изготовлением ступенчатого стержня. Поэтому такие стержни имеют большее распространение, чем стержни равного сопротивления. В виде ступенчатых стержней иногда изготовляют опоры мостов.

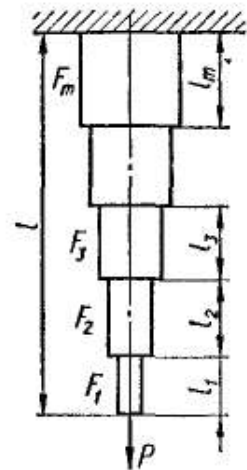


Рис. 138

Ступенчатые стержни следует проектировать так, чтобы в опасном сечении, находящемся в конце каждой ступеньки, напряжения равнялись допускаемому. Очевидно при этом во всех других сечениях напряжения будут меньше допускаемого.

Составим формулы для подбора площади поперечного сечения каждой ступеньки (рис. 138).

Площадь поперечного сечения первой ступеньки найдем по формуле (5.6):

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}. \quad (5.22)$$

К нижнему концу второй ступеньки приложена сила, равная $F_1 [\sigma]$. Тогда аналогично

$$F_2 = \frac{F_1 [\sigma]}{[\sigma] - \gamma l_2} \quad (5.23)$$

Учитывая формулу (5.22), получим

$$F_2 = \frac{P [\sigma]}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2)} \quad (5.24)$$

К нижнему концу третьей ступеньки приложена сила, равная $F_2 [\sigma]$. Для площади поперечного сечения третьей ступеньки формула запишется следующим образом:

$$F_3 = \frac{F_2 [\sigma]}{[\sigma] - \gamma l_3} \quad (5.25)$$

Подставляя значения F_2 из формулы (5.24), получим

$$F_3 = \frac{P [\sigma]^2}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) ([\sigma] - \gamma l_3)} \quad (5.25)$$

Очевидно, для площади поперечного сечения n -й ступеньки формула будет иметь следующий вид:

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma l_1) ([\sigma] - \gamma l_2) ([\sigma] - \gamma l_3) \cdots ([\sigma] - \gamma l_n)} \quad (5.26)$$

Если длины всех ступенек одинаковы, то

$$l_1 = l_2 = l_3 = \cdots = l_n = \cdots = l_m = \frac{l}{m}, \quad (5.26)$$

где m — число ступенек в брус;

l — общая длина бруса.

Тогда

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \gamma \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{l}{m}\right)^n} \quad (5.27)$$

Учет сил инерции. Под силой инерции материальной точки, движущейся с ускорением, понимают силу, равную по величине произведению массы точки на ее ускорение. Направлена сила инерции в сторону, обратную ускорению. В реальном теле, которое можно рассматривать как совокупность материальных точек, силы инерции распределены по объему тела. Они складываются с другими нагрузками и оказывают влияние на величину возникающих в нем напряжений и деформаций. Часто силы инерции являются основными нагрузками на движущиеся детали.

При решении задач с учетом сил инерции пользуются принципом д'Аламбера, который состоит в том, что уравнениям движения точки (или системы точек) можно придать вид уравнений равновесия, если к действующим заданным силам и динамическим реакциям связей присоединить силы инерции.

Определение напряжений и деформаций при действии сил инерции рассмотрим на примере расчета тонкого ($h < \frac{r}{20}$) кольца (рис. 139, а), свободно вращающегося вокруг центральной оси.

Пусть угловая скорость вращения кольца

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1},$$

где n — число оборотов в минуту.

Для тонкого кольца можно считать, что все его точки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, равном его среднему радиусу r .

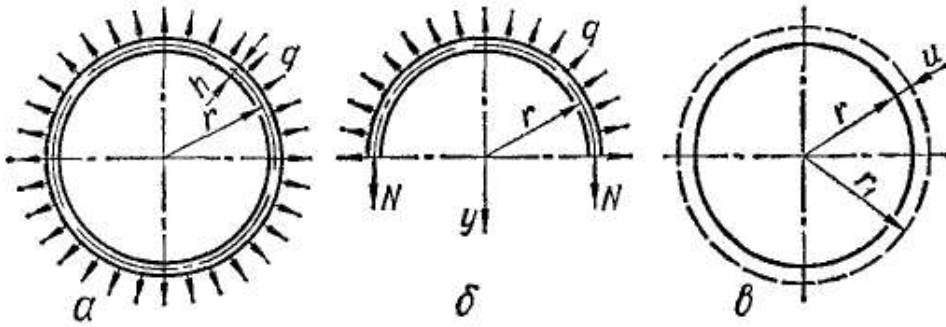


Рис. 139

Так как центростремительное ускорение направлено к оси вращения, то силы инерции направлены от нее.

На элемент кольца длиной, равной единице, действует сила инерции в виде центробежной силы, величина которой (интенсивность)

$$q = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r, \quad (5.28)$$

где r — средний радиус кольца;

F — площадь поперечного сечения;

γ — вес единицы объема материала.

Таким образом, действие на кольцо центробежных сил аналогично действию равномерного внутреннего давления интенсивностью q . Вследствие круговой симметрии системы и нагрузки в поперечных сечениях изгибающие моменты и поперечные силы во всех сечениях равны нулю.

Для определения продольных усилий N , действующих в поперечных (радиальных) сечениях кольца, рассмотрим равновесие половины кольца (рис. 139, б). На половину кольца действуют две силы N , приложенные в проведенных сечениях, и силы инерции интенсивностью q .

Согласно теореме, доказанной в § 23, равнодействующая распределенной нагрузки интенсивностью q равна произведению q на диаметр, перпендикулярна к диаметру и действует по оси, проходящей через его середину, т. е. по оси y . Условие равновесия половины кольца при проектировании сил на ось y запишется следующим образом:

$$2N - q2r = 0,$$

откуда

$$N = qr. \quad (5.29)$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении кольца

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{qr}{F}. \quad (5.30)$$

Подставляя значение q согласно формуле (5.28), получим

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (5.31)$$

или

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 r^2. \quad (5.32)$$

Напряжение в кольце можно выразить через его окружную скорость v . Учитывая, что $v = \omega r$, из выражения (5.31) будем иметь

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (5.33)$$

Формулами (5.31) и (5.33) можно пользоваться для приближенного (если пренебречь влиянием спиц) определения напряжения в ободу маховика.

Напряжение не зависит от площади поперечного сечения кольца. Из условия прочности

$$\frac{\gamma}{g} v^2 \leq [\sigma] \quad (5.34)$$

определяем допускаемую величину окружной скорости:

$$v \leq \sqrt{\frac{[\sigma] g}{\gamma}}. \quad (5.35)$$

Относительное удлинение по окружности кольца в соответствии с законом Гука и с учетом выражения (5.31)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{gE} \omega^2 r^2. \quad (5.36)$$

Рассматривая геометрическую сторону деформации (рис. 139, в), убедимся в том, что относительное удлинение по окружности кольца равно относительному удлинению радиуса:

$$\epsilon = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}. \quad (5.37)$$

Найдем радиальные перемещения u точек средней линии кольца. На основании формул (5.37) и (5.36)

$$u = \epsilon r = \frac{\gamma}{gE} \omega^2 r^3. \quad (5.38)$$

§ 37. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Статически неопределимыми называются такие конструкции, в элементах которых при помощи только одних уравнений статики определить усилия невозможно. Кроме уравнений статики для рас-

чета таких систем (конструкций) необходимо использовать также уравнения, содержащие деформации элементов конструкций.

Схемы некоторых статически неопределимых конструкций изображены на рис. 140: *a* — стержневой подвески; *b* — стержня, закрепленного обоими концами; *в* — стержневого кронштейна; *г* — составного кольца; *д* — железобетонной колонны, состоящей из бетона с включенной в него арматурой (стальными стержнями); *e* — шарнирно-стержневой системы.

Все статически неопределимые конструкции имеют дополнительные, или так называемые «лишние», связи в виде закреплений, стержней либо других элементов.

Лишними такие связи называют только потому, что они не являются необходимыми для обеспечения равновесия конструкции и ее геометрической неизменяемости, хотя постановка их диктуется условиями эксплуатации. По условиям прочности и жесткости конструкции лишние связи могут оказаться необходимыми.

В статически неопределимых конструкциях число неизвестных, подлежащих определению, больше, чем число уравнений статики, которые могут быть для этой цели использованы. Разница между числом неизвестных и числом уравнений статики определяет число лишних неизвестных, или степень статической неопределимости конструкции. При одной лишней неизвестной конструкция называется один раз статически неопределимой, при двух — дважды статически неопределимой и т. д. Конструкции, изображенные на рис. 140, *a*, *b*, *г*—*e*, имеющие по одной дополнительной связи, являются один раз статически неопределимыми, а конструкция, представленная на рис. 140, *в*, имеющая две лишние связи, — дважды статически неопределимой.

Решение статически неопределимых задач. Статически неопределимые конструкции, элементы которых работают на растяжение и сжатие, будем рассчитывать, решая совместно уравнения, полученные в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи. При этом будем придерживаться следующего порядка.

1. **Статическая сторона задачи.** Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия.

2. **Геометрическая сторона задачи.** Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связи между деформациями или перемещениями отдельных элементов

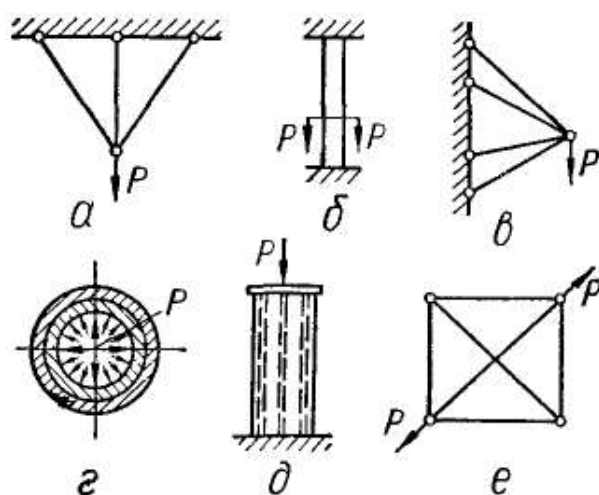


Рис. 140

конструкции. Полученные уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

3. **Физическая сторона задачи.** На основании закона Гука выражаем перемещения или деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные усилия. В случае изменения температуры к деформациям, вызванным усилиями, добавляются температурные деформации.

4. **Синтез.** Решая совместно статические, геометрические и физические уравнения, находим неизвестные усилия.

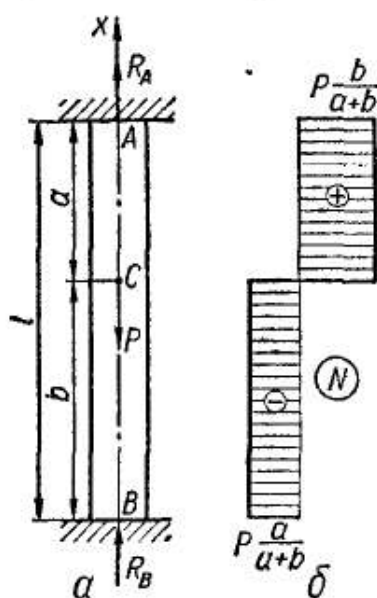


Рис. 141

Рассмотрим примеры расчета некоторых простейших статически неопределимых конструкций.

1. Пусть к стержню, закрепленному обоими концами, приложена осевая сила P (рис. 141, а). Определим усилия, возникающие в нижней и верхней частях стержня.

Статическая сторона задачи. Поскольку сила P действует вдоль оси стержня, на его концах могут возникнуть только вертикальные составляющие реакций (R_A и R_B). Направим их произвольно — так, как показано на рис. 141, а.

Для системы сил, действующих по одной прямой линии, можно составить лишь одно уравнение равновесия:

$$\sum X = R_A + R_B - P = 0. \quad (5.39)$$

Следовательно, задача один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона задачи. Так как концы стержня жестко закреплены, то его общая длина не изменится. Следовательно,

$$\Delta l = 0. \quad (5.40)$$

Физическая сторона задачи. В поперечных сечениях верхней части стержня действуют усилия $N_{AC} = R_A$, а в поперечных сечениях нижней — усилия $N_{BC} = -R_B$. Используя закон Гука, выразим деформации через эти усилия:

$$\Delta l = \frac{N_{AC}a}{EF} + \frac{N_{BC}b}{EF} = \frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF}. \quad (5.41)$$

Синтез. Подставляя выражение (5.41) в уравнение (5.40), получим

$$\frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF} = 0,$$

или после сокращения на EF :

$$R_A a = R_B b. \quad (5.42)$$

Решая совместно уравнения (5.39) и (5.42), получим

$$R_A = \frac{b}{a+b} P; \quad R_B = \frac{a}{a+b} P.$$

Окончательная эпюра продольных сил представлена на рис. 141, б.

2. Подобрать площади поперечных сечений трехстержневой подвески, расчетная схема которой изображена на рис. 142, а. Длина среднего стержня $l_1 = 1,5$ м, угол между осью среднего стержня и осями боковых стержней $\alpha = 30^\circ$. Все стержни из стали марки Ст2. Площади поперечных сечений боковых стержней $F_2 = F_3$. Подвеска в узле А будет нагружаться вертикальной силой $P = 8000$ кгс.

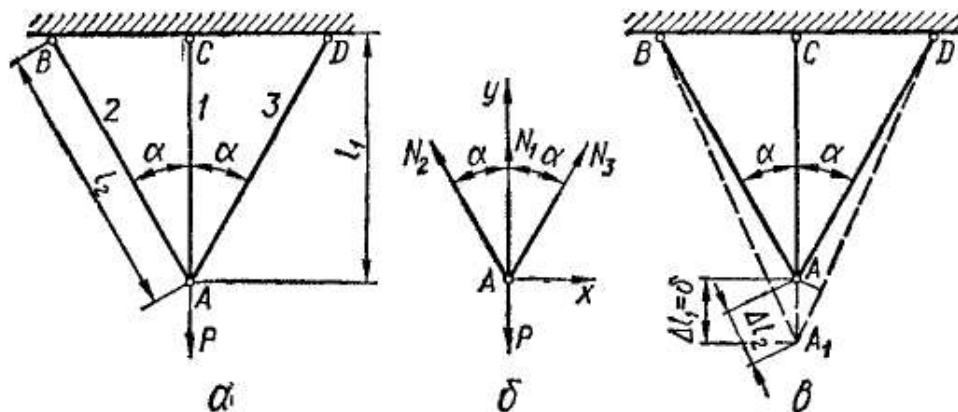


Рис. 142

Из расчетной схемы конструкции, а также из допущения о том, что шарниры в узлах идеальные, следует, что при нагружении подвески в узле А силой в стержнях будут возникать только осевые усилия, в данном случае — растягивающие.

Подбор площади поперечного сечения стержня при растяжении (проектировочный расчет) проводят по условию прочности

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

откуда, если известно усилие N , определяют необходимую площадь:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Найдем усилия в стержнях подвески. Конструкция один раз статически неопределима, так как имеет одну лишнюю связь.

Статическая сторона задачи. Условие равновесия узла А (рис. 142, б) выражается двумя уравнениями статики:

$$\sum X = N_3 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $N_2 = N_3$. В результате остается одно второе уравнение, содержащее два неизвестных усилия:

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \quad (5.43)$$

Геометрическая сторона задачи. Так как система симметрична относительно оси среднего стержня и боковые стержни растягиваются одинаковыми силами, то узел A при деформации подвески опустится по вертикали на какую-то величину δ . Новое положение узла будет A_1 (рис. 142, в). Все стержни удлинятся и займут положение, показанное на рис. 142, в штриховыми линиями. Удлинение среднего стержня, очевидно, будет $\Delta l_1 = \delta$. Удлинения боковых стержней получим, если из точек B и D радиусом, равным BA (или DA), проведем дуги через точку A и сделаем засечки на новых длинах стержней BA_1 и DA_1 . Вследствие того что упругие удлинения очень малы по сравнению с длинами стержней (на рис. 142, в для наглядности удлинения сильно увеличены), можно считать, что углы α между осями стержней не изменяются, а проведенные дуги заменить перпендикулярами, опущенными из узла A на новые направления стержней. Тогда, как видно из рисунка,

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \quad (5.44)$$

Физическая сторона задачи. Удлинения стержней выразим по закону Гука через действующие в них усилия:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_1}. \quad (5.45)$$

С и н т е з. Подставляя значения Δl_1 и Δl_2 из выражений (5.45) в выражение (5.44), получим

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cos \alpha. \quad (5.46)$$

Выразим N_2 через N_1 :

$$N_2 = \frac{\frac{EF_2}{l_2}}{\frac{EF_1}{l_1}} N_1 \cos \alpha,$$

или

$$N_2 = \frac{c_2}{c_1} N_1 \cos \alpha, \quad (5.47)$$

где $c_1 = \frac{EF_1}{l_1}$, $c_2 = \frac{EF_2}{l_2}$ — жесткости соответственно среднего и боковых стержней.

Внеся выражение (5.47) в уравнение (5.43), будем иметь

$$N_1 + 2 \frac{c_2}{c_1} N_1 \cos^2 \alpha = P,$$

откуда

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}. \quad (5.48)$$

Учитывая выражение (5.47), получим N_2 :

$$N_2 = \frac{P \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha} . \quad (5.49)$$

Усилия N_1 и N_2 оказались зависящими от соотношения жесткостей стержней. Поэтому в проектировочном расчете вычислить их можно, только задавшись отношением жесткостей. В этом заключается одна из особенностей расчета статически неопределимых стержневых систем.

В случае одинаковых материалов стержней задаются не отношением жесткостей, а отношением площадей поперечных сечений, которое, разумеется, устанавливает и определенное отношение жесткостей стержней.

Примем $\frac{F_1}{F_2} = k$. Тогда, учитывая, что $l_1 = l_2 \cos \alpha$, получим

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{EF_2 l_1}{l_2 EF_1} = \frac{EF_2 l_2 \cos \alpha}{l_2 EF_1 k} = \frac{\cos \alpha}{k} .$$

Теперь усилия в стержнях N_1 (5.48) и N_2 (5.49) определяются такими выражениями:

$$N_1 = \frac{P}{1 + \frac{2}{k} \cos^3 \alpha} ; \quad (5.50)$$

$$N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{k + 2 \cos^3 \alpha} . \quad (5.51)$$

Вычислим эти усилия, приняв, например, $k = 2$:

$$N_1 = \frac{8000}{1 + 0,866^3} = 4850 \text{ кгс};$$

$$N_2 = \frac{8000 \cdot 0,866^2}{2(1 + 0,866^3)} = 1820 \text{ кгс}.$$

Подберем площади поперечных сечений стержней, исходя из предположения, что напряжение в среднем стержне равно допустимому напряжению $[\sigma] = 1400 \text{ кгс/см}^2$. Тогда

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{4850}{1400} \text{ см}^2 = 3,46 \text{ см}^2.$$

Площади поперечных сечений боковых стержней, согласно принятому отношению, получим такими:

$$F_2 = \frac{F_1}{k} = \frac{F_1}{2} = 1,73 \text{ см}^2.$$

Напряжения, с которыми будут работать эти стержни,

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1820}{1,73} \text{ кгс/см}^2 = 1050 \text{ кгс/см}^2.$$

Эти напряжения меньше допускаемого, т. е. стержни имеют избыточный запас прочности.

Если из условия прочности определить площади поперечных сечений боковых стержней F_2 , а затем, согласно принятому отношению, взять $F_1 = 2F_2$, то напряжение в среднем стержне окажется больше допускаемого. Таким образом, этот второй вариант подбора площади поперечных сечений следует отбросить.

Отметим, что в рассматриваемой статически неопределимой конструкции нельзя получить равнопрочность всех ее элементов.

Начальные и температурные напряжения. Свободная сборка статически неопределимых систем возможна лишь при весьма точном изготовлении их элементов. В противном случае сборку вынуждены

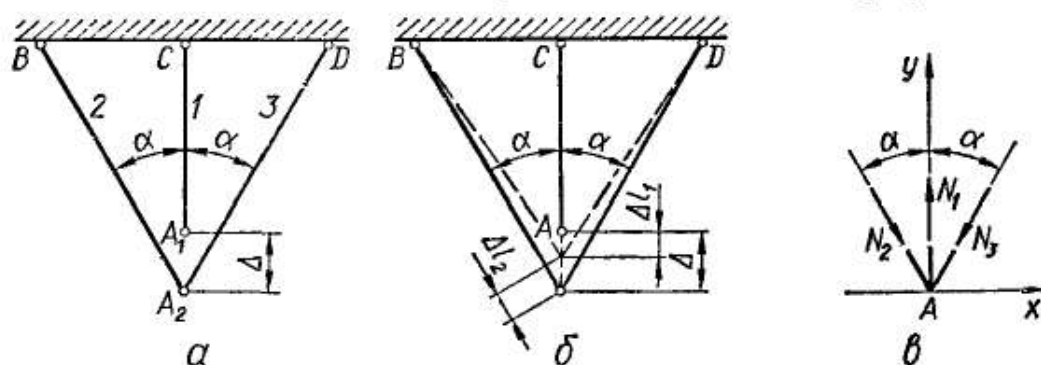


Рис. 143

осуществлять с приложением усилий, вызывающих деформации элементов, поэтому в них после монтажа системы будут напряжения, называемые *начальными* или *монтажными*. В статически определимых конструкциях неточность размеров элементов не требует приложения усилий при монтаже и в элементах не возникают начальные напряжения.

В элементах статически неопределимых систем усилия и напряжения возникают также при изменении температуры.

1. Предположим, что стержни конструкции, рассмотренной в предыдущем примере, изготовлены с заданными площадями поперечных сечений F_1 и $F_2 = F_3$ и средний стержень оказался короче на величину Δ (рис. 143, а). Если величина Δ незначительна по сравнению с длинами стержней, то, приложив определенные усилия, можно все три стержня соединить в узле, который займет после сборки какое-то положение A (рис. 143, б). Очевидно, при этом средний стержень будет растянут, а боковые сжаты. Определим монтажные усилия в стержнях.

Статическая сторона задачи. Уравнения равновесия узла A (рис. 143, в) следующие:

$$\begin{aligned} \sum X &= N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 - N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим, что $N_2 = N_3$. Остается одно уравнение с двумя неизвестными:

$$N_1 - 2N_2 \cos \alpha = 0. \quad (5.52)$$

Геометрическая сторона задачи. Из приведенного на рис. 143, б построения следует, что

$$\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1) \cos \alpha. \quad (5.53)$$

Физическая сторона задачи. По закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \quad (5.54)$$

Синтез. Подставляя значения Δl_1 и Δl_2 из выражений (5.54) в выражение (5.53), имеем

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1} \right) \cos \alpha.$$

Выразим N_2 через N_1 и Δ :

$$N_2 = \frac{EF_2}{l_2} \left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1} \right) \cos \alpha,$$

или

$$N_2 = c_2 \left(\Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cos \alpha.$$

Внося N_2 в уравнение (5.52), получим

$$N_1 - 2c_2 \left(\Delta - \frac{N_1}{c_1} \right) \cos^2 \alpha = 0.$$

Отсюда находим растягивающее усилие в среднем стержне:

$$N_1 = \frac{2c_2 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha} \Delta. \quad (5.55)$$

Сжимающие усилия в боковых стержнях определим на основании уравнения (5.52):

$$N_2 = \frac{N_1}{2 \cos \alpha}. \quad (5.56)$$

Усилия в стержнях зависят как от отношения жесткостей, так и от величины Δ .

Пусть в рассматриваемой конструкции (рис. 143) все стержни изготовлены из стали ($E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см²). Площади поперечных сечений стержней $F_1 = 3$ см², $F_2 = F_3 = 2$ см²; проектная длина стержня $l_1 = 2$ м, углы наклона крайних стержней $\alpha = 30^\circ$. После соединения крайних стержней оказалось, что средний стержень короче, чем это необходимо для свободной сборки, на величину $\Delta = 0,15$ см. Найдем усилия и напряжения, возникшие после сборки конструкции.

По формуле (5.55) находим растягивающее усилие в среднем стержне:

$$N_1 = \frac{2 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,866}{200} \cdot 0,866^2}{1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,866 \cdot 200}{200 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3} \cdot 0,866^2} \cdot 0,15 \text{ кгс} = 2090 \text{ кгс}.$$

Сжимающие усилия в боковых стержнях, согласно выражению (5.56),

$$N_2 = N_3 = \frac{2090}{2 \cdot 0,866} \text{ кгс} = 1206 \text{ кгс}.$$

Соответственно напряжения в стержнях

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2090}{3} \text{ кгс/см}^2 = 697 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{N_2}{F_2} = -\frac{1206}{2} \text{ кгс/см}^2 = -603 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, сравнительно небольшая неточность, допущенная в длине стержня при изготовлении, вызывает большие начальные (монтажные) напряжения.

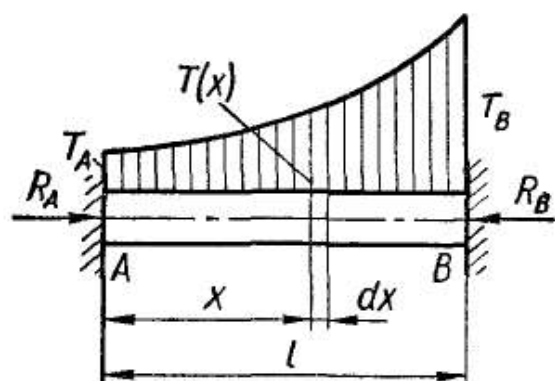


Рис. 144

2. Определим температурные напряжения в стержне AB (рис. 144) длиной l и площадью поперечного сечения F . Модуль упругости материала E , коэффициент линейного температурного расширения α . Стержень закреплен плотно между двумя стенками и нагрет так, что на конце A температура его повысилась на T_A , на конце B — на T_B ,

а по длине стержня она изменяется по закону

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n. \quad (5.57)$$

При $n = 0$ изменение температуры по длине стержня постоянно и равно T_B , при $n = 1$ температура изменяется линейно, при $n = 2$ — по закону параболы второго порядка и т. д.

Определим реакции закреплений и напряжения в стержне.

Статическая сторона задачи. При повышении температуры стержень стремится удлинить. Этому препятствуют жесткие опоры, в результате чего возникают реакции, направленные вдоль оси стержня (рис. 144).

Для системы сил, направленных по одной прямой, можно составить одно уравнение равновесия:

$$\sum X = R_A - R_B = 0,$$

откуда

$$R_A = R_B = R. \quad (5.58)$$

Следовательно, задача один раз статически неопределима. Осевая сила в стержне $N = -R$.

Геометрическая сторона задачи. Вследствие закрепления концов стержня его длина не изменяется:

$$\Delta l = 0. \quad (5.59)$$

Физическая сторона задачи. Укорочение свободного стержня, вызванное продольными силами, равными реакциям закреплений,

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF}. \quad (5.60)$$

Удлинение свободного стержня вследствие нагрева определим следующим образом. На расстоянии x от конца A стержня выделим элемент длиной dx , для которого повышение температуры $T(x)$ может считаться постоянным. Температурное удлинение этого элемента

$$\Delta dx_T = \alpha T(x) dx = \alpha \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n \right) dx. \quad (5.61)$$

Температурное удлинение всего стержня найдем, проинтегрировав выражение (5.61) по длине стержня:

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n \right) dx = \alpha l \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (5.62)$$

Полное изменение длины стержня выразится так:

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_T = -\frac{Rl}{EF} + \alpha l \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right). \quad (5.63)$$

С и н т е з. Подставив выражение (5.63) в формулу (5.59), получим

$$-\frac{Rl}{EF} + \alpha l \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) = 0, \quad (5.64)$$

откуда находим реакции опор:

$$R = \alpha \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) EF \quad (5.65)$$

и напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{R}{F} = -\alpha \left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) E. \quad (5.66)$$

При $n = 0$ последние две формулы переходят в формулы для случая равномерного нагрева стержня по длине на $\Delta T = T_B$:

$$R = \alpha \Delta T E F \quad \text{и} \quad \sigma = -\alpha E \Delta T.$$

Рассмотрим числовой пример. Определим осевую силу и напряжения в стальном стержне, если $l = 80$ см; $F = 20$ см²; $E = 2 \times 10^6$ кгс/см²; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$; $T_A = 10^\circ\text{C}$; $T_B = 55^\circ\text{C}$. Температура по длине стержня изменяется по закону параболы второго порядка ($n = 2$).

Подставляя числовые значения в формулы (5.65) и (5.66), найдем

$$N = -125 \cdot 10^{-7} \left(10 + \frac{55 - 10}{3} \right) 2 \cdot 10^6 \cdot 20 \text{ кгс} = -12500 \text{ кгс},$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{12500}{20} \text{ кгс/см}^2 = -625 \text{ кгс/см}^2.$$

Заметим, что при понижении температуры в системе, подобной изображенной на рис. 144, возникают растягивающие напряжения.

На основании рассмотренных в параграфе примеров можно отметить следующие особенности статически неопределимых конструкций, которыми они отличаются от статически определимых:

1. Распределение усилий между элементами статически неопределимых конструкций зависит от жесткостей этих элементов. Если увеличить жесткость какого-либо из них, то он примет на себя большее усилие. Изменяя соотношение жесткостей элементов конструкций, можно любым образом менять распределение усилий в них.

2. В статически неопределимых конструкциях при изменении температуры ее элементов по сравнению с температурой, при которой осуществлялась сборка конструкций, возникают усилия и напряжения.

3. В элементах статически неопределимых конструкций могут существовать усилия и напряжения при отсутствии внешней нагрузки. Эти усилия и напряжения, называемые начальными (монтажными), появляются при сборке конструкции. Начальные напряжения или создаются с определенной целью (например, затяжка болтов, прессовая посадка), или возникают вследствие неточного изготовления отдельных элементов конструкций.

4. В статически неопределимых конструкциях в общем случае во всех элементах одновременно нельзя получить напряжения, равные допускаемым. При проектировании таких конструкций это следует иметь в виду.

§ 38. РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ

Совершенно гибкой называется нить, которая способна сопротивляться только растяжению. Из шести компонентов внутренних сил в поперечных сечениях такой нити только осевая растягивающая сила не равна нулю. В инженерной практике широко распространены системы, которые с известным приближением могут рассматриваться как гибкие нити. Таковы воздушные линии электрических проводов, провода телеграфной сети, контактные провода электрифицированных железных дорог и трамваев, цепи висячих мостов, тросы канатных дорог и кабелькранов и т. п.

Точки подвеса нити могут находиться на одном или на разных уровнях (рис. 145).

При расчете на прочность длинных гибких нитей, кроме других нагрузок, существенное значение имеет их собственный вес. Пусть весомая гибкая нить постоянного поперечного сечения подвешена в двух точках, расположенных на разных уровнях (рис. 145, б) или на одном уровне (рис. 145, а). Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой.

Введем следующие обозначения:

l_1 — расстояние между точками A и B подвеса нити;

l — пролет, равный горизонтальной проекции расстояния l_1 ;

h — разность уровней точек подвеса нити;
 f — удаление нити от прямой AB , соединяющей точки подвеса нити, измеренное посередине пролета;
 L — длина неподвешенной нити;
 q — интенсивность нагрузки на единицу длины нити.

В случае одинакового уровня точек подвеса величина f является удалением низшей точки нити от горизонтальной линии AB и называется *стрелой провисания*. Нагрузка q может быть не только собственным весом, но и включать в себя другие нагрузки, например вес льда при обледенении проводов, давление ветра. Эти нагрузки предполагаются также равномерно распределенными по длине нити.

В случае, когда нагрузка состоит из собственного веса нити, ее интенсивность

$$q = q_{\text{п}} = \gamma F, \quad (5.67)$$

где $q_{\text{п}}$ — вес единицы длины провода;

γ — вес единицы объема материала;

F — площадь поперечного сечения нити.

При обледенении проводов

$$q = q_{\text{п}} + q_{\text{л}}, \quad (5.68)$$

где $q_{\text{л}}$ — вес льда на единице длины провода.

Толщину корки льда в зависимости от климатического района принимают равной 0,5—2,5 см.

Перечисленные нагрузки действуют в вертикальной плоскости, давление же ветра на провод — в горизонтальной плоскости. Интенсивность его $q_{\text{в}}$ определяют, умножая давление ветра p на площадь диаметрального сечения единицы длины провода:

$$q_{\text{в}} = pd,$$

или

$$q_{\text{в}} = k\alpha q_{\text{ск}} d, \quad (5.69)$$

где $k = 1,2$ — аэродинамический коэффициент;

$\alpha = 0,85$ — коэффициент неравномерности ветра;

$q_{\text{ск}}$ — скоростной напор;

d — диаметр провода с учетом его увеличения за счет обледенения.

Выражая $q_{\text{ск}}$ кгс/м через скорость ветра v , получаем

$$q_{\text{в}} = 636 \cdot 10^{-4} v^2 d. \quad (5.70)$$

Здесь скорость ветра v — в метрах в секунду, а диаметр провода d — в метрах.

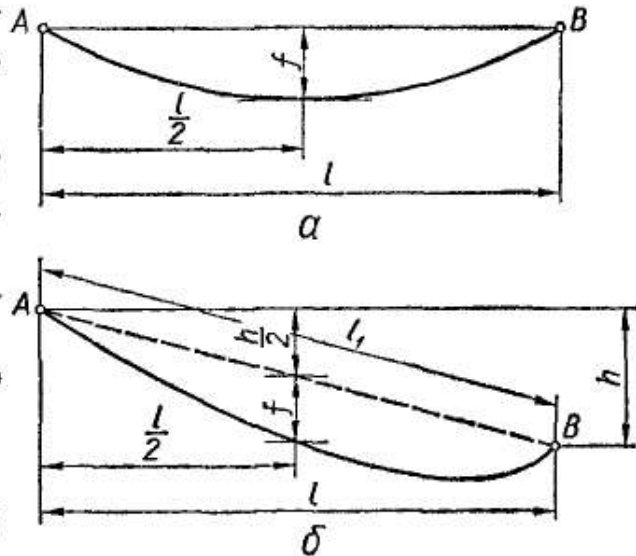


Рис. 145

Суммарную интенсивность нагрузки на провод найдем в результате геометрического сложения вертикальной и горизонтальной нагрузок:

$$q = \sqrt{(q_n + q_{л})^2 + q_v^2} \quad (5.71)$$

При этом, естественно, плоскость действия суммарной нагрузки, совпадающая с плоскостью провисания нити, не будет вертикальной.

На практике провисание нити чаще всего бывает небольшим — таким, при котором длина нити по кривой провисания мало отличается от длины пролета (обычно не более чем на 10%). Ограничим-

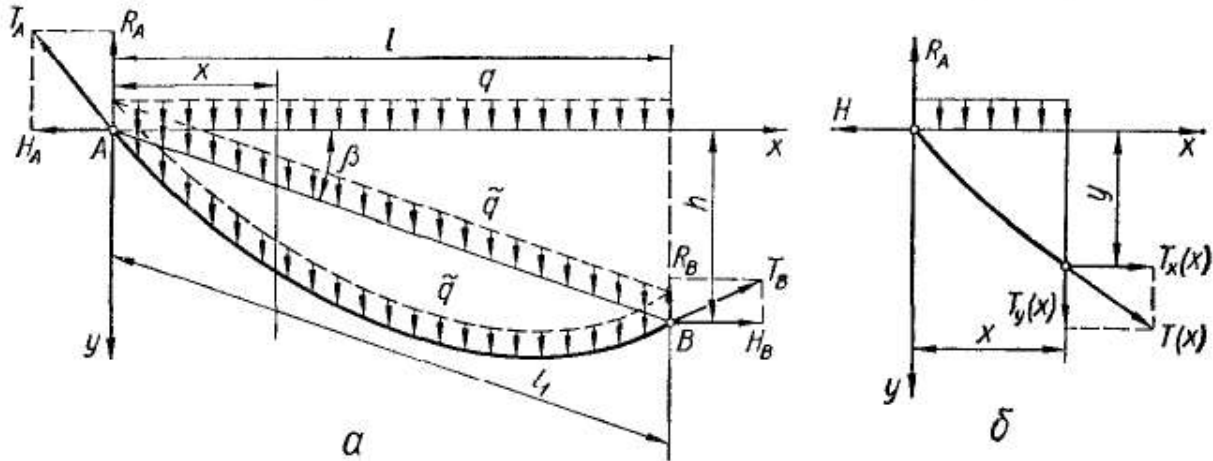


Рис. 146

ся рассмотрением только таких пологих нитей. В этом случае для упрощения расчетов с достаточной степенью точности можно считать, что нагрузка, действующая на подвешенную нить, равномерно распределена не по длине нити, а по длине линии AB , соединяющей точки подвеса (рис. 146, a).

Для удобства вычислений эту нагрузку \tilde{q} заменяем статически эквивалентной нагрузкой q , распределенной вдоль пролета l . Очевидно,

$$ql = \tilde{q}l_1,$$

отсюда

$$q = \tilde{q} \frac{l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos \beta}. \quad (5.72)$$

Статическая сторона задачи. Рассмотрим равновесие нити. Так как нить предполагается совершенно гибкой, то растягивающие усилия в каждом поперечном сечении должны быть направлены по касательной к кривой провисания нити. В точках прикрепления эти усилия равны реакциям опор. Обозначим последние соответственно через T_A и T_B . Выберем начало координат в левой точке подвеса нити и направим оси координат так, как показано на рис. 146, a .

Заменяя реакции опор их горизонтальными и вертикальными составляющими, запишем уравнения равновесия нити:

$$\begin{aligned}\sum X &= -H_A + H_B = 0; \\ \sum Y &= -R_A - R_B + ql = 0; \\ \sum M_B &= -H_A h + R_A l - \frac{ql^2}{2} = 0.\end{aligned}\tag{5.73}$$

Из уравнений (5.73) следует, что

$$H_A = H_B = H;\tag{5.74}$$

$$R_A = \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l};\tag{5.75}$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}.\tag{5.76}$$

Так как из трех уравнений равновесия нельзя определить четыре неизвестных (H_A , R_A , H_B и R_B), то задача является один раз статически неопределимой.

Рассмотрим равновесие части нити, отсеченной любым сечением (рис. 146, б):

$$\begin{aligned}\sum X &= -H + T_x(x) = 0; \\ \sum Y &= -R_A + qx + T_y(x) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом формулы (5.75) получаем

$$T_x(x) = H;\tag{5.77}$$

$$T_y(x) = H \frac{h}{l} + q \left(\frac{l}{2} - x \right).\tag{5.78}$$

Как видно из выражения (5.77), горизонтальная составляющая растягивающего усилия в любом поперечном сечении нити постоянна и равна величине H . Усилие H называется *горизонтальным натяжением нити*.

Таким образом, растягивающее усилие в произвольном сечении нити

$$T(x) = \sqrt{T_x^2(x) + T_y^2(x)} = \sqrt{H^2 + \left[H \frac{h}{l} + q \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]^2}.\tag{5.79}$$

Как видно, наибольшее растягивающее усилие T_{\max} действует в высшей точке подвеса нити (при $x = 0$):

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H \frac{h}{l} \right)^2}.$$

Для пологих нитей различие между наибольшим растягивающим усилием, действующим у более высокой точки подвеса, и натяжением H невелико. Поэтому с достаточной для практики точностью можно считать, что растягивающее усилие в нити постоянно и равно

величине натяжения H . По этой величине обычно и ведут расчет нити на прочность.

Выясним форму кривой провисания нити. С этой целью запишем уравнение для изгибающего момента в каком-либо сечении (рис. 146, б). Поскольку нить совершенно гибкая, то во всех ее сечениях изгибающий момент равен нулю:

$$M(x) = R_A x - Hy - \frac{qx^2}{2} = 0. \quad (5.80)$$

С учетом формулы (5.75) получим

$$\left(\frac{ql}{2} + H \frac{h}{l}\right)x - Hy - \frac{qx^2}{2} = 0, \quad (5.81)$$

откуда

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2H}, \quad (5.82)$$

т. е. кривая провисания нити выражается квадратичной параболой.

Заметим, что если задачу решать точно, считая нагрузку распределенной равномерно по длине нити, а не по пролету, то кривая провисания будет цепной линией. Формула (5.82), являясь первым членом разложения уравнения цепной линии в ряд Маклорена по степеням x , дает для пологих нитей хорошее приближение при решении практических задач.

Определим возможные положения нижней точки кривой провисания нити. Координаты этой точки обозначим через $x = a$, $y = f'$

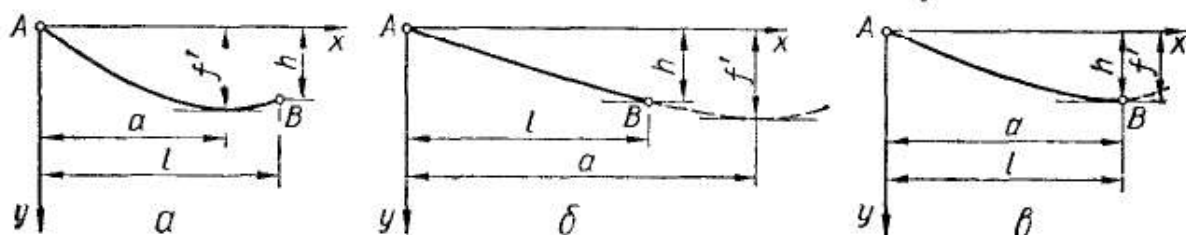


Рис. 147

(рис. 147, а). В ней y имеет экстремальное значение. Для определения его возьмем производную от выражения (5.82):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} \quad (5.83)$$

и приравняем ее к нулю:

$$\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} = 0. \quad (5.84)$$

Отсюда найдем значение абсциссы, определяющее положение нижней точки:

$$x = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (5.85)$$

Нижшая точка кривой провисания нити всегда находится ближе к более низкой точке подвеса.

Подставляя выражение (5.85) в формулу (5.82), найдем экстремальное значение ординаты, т. е. величину наибольшего провисания нити:

$$y_{\text{макс}} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \quad (5.86)$$

Будем различать три характерных случая расположения низшей точки кривой провисания нити:

1. Низшая точка кривой провисания находится в пределах пролета, т. е. $a < l$ (рис. 147, а). Согласно выражению (5.85), это будет иметь место, когда

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.87)$$

2. Низшая точка кривой провисания лежит вне пролета, т. е. $a > l$ (рис. 147, б). Это будет при условии

$$H > \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.88)$$

3. Низшая точка кривой совпадает с более низкой точкой подвеса, т. е. $a = l$ (рис. 147, в). Необходимое условие для этого случая

$$H = \frac{ql^2}{2h}. \quad (5.89)$$

Во всех трех случаях координаты a и f' низшей точки определяются по формулам (5.85) и (5.86).

Установим зависимость между натяжением H и величиной f . Посредине пролета $x = \frac{l}{2}$, а $y = \frac{h}{2} + f$ (рис. 145, б). Подставив эти значения координат в формулу (5.82), получим

$$f = \frac{ql^2}{8H}, \quad (5.90)$$

или

$$\boxed{H = \frac{ql^2}{8f}}. \quad (5.91)$$

Выразим натяжение нити H через наибольшее провисание f' . Из формулы (5.86), решая квадратное уравнение относительно натяжения H , получим

$$H = \frac{ql^2}{h^2} \left[f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f' - h)} \right]. \quad (5.92)$$

Если низшая точка кривой провисания лежит в пределах пролета, то перед корнем следует брать знак «минус», если вне пролета — знак «плюс», так как в первом случае натяжение H меньше, чем во втором, что видно из сравнения выражений (5.87) и (5.88).

Геометрическая сторона задачи. Установим связь между длиной подвешенной нити, пролетом и величиной f ,

характеризующей провисание нити. Длина элемента кривой, как известно,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Если нить пологая, то величина $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ мала по сравнению с единицей. Раскладывая выражение $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ в ряд по формуле бинома Ньютона и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$dS = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (5.93)$$

Подставляя сюда $\frac{dy}{dx}$ из выражения (5.83) и интегрируя по всей длине пролета, будем иметь

$$S = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} \right)^2 \right] dx = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l}. \quad (5.94)$$

Подставляя на основании формулы (5.91) $H = \frac{ql^2}{8f}$, получим, что

$$\boxed{S = l + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l} + \frac{h^2}{2l}}. \quad (5.95)$$

Из геометрических соображений удлинение ΔS нити длиной L после подвески

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - L. \quad (5.96)$$

Физическая сторона задачи. Установим также физические зависимости, выражающие изменение длины нити от растягивающего усилия и от изменения температуры. Как указывалось, для пологих нитей растягивающее усилие можно принять равным натяжению H . При определении удлинений длину нити заменим длиной l_1 , что достаточно точно при малом провисании. Тогда упругое удлинение от растяжения

$$\Delta S_H = \frac{Hl_1}{EF} = \frac{Hl}{EF \cos \beta}. \quad (5.97)$$

Температурное удлинение нити определяется по формуле

$$\Delta S_{T^\circ} = \alpha l_1 (T^\circ - T_0^\circ) = \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^\circ - T_0^\circ), \quad (5.98)$$

где T_0° — температура в момент подвешивания нити;
 T° — температура, для которой производится расчет нити.

Суммарное изменение исходной длины нити

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_{T^0} = \frac{Hl}{EF \cos \beta} + \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^0 - T_0^0). \quad (5.99)$$

Формулы (5.96) и (5.99) выражают одну и ту же величину — удлинение подвешенной нити. Приравняв правые части этих равенств, найдем, что

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{Hl}{EF \cos \beta} - \frac{\alpha l}{\cos \beta} (T^0 - T_0^0). \quad (5.100)$$

Уравнение (5.100) совместно со статическим уравнением (5.90) позволяет определить натяжение нити H и стрелу провисания f .

Определив из уравнения (5.100) натяжение нити H , можем по формуле (5.79) вычислить растягивающее усилие в произвольном сечении нити, а значит, и $T_{\text{макс}}$. Зная последнее, проверяем прочность нити:

$$\sigma = \frac{T_{\text{макс}}}{F} \approx \frac{H}{F} \leq [\sigma];$$

с учетом формулы (5.91) получаем

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} \leq [\sigma]. \quad (5.101)$$

При расчете нитей удобно ввести понятие удельной нагрузки $\tilde{\gamma}$, которая представляет собой интенсивность погонной нагрузки q , отнесенную к площади поперечного сечения нити:

$$\tilde{\gamma} = \frac{q}{F}.$$

Если действует только собственный вес, удельная нагрузка совпадает с объемным весом материала нити.

С учетом сказанного условие прочности можно записать так:

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma} l^2}{8f} \leq [\sigma]. \quad (5.102)$$

Заметим, что при расчете электрических проводов сечение нити определяется из электротехнических соображений, а затем выполняется проверочный расчет.

Приведем расчетные формулы для часто встречающегося случая нити с точками подвеса, расположенными на одном уровне (рис. 148, а), т. е. при $\cos \beta = 1$.

В этом случае $h = 0$, реакции в точках подвеса одинаковы: $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$, наибольшее провисание f будет посередине пролета. Как и ранее, оно связано с натяжением формулами (5.90) и (5.91):

$$\begin{aligned} f &= \frac{ql^2}{8H}; \\ H &= \frac{ql^2}{8f}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Уравнение совместности деформаций (5.100) принимает вид

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} - \frac{Hl}{EF} - \alpha l (T^\circ - T_0^\circ). \quad (5.104)$$

Влияние изменения температуры и нагрузки на напряжение и стрелу провисания нити. В процессе эксплуатации нить может подвергаться воздействию различных нагрузок и температур. Выясним, как изменяются напряжения и стрела провисания нити при изменении этих факторов. С этой целью рассмотрим два состояния нити: *m*-е и *n*-е (рис. 149).

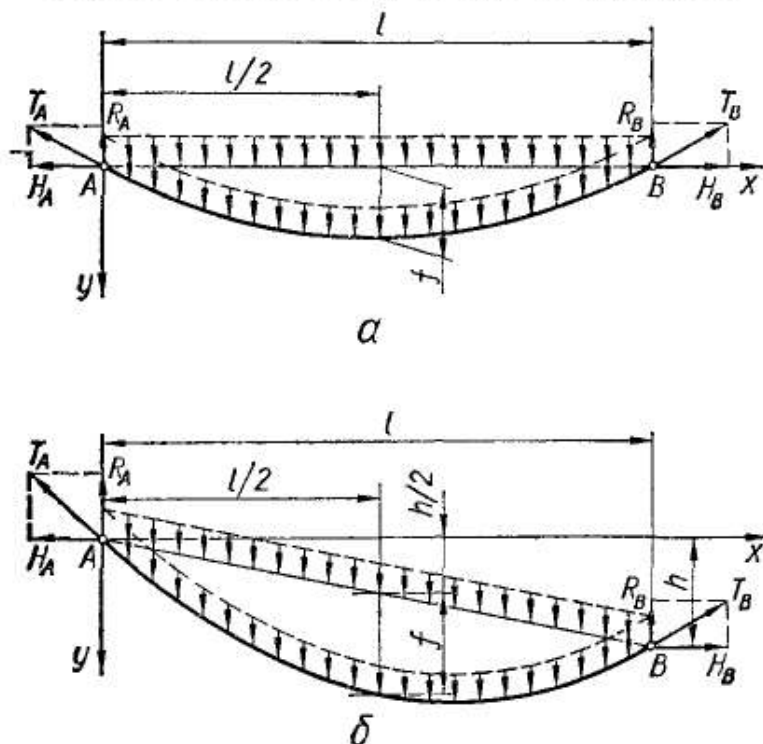


Рис. 148

Пусть в *m*-м состоянии температура равна T_m° , погонная нагрузка — q_m , а стрела провисания — f_m ; при этом натяжение $H_m = \frac{q_m l^2}{8f_m}$, а напряжение в нити $\sigma_m = \frac{H_m}{F}$.

При изменении температуры и нагрузки в *n*-м состоянии до величин T_n° и q_n стрела провисания станет f_n , натяжение $H_n = \frac{q_n l^2}{8f_n}$, а напряжение $\sigma_n = \frac{H_n}{F}$.

Установим зависимость между напряжениями и стрелами провисания нити для указанных двух состояний.

Задача легко решается, если записать выражение для длины нити L к моменту подвеса через параметры обоих состояний. Если точки подвеса нити находятся на одном уровне, то на основании уравнения (5.104), исходя из параметров *m*-го и *n*-го состояний, соответственно получим

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l (T_m^\circ - T_0^\circ); \quad (5.105)$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l (T_n^\circ - T_0^\circ). \quad (5.106)$$

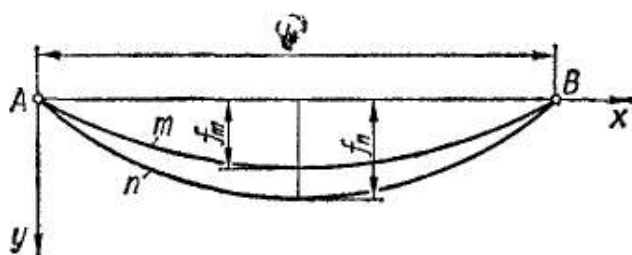


Рис. 149

Правые части этих двух выражений, представляющие одну и ту же величину — длину нити к моменту подвеса, равны между собой. Следовательно,

$$l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l (T_m^\circ - T_0^\circ) = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l (T_n^\circ - T_0^\circ).$$

Отсюда, обозначая $\frac{q_m}{F} = \tilde{\gamma}_m$; $\frac{q_n}{F} = \tilde{\gamma}_n$ и учитывая, что $\frac{H_m}{F} = \sigma_m$; $\frac{H_n}{F} = \sigma_n$, находим

$$\boxed{\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E (T_m^\circ - T_n^\circ).} \quad (5.107)$$

Эту зависимость иногда называют *уравнением состояния нити*. Его можно переписать также в виде

$$\sigma_n^3 - \left[\sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} - \alpha E (T_n^\circ - T_m^\circ) \right] \sigma_n^2 - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24} = 0. \quad (5.108)$$

Если выразить напряжения через стрелы провисания:

$$\sigma_m = \frac{\tilde{\gamma}_m l^2}{8f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n l^2}{8f_n},$$

то уравнение (5.108) можно записать так:

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 (T_n^\circ - T_m^\circ) - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E} = 0. \quad (5.109)$$

Чтобы получить уравнения состояний для нитей, подвешенных на разных уровнях (рис. 148, б), в качестве исходной формулы длины L следует взять формулу (5.100). Тогда уравнение состояния (5.107) примет вид

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E \cos \beta}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E \cos \beta}{24\sigma_m^2} + \alpha E (T_m^\circ - T_n^\circ). \quad (5.110)$$

Выразив, как и выше, напряжения через стрелы провисания, получим

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 \frac{(T_n^\circ - T_m^\circ)}{\cos \beta} - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m \cos \beta} \right] f_n - \frac{3}{64} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E \cos \beta} = 0. \quad (5.111)$$

Выведенные выше кубические уравнения могут быть решены любым известным методом, в том числе и графическим.

При графическом решении, например, уравнения (5.109), имеющего вид

$$f_n^3 - a f_n - b = 0,$$

где a и b — известные числа, запишем его так:

$$f_n^3 = af_n + b. \quad (5.112)$$

В прямоугольных координатах строим графики $y = f_n^3$ и $y = af_n + b$ (рис. 150). Очевидно, что абсцисса точки пересечения кубической параболы с прямой дает действительный корень уравнения, а значит, и искомую стрелу. Два других корня кубического уравнения мнимые.

В случае необходимости уточнить полученное графическим способом решение можно применить способ Ньютона:

$$f_n^{k+1} = f_n^k + \frac{F(f_n)}{F'(f_n)},$$

где

$$F(f_n) = f_n^3 - af_n - b;$$

$$F'(f_n) = 3f_n^2 - a.$$

Понятие о критическом пролете. Расчет на прочность нужно также установить, при каком состоянии нити в ней будет максимальное напряжение. Оно может быть:

а) при наибольшей нагрузке (гололед и умеренный ветер или отсутствие гололеда, но сильный ветер);

б) при самой низкой температуре без гололеда.

Так как наибольшая нагрузка не совпадает во времени с наиболее низкой температурой, то для расчета важно установить, какое из этих состояний будет опасным. Выясним влияние нагрузки и температуры на напряжения в зависимости от длины пролета нити.

Исходим из уравнения состояния (5.107). В случае весьма малых пролетов, положив в этом уравнении $l = 0$, найдем, что

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E (T_m^\circ - T_n^\circ),$$

т. е. при малых пролетах изменение напряжения зависит главным образом от температуры.

С уменьшением температуры T_n° напряжения σ_n растут и наибольшие напряжения в нити имеют место при низшей температуре.

Рассмотрим теперь случай весьма больших пролетов. Разделив уравнение (5.107) на l^2 и положив $l \rightarrow \infty$, получим

$$\sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\gamma}_m} \cdot \sigma_m.$$

Следовательно, если пролеты велики, то изменение напряжения в основном зависит от нагрузки на нить. Наибольшие напряжения будут действовать при максимальных нагрузках.

Найдем такую длину пролета, при которой напряжения в нити одинаковы в обоих опасных состояниях, т. е. как при наибольшей

нагрузке, так и при наиболее низкой температуре. Такой пролет называется *критическим* ($l_{кр}$).

Пусть T_n° соответствует температуре гололеда, т. е. $T_n^\circ = T_{гол}^\circ$ (обычно $T_{гол}^\circ = -5^\circ\text{C}$), при этом $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{\max}$; T_m° соответствует низшей температуре, т. е. $T_m^\circ = T_{\min}^\circ$; на нить в этом случае действует только собственный вес, так что $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_1$.

При $l = l_{кр}$, согласно определению,

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma].$$

Внося эти данные в выражение (5.107), находим, что

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha (T_{гол}^\circ - T_{\min}^\circ)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}}. \quad (5.113)$$

Сопоставляя расчетный пролет с критическим, можно установить, при каких условиях в нити действует наибольшее напряжение. Так, если $l < l_{кр}$, то наибольшее напряжение будет при низшей температуре. В случае $l > l_{кр}$ опасное состояние будет при наибольшей нагрузке.

Пример 14. Многожильный медный провод сечением $F = 120 \text{ мм}^2$ подвешивают при температуре $T_0^\circ = 15^\circ\text{C}$ к опорам, расположенным на одном уровне на расстоянии $l = 100 \text{ м}$.

Определить: а) какую стрелу провисания f_0 необходимо дать проводу, чтобы напряжение в наиболее опасном состоянии равнялось допускаемому; б) высоту точек подвеса провода, чтобы расстояние его низшей точки от земли было не менее 6 м.

Расчет провода провести для следующих случаев:

1) температура $T_{гол}^\circ = -5^\circ\text{C}$; при этом провод кроме собственного веса нагружен слоем льда толщиной 1 см (гололед), а также горизонтальным давлением ветра $p = 24 \text{ кгс/м}^2$;

2) температура $T_{\min}^\circ = -40^\circ\text{C}$; действует только собственный вес провода;

3) температура $T_{\max}^\circ = +40^\circ\text{C}$; действует только собственный вес провода.

Первый и второй случаи могут оказаться опасными с точки зрения прочности провода. В третьем случае может образоваться наибольшая стрела провисания, по которой следует определить минимальную высоту точек подвешивания провода.

В соответствии с сортаментом проводов многожильный медный провод сечением $F = 120 \text{ мм}^2$ имеет диаметр $d = 14,2 \text{ мм}$ и вес погонного метра его $q_n = 1,09 \text{ кгс/м}$. Модуль упругости материала провода $E = 1,3 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$, коэффициент линейного температурного расширения $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Допускаемое напряжение для провода $[\sigma] = 800 \text{ кгс/см}^2$.

Найдем нагрузку q_{\max} в первом случае. Для определения веса льда необходимо знать внутренний и наружный диаметры ледяного покрова. Внутренний диаметр его равен диаметру провода, т. е. $d = 1,42 \text{ см}$; наружный диаметр D при толщине ледяной оболочки 1 см будет $D = 3,42 \text{ см}$. Площадь поперечного сечения ледяного покрытия провода

$$F_{л} = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 (3,42^2 - 1,42^2)}{4} \text{ см}^2 = 7,60 \text{ см}^2.$$

При объемном весе льда $\gamma_{\text{л}} = 0,9 \text{ гс/см}^3$ нагрузка от льда на погонный метр провода

$$q_{\text{л}} = \gamma_{\text{л}} F_{\text{л}} = \frac{0,9 \cdot 7,6 \cdot 100}{1000} \text{ кгс/м} = 0,684 \text{ кгс/м}.$$

Давление ветра на погонный метр обледеневшего провода

$$q_{\text{в}} = pD = \frac{24 \cdot 3,42}{100} \text{ кгс/м} = 0,821 \text{ кгс/м}.$$

Полную нагрузку на погонный метр обледеневшего провода найдем геометрическим сложением суммарной вертикальной и горизонтальной нагрузок:

$$q_{\text{макс}} = \sqrt{(q_{\text{п}} + q_{\text{л}})^2 + q_{\text{в}}^2} = \sqrt{(1,090 + 0,684)^2 + 0,821^2} \text{ кгс/м} = 1,96 \text{ кгс/м}.$$

Выясним, в каком из первых двух состояний провода напряжения в нем будут большими. Для этого находим

$$\tilde{\gamma}_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}}}{F} = \frac{0,0196}{1,2} \text{ кгс/см}^3 = 0,0163 \text{ кгс/см}^3;$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{0,0109}{1,2} \text{ кгс/см}^3 = 0,00908 \text{ кгс/см}^3.$$

По формуле (5.113) определяем длину критического пролета:

$$l_{\text{кр}} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha (T_{\text{гол}}^{\circ} - T_{\text{мин}}^{\circ})}{\tilde{\gamma}_{\text{макс}}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}} =$$

$$= 800 \sqrt{\frac{24 \cdot 17 \cdot 10^{-6} [-5 - (-40)]}{(163^2 - 90,8^2) 10^{-8}}} \text{ см} = 7060 \text{ см} \approx 71 \text{ м}.$$

Так как действительная длина пролета $l = 100 \text{ м}$ больше длины критического пролета, то большее напряжение в проводе $\sigma_{\text{макс}}$ будет при максимальной нагрузке ($q_{\text{макс}} = 1,96 \text{ кгс/м}$ и $T_{\text{гол}}^{\circ} = -5^{\circ} \text{ С}$), т. е. в первом состоянии. Приняв $\sigma_{\text{макс}} = [\sigma]$, найдем стрелу провисания провода в этом состоянии:

$$f_1 = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{8F [\sigma]} = \frac{1,96 \cdot 100^2}{8 \cdot 1,2 \cdot 800} \text{ м} = 2,54 \text{ м}.$$

Определим, какую стрелу провисания нужно дать проводу при подвешивании. Для этого воспользуемся зависимостью (5.109), приняв $q_m = q_{\text{макс}} = 1,96 \text{ кгс/м}$; $f_m = f_1 = 2,54 \text{ м}$; $T_m^{\circ} = T_{\text{гол}}^{\circ} = -5^{\circ} \text{ С}$; $q_n = q_{\text{п}} = 1,09 \text{ кгс/м}$; $T_n^{\circ} = T_0^{\circ} = 15^{\circ} \text{ С}$; $f_n = f_0$.

Подставляя числовые величины в уравнение (5.109), получим уравнение для определения f_0 :

$$f_0^3 - \left[2,54^2 + \frac{3}{8} \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (15 + 5) - \frac{3 \cdot 1,96 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,54 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} \right] f_0 -$$

$$- \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,3 \cdot 10^6 \cdot 1,2} = 0.$$

Проведя вычисления, будем иметь

$$f_0^3 - 5,41f_0 - 3,28 = 0.$$

Решая уравнение, выясняем, что

$$f_0 = 2,58 \text{ м}.$$

Найдем теперь, какую стрелу провисания получит провод при $T_{\text{макс}}^{\circ} = 40^{\circ}\text{C}$. Для этого вновь воспользуемся зависимостью (5.109), приняв $q_m = q_n = 1,09 \text{ кгс/м}$; $f_m = f_0 = 2,58 \text{ м}$; $T_m^{\circ} = T_0^{\circ} = 15^{\circ}\text{C}$; $q_n = q_n = 1,09 \text{ кгс/м}$; $T_n^{\circ} = T_{\text{макс}}^{\circ} = 40^{\circ}\text{C}$; $f_n = f_3$.

Подставив числовые значения, получим

$$f_3^3 - \left[2,58^2 + \frac{3}{8} \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (40 - 15) - \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,58 \cdot 1,3 \cdot 10^3 \cdot 1,2} \right] f_3 - \frac{3 \cdot 1,09 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,3 \cdot 10^3 \cdot 1,2} = 0,$$

или

$$f_3^3 - 7f_3 - 3,28 = 0.$$

Решив уравнение, найдем, что

$$f_3 = 2,85 \text{ м}.$$

Стрела провисания в третьем случае больше, чем после подвешивания (при $T_0^{\circ} = 15^{\circ}\text{C}$), а также больше, чем в первом случае. Очевидно, она больше стрелы провисания, которую будет иметь провод и во втором случае (при $T_{\text{мин}}^{\circ} = -40^{\circ}\text{C}$).

Для того чтобы низшая точка провода находилась на расстоянии не менее 6 м от земли, нужно точки подвеса расположить не ниже $6 \text{ м} + 2,85 \text{ м} = 8,85 \text{ м}$.

Глава 6

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

§ 39. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЧКЕ.

ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют смещению частиц, ограничивая его в большинстве случаев некоторой малой величиной.

В соответствии с гипотезой о сплошности материала следует считать, что каждая частица тела в сколь-угодно малой окрестности имеет бесконечное множество других частиц, окружающих ее по всем направлениям. Расположенная в данной точке частица по-разному взаимодействует с каждой из этих соседних частиц. Поэтому в одной и той же точке по разным направлениям напряжения будут различными и только в очень редких случаях они одинаковы во всех направлениях.

Исследуя напряженное состояние тела в данной точке A , в окрестности ее обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 151), который в увеличенном масштабе

показан на рис. 152. Грани параллелепипеда перпендикулярны к направлениям декартовых осей x , y , z . На этих гранях действуют внутренние силы, заменяющие воздействие удаленной части тела. Полные напряжения на гранях элемента представляют нормальными и касательными составляющими — проекциями полных напряжений на координатные оси. Нормальные напряжения обозначают буквой σ с индексом, соответствующим направлению нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения обозначают буквой τ с двумя индексами: первый соответствует направлению нормали к площадке, а второй — направлению самого напряжения. Например, на площадке, перпендикулярной к оси x

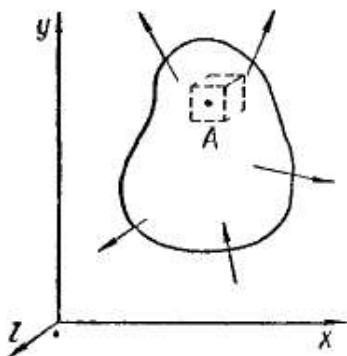


Рис. 151

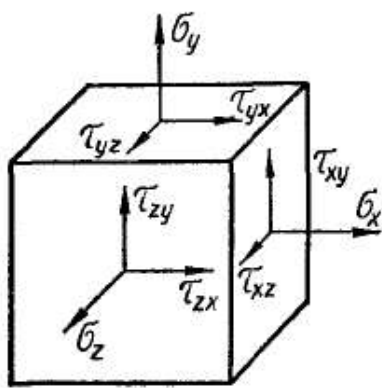


Рис. 152

(рис. 152), действуют напряжения σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} .

Можно показать, что совокупность напряжений на гранях такого элементарного параллелепипеда полностью характеризует напряженное состояние в точке нагруженного тела. Эта совокупность напряжений называется *тензором напряжений*.

Если ориентацию граней выделяемого элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения также изменятся. При этом можно провести такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Площадки, на которых касательных напряжений нет, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках — *главными напряжениями*. Можно доказать, что, как бы ни было загружено тело, в каждой точке его имеются, по крайней мере, три главные площадки, причем они взаимно перпендикулярны. Следовательно, в каждой точке будут и три главных напряжения и они тоже взаимно перпендикулярны. Направления, параллельные главным напряжениям, называют *главными направлениями напряжений* в данной точке.

Главные напряжения условимся всегда обозначать σ_1 , σ_2 и σ_3 ; при этом индексы следует расставлять так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (6.1)$$

Понимаем это неравенство в алгебраическом смысле, поэтому, если, например, одно из главных напряжений равно нулю, другое (растягивающее) составляет 600 кгс/см^2 , третье (сжимающее) равно -1400 кгс/см^2 , то их следует обозначить так:

$$\sigma_1 = +600 \text{ кгс/см}^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -1400 \text{ кгс/см}^2.$$

Такое напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны

нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 153, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то это *двухосное*, или *плоское*, напряженное состояние (рис. 153, б). Когда все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется *трехосным* или *объемным* (рис. 153, в).

Кроме того, различают однородные и неоднородные напряженные состояния. В однородном напряженном состоянии напряжения одинаковы в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечений. В случае однородного напряженного состояния размеры выделяемых элементов не играют никакой роли, так как напряжения одинаковы во всех точках одной (любой) грани и, следовательно, равномерно распределены по каждой грани.

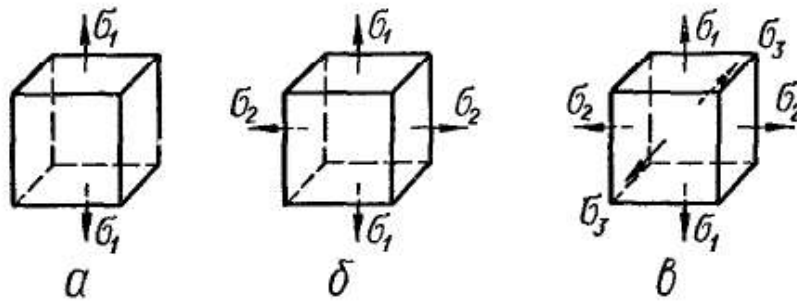


Рис. 153

В неоднородном напряженном состоянии элемент следует полагать бесконечно малым. Тогда предположение о равномерном распределении напряжений по граням будет выполняться с точностью до малых второго порядка. Следовательно, независимо от того, будет ли во всем теле однородное или неоднородное напряженное состояние, выделенные элементы будут всегда находиться в однородном напряженном состоянии.

§ 40. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Элементы, находящиеся в линейном напряженном состоянии, встречаются и в некоторых точках стержня, работающего на изгиб или сложное сопротивление, но главным образом в стержнях, испытывающих растяжение или сжатие.

Рассмотрим стержень, испытывающий простое растяжение (рис. 154, а). Как указывалось, в сечениях, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил, напряжения распределяются равномерно. В поперечных сечениях стержня нормальные напряжения (см. § 27)

$$\sigma_0 = \frac{N}{F_0} = \frac{P}{F_0} . \quad (6.2)$$

Касательные напряжения здесь равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками.

Перейдем теперь к определению напряжений в неглавных, наклонных площадках. Элемент, находящийся в линейном напряженном состоянии (а также и в двухосном), будем изображать в виде

плоской фигуры (рис. 154, б), помня, однако, что в действительности он имеет вид, изображенный на рис. 154, а. Наклон площадки определяется острым углом α между направлением оси стержня и нормалью n_α к площадке. Условимся считать угол α положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки. Введенную таким образом наклонную площадку будем обозначать (α) , а действующие на ней напряжения — ρ_α , σ_α и τ_α . Для вычисления этих напряжений применим метод сечений. Считая, что наклонная площадка рассекла элемент на две части, отбросим одну из них, например верхнюю, и рассмотрим равновесие оставшейся, нижней части¹.

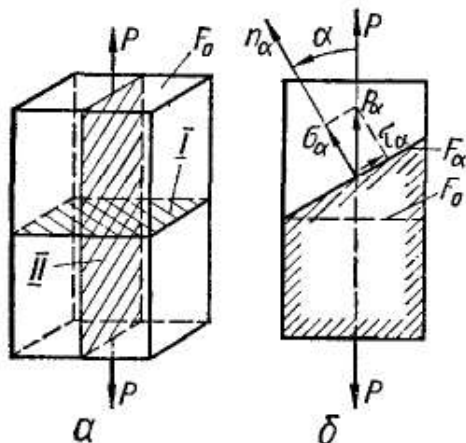


Рис. 154

для нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке:

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \cos \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \rho_\alpha \sin \alpha,$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (6.3)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.4)$$

Для напряжений принимаем следующее правило знаков: нормальное напряжение σ_α положительно, если оно растягивающее; касательное напряжение τ_α положительно, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть элемента относительно любой точки, взятой внутри ее, по часовой стрелке. На рис. 154, б напряжения σ_α и τ_α положительны.

Как видно из формул (6.4) и (6.3), при $\alpha = 0$ (рис. 154, а, площадка I) $\tau_\alpha = 0$, а $\sigma_\alpha = \sigma_0$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (рис. 154, а, площадка II) и τ_α и σ_α равны нулю. Аналогично можно показать, что во всех сечениях, параллельных оси стержня, нормальные и касательные напряжения также равны нулю. Таким образом, при простом растя-

¹ Здесь и далее будем считать, что стрелка нормали указывает на ту часть, которую отбрасываем, иначе говоря, n_α — это внешняя нормаль к оставшейся части элемента.

жении (сжатии) в каждой точке тела главные площадки перпендикулярны и параллельны его оси, а главные напряжения на них соответственно равны:

при растяжении

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{N}{F_0}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

при сжатии

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sigma_0.$$

Из выражения (6.4) видим, что касательные напряжения достигают своей наибольшей величины при $\alpha = \pm 45^\circ$, причем

$$\tau_{\alpha_{\max}} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (6.5)$$

Пример 15. Определить нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках для элементов, показанных на рис. 155, а—в.

Для элемента на рис. 155, а

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -500 \text{ кгс/см}^2; \\ \alpha = 30^\circ,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = -500 \cos^2 30^\circ = -375 \text{ кгс/см}^2,$$

$$\tau_\alpha = -\frac{500}{2} \sin 60^\circ = -217 \text{ кгс/см}^2.$$

Для элемента, показанного на рис. 155, б, $\sigma_1 = 500 \text{ кгс/см}^2$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\alpha = -30^\circ$ и, значит,

$$\sigma_\alpha = 500 \cos^2 (-30^\circ) = 375 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\tau_\alpha = \frac{500}{2} \sin (-60^\circ) = -217 \text{ кгс/см}^2.$$

Для элемента, показанного на рис. 155, в, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -500 \text{ кгс/см}^2$; $\alpha = -30^\circ$, следовательно,

$$\sigma_\alpha = -500 \cos^2 (-30^\circ) = -375 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\tau_\alpha = -\frac{500}{2} \sin (-60^\circ) = 217 \text{ кгс/см}^2.$$

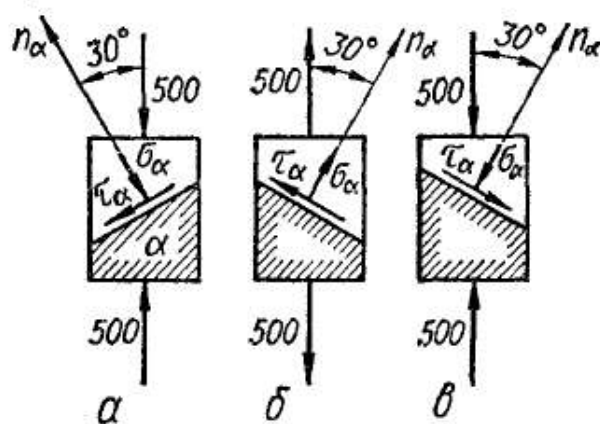


Рис. 155

§ 41. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При исследовании напряженного состояния элементов конструкций наиболее часто приходится иметь дело с плоским (двухосным) напряженным состоянием. Оно встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении. Поэтому на нем мы остановимся несколько подробнее.

Все определения и правила, которые были введены в предыдущем параграфе, остаются в силе и для плоского напряженного состояния. Поскольку, однако, здесь имеются два отличных от нуля главных напряжения, необходимо уточнить условие для отсчета углов, характеризующих наклон площадок. Будем считать, что этот угол всегда отсчитывается от направления алгебраически большего

из двух отличных от нуля главных напряжений до нормали к наклонной площадке, причем всегда берется острый угол, но с учетом его знака.

Определим напряжения на наклонных площадках. Рассмотрим элемент (рис. 156), грани которого являются главными площадками и по ним действуют положительные напряжения σ_1 и σ_2 , а третье главное напряжение $\sigma_3 = 0$ (главное направление, соответствующее σ_3 , перпендикулярно к плоскости чертежа).

Проведем сечение $I-I$, которое определит площадку (α), характеризующую положительным углом α . Напряжения σ_α и τ_α по

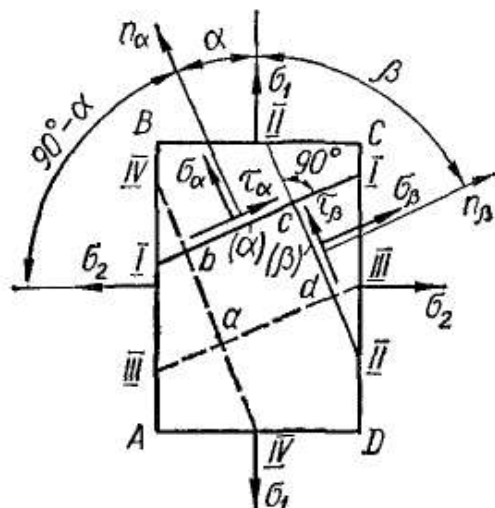


Рис. 156

этой площадке будут вызываться как действием σ_1 , так и действием σ_2 . Применяя принцип суперпозиции, т. е. рассматривая данное плоское напряженное состояние как наложение двух ортогональных одноосных напряженных состояний, можем записать

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,$$

где σ'_α и τ'_α — напряжения, вызванные действием σ_1 ;

σ''_α и τ''_α — напряжения, вызванные действием σ_2 .

Чтобы вычислить σ'_α и τ'_α , воспользуемся непосредственно формулами (6.3) и (6.4):

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Для определения σ''_α и τ''_α следует учесть, что n_α образует с направлением σ_2 угол $90^\circ - \alpha$. Тогда, имея в виду, что

$$\sin 2[-(90^\circ - \alpha)] = -\sin 2\alpha; \quad \cos^2[-(90^\circ - \alpha)] = \sin^2 \alpha,$$

получим

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Сложив, найдем, что

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (6.6)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.7)$$

Напомним, что сжимающие главные напряжения подставляют в эти формулы со знаком «минус», а угол α отсчитывают от алгебраически большего главного напряжения.

Воспользуемся формулами (6.6) и (6.7) для нахождения напряжений на площадке, перпендикулярной к площадке (α). Условимся такую площадку обозначать (β). Нормаль n_β к ней (рис. 156, сечение $II-II$) образует с направлением σ_1 угол

$$\beta = -(90^\circ - \alpha).$$

Формулы (6.6) и (6.7) верны для любых α . Подставив в них вместо α указанное значение β , будем иметь

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (6.8)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.9)$$

Совокупность формул (6.6) — (6.9) дает возможность находить напряжения по любым взаимно перпендикулярным наклонным площадкам, если известны главные напряжения. Проведем анализ этих формул.

Складывая левые и правые части равенств (6.6) и (6.8), обнаруживаем, что

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (6.10)$$

т. е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам не зависит от наклона этих площадок и равна сумме главных напряжений. Иначе это свойство может быть сформулировано так: *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам инвариантна по отношению к наклону этих площадок.*

Из формулы (6.7) или (6.9) видим, что, как и в одноосном напряженном состоянии, касательные напряжения достигают наибольшей величины при $\alpha = \pm 45^\circ$, т. е. по площадкам, наклоненным к главным площадкам под углом 45° , причем

$$\tau_{\alpha_{\max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (6.11)$$

Сравнивая формулы (6.7) и (6.9), находим, что

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (6.12)$$

Это равенство выражает закон парности касательных напряжений. Его можно сформулировать так: *если по какой-либо площадке имеется некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке непременно будет действовать касательное напряжение, равное ему по величине и противоположное по знаку.*

Наконец выясним, при каком наклоне площадок действующие по ним нормальные напряжения будут иметь экстремальную (наибольшую или наименьшую) величину. Для этого продифференцируем выражение (6.6) по α и приравняем производную к нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0.$$

Отсюда или

$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

или

$$\sin 2\alpha = 0.$$

В первом (частном) случае (равномерное всестороннее растяжение в плоскости) из формул (6.6) — (6.9) получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_1; \quad \tau_\alpha = \tau_\beta = 0.$$

Это значит, что любая площадка здесь главная. На всех этих площадках действуют одинаковые напряжения.

Во втором (общем) случае имеем

$$\alpha = 0^\circ; \quad \alpha = 90^\circ.$$

Но площадки, характеризуемые этими углами, — главные площадки.

Таким образом, приходим к заключению, что экстремальными значениями для нормальных напряжений σ_α будут величины главных напряжений, причем

$$\sigma_{\alpha_{\text{макс}}} = \sigma_1,$$

поскольку при $\alpha = 0$ вторая производная

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} = -2(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$

отрицательна, и

$$\sigma_{\alpha_{\text{мин}}} = \sigma_2,$$

поскольку при $\alpha = 90^\circ$

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} > 0.$$

На всех наклонных площадках нормальные напряжения имеют значения, промежуточные по величине между σ_1 и σ_2 .

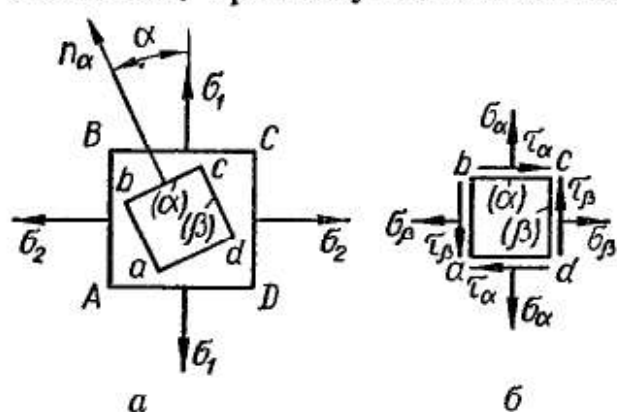


Рис. 157

Проведем теперь еще два сечения (рис. 156): сечение III—III, параллельное I—I, и сечение IV—IV, параллельное II—II. Поскольку напряженное состояние элемента однородно, напряжения по площадкам, образованным сечениями III—III и IV—IV, будут такими же, как соответственно по площадкам (α) и (β) . Поэтому элемент $abcd$, выделенный четырьмя сечениями из элемента $ABCD$ (рис. 157, а), будет иметь вид, показанный на рис. 157, б. Оба элемента определяют одно и то же напряженное состояние, но элемент $ABCD$ представляет его главными напряжениями, а элемент $abcd$ — напряжениями на наклонных площадках.

В теории напряженного состояния можно разграничить две основные задачи.

Прямая задача. В точке известны положения главных площадок и соответствующие им главные напряжения; требуется найти нормальные и касательные напряжения по площадкам, наклоненным под заданным углом α к главным. Иначе говоря, дан элемент $abcd$ (рис. 158) с действующими по его граням главными напряжениями; требуется найти напряжения на гранях элемента $a_1b_1c_1d_1$.

Обратная задача. В точке известны нормальные и касательные напряжения, действующие в двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку; требуется найти главные направления и главные напряжения. Иначе говоря, дан элемент $a_1b_1c_1d_1$ (рис. 158) с действующими по его граням нормальными и касательными напряжениями; нужно определить положение элемента $abcd$, т. е. угол α_0 , и найти главные напряжения.

Обе задачи можно решать как аналитическим, так и графическим путем.

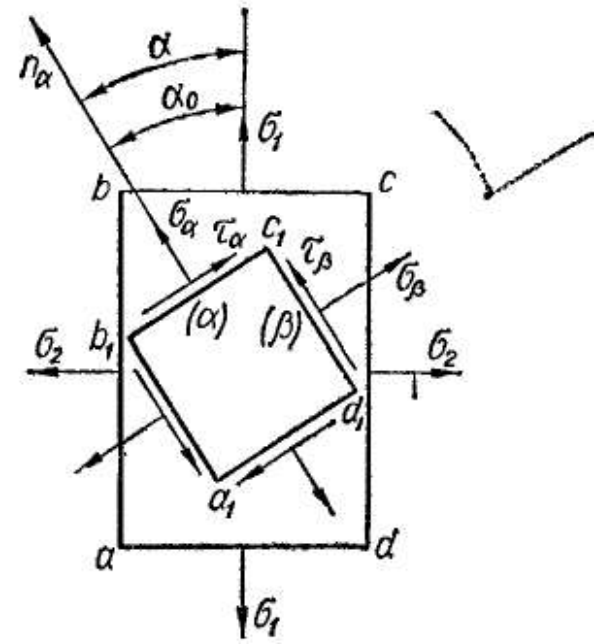


Рис. 158

§ 42. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. КРУГ НАПРЯЖЕНИЙ

Аналитическое решение прямой задачи дается формулами (6.6) — (6.9).

Проанализируем напряженное состояние, воспользовавшись простым графическим построением. Для этого введем в рассмотрение геометрическую плоскость и отнесем ее к прямоугольным координатным осям σ и τ , т. е. по оси абсцисс будем откладывать значения главных напряжений, а также напряжений σ_α и σ_β , а по оси ординат — значения τ_α и τ_β . Порядок решения опишем на примере напряженного состояния, изображенного на рис. 159.

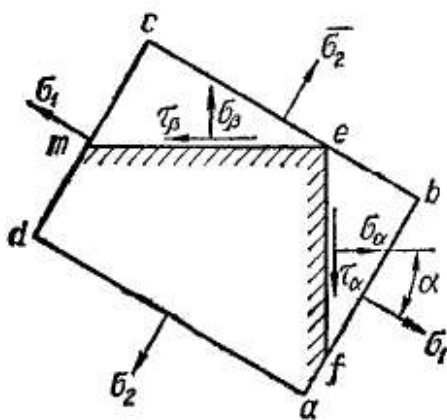


Рис. 159

Выбрав для напряжений некоторый масштаб, откладываем на оси абсцисс (рис. 160) отрезки

$$\overline{OA} = \sigma_1; \quad \overline{OB} = \sigma_2.$$

На AB как на диаметре строим окружность с центром в точке C . Построенный круг носит название *круга напряжений* или *круга Мора*.

Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках. Так, для определения напряжений на площадке, проведенной под углом α (рис. 159), из центра круга C проводим луч под углом 2α до пересечения с окружностью в точке D_α (положительные углы откладываем против часовой стрелки). Докажем, что абсцисса точки (отрезок $\overline{OK_\alpha}$) равна нормальному напряжению σ_α , а ордината ее (отрезок $\overline{K_\alpha D_\alpha}$) — касательному напряжению τ_α .

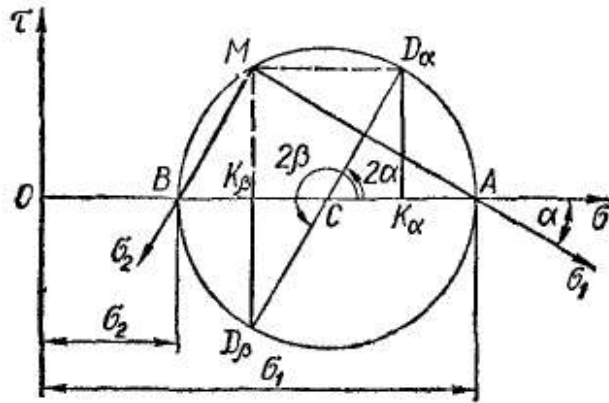


Рис. 160

Радиус круга

$$R = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Поскольку центр круга C лежит посередине между точками A и B , то

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Далее,

$$\overline{CK_\alpha} = R \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Тогда абсцисса точки D_α

$$\begin{aligned} \overline{OK_\alpha} &= \overline{OC} + \overline{CK_\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из треугольника $CD_\alpha K_\alpha$ ордината точки D_α

$$\overline{K_\alpha D_\alpha} = R \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.14)$$

Напряжение на площадке, перпендикулярной к рассмотренной, найдем, проведя луч под углом $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2\alpha + \pi$ и получив в пересечении с окружностью точку D_β . Очевидно, ордината точки D_β

$$\overline{K_\beta D_\beta} = -\overline{K_\alpha D_\alpha} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\beta \quad (6.15)$$

и, наконец, абсцисса точки D_β

$$\begin{aligned} \overline{OK_\beta} &= \overline{OC} - \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_\beta. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Сравнивая формулы (6.13), (6.14) с формулами (6.6), (6.7), видим, что действительно

$$\overline{OK_\alpha} = \sigma_\alpha; \quad \overline{K_\alpha D_\alpha} = \tau_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Следует подчеркнуть, что две точки круга — D_α и D_β , характеризующие напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках (α) и (β), всегда лежат на концах одного диаметра $D_\alpha D_\beta$.

Построенный круг Мора полностью описывает напряженное состояние элемента, изображенного на рис. 159. Если менять угол α в пределах от -90° до $+90^\circ$, то наклонные площадки (α) и (β) займут последовательно все возможные положения, а точки D_α и D_β опишут полный круг. В частности, при $\alpha = 0$, когда грани ef и et станут главными площадками и по ним будут действовать те же напряжения, что и на гранях элемента $abcd$, точка D_α совпадет с A (рис. 160), а D_β — с B .

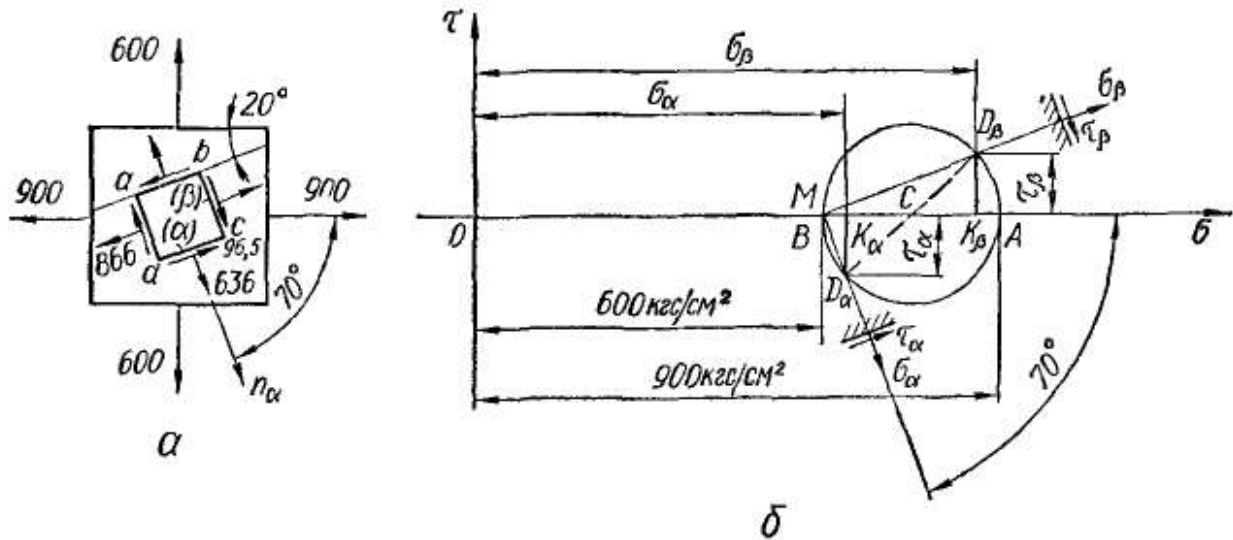


Рис. 161

Как и в случае круга инерции, найдем на круге напряжений положение полюса. Для этого из какой-либо точки круга проведем прямую, параллельную нормальному напряжению на площадке, которой эта точка соответствует. Так, проведя из точки D_α линию, параллельную σ_α [в нашем примере (рис. 160) — горизонталь], до пересечения с кругом, найдем искомый полюс — точку M . Если бы при этом мы исходили из точки D_β , то следовало провести линию, параллельную напряжению σ_β , т. е. вертикаль.

Как и при рассмотрении кругов инерции, можно показать, что линия, соединяющая полюс M с любой точкой круга, параллельна направлению нормального напряжения на площадке, которой эта точка соответствует. Так, например, линия MA параллельна главному напряжению σ_1 . Действительно, $\angle D_\alpha MA = \frac{1}{2} \angle D_\alpha CA = \alpha$, т. е. он соответствует углу между нормалью к площадке fe и направлением σ_1 . Очевидно, что линия MB параллельна направлению главного напряжения σ_2 .

Пример 16. На главных площадках действуют растягивающие напряжения 900 кгс/см² и 600 кгс/см². Требуется найти нормальные и касательные напряжения по граням элемента, одна из которых наклонена к горизонтали под углом 20° (рис. 161, а).

Произвольным образом обозначаем площадки (α) и (β) (например, так, как показано на рисунке) и проводим нормаль n_α . Тогда будем иметь $\sigma_1 = 900$ кгс/см²;

$\sigma_2 = 600 \text{ кгс/см}^2$; $\sigma_3 = 0$; $\alpha = -70^\circ$. Угол α отрицательный, так как здесь он отсчитывается по часовой стрелке.

Решая данную прямую задачу аналитически, по формулам (6.6)—(6.9) находим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = (900 \cdot 0,117 + 600 \cdot 0,884) \text{ кгс/см}^2 = 636 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = (900 \cdot 0,884 + 600 \cdot 0,117) \text{ кгс/см}^2 = 866 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{900 - 600}{2} (-0,643) \text{ кгс/см}^2 = -96,5 \text{ кгс/см}^2.$$

Учитывая знаки вычисленных напряжений, показываем напряжения на гранях элемента $abcd$ (рис. 161, а).

Графическое решение приведено на рис. 161, б. Проведя измерения, получим координаты точек D_α (3,18 см; -0,485 см) и D_β (4,33 см; 0,485 см). Имея в виду принятый масштаб (1 см — 200 кгс/см²), приходим к тем же значениям напряжений, которые были вычислены выше.

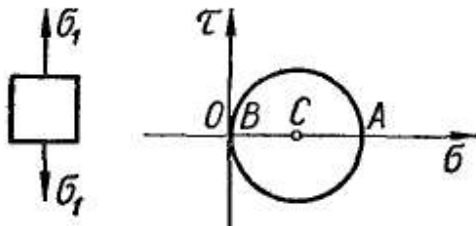


Рис. 162

Заметим, что одноосное напряженное состояние может рассматриваться как частный случай плоского. При этом круг напряжений будет проходить через начало координат (рис. 162). Наконец, в

случае равномерного всестороннего растяжения ($\sigma_1 = \sigma_2$) или сжатия ($\sigma_2 = \sigma_3$) в плоскости круг Мора превращается в точку. Тогда, как уже указывалось ранее, все площадки будут главными.

§ 43. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

При практических расчетах наиболее часто удается определить (теоретически или экспериментально) нормальные и касательные напряжения на некоторых двух взаимно перпендикулярных площадках. Пусть, например, известны напряжения σ_α , τ_α , σ_β , τ_β на

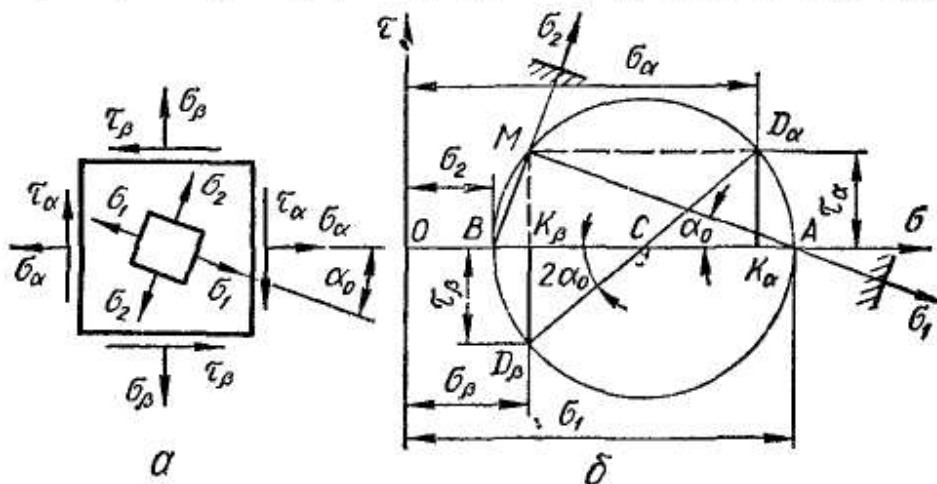


Рис. 163

взаимно перпендикулярных площадках выделенного элемента (рис. 163, а). По этим данным требуется определить величины главных напряжений и положение главных площадок.

Сначала решим эту задачу графически. Для определенности примем, что $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$, а $\tau_\alpha > 0$. В геометрической плоскости в системе

прямоугольных координат $\sigma - \tau$ нанесем точку D_α с координатами $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ и точку D_β с координатами σ_β, τ_β (рис. 163, б). Как указывалось при рассмотрении прямой задачи, точки D_α и D_β лежат на концах одного диаметра. Следовательно, соединив их, найдем центр круга — точку C — и радиусом $\overline{CD}_\alpha = \overline{CD}_\beta$ проводим окружность. Абсциссы точек ее пересечения с осью σ — отрезки \overline{OA} и \overline{OB} — дадут соответственно величины главных напряжений σ_1 и σ_2 .

Для определения положения главных площадок найдем полюс и воспользуемся его свойством. С этой целью из точки D_α проведем линию параллельно линии действия напряжения σ_α , т. е. горизонталь. Точка M пересечения этой линии с окружностью и является полюсом. Соединяя полюс M с точками A и B , получим направления главных напряжений σ_1 и σ_2 соответственно. Главные площадки перпендикулярны к найденным направлениям главных напряжений. На рис. 163, а внутри исходного элемента выделен элемент, ограниченный главными площадками. На гранях элемента показаны главные напряжения σ_1 и σ_2 .

Используем построенный круг напряжений для получения аналитических выражений главных напряжений σ_1 и σ_2 , соответствующих отрезкам \overline{OA} и \overline{OB} . Имеем

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}; \quad (6.17)$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB}. \quad (6.18)$$

Очевидно,

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad (6.19)$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}_\alpha = \sqrt{\overline{CK}_\alpha^2 + \overline{D}_\alpha K_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (6.20)$$

Подставляя выражения (6.19) и (6.20) в выражения (6.17) и (6.18), получим

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

или

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}]; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}]. \end{aligned}} \quad (6.21)$$

Учитывая принятое правило знаков, найдем выражение для тангенса угла наклона главного напряжения σ_1 к оси σ . Из чертежа

следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{MK_\beta}{AK_\beta} = -\frac{MK_\beta}{OA - OK_\beta} = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}} \quad (6.22)$$

Эта формула и определяет единственное значение угла α_0 , на который нужно повернуть нормаль n_α , чтобы получить направление

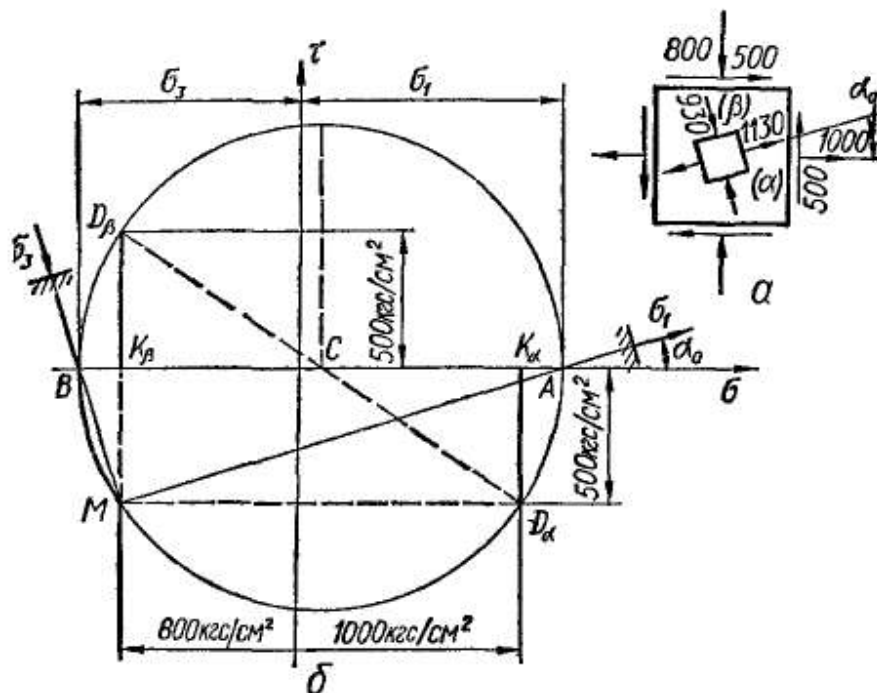


Рис. 164

алгебраически большего главного напряжения. Напомним, что отрицательному значению α соответствует поворот по часовой стрелке. Следует обратить внимание и на то, что если одно из главных напряжений, вычисленных по формулам (6.21), окажется отрицательным, а другое положительным, то их следует обозначать не σ_1 и σ_2 , а σ_1 и σ_3 . Если же оба главных напряжения окажутся отрицательными, то σ_2 и σ_3 .

Пример 17. По граням элемента (рис. 164, а) действуют показанные напряжения. Нужно найти главные напряжения и соответствующие им главные направления.

Если обозначим площадки так, как показано на рисунке, то

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= 1000 \text{ кгс/см}^2; & \sigma_\beta &= -800 \text{ кгс/см}^2; \\ \tau_\alpha &= -500 \text{ кгс/см}^2; & \tau_\beta &= 500 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

По формуле (6.21) находим, что

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}] = \\ &= \frac{1}{2} [1000 - 800 + \sqrt{(1000 + 800)^2 + 4 \cdot 500^2}] \text{ кгс/см}^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (200 + 2060) \text{ кгс/см}^2 = 1130 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (200 - 2060) \text{ кгс/см}^2 = -930 \text{ кгс/см}^2.$$

По формуле (6.22)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-(-500)}{1130 - (-930)} = \frac{500}{2060} = 0,259;$$

$$\alpha_0 = 14^\circ 32'.$$

Этот угол откладываем от горизонтали (направление n_α) против часовой стрелки и получаем направление σ_1 ; направление σ_3 перпендикулярно к нему. На рис. 164 выполнено также графическое решение задачи в соответствии с изложенным выше планом.

§ 44. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В задачах сопротивления материалов трехосное, или объемное, напряженное состояние встречается редко. Поэтому отметим здесь лишь некоторые моменты теории объемного напряженного состояния.

На рис. 165 изображен элемент, который находится в объемном напряженном состоянии и грани которого представляют собой главные площадки. Вычислим для него напряжения на других, не главных площадках.

Вначале рассмотрим площадки, параллельные одному из главных напряжений, например, произвольную площадку I , параллельную главному напряжению σ_1 . Как указывалось выше, нормальные

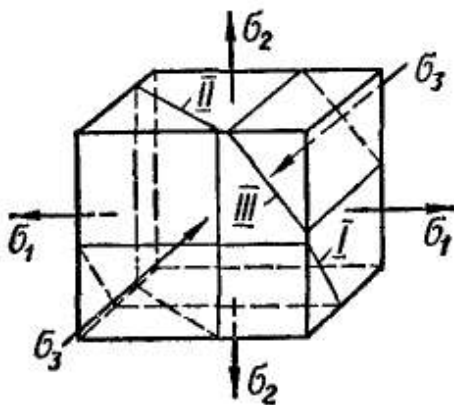


Рис. 165

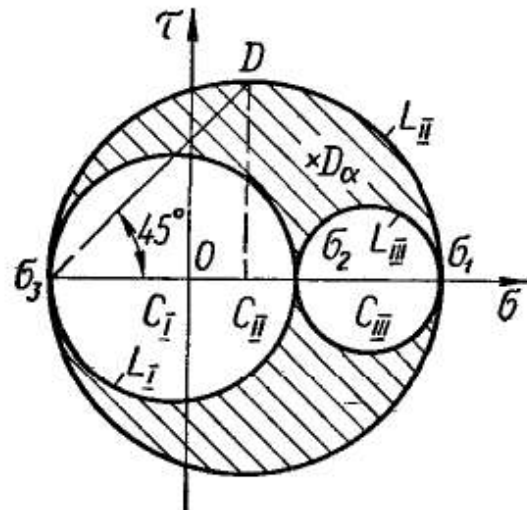


Рис. 166

и касательные напряжения на такой площадке не зависят от σ_1 и целиком определяются величинами σ_2 , σ_3 и наклоном площадки. Напряженное состояние на таких площадках может быть изображено графически при помощи круга Мора L_I (рис. 166), построенного на главных напряжениях σ_2 и σ_3 . Совокупность всех точек этой окружности описывает напряженное состояние всех сечений, проведенных в элементе параллельно σ_1 .

Точно так же напряженное состояние площадок II, параллельных σ_2 , будет описываться точками окружности L_{II} , построенной на σ_1 и σ_3 , а напряженное состояние площадок III, параллельных σ_3 , — точками окружности L_{III} . Точки C_I , C_{II} и C_{III} — соответственно центры этих окружностей.

Можно показать, что напряженное состояние на площадках, не параллельных ни одному из главных напряжений, изображается точками D_α (σ_α , τ_α), лежащими в заштрихованной области (рис. 166). Аналитически нормальное и касательное напряжения на таких площадках могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где α_1 , α_2 , α_3 — углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке с направлениями σ_1 , σ_2 и σ_3 соответственно.

Легко установить, на каких площадках будет действовать наибольшее касательное напряжение τ_{\max} при трехосном напряженном состоянии, и найти его величину.

Очевидно, что точкой, характеризующей напряженное состояние площадки, в которой действует τ_{\max} , будет точка D (рис. 166), так как она имеет наибольшую ординату. Точка D лежит на окружности L_{II} , определяется углом $\alpha = 45^\circ$ и имеет ординату, равную радиусу большого круга, т. е. $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Следовательно, при любом объемном напряженном состоянии наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (6.24)$$

и действует по площадке, параллельной главному напряжению σ_2 и наклоненной под углом 45° к главным напряжениям σ_1 и σ_3 .

Известный интерес, особенно при изучении пластических деформаций, представляет касательное напряжение, действующее по площадке, равнонаклоненной ко всем главным направлениям. Такая площадка называется *октаэдрической*, поскольку она параллельна грани октаэдра, который может быть образован из куба. Нормаль к этой площадке образует равные углы с главными направлениями:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Учитывая, что всегда

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

получаем

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}.$$

Тогда из формул (6.23) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \\ \tau_{\text{окт}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Это касательное напряжение называется *октаэдрическим*. Напряжение $\sigma_{\text{окт}}$ представляет собой как бы среднее напряжение для данного трехосного напряженного состояния.

В теории пластичности оказалось удобным вводить в расчеты так называемую интенсивность напряжений σ_i , связанную с $\tau_{\text{окт}}$ зависимостью

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}},$$

или выражаемую через главные напряжения формулой

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

В заключение отметим, что все зависимости и способы решения задач, описанные в этом и предыдущих параграфах гл. 6, верны для напряженных состояний, соответствующих как упругим, так и пластическим деформациям.

§ 45. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Исследуя деформации и рассматривая вопросы прочности при объемном и плоском напряженных состояниях, будем в соответствии с основными гипотезами и допущениями предполагать, что материал следует закону Гука, а деформации малы.

Изучая простое растяжение — сжатие, мы выяснили, что относительная продольная деформация

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (6.27)$$

а относительная поперечная деформация

$$\epsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (6.28)$$

Эти два равенства выражали закон Гука (зависимость между деформациями и напряжениями) при простом растяжении или сжатии, т. е. при линейном напряженном состоянии. Здесь установим

зависимости между деформациями и напряжениями в общем случае объемного напряженного состояния.

Обобщенный закон Гука. Рассмотрим деформацию элемента тела, выбрав этот элемент в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ (рис. 167). По граням параллелепипеда действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (для вывода предполагаем, что все они положительны). Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными $a + \Delta a; b + \Delta b; c + \Delta c$.

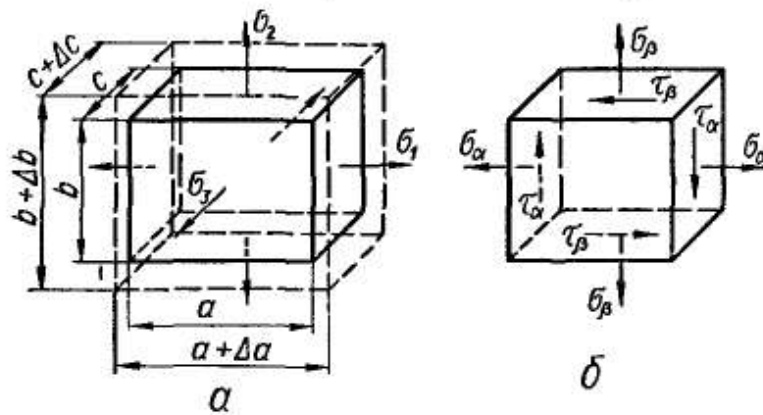


Рис. 167

Величины

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\Delta a}{a}; \\ \epsilon_2 &= \frac{\Delta b}{b}; \quad \epsilon_3 = \frac{\Delta c}{c} \end{aligned}$$

называются *главными удлинениями* и представляют собой относительные удлинения в главных направлениях.

Применяя принцип суперпозиции, можно записать

$$\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''',$$

где ϵ_1' — относительное удлинение в направлении σ_1 , вызванное действием только напряжений σ_1 (при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$);

ϵ_1'' — удлинение в том же направлении, вызванное действием только σ_2 ;

ϵ_1''' — удлинение, вызванное действием σ_3 .

Поскольку направление σ_1 для самого напряжения σ_1 является продольным, а для напряжений σ_2 и σ_3 — поперечным, то, применяя формулы (6.27) и (6.28), находим, что

$$\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \epsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Сложив эти величины, будем иметь

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогично получим выражения и для двух других главных удлинений. В результате

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Формулы (6.29) выражают *обобщенный закон Гука для изотропного тела*, т. е. зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями в общем случае трехосного напряженного состояния. Заметим, что сжимающие напряжения подставляют в эти формулы со знаком «минус». Из формул (6.29) легко получить формулу закона Гука для плоского напряженного состояния. Например, для случая $\sigma_2 = 0$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3); \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3); \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu\sigma_1).\end{aligned}\tag{6.30}$$

Выражения (6.29) справедливы не только для главных деформаций, но и для относительных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям, поскольку при малых деформациях влияние сдвига на линейную деформацию представляет собой величину второго порядка малости. Так, относительные удлинения в направлении действия напряжений σ_α и σ_β (рис. 167, б)

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta); \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha).\end{aligned}\tag{6.31}$$

Объемная деформация. Установим связь между относительным изменением объема ε_V и главными напряжениями.

До деформации элемент занимал объем $V_0 = abc$. В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned}V &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = \\ &= abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = V_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Учитывая незначительную величину относительных деформаций, последними четырьмя членами можем пренебречь. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Выразив главные удлинения через главные напряжения при помощи формул (6.29), получим

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}.\tag{6.32}$$

В частности, при равномерном всестороннем сжатии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$,

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K},$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (6.33)$$

Величина K называется *модулем объемной деформации*. Из формулы (6.32) видно, что при деформации тела, материал которого имеет коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$ (например, резина), объем тела не меняется.

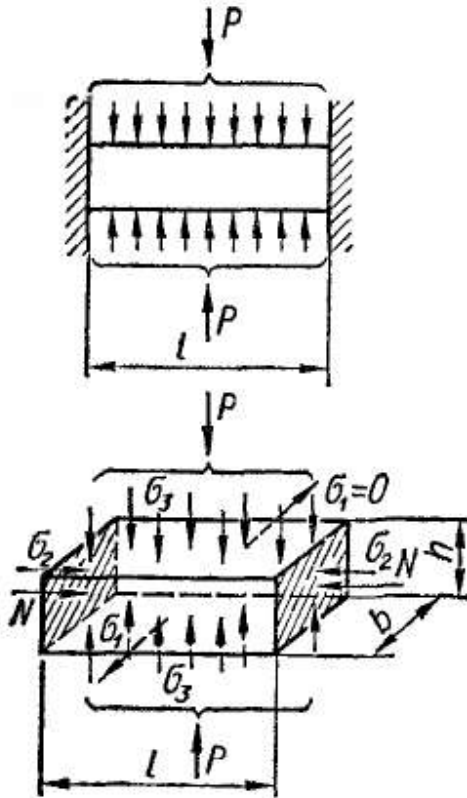


Рис. 168

Пример 18. Брус плотно, но без напряжения вставлен между двумя неподвижными стенками и подвергается сжатию равномерно распределенными по горизонтальным граням силами P (рис. 168). Пренебрегая трением между брусом и стенками, найти силы давления его на стенки и изменение его размеров, если E и μ материала бруса известны.

Напряжения сжатия, которые возникают в продольном направлении, являются следствием эффекта Пуассона и стесненности деформации, т. е. представляют собой вторичный эффект, вызванный действием напряжений в вертикальном направлении. Поэтому предполагаем, что они по величине меньше, чем вертикальные. Учитывая это, вводим для напряжений обозначения, указанные на рис. 168 (это будут главные напряжения, так как τ в гранях бруса, очевидно, отсутствуют). Тогда имеем

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{bh}; \quad \sigma_3 = -\frac{P}{bl}.$$

Через N обозначено давление стенок на брус. Поскольку по условию задачи размер l не изменяется, $\varepsilon_2 = 0$. Из второй формулы (6.29)

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_3) = 0,$$

т. е.

$$\sigma_2 = \mu\sigma_3 = -\frac{\mu P}{bl}.$$

Значит,

$$N = -bh\sigma_2 = \frac{\mu Ph}{l}.$$

Далее,

$$\Delta b = \varepsilon_1 b = -\frac{b\mu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\mu(1+\mu)P}{El};$$

$$\Delta h = \varepsilon_3 h = \frac{h}{E} (\sigma_3 - \mu\sigma_2) = -(1-\mu^2) \frac{Ph}{blE}.$$

Относительное изменение объема по формуле (6.32)

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} \left(0 - \frac{\mu P}{bl} - \frac{P}{bl} \right) = - \frac{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{blE} P,$$

а изменение объема бруса

$$\Delta V = \varepsilon_V V = \varepsilon_V b l h = - (1 - 2\mu)(1 + \mu) \frac{Ph}{E}.$$

§ 46. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Потенциальной энергией деформации называется энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации. Когда под действием внешней статической нагрузки тело деформируется, точки приложения внешних сил перемещаются и потенциальная энергия положения груза убывает на величину, которая численно равна работе, совершенной внешними силами. Энергия, потерянная внешними силами, не исчезает, а превращается, в основном, в потенциальную энергию деформации тела. Остальная, незначительная часть рассеивается, главным образом, в виде тепла за счет различных процессов, происходящих в материале при его деформации.

Потенциальная энергия деформации U накапливается в обратимой форме — в процессе разгрузки тела она снова превращается в энергию внешних сил или в кинетическую энергию. Величину потенциальной энергии деформации, приходящуюся на единицу объема (1 см^3) тела, называют *удельной потенциальной энергией деформации* и обозначают u . В разных точках тела величина u может быть различной.

Величину потенциальной энергии деформации можно легко вычислить на основе закона сохранения энергии. Поскольку при статической нагрузке кинетическая энергия системы остается неизменной, то приращение потенциальной энергии деформации U равно уменьшению потенциальной энергии положения внешних сил $U_{\text{п}}$:

$$U = U_{\text{п}}.$$

Уменьшение потенциальной энергии внешних сил численно равно работе A_P , совершенной ими при деформации:

$$U_{\text{п}} = A_P.$$

Таким образом, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, затраченной при упругой деформации тела:

$$U = A_P. \quad (6.34)$$

В случае простого растяжения или сжатия стержня (рис. 169) на основании формулы (4.29)

$$U = \frac{P\Delta l}{2}.$$

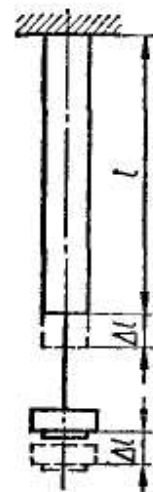


Рис. 169

Удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma \epsilon}{2} \quad (6.35)$$

Имея в виду, что $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$, получим для удельной потенциальной энергии выражение

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (6.36)$$

Вычислим теперь удельную потенциальную энергию в общем случае объемного напряженного состояния. Для этого вырежем элемент в виде кубика с длинами ребер, равными единице (рис. 170), грани которого являются главными площадками.

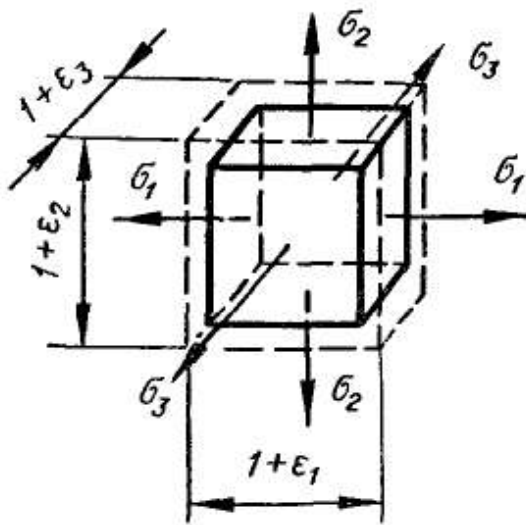


Рис. 170

На этих площадках действуют главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Поскольку площади граней равны единице, то действующие в них усилия численно равны σ_1 , σ_2 и σ_3 . Они производят работу на тех перемещениях, которые получают грани вследствие деформации рассматриваемого элемента. Перемещения в данном случае численно равны главным удлинениям ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , так как ребра имеют единичную длину.

Таким образом, на основании формулы (6.35)

$$u = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2} \quad (6.37)$$

Такое суммирование работ главных напряжений возможно, поскольку главное напряжение σ_1 производит работу только на перемещении ϵ_1 , σ_2 — на перемещении ϵ_2 и σ_3 — на перемещении ϵ_3 .

Подставив выражения ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 из формул (6.29) в формулу (6.37), найдем, что

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (6.38)$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения. При деформации элемента (рис. 170) изменяется, вообще говоря, как его объем, так и форма (из кубика он превращается в параллелепипед). В соответствии с этим можно считать, что полная удельная потенциальная энергия деформации

$$u = u_V + u_\Phi \quad (6.39)$$

где u_V — удельная потенциальная энергия изменения объема, т. е. энергия, накапливаемая за счет изменения объема;

u_ϕ — удельная потенциальная энергия формоизменения, т. е. энергия, накапливаемая вследствие изменения формы элемента.

Непосредственное вычисление u_ϕ затруднительно, поэтому найдем сначала u_V . Это можно сделать, исходя из предположения о том, что в различных элементах при действии разных главных напряжений величина u_V будет одинаковой, коль скоро у элементов будет одинаковое изменение объема ϵ_V .

Кроме рассматриваемого элемента (назовем его A) введем еще вспомогательный элемент A' . Пусть A' — тоже единичный кубик, но по граням его действуют одинаковые главные напряжения $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'$. Для этого элемента, согласно формулам (6.32), (6.39) и (6.38),

$$\epsilon'_V = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma', \quad \text{а} \quad u' = u'_V + u'_\phi = \frac{3(1-2\mu)}{2E} (\sigma')^2.$$

Но, очевидно, элемент A' при деформировании меняет только свой объем, форма же его не изменяется (остается кубической). Поэтому $u'_\phi = 0$ и, значит,

$$u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E} (\sigma')^2.$$

Выберем величину σ' такой, чтобы $\epsilon'_V = \epsilon_V$, т. е., чтобы

$$\frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma' = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Отсюда

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Поскольку у обоих элементов изменения объема одинаковы, на основании принятого предположения можно утверждать, что

$$u_V = u'_V = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

т. е.

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (6.40)$$

Теперь, согласно формуле (6.39),

$$u_\phi = u - u_V.$$

Подставив сюда значения u и u_V из формул (6.38) и (6.40), после элементарных преобразований получим окончательно, что

$$\boxed{u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].} \quad (6.41)$$

Это и есть искомое выражение для удельной потенциальной энергии формоизменения.

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

§ 47. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. Наиболее просто эта задача решается для простых видов деформации, в частности для одноосных напряженных состояний, так как в этом

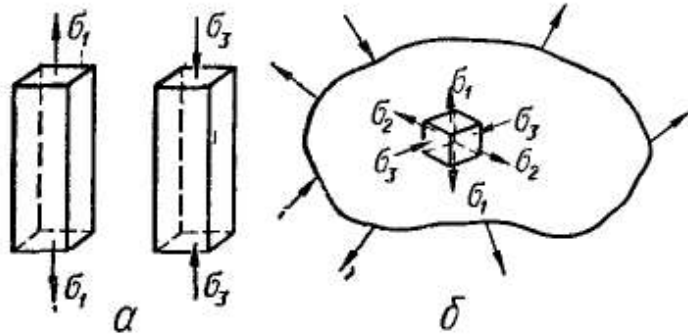


Рис. 171

случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально. Под опасными напряжениями, как уже указывалось, понимают напряжения, соответствующие началу разрушения (при хрупком состоянии материала) или появлению остаточных деформаций (в случае пластического состояния

материала). Так, испытания образцов из данного материала на простое растяжение или сжатие позволяют без особых трудностей определить значения опасных напряжений:

$$\sigma^0 = \sigma_T \text{ или } \sigma^0 = \sigma_B.$$

По опасным напряжениям устанавливаются допускаемые напряжения $[\sigma_+]$ при растяжении или $[\sigma_-]$ при сжатии (см. § 34), обеспечивая известный коэффициент запаса против наступления предельного состояния. Таким образом, условие прочности для одноосного напряженного состояния (рис. 171, а) принимает вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+] \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma_-].$$

Рассмотрим теперь вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии, когда в точках детали два или все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не равны нулю (рис. 171, б).

В этих случаях, как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$ в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и из-за большого объема испытаний.

Другой путь решения задачи заключается в установлении критерия прочности (критерия предельного напряженно-деформированного состояния). Для этого вводят гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора: полагают, что нарушение прочности материала при любом напряженном состоя-

нии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение фактора, определяющего прочность, находят на основании простых, легко осуществимых опытов на растяжение. Иногда пользуются также результатами опытов на кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить данное сложное напряженное состояние с простым, например с одноосным растяжением (рис. 172), и установить при этом такое эквивалентное (расчетное) напряжение, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса.

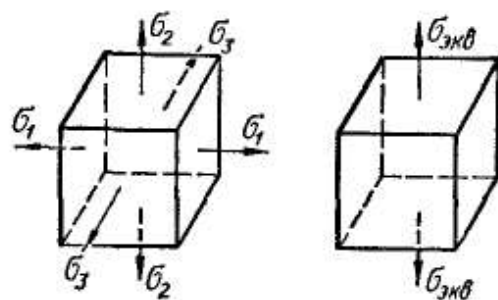


Рис. 172

Под коэффициентом запаса в общем случае напряженного состояния понимают число n , показывающее, во сколько раз нужно одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, чтобы оно стало предельным:

$$\sigma_1^0 = n\sigma_1; \quad \sigma_2^0 = n\sigma_2; \quad \sigma_3^0 = n\sigma_3.$$

Выбранная указанным образом гипотеза часто называется *механической теорией прочности*. Ниже рассмотрены некоторые из таких теорий.

§ 48. КЛАССИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ (ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ)

Критерий наибольших нормальных напряжений [первая (1) теория прочности]. Согласно этой теории, преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения σ^0 . Последнее устанавливается при простом растяжении или сжатии на образцах из данного материала.

Условие нарушения прочности при сложном напряженном состоянии имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_+^0; \\ |\sigma_3| &= \sigma_-^0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Условие прочности с коэффициентом запаса n следующее:

$$\boxed{\sigma_1 \leq [\sigma_+]}$$

или

$$\boxed{|\sigma_3| \leq [\sigma_-]}, \tag{7.2}$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}.$$

Таким образом, критерий наибольших нормальных напряжений из трех главных напряжений учитывает лишь одно — наибольшее, полагая, что два других не влияют на прочность.

Опытная проверка показывает, что эта теория прочности не отражает условий перехода материала в пластическое состояние и дает при некоторых напряженных состояниях удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например, для камня, кирпича, керамики, инструментальной стали и т. п.).

Критерий наибольших линейных деформаций [вторая (II) теория прочности]. Согласно этой теории, в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшая линейная деформация $\epsilon_{\text{макс}}$ достигает своего опасного значения ϵ^0 . Последнее определяется при простом растяжении или сжатии образцов из данного материала.

Таким образом, условие разрушения следующее:

$$\epsilon_{\text{макс}} = \epsilon^0, \quad (7.3)$$

а условие прочности —

$$|\epsilon_{\text{макс}}| \leq [\epsilon] = \frac{\epsilon^0}{n}. \quad (7.4)$$

Используя обобщенный закон Гука [формулы (6.29)], выразим условие прочности (7.4) в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет ϵ_1 . Тогда

$$\epsilon_{\text{макс}} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При простом растяжении, приняв в качестве допускаемого напряжения $[\sigma]$, мы тем самым для наибольшего относительного удлинения допускаем величину

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Подставим выражения для $\epsilon_{\text{макс}}$ и $[\epsilon]$ в условие прочности (7.4). Тогда

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E},$$

или

$$\boxed{|\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)| \leq [\sigma].} \quad (7.5)$$

Как видно из условия прочности (7.5), в этой теории с допускаемым напряжением нужно сравнивать не то или другое главное напряжение, а их комбинацию. Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\boxed{\sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3).} \quad (7.6)$$

Опытная проверка этой теории указывает на согласующиеся в ряде случаев результаты лишь для хрупкого состояния материала

(например, для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска). Отметим также, что применение второй теории прочности в виде (7.5) недопустимо для материалов, не следующих закону Гука или находящихся за пределами пропорциональности.

Критерий наибольших касательных напряжений [третья (III) теория прочности]. Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории предполагается, что предельное состояние в общем случае наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение $\tau_{\text{макс}}$ достигает опасного значения τ^0 . Последнее определяется при достижении предельного состояния в случае простого растяжения.

Условие разрушения имеет вид

$$\tau_{\text{макс}} = \tau^0; \quad (7.7)$$

условие прочности —

$$\tau_{\text{макс}} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{n}. \quad (7.8)$$

Так как согласно выражению (6.24)

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), \text{ а } \tau^0 = \frac{1}{2} \sigma^0,$$

то условия разрушения и прочности (7.7), (7.8) можно выразить через главные напряжения так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma^0; \quad (7.9)$$

$$\boxed{\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]}. \quad (7.10)$$

Таким образом, эквивалентным напряжением по третьей теории является разность алгебраически наибольшего и наименьшего главных напряжений:

$$\boxed{\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3}. \quad (7.11)$$

Третья теория прочности в общем хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2 , которое, как показывают опыты, оказывает также некоторое, хотя во многих случаях и незначительное, влияние на прочность материала.

Отметим, что критерий наибольших касательных напряжений обычно рассматривается как условие начала образования пластических (остаточных) деформаций. Последние являются результатом скольжения слоев атомов в кристалле по определенным кристаллографическим плоскостям. Это становится возможным в случае, когда на указанных плоскостях скольжения касательные напряжения достигают некоторой предельной величины.

Таким образом, в качестве критерия, определяющего наступление текучести материала, можно принять величину наибольшего касательного напряжения.

Считая предельным состоянием наступление текучести, из равенства (7.9) имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (7.12)$$

Это условие достаточно удовлетворительно описывает начало пластической деформации для многих металлов и сплавов.

Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения [четвертая (IV) теория прочности]. В качестве критерия прочности в этом случае принимают количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории, опасное состояние (текучесть) в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения. Последнее можно легко определить при простом растяжении в момент текучести.

Условие наступления текучести —

$$u_\phi = (u_\phi)_T. \quad (7.13)$$

Условие прочности —

$$u_\phi \leq [u_\phi]. \quad (7.14)$$

Предполагая, что закон Гука справедлив вплоть до наступления предельного состояния, можно потенциальную энергию формоизменения в общем случае напряженного состояния записать, согласно выражению (6.41), в виде

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (7.15)$$

При простом растяжении в момент текучести ($\sigma_1 = \sigma_T$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) имеем

$$(u_\phi)_T = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2. \quad (7.16)$$

Следовательно, условие (7.13) после подстановки выражений (7.15) и (7.16) преобразовывается так:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T, \quad (7.17)$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (7.18)$$

Условие прочности будет следующим:

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n} = [\sigma].} \quad (7.19)$$

Следовательно, эквивалентное напряжение по четвертой теории

$$\boxed{\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.} \quad (7.20)$$

Заметим, что $\sigma_{эквIV}$ совпадает с выражением (6.26) для интенсивности напряжений σ_I .

Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и на сжатие. Появление в материале малых пластических деформаций четвертой теорией определяется более точно, чем третьей.

Следует отметить, что выражение (7.20) с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением для касательного напряжения $\tau_{окт}$ на октаэдрической площадке, равнонаклоненной к трем главным направлениям (см. § 44). Поэтому расчетные уравнения четвертой теории прочности можно получить исходя из критерия постоянства октаэдрических касательных напряжений:

$$\tau_{окт} \leq [\tau_{окт}].$$

Такая трактовка освобождает рассматриваемую теорию прочности от ограничений, связанных с областью применимости закона Гука, и дает возможность установить условия начала не только пластических деформаций, но и разрушения.

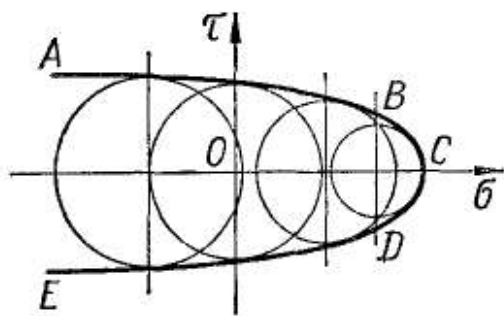


Рис. 173

Критерий Мора основан на предположении, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от величины и знака наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений. Среднее по величине главное напряжение, как указывалось выше, лишь незначительно влияет на прочность. Опыты с медными, никелевыми и чугунными трубками показывают, что погрешность, связанная с тем, что не учитывается σ_2 , не превышает 12—15%. Исходя из этого предположения, можно любое напряженное состояние изобразить одним кругом Мора, построенным на главных напряжениях σ_1 и σ_3 .

Если при данных σ_1 и σ_3 прочность материала нарушается, то круг, построенный на этих напряжениях, называется *предельным*. Меняя соотношение между главными напряжениями, получим для данного материала семейство предельных окружностей (рис. 173). Опыты показывают, что по мере перехода из области растяжения в область сжатия сопротивление разрушению увеличивается. Этому соответствует увеличение диаметров предельных окружностей по мере движения влево.

Огибающая *ABCDE* семейства предельных кругов ограничивает область прочности (рис. 173). Точка *C* соответствует всестороннему равномерному растяжению. Так как при равномерном всестороннем сжатии материал способен, не разрушаясь, выдержать очень большие напряжения, то огибающая слева остается незамкнутой.

При наличии предельной огибающей рассчитать прочность весьма просто. По найденным в опасной точке детали значениям главных напряжений σ_1 и σ_3 строят круг. Прочность будет обеспечена, если он целиком ляжет внутри огибающей. Будем увеличивать

пропорционально величины главных напряжений до тех пор, пока круг, изображающий данное напряженное состояние, коснется предельных огибающих. Отношение радиусов полученного таким образом предельного круга и начального определит коэффициент запаса.

На практике обычно небольшой участок огибающей строят на основании двух опытов — на растяжение и сжатие, причем предельные кривые заменяют прямыми линиями, касательными к окружностям (рис. 174). Допускаемое напряженное состояние можно получить, уменьшив масштаб чертежа в n раз (n — коэффициент за-

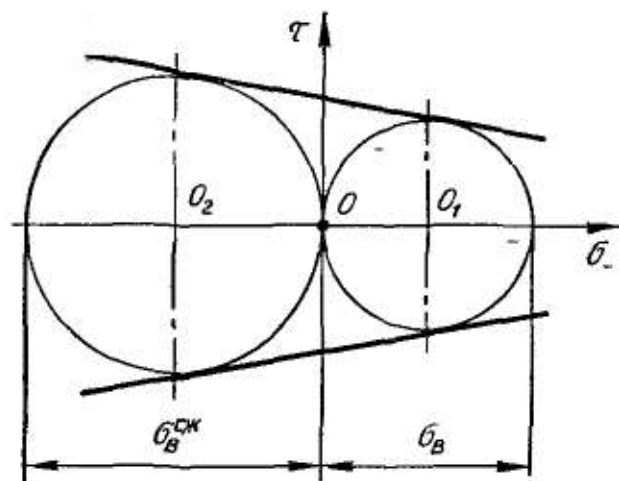


Рис. 174

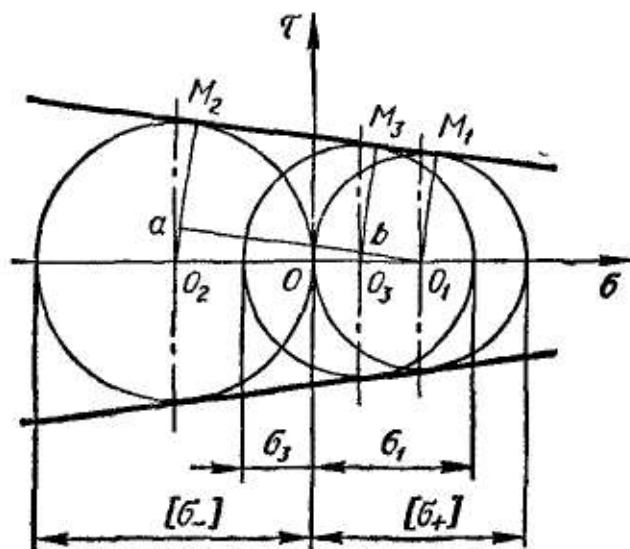


Рис. 175

паса). На рис. 175 показано допускаемое напряженное состояние для небольшого участка огибающей.

Легко получить условие прочности для промежуточного напряженного состояния (σ_1, σ_3), центр круга которого O_3 располагается между точками O_1 и O_2 (рис. 175). Проведем прямые O_1M_1, O_2M_2 и O_3M_3 , соединяющие центры и точки касания окружностей с огибающими линиями, а также прямую O_1a , параллельную M_1M_2 . Из подобия треугольников получим следующие зависимости:

$$\frac{O_3b}{O_2a} = \frac{O_1O_3}{O_1O_2}, \text{ или } \frac{O_3M_3 - O_1M_1}{O_2M_2 - O_1M_1} = \frac{OO_1 - OO_3}{OO_1 + OO_2}.$$

Заменяв отрезки линий значениями соответствующих напряжений, будем иметь

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]}.$$

После преобразования, вводя знак неравенства, получаем условие прочности:

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (7.21)$$

При одинаковом сопротивлении материала растяжению и сжатию ($[\sigma_+] = [\sigma_-]$) огибающая на указанном участке проходит параллельно оси абсцисс и расчетная формула (7.21) совпадает с формулой (7.10), полученной по третьей теории прочности.

Основанная целиком на опытных данных, теория Мора в общем не нуждается в дополнительной экспериментальной проверке. Однако построение предельных огибающих для каждого материала может быть произведено в результате ряда сложных опытов с плоскими и объемными напряженными состояниями, что, собственно, и ограничивает ее применение. Кроме того, эта теория, как уже отмечалось, не учитывает влияния на прочность промежуточного главного напряжения σ_2 .

О применимости той или иной теории прочности для практических расчетов можно сказать следующее.

Разрушение материалов происходит путем отрыва за счет растягивающих напряжений или удлинений и путем среза за счет наибольших касательных напряжений. При этом разрушение отрывом может происходить при весьма малых остаточных деформациях или вовсе без них (хрупкое разрушение). Разрушение путем среза имеет место лишь после некоторой остаточной деформации (вязкое разрушение). Отсюда ясно, что первую и вторую теории прочности, отражающие разрушение отрывом, можно применять лишь для материалов, находящихся в хрупком состоянии. Третью и четвертую теории прочности, хорошо отражающие наступление текучести и разрушение путем среза, надлежит применять для материалов, находящихся в пластическом состоянии.

Теория прочности Мора позволяет установить сопротивление разрушению материалов, обладающих разными сопротивлениями растяжению и сжатию. При этом ветвь *AB* (рис. 173) характеризует разрушение от среза, а ветвь *BC* — от отрыва.

Так как первая и вторая теории прочности страдают существенными недостатками, то в настоящее время утверждается мнение о нежелательности их применения. Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую (или третью) теорию прочности для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и теорию Мора — для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, т. е. для хрупких материалов (для них в настоящее время пока еще применяют и вторую теорию прочности).

Следует подчеркнуть, что состояние материала (хрупкое или пластическое) определяется не только его свойствами, но и видом напряженного состояния, температурой и скоростью нагружения. Как показывают опыты, пластичные материалы при определенных условиях нагружения и температуре ведут себя, как хрупкие, в то же время хрупкие материалы в определенных напряженных состояниях могут вести себя, как пластичные. Так, например, при напряженных состояниях, близких к всестороннему равномерному растяжению, пластичные материалы разрушаются, как хрупкие. Такие напряженные состояния принято называть «жесткими». Весьма «мягкими» являются напряженные состояния, близкие к всестороннему сжатию. В этих случаях хрупкие материалы могут вести себя, как пластичные. При всестороннем равномерном сжатии

материалы могут выдержать, не разрушаясь, очень большие давления.

Следует отметить, что перечисленные теории прочности неприменимы для расчета прочности в случае всестороннего сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$). Влияние типа напряженного состояния может быть учтено приближенно при помощи диаграмм механического состояния, которые рассматриваются ниже.

§ 49. ПОНЯТИЕ О НОВЫХ ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Условия перехода материала в предельное состояние, а также условия прочности по различным теориям были выражены через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые являются инвариантами напряженного состояния.

Для трехмерного пространства, направив оси координат по главным направлениям, указанные условия можно представить в виде некоторых предельных поверхностей

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (7.22)$$

Так, предельная поверхность, соответствующая условию появления массовых пластических деформаций по теории удельной потенциальной энергии формоизменения [см. формулу (7.20)], имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0. \quad (7.23)$$

Предельная поверхность (7.23) представляет собой круговой цилиндр с осью, равнонаклоненной к координатным осям (рис. 176, а),

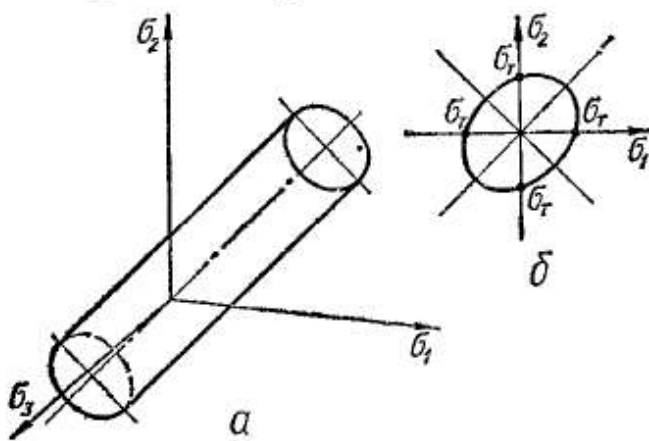


Рис. 176

и радиусом $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T$. Для плоского напряженного состояния, когда одно из главных напряжений равно нулю, условие (7.23) дает эллиптическую предельную кривую (рис. 176, б).

Критерию наибольших касательных напряжений соответствует предельная поверхность в виде правильной шестигранной призмы, вписанной в цилиндр (7.23). Критерию наибольших,

нормальных напряжений соответствует куб с ребром, равным σ° .

Заметим, что все точки, расположенные внутри области, ограниченной предельной поверхностью, соответствуют напряженным состояниям с коэффициентом запаса, большим единицы. Напряженные состояния, представленные точками, лежащими вне этой области, имеют коэффициент запаса, меньший единицы.

Недостатки рассмотренных теорий, а также появление новых материалов, явились стимулом для разработки новых теорий прочности. Большинство из них основано на выборе такой формы пре-

дельной поверхности, при которой можно наиболее полно учесть особенности сопротивления данного класса материалов в условиях сложного напряженного состояния.

Рассмотрим некоторые новые теории.

Ю. И. Яги предложил предельную поверхность (7.22) принять в виде полинома второй степени, симметричного по отношению ко всем трем главным напряжениям:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (7.24)$$

где постоянные a , b и c для данного изотропного материала должны определяться из опытов на одноосное растяжение и сжатие и на чистый сдвиг.

Установив допускаемые напряжения $[\sigma]$, $[\sigma_-]$ и $[\tau]$ соответственно при растяжении, сжатии и сдвиге, находим выражения для постоянных:

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma][\sigma_-]}{[\sigma][\sigma_-]}; \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma])}{[\sigma][\sigma_-]}; \quad c = 6[\tau]^2.$$

Из приведенного ясно, что теория Ю. И. Яги позволяет учесть неодинаковое сопротивление материала растяжению и сжатию, а также сопротивление материала сдвигу. При определенных соотношениях между введенными постоянными a , b и c из выражения (7.24) можно получить ряд энергетических критериев, в том числе и критерий удельной потенциальной энергии формоизменения.

Г. С. Писаренко и А. А. Лебедев, считая, что наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям, предложили искать критерии прочности в виде инвариантных по отношению к напряженному состоянию функций касательных напряжений и максимального нормального напряжения. Предложен, например, критерий в следующей линейной форме:

$$\tau_{\text{окт}} + m_1 \sigma_1 \leq m_2. \quad (7.25)$$

Выражение для $\tau_{\text{окт}}$ дается формулой (6.25). Константы m_1 и m_2 материала можно выразить через предельные напряжения σ^0 , σ_-^0 при одноосном растяжении и сжатии. Тогда условие (7.25) примет вид

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma^0, \quad (7.26)$$

где

$$\chi = \frac{\sigma^0}{\sigma_-^0}.$$

Для материалов, находящихся в пластическом состоянии, $\sigma^0 = \sigma_-^0$, $\chi = 1$ и выражение (7.26) преобразовывается в расчетное уравнение теории формоизменения. Для идеально хрупкого материала $\chi = 0$ и выражение (7.26) преобразовывается в уравнение

для I теории прочности. При $0 < \chi \leq 1$ (подавляющее большинство реальных материалов) предельная поверхность (7.26) представляет собой равнонаклоненную к главным осям фигуру, в которую вписана шестигранная пирамида, соответствующая упрощенной теории прочности Мора [условие (7.21)].

Экспериментальная проверка рассмотренной теории показала, что критерий (7.26) хорошо согласуется с результатами испытаний широкого класса конструкционных материалов.

Диаграммы механического состояния (критерий Я. Б. Фридмана). Влияние типа напряженного состояния на характер нарушения прочности материалов приближенно можно учесть при помощи диаграмм механического состояния. Последние строят на основании следующих положений.

1. В зависимости от типа напряженного состояния материалы могут разрушаться от растягивающих напряжений или удлинений путем отрыва либо от касательных напряжений путем среза. Соответственно этому различают две характеристики прочности — сопротивление отрыву $S_{от}$, которое представляет собой величину нормальных напряжений на поверхности разрушения в первом случае, и сопротивление срезу τ_k , представляющее собой величину касательных напряжений во втором случае.

2. Обе характеристики прочности ($S_{от}$ и τ_k) не зависят от типа напряженного состояния.

3. Кривая деформации материала в координатах $\tau_{макс} — \gamma_{макс}$ также не зависит от напряженного состояния.

4. Нарушение прочности путем отрыва описывается теорией наибольших относительных удлинений так:

$$\sigma_{эквII} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = S_{от}, \quad (7.27)$$

а нарушение прочности второго вида — теорией наибольших касательных напряжений следующим образом:

$$\tau_{макс} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_k. \quad (7.28)$$

Диаграмма механического состояния состоит из двух диаграмм (рис. 177) — собственно диаграммы механического состояния (слева) и кривой деформации в координатах $\tau_{макс} — \gamma_{макс}$. При построении диаграммы по оси ординат откладывают наибольшее касательное напряжение $\tau_{макс}$, а по оси абсцисс — наибольшее эквивалентное растягивающее напряжение по второй теории прочности ($\sigma_{эквII}$). На диаграмму наносят предельные линии, соответствующие пределу текучести τ_t при сдвиге, сопротивлению срезу τ_k и сопротивлению отрыву $S_{от}$. Отклонение линии сопротивления отрыву вправо выше предела текучести (рис. 177) соответствует возрастанию сопротивления отрыву с появлением остаточных деформаций.

Для характеристики типа напряженного состояния вводят коэффициент «мягкости», представляющий собой отношение наибольше-

го касательного напряжения в точке к наибольшему эквивалентному растягивающему напряжению:

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{макс}}}{\sigma_{\text{эkv II}}} \quad (7.29)$$

Различные напряженные состояния, таким образом, при возрастании нагрузки изображаются на диаграмме лучами, тангенсы углов которых равны соответствующему значению α . Например: при всестороннем растяжении ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) $\tau_{\text{макс}} = 0$, $\alpha = 0$

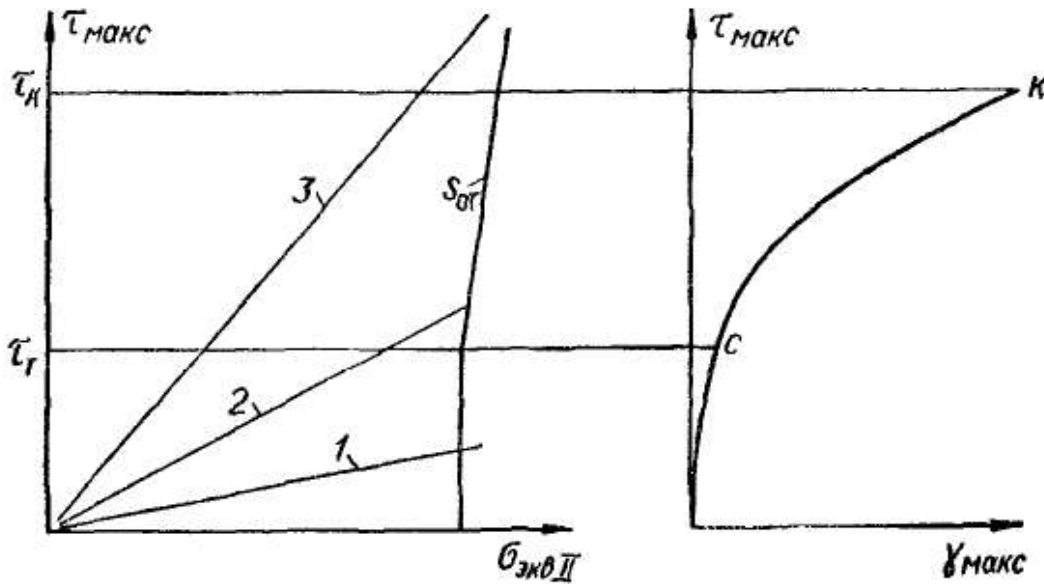


Рис. 177

и луч совпадает с осью абсцисс; при простом растяжении ($\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{эkv II}} = \sigma \text{ и } \alpha = \frac{1}{2};$$

при простом сжатии ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$)

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{эkv II}} = \mu\sigma; \quad \alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

Принимая $\mu = 0,25$, находим, что $\alpha = 2$.

Рассматривая лучи, отвечающие различным типам напряженно-го состояния материала, можем приближенно установить вид разрушения и выбрать, таким образом, подходящую теорию прочности. Например, луч 1 на диаграмме пересекает раньше всего линию сопротивления отрыву. Следовательно, материал разрушится путем отрыва без предшествующей пластической деформации. Луч 2 пересекает сначала линию текучести, а затем линию сопротивления отрыву. Следовательно, при данном напряженном состоянии разрушение произойдет путем отрыва, но с предшествующей пластической деформацией. Для напряженного состояния, соответствующего лучу 3, после пластической деформации разрушение произойдет путем среза. В тех случаях, когда лучи, изображающие то или иное сложное напряженное состояние, пересекают прежде всего линию сопротивления отрыву, расчет прочности следует производить

по теории Мора, второй или первой теориям прочности. Если же вначале лучи пересекают линию предела текучести, то расчет прочности надлежит проводить по третьей или четвертой теориям прочности.

Таким образом, диаграммы механического состояния с известным приближением отражают зависимость формы разрушения от вида напряженного состояния. Приближенность построения заключается в том, что предел текучести и сопротивление разрушению непостоянны. Лучи, изображающие напряженные состояния, прямы лишь до достижения предела текучести.

§ 50. ПРИМЕРЫ ПРОВЕРКИ ПРОЧНОСТИ

Пример 19. На гранях элемента (рис. 178), вырезанного из цилиндрической стенки резервуара, действуют напряжения $\sigma_1 = 1500$ кгс/см², $\sigma_2 = 750$ кгс/см², $\sigma_3 = 0$. Резервуар изготовлен из малоуглеродистой стали марки Ст3. Допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 1600$ кгс/см². Проверить прочность стенки.

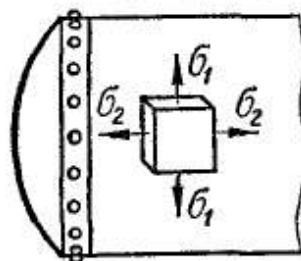


Рис. 178

Так как материал находится в пластическом состоянии, то для расчета прочности следует применить четвертую или третью теорию.

Условие прочности по четвертой теории при $\sigma_3 = 0$ имеет вид

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (7.30)$$

Внося в выражение (7.30) значения σ_1 и σ_2 , находим, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв IV}} &= \sqrt{1500^2 + 750^2 - 1500 \cdot 750} \text{ кгс/см}^2 = \\ &= 1299 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

По третьей теории прочности условие прочности следующее:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

или

$$\sigma_{\text{экв III}} = 1500 - 0 < 1600.$$

Как видно из расчета, прочность стенки обеспечена.

Пример 20. В опасной точке чугуинной детали на гранях выделенного элемента (рис. 179) напряжения $\sigma_\alpha = 50$ кгс/см²; $\sigma_\beta = -250$ кгс/см²; $\tau_\alpha = -\tau_\beta = 260$ кгс/см². Проверить прочность, если допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_+] = 350$ кгс/см², а допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-] = 1200$ кгс/см².

Определяем главные напряжения (см. § 43):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-200 + \sqrt{300^2 + 4 \cdot 260^2} \right] \text{ кгс/см}^2 = 200 \text{ кгс/см}^2; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-200 - \sqrt{300^2 + 4 \cdot 260^2} \right] \text{ кгс/см}^2 = -400 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

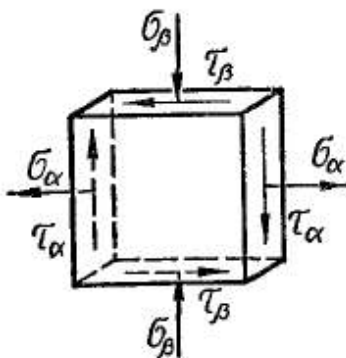


Рис. 179

Так как материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности проведем по теории Мора. Заданное напряженное состояние располагается на предельной диаграмме (см. рис. 175) между простым растяжением и простым сжатием. Следовательно, для расчета прочности можно применить формулу (7.21):

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Имеем

$$\sigma_{\text{эквМ}} = 200 + \frac{350}{1200} \cdot 400 = 317 \text{ кгс/см}^2 < 350 \text{ кгс/см}^2.$$

По теории наибольших относительных удлинений, учитывая, что $\sigma_2 = 0$, имеем

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Для $\mu = 0,25$ уравнение прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв II}} = 200 + 0,25 \cdot 400 = 300 \text{ кгс/см}^2 < 350 \text{ кгс/см}^2.$$

Пример 21. По граням элемента (рис. 180), выделенного в опасной точке стержня, испытывающего деформацию изгиба, напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma; & \sigma_\beta &= 0; \\ \tau_\alpha &= \tau; & \tau_\beta &= -\tau. \end{aligned}$$

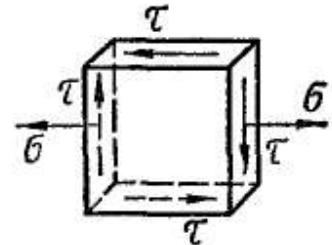


Рис. 180

Определить эквивалентные (расчетные) напряжения по четырем теориям прочности.

Вычисляем главные напряжения в опасной точке по формулам (6.21):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \end{aligned}$$

Тогда эквивалентные напряжения и условия прочности примут следующий вид:

а) по первой теории

$$\sigma_{\text{экв I}} = \sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq [\sigma]; \quad (7.31)$$

б) по второй теории

$$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (7.32)$$

или, принимая $\mu = 0,3$, находим, что

$$\sigma_{\text{экв II}} = 0,35\sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (7.33)$$

в) по третьей теории

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (7.34)$$

г) по четвертой теории

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.35)$$

СДВИГ

§ 51. СДВИГ. РАСЧЕТ НА СРЕЗ

С деформацией сдвига мы встречаемся, когда из шести компонентов главного вектора и главного момента внутренних сил отличны от нуля только поперечные силы Q_y или Q_z . С достаточной степенью приближения деформация сдвига или среза практически может быть получена в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон на весьма близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные к оси бруса и направленные в противоположные стороны. Примером такого действия сил на брус может быть раз-

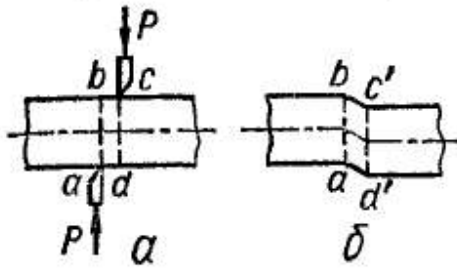


Рис. 181

резание ножницами прутьев, полосы и т. п. (рис. 181). Вообще же на практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций и чаще всего изгибом.

Установим формулы для напряжений и деформаций, необходимые при расчете на срез элементов конструкций, имеющих форму бруса. Известна внешняя нагрузка P , в частности для случая, представленного на рис. 181. Используя метод сечений, находим, что на участке bc поперечная сила

$$Q_y = P. \quad (8.1)$$

Опуская в дальнейшем индекс при Q , установим связь между поперечной силой и напряжениями, действующими в рассматриваемом сечении. Из уравнения (3.30)

$$\int_F \tau dF = Q. \quad (8.2)$$

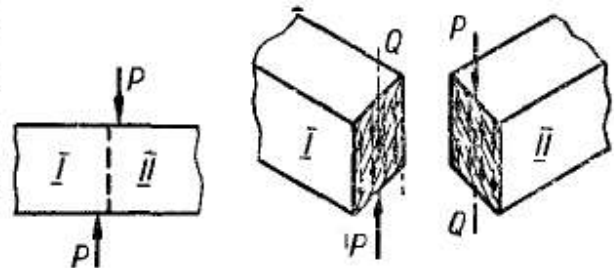


Рис. 182

Принимая касательные напряжения τ равномерно распределенными по площади поперечного сечения F (рис. 182), на основании выражений (8.1) и (8.2) будем иметь $Q = P = \tau F$, откуда

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (8.3)$$

Допущение о равномерности распределения касательных напряжений по сечению весьма условно. Однако это допущение во многих случаях себя оправдывает и поэтому в инженерной практике им широко пользуются при расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей.

§ 52. ЧИСТЫЙ СДВИГ

При расчете ряда элементов конструкций встречается частный случай плоского напряженного состояния, когда на четырех гранях прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения (рис. 183, а). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*.

Найдем величину и направление главных напряжений при таком напряженном состоянии. Для этого воспользуемся построением круга напряжений (рис. 183, б). Поскольку в данном случае

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0; \quad \tau_\alpha = -\tau; \quad \tau_\beta = \tau,$$

то, построив круг напряжений, находим, что

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \tag{8.4}$$

а главные площадки наклонены к граням элемента под углом 45° .

Третья главная площадка совпадает с ненагруженной фасадной гранью элемента, следовательно,

$$\sigma_2 = 0. \tag{8.5}$$

Рассмотрим деформацию элемента $abcd$ (рис. 183, а). Поскольку по граням элемента нет нормальных напряжений, то вдоль граней

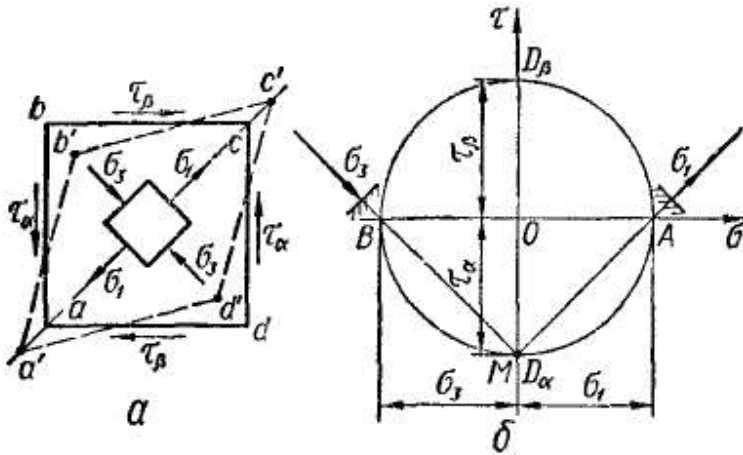


Рис. 183

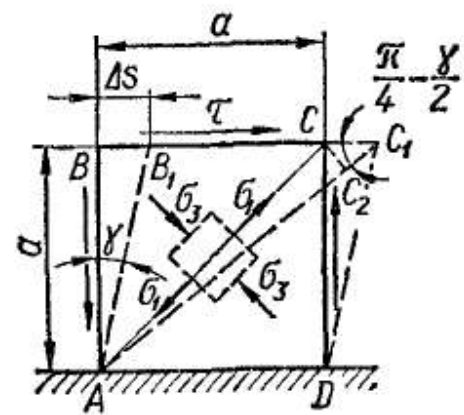


Рис. 184

нет и удлинений. В то же время диагональ ac , совпадающая с направлением σ_1 , удлиняется, а диагональ bd , совпадающая с направлением сжимающего напряжения σ_3 , укорачивается. В результате квадрат $abcd$ превращается в ромб $a'b'c'd'$.

Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов. Более наглядное представление о деформации элемента можно получить, закрепив одну из граней (рис. 184). Малый угол γ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется *углом сдвига* или *относительным сдвигом*. Из рис. 184 следует, что

$$\gamma = \angle BAB_1.$$

Величину абсолютного смещения грани обозначают Δs и называют *абсолютным сдвигом*.

Из треугольника BAV_1 следует, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Учитывая малость угла, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma,$$

тогда

$$\boxed{\gamma = \frac{\Delta s}{a}} \quad (8.6)$$

Закон Гука при чистом сдвиге. Зависимость между нагрузкой и деформацией при сдвиге можно проследить по так называемой *диаграмме сдвига* (рис. 185). Для пластичных материалов она аналогична диаграмме растяжения. На диаграмме показаны характеристики прочности — $\tau_{пц}$, τ_T и τ_B .

Экспериментально диаграмму сдвига можно получить при скручивании тонкостенной трубы (рис. 186). Действительно, мысленно выделенный элемент стенки трубы (ячейка ортогональной сетки,

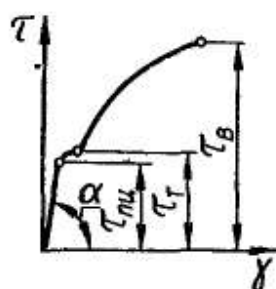


Рис. 185

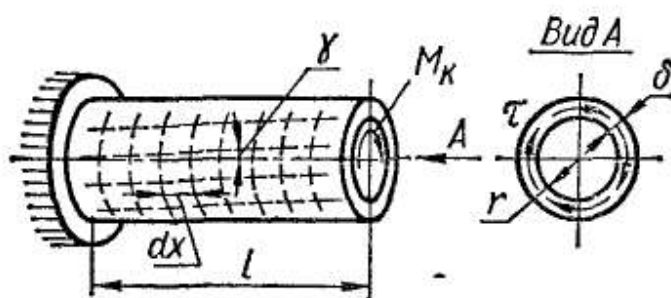


Рис. 186

предварительно нанесенной на поверхности трубы) находится в условиях чистого сдвига, характеризуемого напряженным состоянием, показанным на рис. 184. Рассматривая деформацию этого элемента в пределах упругости, найдем, что между относительным сдвигом и касательными напряжениями, действующими по граням элемента, согласно диаграмме сдвига (рис. 185), существует линейная зависимость, которая может быть выражена формулой

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ или } \tau = G\gamma,} \quad (8.7)$$

где G — коэффициент пропорциональности, который называется *модулем упругости при сдвиге* или *модулем упругости второго рода* и измеряется в $\text{кгс}/\text{см}^2$ (или $\text{кгс}/\text{мм}^2$). Значения модуля G для некоторых материалов приведены в приложении 9.

Для изотропных материалов между модулем упругости G при сдвиге и модулем упругости E при растяжении существует определенная зависимость. Для получения ее рассмотрим деформацию элемента, претерпевающего чистый сдвиг (рис. 184). Найдем сначала удлинение диагонали AC , длина которой

$$l = a\sqrt{2}.$$

Рассматривая геометрическую картину деформаций, получим

$$\Delta l = C_1 C_2 = CC_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}}.$$

Тогда относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{\sqrt{2} a \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s}{a} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}.$$

По закону Гука для чистого сдвига $\gamma = \frac{\tau}{G}$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \quad (8.8)$$

Теперь воспользуемся обобщенным законом Гука [формулы (6.29)]. Главное напряжение σ_1 действует в направлении диагонали AC . Поэтому относительное удлинение ε диагонали есть не что иное, как главное удлинение ε_1 при плоском напряженном состоянии, представленном чистым сдвигом. Учитывая зависимость (8.4), из первой формулы (6.30) находим, что

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (8.9)$$

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), получаем искомую зависимость:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \mu)}}. \quad (8.10)$$

При $\mu = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ получим $G = (0,375 \div 0,4) E$.

Запишем выражение для перемещения одной грани относительно другой (абсолютного сдвига Δs) при чистом сдвиге. Обозначая площадь грани F , равнодействующую сдвигающую силу $Q = F\tau$ и расстояние между сдвигаемыми гранями через a (рис. 184), получим

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GF},$$

т. е.

$$\boxed{\Delta s = \frac{Qa}{GF}}. \quad (8.11)$$

Формула (8.11) выражает закон Гука для абсолютного сдвига.

Потенциальная энергия деформации рассматриваемого элемента при чистом сдвиге

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF},$$

а удельная потенциальная энергия

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q^2}{2F^2 G},$$

т. е.

$$\boxed{u = \frac{\tau^2}{2G}} \quad (8.12)$$

Проверка прочности и допускаемые напряжения при чистом сдвиге. Проверим прочность элемента, испытывающего деформацию чистого сдвига (рис. 183, а). Касательные напряжения на гранях элемента равны τ , допускаемое напряжение для материала при растяжении — $[\sigma]$.

Как указывалось выше, главные напряжения при чистом сдвиге

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Условие прочности составим по второй, третьей и четвертой теориям:

а) по второй теории

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (8.13)$$

Подставляя значения главных напряжений, находим

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (8.14)$$

Правая часть формулы (8.14) представляет собой допускаемое напряжение при чистом сдвиге:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (8.15)$$

Для металлов $\mu = 0,25 \div 0,42$. Следовательно, по второй теории прочности

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8) [\sigma]; \quad (8.16)$$

б) по третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

или

$$\tau - (-\tau) \leq [\sigma],$$

откуда

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \quad (8.17)$$

т. е. допускаемое напряжение при сдвиге

$$[\tau] = 0,5 [\sigma]; \quad (8.18)$$

в) по четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} \leq [\sigma].$$

Внеся значения главных напряжений, получим

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \quad (8.19)$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma]. \quad (8.20)$$

Полученные величины допускаемых напряжений применяют также при расчетах на прочность деталей, испытывающих деформацию среза (болтов, заклепок, шпонок и т. д.). Отметим, что для пластичных материалов наиболее подходит формула (8.20), полученная на основании четвертой теории прочности. При использовании этой формулы для допускаемых напряжений на растяжение следует принимать современные значения. Например, для стали марки Ст3 допускаемое напряжение на растяжение и сжатие $\sigma = 1600 \text{ кгс/см}^2$.

Тогда

$$[\tau] = 0,6 \cdot 1600 = 960 \text{ кгс/см}^2 \approx 1000 \text{ кгс/см}^2.$$

Условие прочности на сдвиг (срез) может быть записано в обычном виде:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{Q_{\text{макс}}}{F} \leq [\tau]. \quad (8.21)$$

Величина допускаемых напряжений на срез $[\tau]$ зависит от свойств материала, характера нагрузки и типа элементов конструкции. Основания для выбора допускаемых напряжений $[\tau]$ даны выше, а значения величин допускаемых напряжений на срез для некоторых материалов применительно к заклепочным и сварным соединениям приведены в приложении II.

В качестве примера рассмотрим расчет болтового соединения, приведенного на рис. 187.

Силы P стремятся сдвинуть листы относительно друг друга. Этому препятствует болт, на который со стороны каждого листа передаются распределенные по контактной поверхности силы (рис. 187, а и б). Равнодействующие последних, равные P , направлены противоположно (рис. 187, а). Усилия стремятся срезать болт по плоскости раздела листов $m-n$, так как в этом сечении действует наибольшая поперечная сила $Q = P$ (рис. 187, в). Считая,

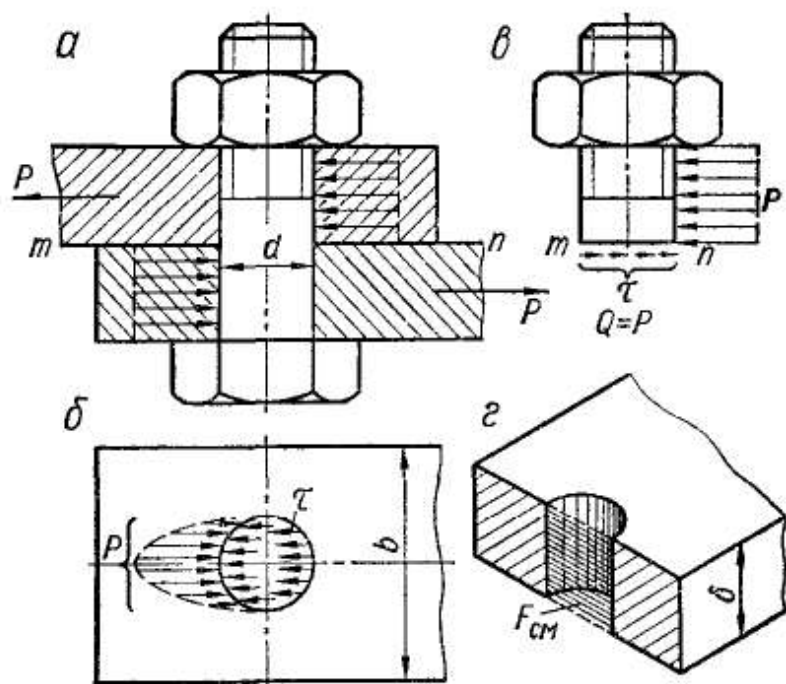


Рис. 187

что касательные напряжения распределены равномерно, получим

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Таким образом, условие прочности болта на срез принимает вид

$$\frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau]. \quad (8.22)$$

Отсюда можно найти диаметр болта:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi [\tau]}}$$

Следует отметить, что силы P , приложенные к болту, стремятся также изогнуть его. Однако изгибающий момент мал и вызванными им нормальными напряжениями можно пренебречь, тем более что при увеличении внешних сил разрушение произойдет путем среза.

При расчете болтовых, заклепочных и других подобных соединений следует учитывать, что нагрузки, приложенные к элементам соединений, помимо среза вызывают смятие контактирующих поверхностей. Под *смятием* понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхностях контакта.

Расчет на смятие также проводят приближенно, поскольку закон распределения давления по поверхности контакта точно не известен. Обычно принимают криволинейный закон распределения (рис. 188), считая, что давление q по диаметру d изменяется пропорционально

изменению проекции площади dF цилиндрической поверхности на диаметральною плоскость:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}$$

Тогда максимальное напряжение смятия на цилиндрических поверхностях

$$\sigma_{см} = \frac{P}{F_{см}},$$

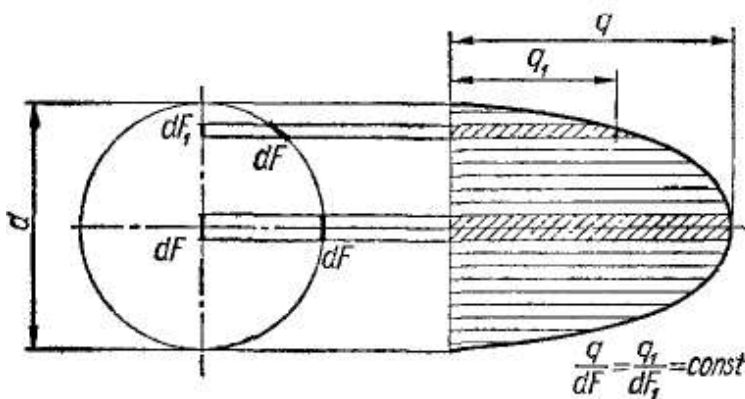


Рис. 188

где $F_{см}$ представляет собой площадь проекции поверхности контакта на диаметральною плоскость (рис. 187, з):

$$F_{см} = d\delta. \quad (8.23)$$

Условие прочности на смятие имеет следующий вид:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{d\delta} \leq [\sigma_{см}]. \quad (8.24)$$

Допускаемые напряжения на смятие устанавливают опытным путем и принимают равными $[\sigma_{см}] = (2 \div 2,5) [\sigma_-]$.

На основании зависимости (8.24) получим

$$d \geq \frac{P}{\delta [\sigma_{см}]}.$$

Чтобы были удовлетворены условия прочности на срез и на смятие, из двух найденных диаметров следует взять больший, округлив его до стандартного значения.

Учитывая, что болты и заклепки ослабляют листы, последние проверяют на разрыв в наиболее ослабленных сечениях. В случае одного болта (рис. 187) условие прочности будет иметь вид

$$\sigma = \frac{P}{F_{мин}} = \frac{P}{\delta (b - d)} \leq [\sigma_+]. \quad (8.25)$$

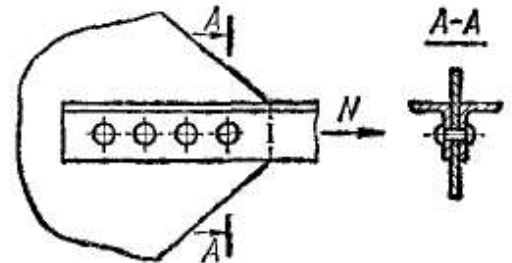


Рис. 189

Пример 22. Определить необходимое число заклепок диаметром $d = 23$ мм для прикрепления раскоса фермы, состоящего из двух уголков $90 \times 56 \times 8$, к фасонному листу (косынке), имеющему толщину $\delta = 1,2$ см (рис. 189). Растягивающее усилие в раскосе $N = 30$ тс, материал — Ст3, отверстия для заклепок продавлены.

Полагая, что усилия между заклепками распределяются равномерно, и имея в виду, что они испытывают двойной срез (одновременно по двум сечениям), число заклепок i определим из условия прочности на срез:

$$\tau = \frac{N}{2i \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]$$

или из условия прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{N}{i \delta d} \leq [\sigma_{см}].$$

Учитывая при этом, что для стали можно принять $[\tau] = 1000$ кгс/см² и $[\sigma_{см}] = 2800$ кгс/см², найдем:

а) из расчета на срез

$$i \geq \frac{N}{2 \frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{30\,000}{2 \frac{3,14 \cdot 2,3^2}{4} \cdot 1000} = 3,6;$$

б) из расчета на смятие

$$i \geq \frac{N}{\delta d [\sigma_{см}]} = \frac{30\,000}{1,2 \cdot 2,3 \cdot 2800} = 3,9.$$

Принимаем, что число заклепок $i = 4$.

В расчете на смятие фигурировала толщина фасонного листа $\delta = 1,2$ см, так как суммарная толщина полок двух уголков $2\delta = 1,6$ см, а следовательно, напряжение смятия в заклепках в местах контакта с уголками будет меньше, чем в месте контакта с косынкой (предполагается, что материал заклепок мягче, чем материал соединяемых элементов).

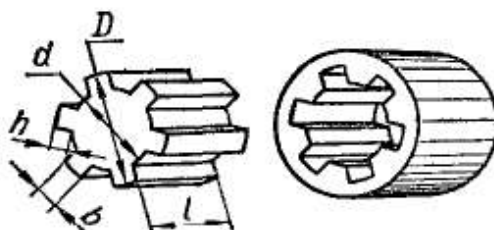


Рис. 190

Пример 23. Вал передает крутящий момент $M_{кр} = 2700$ кгс·м при помощи шлицевого соединения (рис. 190). Диаметр вала $D = 80$ мм, внутренний диаметр $d = 68$ мм, высота шлица $h =$

$= 6$ мм, ширина шлица $b = 12$ мм, длина соединения $l = 100$ мм. Число шлицев $i = 6$. Определить напряжение среза и смятия шлица.

Полагая, что все шлицы нагружены одинаково, найдем усилие, приходящееся на один шлиц:

$$P_1 = \frac{M_{кр}}{\frac{d}{2} i} = \frac{270\,000 \cdot 2}{6,8 \cdot 6} \text{ кгс} = 13\,235 \text{ кгс}.$$

Напряжение среза

$$\tau = \frac{P_1}{bl} = \frac{13\,235}{1,2 \cdot 10} \text{ кгс/см}^2 = 1102,5 \text{ кгс/см}^2.$$

Напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{P_1}{lh} = \frac{13\,235}{10 \cdot 0,6} \text{ кгс/см}^2 = 2205 \text{ кгс/см}^2.$$

На срез принято (также условно) рассчитывать и некоторые сварные соединения. Изготавливая металлические конструкции, как известно, часто применяют сварку электрической дугой. Если выбор конструкции соединения, материалов и технологии сварки сделан

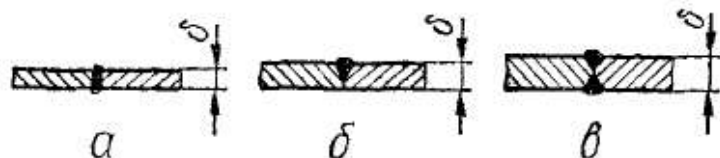


Рис. 191



Рис. 192

правильно, то сварное соединение по надежности не уступает клепочному при действии как статических, так и динамических нагрузок. В то же время, соединение элементов конструкций с помощью сварки имеет целый ряд преимуществ, основное из которых — экономичность.

Наиболее распространены соединения в стык и с помощью угловых, или валиковых, швов. Соединения в стык применяют, когда листы находятся в одной плоскости. При толщине листов $\delta \leq 8$ мм

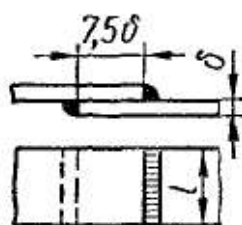


Рис. 193

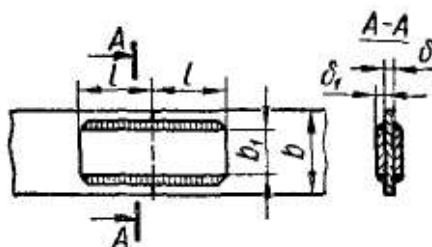


Рис. 194

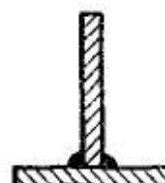


Рис. 195

кромки их не обрабатывают (рис. 191, а); при $\delta = 8 \div 20$ мм кромки скашивают и заваривают листы с одной стороны (V-образный шов, рис. 191, б); при $\delta \geq 20$ мм кромки скашивают с двух сторон (X-образный шов, рис. 191, в). Расчетную толщину шва принимают равной толщине листа δ , наплывы не учитывают.

Соединения с помощью угловых швов делают, когда листы параллельны или перпендикулярны. Сюда относятся соединения внахлест-

ку, с накладками и в тавр. Если направление углового шва перпендикулярно к действующему усилию, то шов называется *лобовым* (*торцевым*). Швы, параллельные усилию, носят название *фланговых* (*боковых*). Применяются также косые швы (рис. 192), направленные под углом к усилию. На рис. 193 показано соединение листов внахлестку лобовыми швами, на рис. 194 — соединение с накладками, приваренными фланговыми швами, а на рис. 195 — тавровое соединение.

Если не учитывать наплывы, то в разрезе угловой шов имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 196, а). Разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению *ABCD* (рис. 196, б), высота которого

$$a = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta.$$

Расчетная площадь сечения шва $F_s = al = 0,7\delta l$, где l — расчетная длина шва.

Сварные соединения, как и заклепочные, условно рассчитывают в предположении равномерности распределения напряжений по сечению шва. В табл. 12 приведены некоторые значения допускаемых напряжений для сварных соединений. Данные этой таблицы могут быть использованы только для конструкций, изготовленных из Ст3.

Не останавливаясь на расчетах всех видов швов, рассмотрим на примерах расчет только лобовых и фланговых, т. е. таких швов,

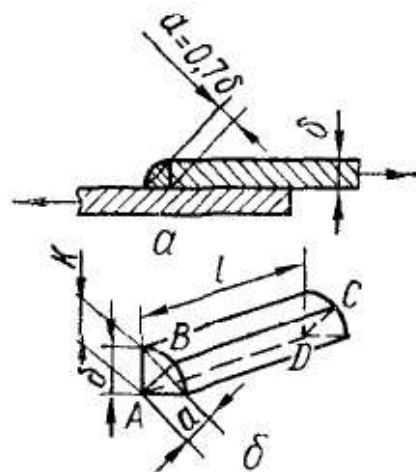


Рис. 196

Таблица 12

Вид напряжения	Обозначение допускаемого напряжения	Допускаемое напряжение, кгс/см ²	
		Ручная сварка электродами с тонкой обмазкой	Автоматическая сварка и ручная сварка электродами с толстой обмазкой
Растяжение	[σ _э]	1000	1300
Сжатие		1100	1450
Срез	[τ _э]	800	1100

Примечание. Индекс «э» означает, что изделия свариваются электрической дугой.

которые, главным образом, должны сопротивляться действию касательных напряжений.

Учитывая, что сопротивление стали срезу ниже, чем растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пренебрегают и рассчитывают его условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по площади сечения AA_1B_1B (рис. 197). При этом для соединения внахлестку в расчет

вводят оба шва — верхний и нижний. Тогда, предположив, что работают оба шва с общей площадью опасного сечения $F_9 = 2al_T = = 2 \cdot 0,7\delta l_T = 1,4 \delta l_T$, где l_T — расчетная длина торцевого шва, запишем условие прочности шва:

$$\tau = \frac{P}{F_9} = \frac{P}{1,4\delta l_T} \leq [\tau_9]. \quad (8.26)$$

Поскольку в начале и в конце шва из-за непровара качество шва ухудшается, действительную его длину увеличивают по сравнению с расчетной на 10 мм, т. е.

$$l = l_T + 10 \text{ мм},$$

где l — действительная длина шва (на рис. 197 $l = b$).

Отметим, что вследствие незначительной деформативности материала шва в направлении действия силы лобовые швы жесткие, поэтому они разрушаются при весьма малых остаточных деформациях и плохо сопротивляются действию повторно-переменных и ударных нагрузок.

Более распространены на практике фланговые швы. Они относятся к вязким, так как разрушаются лишь после значительных остаточных деформаций. Фланговые швы всегда ставят парами; эти швы

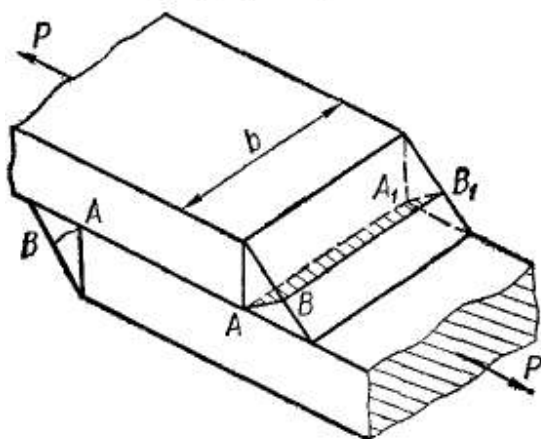


Рис. 197

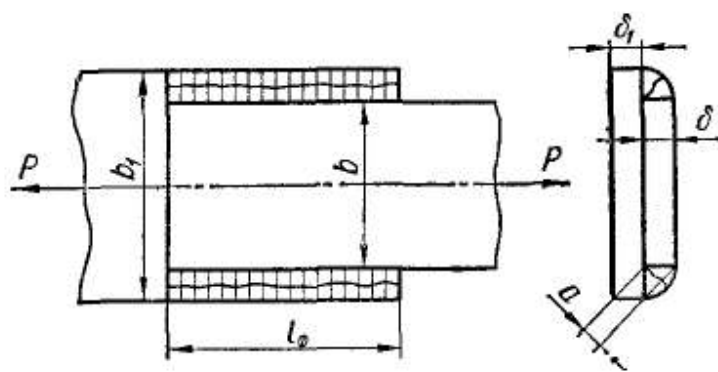


Рис. 198

работают на срез в биссекторных сечениях (рис. 198). Площадь среза каждого шва

$$al_\phi = 0,7\delta(l - 10).$$

Условие прочности на срез принимает вид

$$\tau = \frac{P}{1,4\delta(l - 10)} \leq [\tau_9]. \quad (8.27)$$

Пример 24. Определить необходимые размеры фланговых швов, соединяющих полосы (рис. 198). Растягивающая сила $P = 14\,000$ кгс, а допускаемое напряжение на срез для металла шва $[\tau_9] = 1100$ кгс/см²; $\delta = 1$ см; $\delta_1 = 0,8$ см; $b = 10$ см; $b_1 = 12,5$ см.

Из условия прочности (8.27) определяем необходимую длину шва:

$$l = \frac{P}{1,4\delta[\tau_9]} + 1 \text{ см} = \left(\frac{14\,000}{1,4 \cdot 1 \cdot 1100} + 1 \right) \text{ см} = 10,1 \text{ см}.$$

Пример 25. Найти необходимую длину l_1 и l_2 фланговых швов (рис. 199), соединяющих равнобокий уголок № 5 с косынкой, при действии нагрузки $P = 6000$ кгс. Принимаем, что $[\tau_3] = 900$ кгс/см².

Условие прочности на срез двух швов имеет вид

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2) \delta \cos 45^\circ} \leq [\tau_3], \quad (8.28)$$

где δ — толщина полки уголка.

Общая длина швов при $\delta = 5$ мм

$$l_1 + l_2 \geq \frac{P}{\delta \cos 45^\circ [\tau_3]} = \frac{6000}{0,5 \cdot 0,7 \cdot 900} \text{ см} = 19 \text{ см.}$$

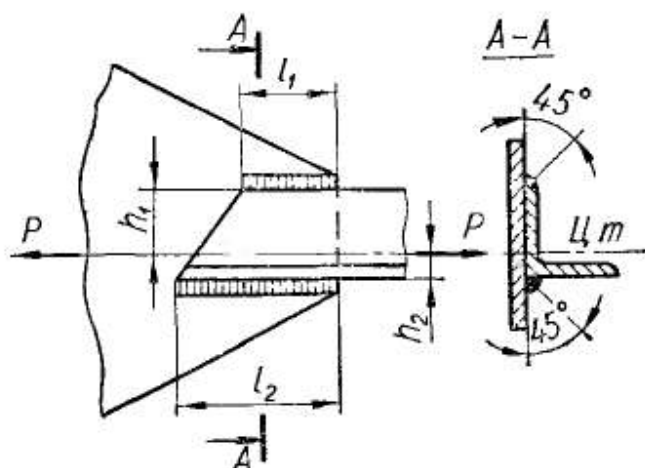


Рис. 199

Чтобы обеспечить одинаковые условия работы обоих швов, следует соотношение длин швов выбрать обратным соотношению расстояний h_1 и h_2 , определяющих положение центра тяжести уголка, через который проходит сила P , т. е.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1}. \text{ При } h_1 = 3,6 \text{ см и } h_2 = 1,4 \text{ см}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1,4}{3,6} \approx 0,4; \quad l_2 = \frac{19}{1,4} \approx 13,5 \text{ см}; \quad l_1 = 19 - 13,5 = 5,5 \text{ см.}$$

В заключение рассмотрим пример расчета врубки, используемой для соединения деревянных элементов конструкций. Древесина анизотропна, т. е. ее механические характеристики зависят от направления силовых воздействий относительно ориентации продольных волокон¹. Вследствие этого допускаемые напряжения для различных направлений действия сил приходится принимать разными (табл. 13).

Таблица 13

Вид напряжения	Обозначение допускаемого напряжения	Допускаемое напряжение, кгс/см ²	
		Сосна	Дуб
Растяжение	$[\sigma]$	100	130
Сжатие вдоль волокон и смятие торца	$[\sigma_{сж}]$	120	150
Смятие во врубках вдоль волокон	$[\sigma_{см}]$	80	110
Смятие перпендикулярно к волокнам (на длине > 10 см)	$[\sigma_{см}]_{90^\circ}$	24	48
Скалывание во врубках вдоль волокон	$[\tau]$	5—10	8—14
Скалывание во врубках поперек волокон	$[\tau]_{90^\circ}$	6	8
Изгиб	$[\sigma_{и}]$	120	150
Скалывание при изгибе	$[\tau_{и}]$	20	28

Пример 26. Рассчитать соединение стропильной ноги со стропильной затяжкой (рис. 200). Угол между осями стропильной ноги и затяжки $\alpha = 30^\circ$. Сила,

¹ Предел прочности для сосны вдоль волокон 400, поперек — 50 кгс/см², для дуба вдоль волокон 500, поперек — 150 кгс/см².

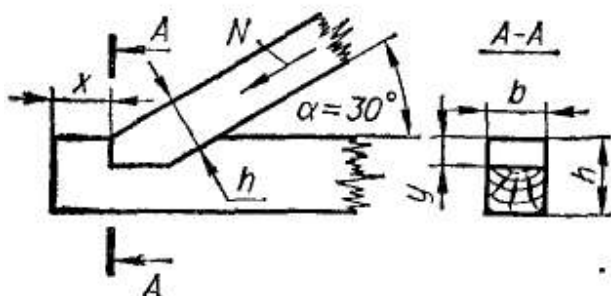


Рис. 200

действующая вдоль стропильной ноги, $N = 5000$ кгс. Материал — сосна, допускаемое напряжение на смятие вдоль волокон — 80 кгс/см². Сечение стропильной ноги $h \times b = 20 \times 20$ см.

Конец затяжки испытывает скалывание вдоль волокон под действием горизонтальной проекции N_1 силы N :

$$N_1 = N \cos 30^\circ = 5000 \cdot 0,866 \text{ кгс} = 4330 \text{ кгс.}$$

Длину x затяжки, выступающую за врубку, определим из условия

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{N_1}{F_{\text{ск}}} = \frac{N_1}{bx} \leq [\tau].$$

Принимая $[\tau] = 8$ кгс/см², находим площадь скалывания:

$$F_{\text{ск}} \geq \frac{N_1}{[\tau]} = \frac{4330}{8} \text{ см}^2 = 541 \text{ см}^2,$$

тогда

$$x = \frac{F_{\text{ск}}}{b} = \frac{541}{20} \text{ см} = 27,1 \text{ см.}$$

Необходимая площадь смятия врубки

$$F_{\text{см}} = \frac{N_1}{[\sigma_{\text{см}}]} = \frac{4330}{80} \text{ см}^2 = 54,1 \text{ см}^2.$$

Глубина врубки

$$y = \frac{F_{\text{см}}}{b} = \frac{54,1}{20} \text{ см} = 2,71 \text{ см.}$$

Примем $y = 3$ см.

Глава 9

КРУЧЕНИЕ

§ 53. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Как уже указывалось (§ 2), деформация кручения вызывается парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к оси стержня. Поэтому при кручении в произвольном поперечном сечении стержня из шести внутренних силовых факторов возникает только один — крутящий момент $M_{\text{кр}}$ (рис. 201). Как показывают опыты, поперечные сечения при кручении поворачиваются одно относительно другого вокруг оси стержня, при этом длина стержня не меняется.

Стержни, работающие на кручение, обычно называют *валами*. Рассматривая кручение вала (например, по схеме, приведенной на рис. 202), легко установить, что под действием скручивающего момента, приложенного к свободному концу, любое сечение на расстоянии x от заделки поворачивается относительно закрепленного

сечения на некоторый угол φ — *угол закручивания*. При этом, чем больше скручивающий момент M_k , тем больше и угол закручивания. Зависимости $\varphi = f(M_k)$, называемые *диаграммами кручения*, можно получить экспериментально на соответствующих испытательных машинах с помощью специального записывающего устройства. Примерный вид такой диаграммы (полученной при постепенном увеличении нагрузки вплоть до разрушения) для вала длиной l , изготовленного из пластичного материала, показан на рис. 203.

Рассматривая диаграмму кручения, нетрудно убедиться, что она до некоторой степени подобна диаграмме растяжения: характерные участки и точки аналогичны тем,

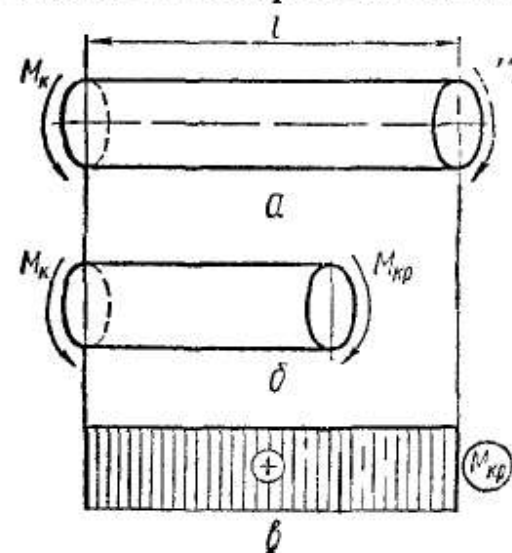


Рис. 201

которые наблюдаются на диаграмме растяжения: $M_{пл}$ — момент, до которого сохраняется прямолинейная зависимость между нагрузкой и деформацией; M_T —

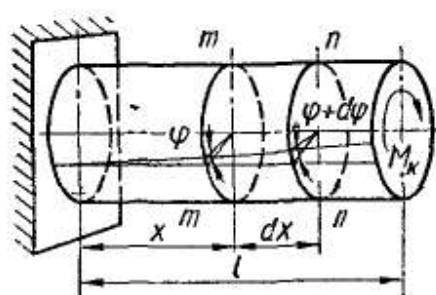


Рис. 202

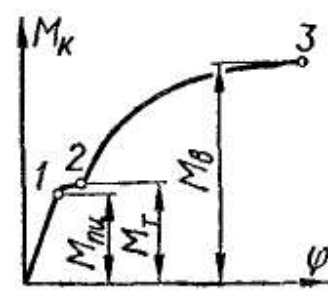


Рис. 203

момент, соответствующий началу текучести; M_b — крутящий момент, вызывающий разрушение.

В дальнейшем в этом параграфе при выводе формул для напряжений и угла закручивания нас будет интересовать участок диаграммы кручения, отвечающий работе материала в пределах пропорциональности, т. е. начальный прямолинейный участок, характеризующий линейную зависимость между крутящим моментом и углом закручивания, что имеет место при нормальной работе валов.

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях стержня, рассмотрим прежде всего статическую сторону задачи. Поскольку $M_{кр}$ — единственный внутренний силовой фактор в поперечном сечении, пять интегральных уравнений (3.29) — (3.33) тождественно обращаются в нуль, а уравнение (3.34) принимает вид

$$\int_F \rho \tau dF = M_{кр}, \quad (9.1)$$

где τ — касательное напряжение, действующее на элементарной площадке dF , расположенной на произвольном расстоянии ρ от центра сечения (рис. 204, б).

Характер распределения напряжений по сечению выясним, рассмотрев геометрическую картину деформации вала при кручении. Для этого на поверхности круглого вала нанесем

сетку, состоящую из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (рис. 204, а). После приложения скручивающего момента наблюдаем следующее: образующие цилиндра превращаются в винтовые линии, т. е. линии одинакового наклона к оси стержня, параллельные круги не искривляются и расстояние между ними практически остается неизменным; радиусы, проведенные в торцовых сечениях, остаются прямыми. Полагая, что картина, наблюдаемая на поверхности стержня, сохраняется и внутри, приходим к гипотезе плоских сечений: сечения, плоские до деформации, остаются плоскими при кручении кругло-

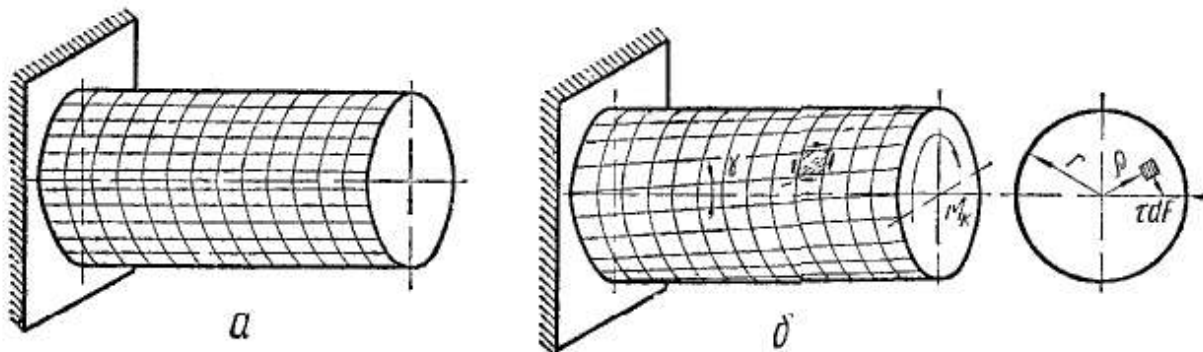


Рис. 204

го стержня, поворачиваясь одно относительно другого на некоторый угол закручивания.

Рассмотрим некоторый участок вала длиной dx (рис. 205), выделенный из исследуемого вала (рис. 202); вал подвержен действию скручивающего момента M_k , вызывающего в поперечных сечениях внутренние крутящие моменты $M_{кр}$. Пусть угол поворота сечения $m - m$ относительно неподвижного будет φ , тогда угол поворота сечения $n - n$, расположенного на расстоянии dx , будет $\varphi + d\varphi$. Следовательно, угол закручивания участка стержня длиной dx равен $d\varphi$.

Рассмотрим в связи с этим деформацию прямоугольного элемента $ab'd'c$ бесконечно малой толщины, выделенного у поверхности вала. Так как радиусы остаются прямыми, то отрезок $O'b'$, поворачиваясь в плоскости поперечного сечения на угол закручивания $d\varphi$, займет положение $O'b$. При этом образующая ab' переместится в новое положение ab , составив с первоначальным угол γ . Совершенно аналогично образующая cd' перейдет в положение cd . Так как длина этих отрезков практически неизменна, то деформация прямоугольного элемента $ab'd'c$ состоит в изменении первоначально прямых углов на величину угла γ . Таким образом, рассмотренный элемент находится в условиях чистого сдвига и, следовательно, на его гранях действуют касательные напряжения (рис. 205, 206).

В силу сказанного угол γ является *углом сдвига (относительный сдвиг)* и

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b'b}{ab'} \approx \gamma.$$

Учитывая, что $ab' = dx$, а $bb' = r d\varphi$, угол сдвига на поверхности скручиваемого стержня можно представить в виде

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (9.2)$$

Величина $\frac{d\varphi}{dx}$ является *относительным (погонным) углом закручивания* (измеряется в см^{-1}) и обычно обозначается через Θ . Учитывая это, формулу (9.2) можно записать так:

$$\gamma = \Theta r \quad (9.3)$$

Если мысленно представить себе аналогичный элемент, выделенный внутри стержня на произвольной цилиндрической поверхности радиуса ρ (рис. 205), то аналогичные рассуждения приведут к заключению, что угол сдвига

$$\gamma_\rho = \Theta \rho \quad (9.4)$$

Теперь рассмотрим физическую сторону задачи, устанавливающую связь между напряжением и деформацией. Поскольку

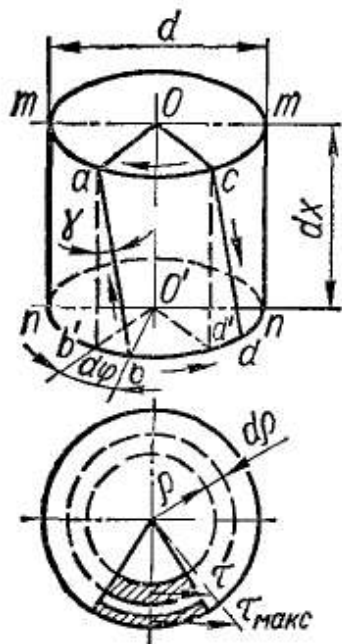


Рис. 205

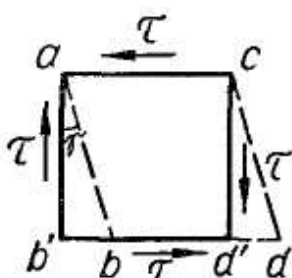


Рис. 206

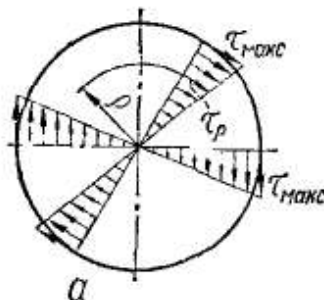
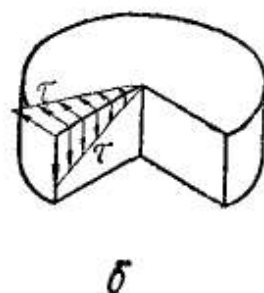


Рис. 207



б

ку элемент испытывает чистый сдвиг, то с учетом выражений (9.4) и (8.7) получим

$$\tau_\rho = G\Theta\rho \quad (9.5)$$

Формулы (9.4) и (9.5) показывают, что углы сдвига и касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ точек от центра сечения (рис. 207, а). Очевидно максимальные напряжения будут у поверхности стержня, при $\rho = r$. Таким образом, выражение (9.5) можно переписать в виде

$$\tau_r = \tau_{\text{макс}} = G\Theta r.$$

Подставляя выражение (9.5) для касательного напряжения в уравнение (9.1), будем иметь

$$M_{\text{кр}} = G\Theta \int_F \rho^2 dF = G\Theta J_\rho.$$

Отсюда получим формулу для относительного угла закручивания круглого стержня:

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_\rho} \quad (9.6)$$

где GJ_p — жесткость сечения стержня при кручении, кгс · см²;
 J_p — полярный момент инерции круглого стержня, который для сплошного стержня диаметром d , как известно (§ 5), выражается формулой $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, а для трубчатого стержня с внутренним диаметром d_v и наружным d_n

$$J_p = \frac{\pi (d_n^4 - d_v^4)}{32} = \frac{\pi d_n^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Здесь $\alpha = \frac{d_v}{d_n}$.

Зная выражение (9.6) относительного угла закручивания, можно написать формулу для определения взаимного угла закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии l :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_p} dx.$$

Если в пределах цилиндрического участка стержня длиной l крутящие моменты в сечениях не изменяются, то

$$\boxed{\varphi = \Theta l = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}.} \quad (9.7)$$

Формулу (9.7), устанавливающую связь между силовым фактором при кручении ($M_{кр}$) и соответствующей деформацией кручения (углом φ), часто называют законом Гука при кручении.

Для определения касательного напряжения τ в любой точке сечения стержня достаточно в формулу (9.5) подставить выражение для Θ по формуле (9.6). Тогда

$$\boxed{\tau = \frac{M_{кр} \rho}{J_p}.} \quad (9.8)$$

Максимальное касательное напряжение, действующее на периферии сечения стержня,

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_{кр} r}{J_p} = \frac{M_{кр}}{W_p},} \quad (9.9)$$

где

$$W_p = \frac{J_p}{r} \text{ см}^3.$$

Эта величина называется полярным моментом сопротивления. Для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}. \quad (9.10)$$

Изложенная теория применима и для трубчатого круглого сечения. В этом случае

$$W_p = \frac{\pi d_n^3 (1 - \alpha^4)}{16};$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{\text{кр}}}{\pi d_n^3 (1 - \alpha^4)}. \quad (9.11)$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в скручиваемом круглом стержне пропорционально крутящему моменту $M_{\text{кр}}$ и обратно пропорционально кубу наружного диаметра стержня.

Установив формулу для определения максимального касательного напряжения при кручении, можно записать уравнение прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (9.12)$$

где $[\tau]$ — допускаемое напряжение при кручении (чистом сдвиге). Отсюда полярный момент сопротивления вала

$$W_p \geq \frac{M_{\text{кр}}}{[\tau]}. \quad (9.13)$$

Помимо расчета на прочность валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая погонные углы закручивания некоторой допускаемой величиной $[\Theta]$:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{G J_p} \leq [\Theta], \quad (9.14)$$

откуда необходимый полярный момент инерции вала определится формулой

$$J_p \geq \frac{M_{\text{кр}}}{G [\Theta]}. \quad (9.15)$$

§ 54. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Из анализа общей формулы (9.8) для касательных напряжений τ видно, что напряжения в плоскости сечения вала распределены неравномерно и в зависимости от радиуса изменяются по линейному закону от нуля в центре сечения до максимума на его периферии (рис. 207, а). В продольных сечениях, проходящих через ось вала, по закону парности касательных напряжений возникают такие же по величине касательные напряжения (рис. 207, б). В элементе материала, мысленно выделенном из наружных слоев стержня сечениями, параллельными и перпендикулярными к образующим (рис. 208), по граням будут действовать только касательные напряжения. В сечениях, наклоненных к оси, будут также и нормальные напряжения, как об этом подробно указывалось при рассмотрении

напряженного состояния элемента, находящегося в условиях чистого сдвига. Наибольшие нормальные напряжения действуют на главных площадках, которые, как известно, наклонены под углом 45° к площадкам чистого сдвига [при кручении — под углом 45° к оси вала (рис. 208)].

Таким образом, при кручении круглых валов опасными могут стать как касательные напряжения, возникающие в поперечных

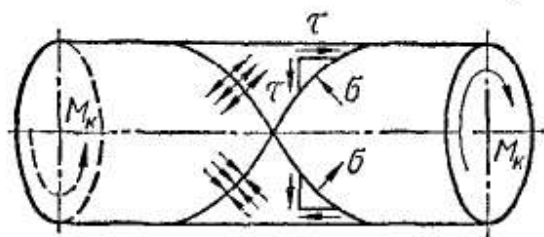


Рис. 208

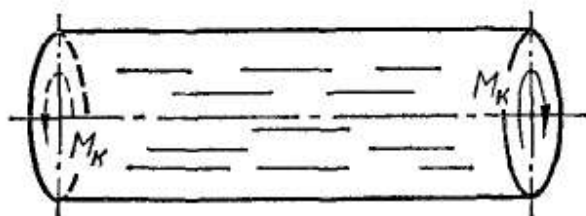


Рис. 209

и в продольных сечениях вала, так и нормальные напряжения, возникающие в площадках под углом 45° к первым. В связи с этим характер разрушения вала будет зависеть от способности материала сопротивляться действию касательных и нормальных напряжений.

Так, если материал плохо сопротивляется касательным напряжениям (действию сдвига), то первые трещины разрушения возникают

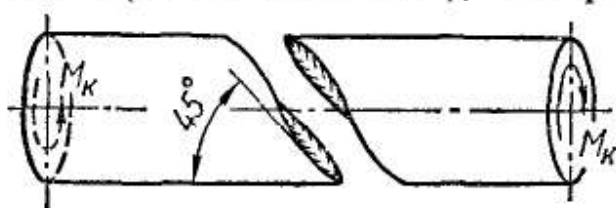


Рис. 210

по образующим в местах действия наибольших касательных напряжений. Например, в случае кручения деревянных валов с продольным расположением волокон трещины разрушения ориентированы вдоль образу-

ющей (рис. 209), поскольку древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений вдоль волокон. Если же материал плохо сопротивляется растягивающим напряжениям, как например чугун, то трещины разрушения при кручении пройдут по линиям, нормальным к действию главных растягивающих напряжений (рис. 210), т. е. по винтовым линиям, касательные к которым образуют угол 45° с осью стержня. Стальные валы на практике часто разрушаются по поперечному сечению, перпендикулярному к оси вала. Этот вид разрушения обусловлен действием в поперечном сечении касательных напряжений.

§ 55. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для проектирования можно рекомендовать следующий порядок расчета валов на прочность и жесткость при кручении.

По схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру крутящих моментов по отдельным участкам (§ 16). Выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение $[\tau]$. Записывают условие

прочности (9.12) для участка вала с максимальным значением крутящего момента (согласно эпюре моментов).

Если вал достаточно длинный и по отдельным его участкам действуют существенно разные по величине крутящие моменты, то его следует конструировать ступенчатым. Диаметр вала каждой ступени рассчитывают, исходя из той же формулы (9.12), но значения крутящего момента при этом берут разные для разных участков в соответствии с эпюрой крутящих моментов.

Учитывая, что для сплошного круглого вала $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, можно из выражения (9.13) записать расчетную формулу для диаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi [\tau]}}. \quad (9.16)$$

Определяя диаметр полого вала, из конструктивных соображений задаются соотношением между размерами внутреннего и наружного диаметров, т. е. коэффициентом $\alpha = \frac{d_{в}}{d_{н}}$, а затем, учитывая выражение (9.11), из выражения (9.13) находят величину наружного диаметра вала:

$$d_{н} \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}. \quad (9.17)$$

Определив размеры вала из условия прочности, проверяют вал на жесткость по формуле (9.14). Допускаемый относительный угол закручивания вала принимают следующим: при статической нагрузке $[\theta^\circ] = 0,3^\circ$ на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках $[\theta^\circ] = 0,25^\circ$, а при ударных нагрузках $[\theta^\circ] = 0,15^\circ$. Учитывая, что формула (9.14) выражает угол закручивания в радианах, приведенные допускаемые значения углов нужно перевести в радианы, умножив их на $\frac{\pi}{180^\circ}$. Если при проверке окажется, что условие жесткости (9.14) удовлетворяется, то на этом обычно и заканчивают расчет вала. В противном случае размеры вала нужно подобрать из условия жесткости (9.15):

$$J_p \geq \frac{M_{кр}}{G [\theta]}.$$

Подставляя в эту формулу выражение полярного момента инерции найдем, что для сплошного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi [\theta]}}. \quad (9.18)$$

для полого вала

$$d_{н} \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi [\theta] (1 - \alpha^4)}}. \quad (9.19)$$

Иногда при расчете вала известна передаваемая им мощность N в лошадиных силах и число оборотов n в минуту. В этом случае

скручивающие моменты в расчетных формулах можно выразить непосредственно через мощность N и число оборотов n , исходя из формулы (3.1):

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ кгс} \cdot \text{см.} \quad (9.20)$$

В случае, когда мощность K задана в киловаттах, скручивающие моменты определяют по формуле (3.2):

$$M_k = 97\,360 \frac{K}{n} \text{ кгс} \cdot \text{см.} \quad (9.21)$$

Пример 27. Найти мощность в лошадиных силах, передаваемую валом, если диаметр сплошного вала $d = 150$ мм, число оборотов вала в минуту $n = 120$, модуль сдвига $G = 8,4 \cdot 10^5$ кгс/см² и угол закручивания участка вала длиной 7,5 м равен $1/15$ рад.

Из уравнения (9.7)

$$M_{кр} = \frac{GJ_p \varphi}{l} = \frac{G \frac{\pi d^4}{32} \varphi}{l} = \frac{840\,000 \cdot \pi \cdot 15^4}{32 \cdot 750 \cdot 15} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 371\,500 \text{ кгс} \cdot \text{см.}$$

Тогда, применив формулу (9.20), определим передаваемую мощность:

$$N = \frac{M_{кр} n}{71\,620} = \frac{371\,500 \cdot 120}{71\,620} \text{ л. с.} = 622 \text{ л. с.}$$

Пример 28. Из условия прочности и жесткости определить диаметр сплошного вала (рис. 211) при следующих значениях передаваемых шкивами моментов:

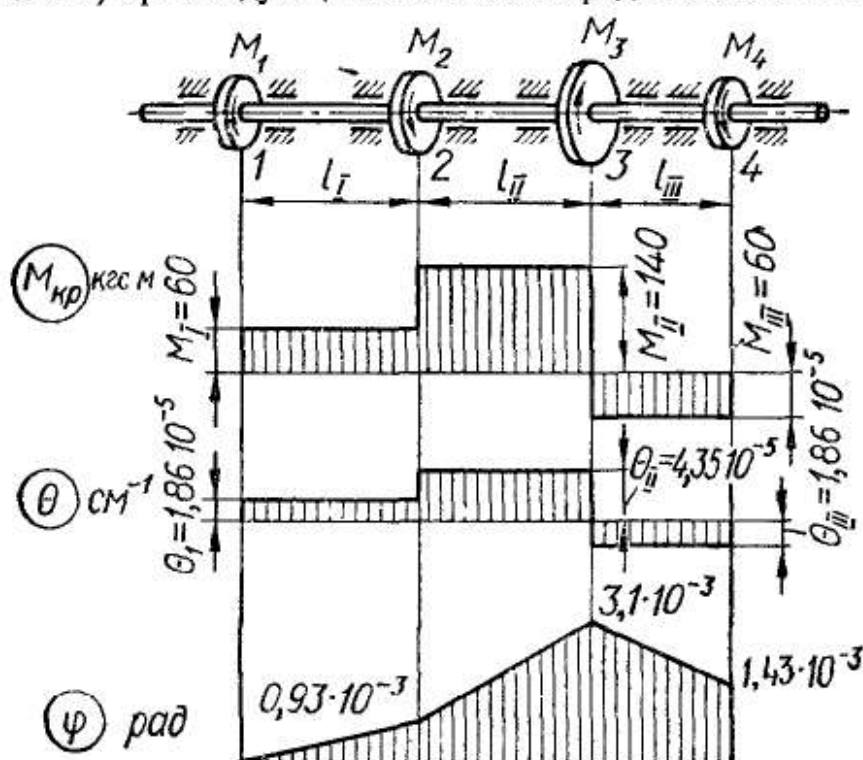


Рис. 211

$M_1 = 60$ кгс · м; $M_2 = 80$ кгс · м; $M_3 = 200$ кгс · м; $M_4 = 60$ кгс · м. Допускаемое напряжение $[\tau] = 200$ кгс/см². Допускаемый угол закручивания $[\theta] = \frac{1}{4}$ °/м,

или $[\theta] = \frac{\pi}{180 \cdot 4 \cdot 100}$ см⁻¹. Модуль упругости стали при сдвиге $G = 8 \times 10^5$ кгс/см².

Строим эпюру крутящих моментов. Наибольший момент действует на участке 2—3.

$$M_{\text{кр.макс}} = M_1 + M_2 = (60 + 80) \text{ кгс} \cdot \text{м} = 140 \text{ кгс} \cdot \text{м}.$$

Подберем диаметр вала сначала из условия прочности, для чего воспользуемся формулой (9.16):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 14000}{\pi \cdot 200}} \text{ см} \approx 7 \text{ см}.$$

Теперь подберем диаметр вала из условия жесткости, используя формулу (9.18):

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 14000 \cdot 180 \cdot 400}{8 \cdot 10^5 \pi^2}} \text{ см} \approx 8 \text{ см}.$$

Из двух найденных значений диаметров следует принять больший ($d = 8$ см), найденный из условия жесткости.

Теперь определим относительный угол закручивания вала по отдельным участкам, пользуясь формулой (9.6). Подставляя в эту формулу значения $M_{\text{кр}}$ для разных участков, найдем, что

$$\theta_I = \frac{M_{\text{кр}I}}{GJ_p} = \frac{6000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 1,86 \cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{II} = \frac{M_{\text{кр}II}}{GJ_p} = \frac{14000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 4,35 \cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{III} = \frac{M_{\text{кр}III}}{GJ_p} = \frac{6000 \cdot 32}{8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 8^4} = 1,86 \cdot 10^{-5}.$$

Зная относительные углы закручивания по отдельным участкам, можно построить эпюры θ_l и углов φ по длине вала (рис. 211). Эпюра углов закручивания φ построена при $l_I = l_{II} = 50$ см и $l_{III} = 90$ см. При этом одно из сечений принято неподвижным (на рис. 211 это сечение I). Поскольку в пределах каждого участка $\theta = \text{const}$, то угол закручивания на каждом участке изменяется по линейному закону и

$$\varphi_{2-1} = \theta_I l_I = 1,86 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \text{ рад} = 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{3-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} = (0,93 \cdot 10^{-3} + 2,18 \cdot 10^{-3}) \text{ рад} = 3,10 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{4-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} = (0,93 \cdot 10^{-3} + 2,18 \cdot 10^{-3} - 1,67 \cdot 10^{-3}) \text{ рад} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Пример 29. Определить, на сколько процентов увеличится наибольшее напряжение вала при кручении, если в валу сделано аксиальное отверстие $d_v = 0,4 d_n$ ($\alpha = 0,4$).

На основании формул (9.10) и (9.11), полагая $d_n = d$, получим напряжения сплошного и полого валов:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \tau_c;$$

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3 (1 - \alpha^4)} = \tau_n.$$

Искомая разница в напряжениях

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{\tau_n - \tau_c}{\tau_c} \cdot 100\% = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} \left[\frac{1}{1 - \alpha^4} - 1 \right] \frac{\pi d^3}{16M_{\text{кр}}} 100 = \\ &= \frac{(0,4)^4}{1 - (0,4)^4} 100 \approx 2,6\%. \end{aligned}$$

Пример 30 Заменить сплошной вал диаметра $d = 300$ мм полым равнопрочным валом с наружным диаметром $d_H = 350$ мм. Найти внутренний диаметр полого вала d_B и сравнить веса этих валов

Наибольшие касательные напряжения в обоих валах должны быть равны:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d_H^3 (1 - \alpha^4)}$$

Отсюда определим коэффициент α :

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d}{d_H}\right)^3} = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{300}{350}\right)^3} = 0,78.$$

Внутренний диаметр полого вала

$$d_B = \alpha d_H = 0,78 \cdot 350 = 273 \text{ мм.}$$

Отношение весов равно отношению площадей поперечных сечений:

$$\frac{\pi (d_H^2 - d_B^2) \cdot 4}{4\pi d^2} = \frac{d_H^2 - d_B^2}{d^2} = \frac{350^2 - 273^2}{300^2} = 0,534.$$

Из примеров 29, 30 видно, что изготовление пустотелых валов, т. е. валов, у которых малонагруженная внутренняя часть удаляется, является весьма эффективным средством снижения затраты материала, а следовательно, и облегчения веса валов. При этом наибольшие напряжения, возникающие в пустотелом валу, мало отличаются от максимальных напряжений в валу сплошного сечения при том же

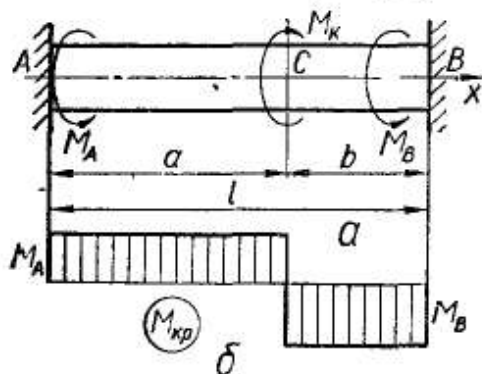


Рис. 212

наружном диаметре. Так, в примере 29 за счет сверления при $\alpha = \frac{d_B}{d_H} = 0,4$, дающем облегчение вала на 16%, максимальные напряжения в наружных волокнах полого вала возросли всего на 2,6%. Во втором случае равнопрочный пустотелый вал, но с несколько бóльшим наружным диаметром (350 мм) по сравнению со сплошным валом (300 мм), оказался легче сплошного на 53,4%. Эти

примеры наглядно свидетельствуют о рациональности применения пустотелых валов, что широко используется в некоторых областях современного машиностроения, в частности в моторостроении.

В качестве примера статически неопределимого стержня, подверженного кручению, рассмотрим круглый стержень, защемленный обоими концами и нагруженный скручивающим моментом M_k в некотором сечении C (рис. 212, а). Построим эпюру крутящих моментов и вычислим диаметр стержня.

При такой нагрузке в защемлениях возникают реактивные моменты M_A и M_B в плоскостях, перпендикулярных к оси x стержня.

Статическая сторона задачи. Из условия равновесия стержня

$$\sum M_x = M_A + M_B - M_k = 0 \quad (9.22)$$

видим, что задача один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона задачи. Так как оба конца заземлены, то угол поворота сечения B относительно A равен нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \quad (9.23)$$

Физическая сторона задачи. Используя формулу (9.7), запишем выражение для угла закручивания сечения B относительно A :

$$\begin{aligned} \varphi_{B-C} &= -\frac{M_B b}{GJ_p}; \\ \varphi_{C-A} &= \frac{(M_K - M_B) a}{GJ_p}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Внося формулы (9.24) в выражение (9.23), получим

$$\varphi_{B-A} = -\frac{M_B b}{GJ_p} + \frac{(M_K - M_B) a}{GJ_p} = 0. \quad (9.25)$$

Отсюда с учетом уравнения (9.22) найдем, что

$$M_B = \frac{M_K a}{a + b}; \quad (9.26)$$

$$M_A = \frac{M_K b}{a + b}. \quad (9.27)$$

Эпюры крутящих моментов показаны на рис. 212, б.

Если $a > b$, то $M_{кр.макс} = M_B$ и на основании формулы (9.16)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_K}{(a+b)\pi[\tau]}}.$$

§ 56. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В инженерной практике довольно часто кручению подвергаются стержни, имеющие не круглое, а прямоугольное, треугольное, эллиптическое и другие сечения. В этих случаях гипотеза плоских сечений неприменима, так как сечения искривляются (депланируются). Точные расчеты стержней некруглого сечения можно получить методами теории упругости. Однако поскольку в настоящем курсе нет возможности их изложить, приведем здесь только некоторые окончательные результаты. Отметим при этом, что в стержнях произвольного сечения, как и в стержнях круглого сечения, касательные напряжения при кручении направлены по касательной к контуру.

Наибольшие касательные напряжения, погонные и полные углы закручивания по аналогии с кручением стержней круглого сечения принято определять по формулам

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K};} \quad (9.28)$$

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{GJ_k}; \quad (9.29)$$

$$\Phi = \frac{M_{кр}l}{GJ_k}. \quad (9.30)$$

Здесь J_k и W_k — некоторые геометрические характеристики, которые условно называют *моментом инерции при кручении* и *моментом сопротивления при кручении*, см^4 и см^3 соответственно.

Наиболее часто встречаются стержни прямоугольного сечения. В этом случае распределение касательных напряжений имеет вид, показанный на рис. 213. Наибольшие напряжения возникают у поверхности посредине длинных сторон прямоугольного сечения (в точках C и D). Определяются они по формуле (9.28), где

$$W_k = \alpha hb^2. \quad (9.31)$$

Здесь h — длинная сторона прямоугольного поперечного сечения;

b — короткая его сторона.

Напряжения, возникающие у поверхности сечения посредине коротких сторон (в точках A и B), меньше. Их можно выразить через $\tau_{\text{макс}}$ следующим образом:

$$\tau = \gamma \tau_{\text{макс}}. \quad (9.32)$$

Для определения относительного угла закручивания прямоугольного сечения в формуле (9.29) принимают

$$J_k = \beta hb^3. \quad (9.33)$$

Коэффициенты α , γ и β , зависящие от отношения $\frac{h}{b}$, даны в табл. 14. Там же приведены данные по кручению некоторых других некруглых сечений.

Запишем условия прочности и жесткости для прямоугольного сечения:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} \leq [\tau]; \quad (9.34)$$

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{\beta hb^3 G} \leq [\Theta]. \quad (9.35)$$

При кручении стержней, имеющих форму равнобедренной трапеции, приближенное значение наибольших касательных напряжений и угла закручивания можно получить, рассчитывая стержень с сечением эквивалентного прямоугольника. Последний строится следующим образом (рис. 214): из центра тяжести C трапеции опускают перпендикуляры CB и CD на боковые стороны и затем прово-

дят вертикали через точки B и D . Полученный прямоугольник $abcd$ и будет тем эквивалентным сечением рассматриваемого трапецидального стержня, к которому должны быть применены формулы (9.28) — (9.33).

При кручении стержней эллиптического поперечного сечения максимальные касательные напряжения возникают в крайних точках, лежащих на малых полуосях (рис. 215). В этом случае

$$W_k = \frac{\pi b^2 h}{16},$$

где b и h — соответственно размеры малой и большой осей эллипса.

Наибольшие напряжения в наружных точках сечения на большой полуоси

$$\tau' = \frac{\tau_{\max}}{m},$$

где $m = \frac{h}{b}$.

Условный момент инерции при кручении для эллипса

$$J_k = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2). \quad (9.36)$$

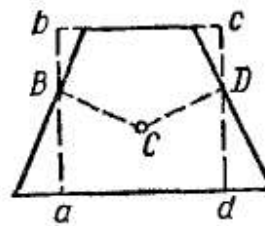


Рис. 214

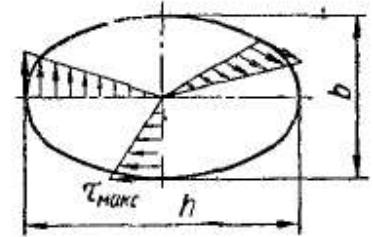


Рис. 215

Значения J_k и W_k для некоторых некруглых поперечных сечений приведены в табл. 14.

Если скручивается стержень сложного незамкнутого сечения, которое можно разбить на части с J_{ki} и W_{ki} , то для него

$$J_k = J_{k1} + J_{k2} + J_{k3} + \dots + J_{kn} = \sum J_{ki}, \quad (9.37)$$

где $i = 1; 2; 3; \dots; n$ — номера простейших частей, на которые разбито сечение.

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей один и тот же:

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{GJ_k} = \frac{M_{кр1}}{GJ_{k1}} = \dots = \frac{M_{крn}}{GJ_{kn}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткостям:

$$M_{кр1} = M_{кр} \frac{J_{k1}}{J_k}; \quad M_{кр2} = M_{кр} \frac{J_{k2}}{J_k}; \quad \dots; \quad M_{крn} = M_{кр} \frac{J_{kn}}{J_k}.$$

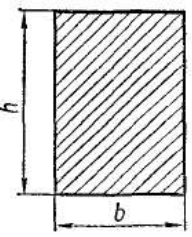
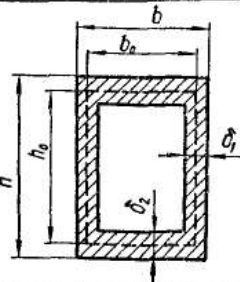
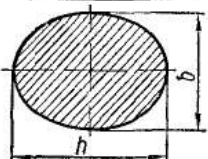
Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждой части (i) сечения

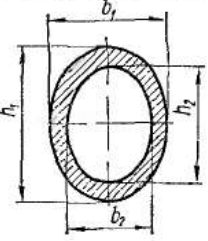
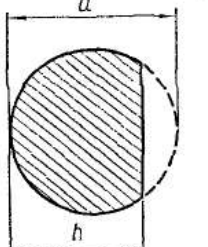
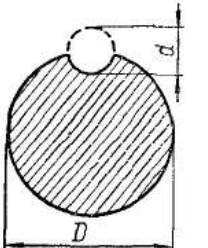
$$\tau_{ki} = \frac{M_{крi}}{W_{ki}} = \frac{M_{кр}}{W_{ki}} \left(\frac{J_{ki}}{J_k} \right) = \frac{M_{кр}}{J_k} \left(\frac{J_{ki}}{W_{ki}} \right).$$

Наибольшего значения напряжение τ достигает для того элемента, у которого $\frac{J_{ki}}{W_{ki}}$ максимально:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{J_k} \left(\frac{J_{ki}}{W_{ki}} \right)_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}, \quad (9.38)$$

Таблица 14

Форма сечения	Момент инерции при кручении J_K см ⁴	Момент сопротивления при кручении W_K см ³	Точки с наибольшими касательными напряжениями $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$	Примечание																																															
				$\frac{h}{b}$	α	β	γ																																												
	$J_K = \beta h b^3$	$W_K = \alpha h b^2$	<p>Посредине длинных сторон</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K};$ <p>посредине коротких сторон</p> $\tau = \gamma \tau_{\max};$ <p>в углах напряжения равны нулю</p>	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0,208</td><td>0,141</td><td>1</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,231</td><td>0,196</td><td>0,859</td></tr> <tr><td>1,75</td><td>0,239</td><td>0,214</td><td>—</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>0,246</td><td>0,229</td><td>0,795</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,256</td><td>0,249</td><td>—</td></tr> <tr><td>3,0</td><td>0,267</td><td>0,263</td><td>0,753</td></tr> <tr><td>4,0</td><td>0,282</td><td>0,281</td><td>0,745</td></tr> <tr><td>6,0</td><td>0,299</td><td>0,299</td><td>0,743</td></tr> <tr><td>8,0</td><td>0,307</td><td>0,307</td><td>0,743</td></tr> <tr><td>10,0</td><td>0,313</td><td>0,313</td><td>0,743</td></tr> <tr><td>∞</td><td>0,333</td><td>0,333</td><td>0,743</td></tr> </table>	1	0,208	0,141	1	1,5	0,231	0,196	0,859	1,75	0,239	0,214	—	2,0	0,246	0,229	0,795	2,5	0,256	0,249	—	3,0	0,267	0,263	0,753	4,0	0,282	0,281	0,745	6,0	0,299	0,299	0,743	8,0	0,307	0,307	0,743	10,0	0,313	0,313	0,743	∞	0,333	0,333	0,743			
1	0,208	0,141	1																																																
1,5	0,231	0,196	0,859																																																
1,75	0,239	0,214	—																																																
2,0	0,246	0,229	0,795																																																
2,5	0,256	0,249	—																																																
3,0	0,267	0,263	0,753																																																
4,0	0,282	0,281	0,745																																																
6,0	0,299	0,299	0,743																																																
8,0	0,307	0,307	0,743																																																
10,0	0,313	0,313	0,743																																																
∞	0,333	0,333	0,743																																																
	$J_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{K1} = 2h_0 b_0 \delta_1$ $W_{K2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	<p>Посредине длинной стороны</p> $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{K1}};$ <p>посредине короткой стороны</p> $\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{K2}}$	<p>Во внутренних углах имеет место высокая концентрация напряжений, достигающих предела текучести материала.</p> <p>При наличии закруглений радиуса r коэффициент концентрации</p> $\alpha_K = 1,74 \sqrt[3]{\frac{\delta_{\max}}{r}}$																																															
	$J_K = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2)$	$W_K = \frac{\pi b^2 h}{16}$	<p>В наружных точках малых полуосей</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_K};$	$\frac{h}{b} = m > 1$																																															

			в наружных точках больших полуосей		$\tau_1 = \frac{\tau_{\max}}{m}$																														
	$J_k = \frac{\pi m^3 b_1^4 (1 - \alpha^4)}{16(m^2 + 1)}$	$W_k = \frac{\pi b_1^3}{16} \times (1 - \alpha^4) m$	В конце малой полуоси $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$; в конце большой полуоси	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$	$\tau_1 = \frac{\tau_{\max}}{m}$																														
	$J_k = \frac{d^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$W_k = \frac{d^3}{8} \times \frac{2,6 \frac{h}{d} - 1}{\left(0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)}$	$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$	$\frac{h}{d} > 0,5$																															
	$J_k = \alpha \frac{D^4}{16}$	$W_k = \beta \frac{D^3}{8}$	По дну канавки $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}$	<table border="1" data-bbox="1125 1288 1540 1512"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>α</th> <th>β</th> <th>d/D</th> <th>α</th> <th>β</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,00</td> <td>1,57</td> <td>1,57</td> <td>0,40</td> <td>0,76</td> <td>1,22</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,80</td> <td>1,56</td> <td>0,60</td> <td>0,66</td> <td>0,92</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,81</td> <td>1,56</td> <td>0,80</td> <td>0,52</td> <td>0,63</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>0,82</td> <td>1,46</td> <td>1,00</td> <td>0,38</td> <td>0,38</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	α	β	d/D	α	β	0,00	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22	0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92	0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63	0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38	
d/D	α	β	d/D	α	β																														
0,00	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22																														
0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92																														
0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63																														
0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38																														

где

$$W_k = \frac{J_k}{\left(\frac{J_{kl}}{W_{kl}}\right)_{\max}} \quad (9.39)$$

Пример 31. Стальной стержень прямоугольного сечения передает крутящий момент $M_k = 100$ кгс · м. Найти размеры сечения стержня, если известно, что допускаемое напряжение на кручение $[\tau] = 400$ кгс/см², а отношение сторон $\frac{h}{b} = 2,5$.

Из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} \leq [\tau]$$

находим момент сопротивления кручению стержня:

$$W_k = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{10\,000}{400} \text{ см}^3 = 25 \text{ см}^3,$$

а, зная соотношение сторон сечения $\frac{h}{b} = 2,5$ и беря из табл. 14 соответствующее значение $\alpha = 0,256$, размеры сечения найдем из формулы (9.31).

$$W_k = \alpha h b^2 = 2,5 \cdot \alpha b^3,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_k}{2,5\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{25}{2,5 \cdot 0,256}} \text{ см} = 3,38 \text{ см}, \quad h = 2,5b = 2,5 \cdot 3,38 \text{ см} = 8,45 \text{ см}.$$

Пример 32. Найти наибольшее касательное напряжение и угол закручивания для стального стержня длиной 5 м, имеющего поперечное сечение, показанное на рис. 216, а. Стержень скручивается моментами $M_k = 5000$ кгс · см, приложенными к обоим его концам.

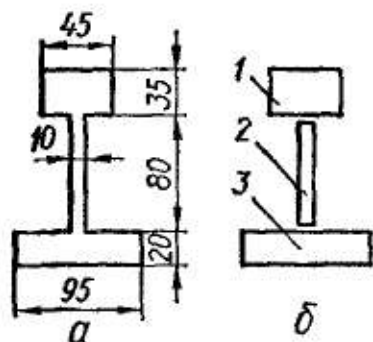


Рис. 216

Для вычисления напряжений и деформаций в стержне при кручении профиль его необходимо разбить на отдельные элементы (рис. 216, б). Наибольшее напряжение вычисляют по формуле (9.28):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k},$$

$$W_k = \frac{J_k}{\left(\frac{J_{kl}}{W_{kl}}\right)_{\max}}$$

Вычислим геометрические характеристики, входящие в последние формулы:

$$J_k = J_{k1} + J_{k2} + J_{k3}.$$

Для части 1 сечения стержня $h_1 = 45$ мм; $b_1 = 35$ мм; $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$; $J_{k1} = \beta h_1 b_1^3$. В табл. 14 при $\frac{h_1}{b_1} = 1,285$ находим, что $\alpha_1 = 0,221$; $\beta_1 = 0,172$. Тогда

$$W_{k1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,221 \cdot 4,5 \cdot 3,5^2 \text{ см}^3 = 12,2 \text{ см}^3;$$

$$J_{к1} = \beta_1 h_1 b_1^3 = 0,172 \cdot 4,5 \cdot 3,5^3 \text{ см}^4 = 33,2 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{к1}}{W_{к1}} = \frac{33,2}{12,2} \text{ см} = 2,72 \text{ см}.$$

Для части 2 сечения стержня $h_2 = 80 \text{ мм}$; $b_2 = 10 \text{ мм}$; $\frac{h_2}{b_2} = \frac{80}{10} = 8$.
Аналогичным путем найдем, что

$$W_{к2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^2 \text{ см}^3 = 2,5 \text{ см}^3;$$

$$J_{к2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^3 \text{ см}^4 = 2,5 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{к2}}{W_{к2}} = 1 \text{ см}.$$

Для части 3 сечения стержня $h_3 = 95 \text{ мм}$; $b_3 = 20 \text{ мм}$; $\frac{h_3}{b_3} = \frac{95}{20} = 4,75$.
Поступая аналогично предыдущему, найдем, что

$$W_{к3} = \alpha_3 h_3 b_3^2 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^2 \text{ см}^3 = 10,9 \text{ см}^3;$$

$$J_{к3} = \beta_3 h_3 b_3^3 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^3 \text{ см}^4 = 21,9 \text{ см}^4;$$

$$\frac{J_{к3}}{W_{к3}} = \frac{21,9}{10,9} \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Таким образом,

$$J_{к} = J_{к1} + J_{к2} + J_{к3} = 33,2 + 2,5 + 21,9 \text{ см}^4 = 57,6 \text{ см}^4.$$

Наибольшее отношение $\frac{J_{к1}}{W_{к1}}$ соответствует части 1 сечения, поэтому наибольшее касательное напряжение τ будет посередине длинных ее сторон. Находим

$$W_{к} = \frac{J_{к}}{J_{к1}/W_{к1}} = \frac{57,6}{2,72} \text{ см}^3 = 21,2 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{кр}}{W_{к}} = \frac{5000}{21,2} \text{ кгс/см}^2 = 236 \text{ кгс/см}^2.$$

Угол закручивания стержня

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_{к}} = \frac{5000 \cdot 500}{8 \cdot 10^5 \cdot 57,6} \text{ рад} = 0,0542 \text{ рад}.$$

§ 57. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Переходя к рассмотрению кручения тонкостенных стержней, заметим, что методы их расчета зависят от того, открытый или замкнутый профиль имеет их поперечное сечение.

Замкнутые профили. Рассматривая кручение замкнутых тонкостенных профилей (рис. 217), будем считать толщину стенки стержня настолько малой, что касательные напряжения по ней можно принять одинаковыми, равными напряжениям посередине толщины стенки и направленными по касательной к средней линии стенки.

Из тонкостенного замкнутого стержня вырежем элемент (рис. 218) двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми dx , и двумя произвольными меридиональными сечениями. Составляя сумму проекций на ось x стержня всех сил, приложенных к элементу, находим

$$\tau\delta = \tau_1\delta_1 = \text{const.} \quad (9.40)$$

Момент силы $\tau\delta ds$, воспринимаемый элементом профиля длиной ds (рис. 217), относительно произвольной точки O

$$dM_{\text{кр}} = \tau\delta r ds.$$

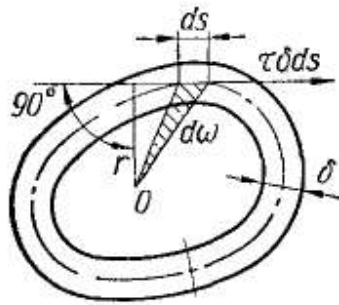


Рис. 217

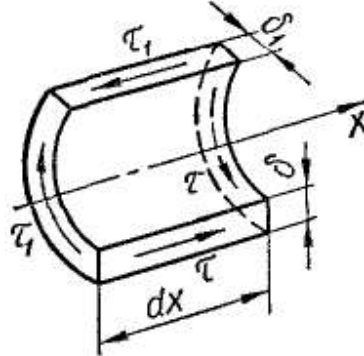


Рис. 218

Учитывая, что rds представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника (на рис. 217 заштрихован), т. е.

$$rds = 2d\omega,$$

и поэтому

$$dM_{\text{кр}} = 2\tau\delta d\omega, \quad (9.41)$$

интегрируя последнее выражение по всему контуру с учетом условия (9.40), получим величину крутящего момента, действующего в сечении:

$$M_{\text{кр}} = 2\tau\delta\omega, \quad (9.42)$$

где ω — площадь, охватываемая средней линией тонкостенного сечения.

Из формулы (9.42) получим, что

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{2\omega\delta}. \quad (9.43)$$

Формула (9.43) впервые получена Бредтом.

Если толщина профиля по контуру неодинакова, то максимальное напряжение в тонкостенном профиле определяется формулой

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\omega\delta_{\text{мин}}}, \quad (9.44)$$

где $\delta_{\text{мин}}$ — минимальная толщина стенки профиля.

Чтобы определить относительный угол закручивания тонкостенного стержня, рассмотрим потенциальную энергию деформации, накопленную в элементарном объеме тонкостенного стержня с размерами ds , dx , δ . Учитывая, что при кручении имеет место чистый сдвиг, на основании формулы (8.12) имеем

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds.$$

Полную энергию деформации однородного стержня длиной l получим, проинтегрировав последнее выражение по длине l и по замкнутому контуру:

$$U = \frac{l}{2G} \int_0^l \oint \tau^2 \delta ds dx = \frac{l \tau^2 \delta^2}{2G} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Подставляя выражение $\tau \delta$ из формулы (9.42) в правую часть последней формулы, найдем

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2G (2\omega)^2} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Выражая эту же энергию через работу внешнего скручивающего момента $M_k = M_{кр}$ на искомом угле закручивания, т. е.

$$U = A = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_{кр} \varphi}{2},$$

и приравнявая правые части последних формул, найдем, что

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Относительный угол закручивания

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (9.45)$$

Эту формулу можно представить в принятых выше обозначениях для кручения:

$$\Theta = \frac{M_k}{GJ_k},$$

где

$$J_k = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

При постоянной по длине контура s толщине

$$\Theta = \frac{M_{кр} s}{4G\omega^2 \delta}. \quad (9.46)$$

Рассматривая, например, кручение тонкостенной трубы (рис. 219), при $\delta = \text{const}$ будем иметь

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

По формулам (9.43) и (9.46) найдем

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta}; \quad \Theta = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3 \delta G}.$$

Открытые профили. Определяя при кручении напряжения и деформации в тонкостенных стержнях открытого профиля типа

швеллера, двутавра (рис. 220) или уголка, можно воспользоваться теорией расчета на кручение стержней прямоугольного сечения. В этом случае незамкнутый профиль разбиваем на прямоугольные элементы, толщина которых значительно меньше их длины. Как видно из табл. 14, для таких прямоугольных элементов (при $\frac{h}{b} > 10$) коэффициенты α и β равны $\frac{1}{3}$. Тогда для составного профиля на основании выражений (9.33) и (9.37)

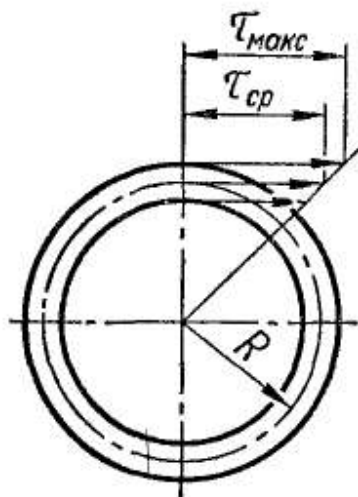


Рис. 219

новании выражений (9.33) и (9.37)

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum_i b_i^3 h_i. \quad (9.47)$$

Здесь введен коэффициент η , учитывающий схематизацию реального профиля:

- для уголкового сечения $\eta = 1,00$;
- » двутаврового » $\eta = 1,20$;
- » таврового » $\eta = 1,15$;
- » швеллерного » $\eta = 1,12$.

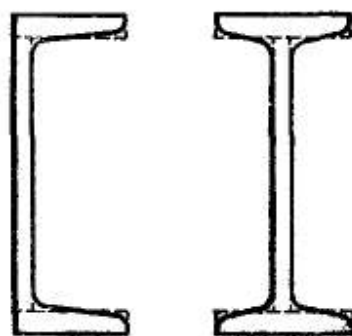


Рис. 220

В тонкостенных открытых профилях длину элемента обычно принято обозначать через s , а толщину стенок — через δ . Тогда, заменяя в формуле (9.47) h на s , а b на δ , получим

$$J_k = \eta \frac{1}{3} \sum_i \delta_i^3 s_i. \quad (9.48)$$

Угол закручивания определится по формуле (9.30), а наибольшее касательное напряжение, которое возникает на участке, имеющем наибольшую толщину стенки $\delta_{\text{макс}}$, — по формуле (9.28). При этом для длинных прямоугольников

$$\left(\frac{J_{kt}}{W_{kt}} \right)_{\text{макс}} = \delta_{\text{макс}}.$$

Тогда

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{кр} \delta_{\text{макс}}}{J_k}. \quad (9.49)$$

Рассмотрим примеры расчета тонкостенных стержней открытого профиля.

Пример 33. Определим максимальное напряжение и угол закручивания стержня длиной 900 мм (рис. 221) с поперечным сечением в виде равнобокого уголка $50 \times 50 \times 5$, который подвергается действию скручивающего момента $M_k = 500 \text{ кгс} \cdot \text{см}$. Модуль сдвига материала стержня $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$.

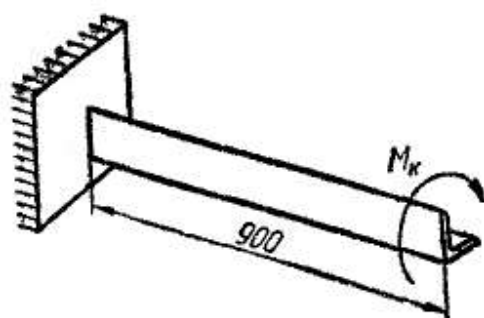


Рис. 221

Максимальные касательные напряжения возникают посредине полки (концентрация напряжения во входящем угле не учитывается). Эти напряжения определим по формуле (9.49):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \delta_{\max}}{J_{\text{к}}},$$

где

$$J_{\text{к}} = \eta \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=2} \delta_i^3 s_i = 1 \cdot \frac{1}{3} [(5 \cdot 0,5^3) + (4,5 \cdot 0,5^3)] \text{ см}^4 = 0,4 \text{ см}^4,$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \delta_{\max}}{J_{\text{к}}} = \frac{500 \cdot 0,5}{0,4} \text{ кгс/см}^2 = 625 \text{ кгс/см}^2.$$

Угол закручивания стержня определится по формуле (9.30):

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{G J_{\text{к}}} = \frac{500 \cdot 90}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,4} = 0,140625 \text{ рад} = 8^\circ 3'.$$

Пример 34. Определить напряжение и погонный угол закручивания стальной трубы, разрезанной вдоль образующей (рис. 222). Наружный диаметр трубы $d_{\text{н}} = 90$ мм, внутренний $d_{\text{в}} = 85$ мм. Труба находится под действием скручивающего момента $M_{\text{к}} = 500$ кгс · см. Модуль сдвига материала $G = 8 \times 10^6$ кгс/см².

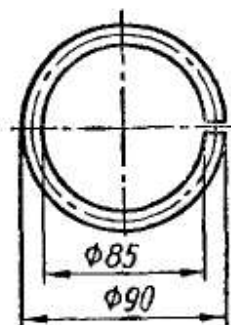


Рис. 222

Сравнить полученные напряжения и угол закручивания с напряжением и углом закручивания сплошной трубы.

Касательные напряжения в разрезанной трубе определим по формуле (9.49):

$$\tau_{\text{р}} = \frac{M_{\text{кр}} \delta}{J_{\text{к}}},$$

где

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3} s \delta^3.$$

Здесь s — развернутая длина средней линии сечения трубы.

Тогда

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3} s \delta^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot 8,75 \cdot 0,25^3 \text{ см}^4 = 0,143 \text{ см}^4;$$

$$\tau_{\text{р}} = \frac{M_{\text{кр}} \delta}{J_{\text{к}}} = \frac{500 \cdot 0,25}{0,143} \text{ кгс/см}^2 = 875 \text{ кгс/см}^2.$$

Напряжение в сплошной трубе определится по формуле (9.43):

$$\tau_{\text{сп}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2\omega \delta} = \frac{500 \cdot 4}{2\pi \cdot 8,75^2 \cdot 0,25} \text{ кгс/см}^2 = 16,63 \text{ кгс/см}^2.$$

Погонный угол закручивания разрезанной трубы

$$\Theta_{\text{р}} = \frac{M_{\text{кр}}}{G J_{\text{к}}} = \frac{500}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,143} \text{ рад/см} = 0,00437 \text{ рад/см}.$$

Погонный угол закручивания неразрезанной трубы найдем из формулы (9.46):

$$\Theta_{\text{сп}} = \frac{M_{\text{кр}} s}{4G\omega^2 \delta} = \frac{500 \cdot \pi \cdot 8,75}{4 \cdot 8 \cdot 10^6 \left(\frac{\pi}{4} \cdot 8,75^2\right)^2 \cdot 0,25} \text{ рад/см} = 0,00000475 \text{ рад/см}.$$

Таким образом, в сплошной трубе при кручении напряжения меньше в 52,5 раза, а угол закручивания — в 920 раз, чем в трубе, разрезанной вдоль образующей.

§ 58. РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

Винтовые пружины — наиболее распространенный в технике тип пружин. Чаще всего их изготавливают из стальных стержней (проволоки) круглого поперечного сечения. Они подвергаются действию растягивающих или сжимающих сил.

Точный расчет на прочность винтовых пружин достаточно сложен, так как проволока винтовой пружины может испытывать одновременно кручение, сдвиг и изгиб. Однако при малых углах наклона витков влиянием изгиба можно пренебречь.

Пусть цилиндрическая винтовая пружина со средним диаметром $D = 2R$ (рис. 223), имеющая n витков и диаметр d поперечного сечения проволоки (стержня) пружины, подвергается растяжению центрально приложенной силой P . Чтобы установить расчетные фор-



Рис. 223

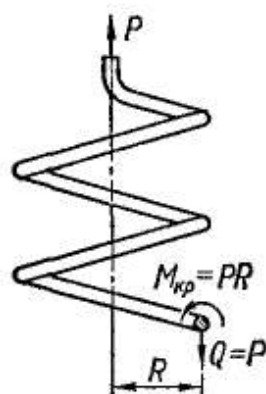


Рис. 224

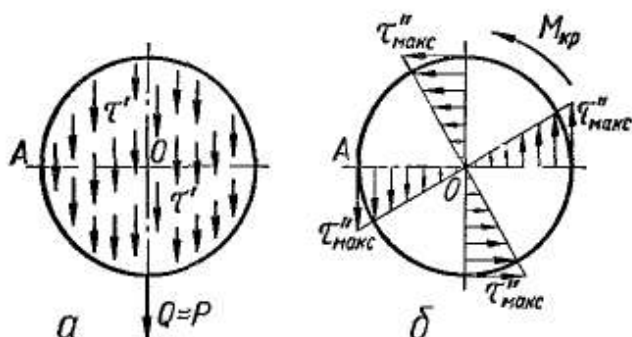


Рис. 225

мулы для напряжений в пружине, разрежем ее на две части по плоскости витка, проходящей через ось цилиндра, образованного витками. Применяя метод сечений (удаляя мысленно нижнюю часть пружины), рассмотрим условие равновесия оставшейся (верхней) ее части (рис. 224). Очевидно, влияние отброшенной части пружины на рассматриваемую верхнюю может быть учтено приложением к месту разреза витка поперечной силы

$$Q = P$$

и крутящего момента

$$M_{кр} = PR.$$

Считая, что приближенно угол наклона витка равен нулю, можно остальными силовыми факторами (продольной силой, изгибающим моментом) пренебречь.

Таким образом, в рассматриваемом сечении пружины действуют две группы касательных напряжений:

1) напряжения от сдвига, равномерно распределенные по сечению:

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}; \quad (9.50)$$

2) напряжения от кручения, максимальное значение которых

$$\tau''_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.51)$$

Распределение напряжений τ' от среза показано на рис. 225, а, а напряжений τ'' от кручения — на рис. 225, б.

Как видно из картины распределения напряжений, в точке А сечения витка на внутреннем радиусе пружины касательные напряжения τ' от действия поперечной силы и максимальные напряжения τ'' от крутящего момента по направлению совпадают. Поэтому максимальные напряжения в пружине

$$\tau_{\text{макс}} = \tau' + \tau''_{\text{макс}} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3},$$

или

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (9.52)$$

Во многих случаях при расчете пружин большого среднего радиуса R , изготовленных из тонкой проволоки, при $\frac{d}{4R} \ll 1$ напряжения от кручения $\tau''_{\text{макс}}$ значительно выше, чем напряжения среза τ' , и последние можно не учитывать. Тогда максимальные напряжения в винтовой пружине с достаточной степенью точности определяются по формуле

$$\boxed{\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3}}. \quad (9.53)$$

Заметим, однако, что при расчете мощных винтовых рессор, таких, например, как применяемые в железнодорожном подвижном составе, следует пользоваться формулой (9.52), поскольку напряжения от среза здесь существенны из-за относительно большого значения d/R . Опыт эксплуатации пружин показывает, что первые трещины при разрушении, как правило, появляются с внутренней стороны витка, где действуют наибольшие суммарные касательные напряжения.

Выводя формулу (9.52), мы не учитывали, что на внутренней и наружной поверхностях витков радиусы кривизны различны. В некоторых случаях, учитывая это, вместо формулы (9.52) для определения наибольших касательных напряжений используют следующую, более точную формулу:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right),$$

где

$$m = \frac{2R}{d}.$$

Нетрудно убедиться, что поправочный коэффициент в скобках увеличивается с уменьшением m : например, при $m = 10$ он равен 1,14; а при $m = 4$ этот коэффициент составляет $\sim 1,4$.

Определяя перемещение λ пружины (растяжение или осадку), обычно принимают во внимание только кручение витков. Рассмотрим деформацию кручения мысленно выделенного из пружины

элементарного отрезка ds ее витка (рис. 226), временно предположив остальную часть пружины абсолютно жесткой. В сечениях A и B элемента проведем радиусы витка в плоскости, перпендикулярной к оси пружины, продлив их до пересечения с осью пружины. Полученные при этом отрезки AC и BC' будут радиусами пружины. По этим радиусам витка направим абсолютно жесткие стержни, прикрепленные к сечениям A и B витка. Силы P , растягивающие пружину по оси, можно считать приложенными к концам C и C' стержней AC и BC' .

В описанных условиях элемент пружины испытывает деформацию кручения. Если считать сечение E неподвижным, то сечение B повернется относительно A на угол $d\varphi$, который определяется по формуле

$$d\varphi = \frac{M_{кр} ds}{GJ_p},$$

где

$$M_{кр} = PR; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

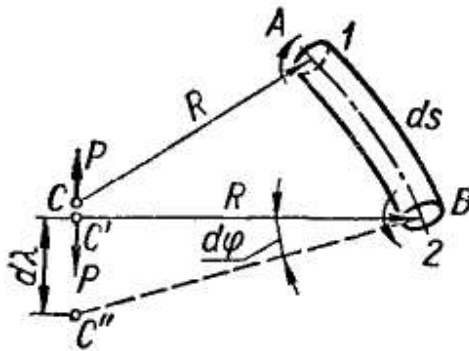


Рис. 226

Вследствие поворота сечения «жесткий» радиус BC' , повернутый на тот же угол $d\varphi$, «перенесет» точку приложения силы P в новое положение C'' . Отрезок $C'C''$ характеризует часть деформации растяжения виткой пружины, определяемую закручиванием рассматриваемого участка ds витка, т. е.

$$C'C'' = d\lambda \approx R d\varphi.$$

Так как в действительности скручиваются все витки пружины, имеющие общую длину s , то полное перемещение одного конца пружины относительно второго определяется формулой

$$\lambda = \int_{(s)} R d\varphi = R \int_{(s)} \frac{M_{кр} ds}{GJ_p} = \frac{RM_{кр}}{GJ_p} \int_{(s)} ds.$$

Учитывая, что приближенно длина стержня пологой цилиндрической пружины с числом витков n

$$\int_{(s)} ds = 2\pi Rn,$$

деформацию пружины определим по формуле

$$\lambda = \frac{M_{кр} R}{GJ_p} 2\pi Rn,$$

или, подставляя $M_{кр} = PR$ и $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$:

$$\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \quad (9.54)$$

Формулы (9.53) и (9.54) позволяют проверить прочность и определить удлинение (или осадку) цилиндрической винтовой пружины.

Допускаемые напряжения на срез при расчете стальных пружин выбирают в зависимости от диаметра проволоки пружины; обычно для закаленной пружинной стали

$$[\tau] = 50 \text{ кгс/мм}^2 \text{ при } d = 6 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 40 \text{ кгс/мм}^2 \text{ при } d = 10 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 35 \text{ кгс/мм}^2 \text{ при } d = 12 \text{ мм}.$$

Для хромоникелевых сталей при растяжении пружин с диаметром проволоки 12—16 мм принимают $[\tau] = 70 \text{ кгс/мм}^2$. Для фосфористой бронзы с модулем упругости при сдвиге $G = 4,4 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$ при $d < 16 \text{ мм}$ берут $[\tau] = 13 \text{ кгс/мм}^2$. Такие допускаемые напряжения могут быть приняты при постоянных нагрузках.

Часто, рассчитывая амортизационные пружины (пружины для смягчения резких толчков), за основу берут величину энергии T , которую должна поглощать пружина (рессора) во время эксплуатации. При этом исходят из того, что между перемещением λ пружины и силой P , действующей на нее, в пределах упругости существует прямолинейная зависимость. Поэтому потенциальную энергию деформации пружины можно выразить формулой

$$U = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{32P^2R^3n}{Gd^4}.$$

С другой стороны, из формулы (9.53) через напряжения можно выразить крутящий момент:

$$M_{\text{кр}} = PR = \frac{\tau_{\text{макс}}\pi d^3}{16}.$$

Тогда потенциальную энергию, накапливаемую в пружине, также можно выразить через напряжения:

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G} \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\text{макс}}^2.$$

Но так как $2\pi Rn$ — длина стержня (проволоки) пружины, а $\frac{\pi d^2}{4}$ — площадь его сечения, то

$$2\pi Rn \frac{\pi d^2}{4} = V$$

представляет собой объем материала пружины. Учитывая это, потенциальную энергию пружины можем представить формулой

$$U = \frac{\tau_{\text{макс}}^2}{4G} V. \quad (9.55)$$

Таким образом, задаваясь предельной величиной напряжения $\tau_{\text{макс}} = [\tau]$, можно вычислить объем пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии T , с тем чтобы не было

превышения допускаемого напряжения:

$$T = U = \frac{[\tau]^2}{4G} V,$$

откуда

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (9.56)$$

Конструируя пружину по найденному объему, следует выбрать ее размеры (R , d и n) с таким расчетом, чтобы при проверке осадки пружины зазоры между витками не закрывались.

В заключение отметим, что кроме рассмотренных цилиндрических пружин постоянного сечения с пологим наклоном витка существует много других конструкций витых пружин: конические, призматические и различные фасонные (параболические, двойные конические, бочкообразные и др.). При этом шаг пружины может быть как постоянным, так и переменным, а сечение витка не только круглой, но и прямоугольной формы. Методы расчета таких пружин достаточно сложны и рассматриваются в специальной литературе.

Пример 35. Предохранительный клапан диаметром $d_k = 75$ мм должен открываться при давлении пара $p = 6$ кгс/см², иметь возможность подниматься на высоту $\lambda_0 = 20$ мм. Диаметр проволоки стальной пружины $d = 12$ мм, средний диаметр витка пружины $2R = 60$ мм. При отсутствии нагрузки шаг витков пружины $t = 17$ мм; $G = 8 \cdot 10^5$ кгс/см².

Определить необходимое число витков пружины n с тем, чтобы при максимальном поднятии клапана еще оставался запас на дальнейшее сжатие не менее $\lambda_2 = 15$ мм. Найти также начальное сжатие пружины λ_1 и напряжение τ при полном открытии клапана.

Сила, поднимающая клапан,

$$P = p \frac{\pi d_k^2}{4} = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 7,5^2}{4} \text{ кгс} = 265 \text{ кгс.}$$

При этой силе пружина, согласно формуле (9.54), имеет следующую первоначальную осадку:

$$\lambda_1 = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 265 \cdot 3^3n}{8 \cdot 10^5 \cdot 1,2^4} = 0,276n \text{ см.}$$

Полная осадка пружины в нагруженном состоянии складывается из λ_1 , требуемого подъема λ_0 и запаса λ_2 . Эта сумма должна равняться разности шага пружины и диаметра проволоки пружины, умноженной на число витков, т. е.

$$\lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_2 = n(t - d),$$

или

$$0,276n + 2 + 1,5 = n(1,7 - 1,2),$$

откуда

$$n = \frac{3,5}{0,224} \approx 16 \text{ витков.}$$

Предварительная осадка пружины

$$\lambda_1 = 0,276n = 0,276 \cdot 16 \text{ см} = 4,4 \text{ см.}$$

Наибольшее напряжение в пружине при полном открытии клапана найдем, связав выражения для λ и $\tau_{\text{макс}}$. Из формулы (9.54)

$$P = \frac{\lambda d^4 G}{64R^3 n}.$$

Подставляя это значение P в формулу (9.53) для $\tau_{\text{макс}}$, найдем напряжение при полном открытии клапана:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\lambda d G}{4R^2 n \pi} = \frac{6,4 \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 10^5}{4 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot \pi} \text{ кгс/см}^2 \approx 3390 \text{ кгс/см}^2.$$

Пример 36. Винтовая пружина изготовлена из проволоки диаметра $d = 4$ мм. Внутренний диаметр пружины $D_1 = 46$ мм. В напряженном состоянии зазор в свету между витками $t_1 = 1$ мм; $G = 8 \cdot 10^5$ кгс/см². Определить, какая требуется сила для сжатия пружины, чтобы зазор исчез.

Средний диаметр пружины

$$D = 2R = D_1 + d = (46 + 4) \text{ мм} = 50 \text{ мм}.$$

Зазор закроется, если осадка одного витка будет равна ему, т. е.

$$\lambda = t_1 = \frac{64PR^3}{Gd^4},$$

откуда

$$P = \frac{Gd^4 t_1}{64R^3} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0,4^4 \cdot 0,1}{64 \cdot 2,5^3} \text{ кгс} = 2,05 \text{ кгс}.$$

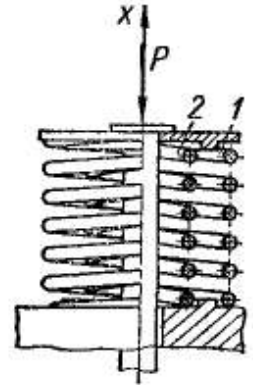


Рис. 227

Пример 37. Две пружины 1 и 2 (рис. 227), свитые из проволоки одинакового диаметра $d = 10$ мм и имеющие одинаковое число витков $n = 10$, сжимаются штоком клапана. Высота наружной пружины 1 в свободном состоянии на $a = 60$ мм больше, чем внутренней пружины 2. Найти усилие, осадку и напряжение каждой пружины, если радиус осевой линии витка наружной пружины $R_1 = 50$ мм, внутренней $R_2 = 30$ мм, усилие $P = 400$ кгс и модуль упругости при сдвиге $G = 8 \cdot 10^5$ кгс/см².

Обозначим через P_1 и P_2 усилия, приходящиеся на каждую из пружин. Из уравнения равновесия клапана следует, что

$$\Sigma X = P_1 + P_2 - P = 0. \quad (9.57)$$

Таким образом, задача один раз статически неопределима.

Второе уравнение, необходимое для определения искоемых неизвестных P_1 и P_2 , получим из условия совместности деформаций:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + a, \quad (9.58)$$

где λ_1 и λ_2 — величины осадки соответственно наружной и внутренней пружин под действием сил P_1 и P_2 соответственно:

$$\lambda_1 = \frac{64P_1 R_1^3 n}{Gd^4}; \quad (9.59)$$

$$\lambda_2 = \frac{64P_2 R_2^3 n}{Gd^4}. \quad (9.60)$$

Подставив выражения для λ_1 и λ_2 в формулу (9.58), будем иметь

$$\frac{64P_1 R_1^3 n}{Gd^4} = \frac{64P_2 R_2^3 n}{Gd^4} + a,$$

или в числовом выражении:

$$\frac{64P_1 \cdot 5^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} = \frac{64P_2 \cdot 3^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} + 6,$$

откуда

$$125P_1 - 27P_2 = 7500.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (9.57), которое следует переписать в виде

$$P_1 + P_2 = 400,$$

найдем

$$P_1 = 120 \text{ кгс}; P_2 = 280 \text{ кгс}.$$

Определим осадку пружин. Для наружной пружины, согласно равенству (9.59),

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 120 \cdot 125 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

Для внутренней пружины

$$\lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 280 \cdot 27 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 1^4} \text{ см} = 6 \text{ см}.$$

Касательные напряжения, возникающие в витках наружной и внутренней пружин, согласно формуле (9.52), соответственно

$$\tau_1 = \frac{16P_1R_1}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R_1}\right) = \frac{16 \cdot 120 \cdot 5}{3,14 \cdot 1^3} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 5}\right) \text{ кгс/см}^2 = 3210 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\tau_2 = \frac{16P_2R_2}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R_2}\right) = \frac{16 \cdot 280 \cdot 3}{3,14 \cdot 1^3} \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 3}\right) \text{ кгс/см}^2 = 4630 \text{ кгс/см}^2.$$

§ 59. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Концентрация напряжений, или местное увеличение напряжений, вызывается резким изменением очертаний детали (наличием надреза, отверстия, резьбы и т. п.).

Величина наибольшего напряжения при кручении в зоне концентрации (пик напряжения) выражается как произведение номинального напряжения τ_n на коэффициент концентрации α_τ :

$$\tau_{\text{макс}} = \alpha_\tau \tau_n. \quad (9.61)$$

Здесь τ_n вычисляется по формулам сопротивления материалов, в частности, для вала круглого сечения

$$\tau_n = \frac{M_{\text{кр}}}{J_p} r; \quad (9.62)$$

α_τ представляет собой отношение максимального напряжения в зоне концентрации, вычисленного в предположении совершенной упругости материала, к номинальному напряжению, т. е.

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{\text{макс}}}{\tau_n}.$$

Как указывалось ранее, он называется *теоретическим коэффициентом концентрации* и определяется методами теории упругости или экспериментально (поляризационно-оптическим методом, тензометрированием, по методу аналогий).

Заметим, что коэффициент концентрации напряжений для выточки (или надреза) при данной ее глубине и размерах детали зависит главным образом от кривизны поверхности по дну выточки.

Для иллюстрации влияния формы выточки на концентрацию напряжений рассмотрим случай паза (шпоночной канавки) с резко очерченными углами (рис. 228). Опыты, проведенные с полым валом наружного диаметра $d_n = 254$ мм и внутреннего $d_b = 147$ мм, с глубиной паза $h = 25,4$ мм и шириной $b = 63,5$ мм при различных радиусах ρ выкружки в углах, показали, что наибольшие напряжения в закругленных углах равны наибольшим напряжениям в таком же валу без паза, умноженным на коэффициент концентрации α_t , значения которого приведены в табл. 15.

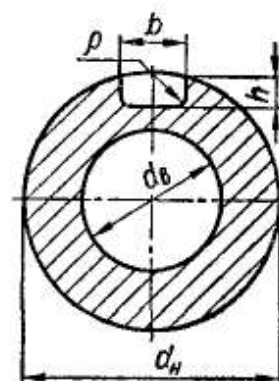


Рис. 228

Как видно из табл. 15, концентрация напряжений может быть значительно снижена увеличением радиуса закругления в углах.

Рассмотрим второй типичный пример концентрации напряжений при кручении валов переменного сечения, с которыми часто приходится встречаться в машиностроительной практике. Если диаметр вала по его длине меняется постепенно, то формулы, полученные для определения напряжений в цилиндрических валах, позволяют оценить максимальные напряжения с достаточной степенью точности. Если же изменение диаметра происходит резко — так, как показано на рис. 229, то в точках m в начале закругления имеет место высокая концентрация напряжений. При этом величина наибольшего напряжения зависит от отношений $\rho : d$ и $D : d$, где ρ — радиус закругления, а D и d — диаметры сопрягаемых цилиндрических частей вала. Как показывают опыты, основанные на применении электроанalogии, картина распределения касательных напряжений

Таблица 15

ρ мм	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24	17,78
α_t	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

при кручении в зоне концентрации, т. е. в месте сопряжения двух диаметров, имеет примерно такой вид, как показано на рис. 230 для случая $\frac{D}{d} = 1,2$ и $\frac{2\rho}{d} = 0,1$. Зависимости $\alpha_t = f\left(\frac{2\rho}{d}\right)$ при разных значениях отношения $D : d$ приведены на рис. 231.

Из анализа графиков рис. 231 видно, что в некоторых случаях при определенном соотношении диаметров $D : d$ и малых радиусах закругления ρ коэффициенты концентрации напряжений могут быть больше трех. Для пластичных материалов при статических нагрузках концентрация напряжений не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит пере-

распределение (выравнивание) напряжений. В валах же, изготовленных из хрупких однородных материалов, например из закаленной стали, за счет концентрации напряжений в местах закругления двух смежных диаметров даже в случае статических нагрузок возможно появление трещин, которые могут привести к разрушению вала.

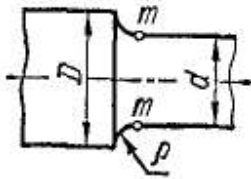


Рис. 229

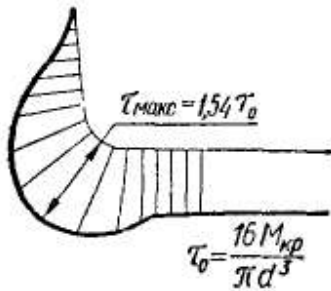


Рис. 230

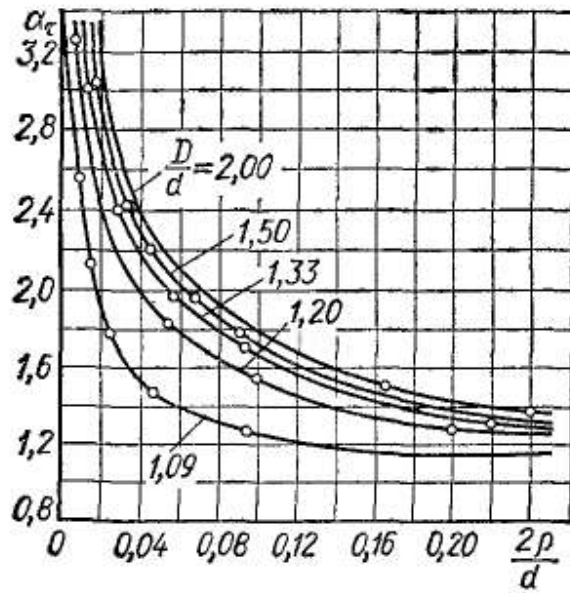


Рис. 231

Поэтому, конструируя детали из хрупких материалов, необходимо учитывать концентрацию напряжений даже при статическом приложении нагрузки. Что же касается влияния концентрации напряжений при повторнопеременных нагрузках, то оно, как будет показано в гл. 21, имеет существенное значение даже для пластичных материалов.



Рис. 232

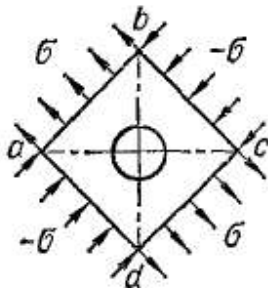


Рис. 233

В заключение рассмотрим случай концентрации напряжений вокруг малого радиального отверстия в полем тонкостенном валу при кручении (рис. 232). Двумя парами взаимно перпендикулярных площадок, наклоненных под углом 45° к образующим вала, выделим вокруг отверстия некоторый элемент (рис. 233). Эти площадки для

рассматриваемой задачи кручения, как было установлено, являются главными, а поэтому по граням рассматриваемого элемента $abcd$ будут действовать только нормальные напряжения, равные по величине, но разные по знаку. Абсолютные значения их, как известно, равны касательным напряжениям, определяемым в соответствующих точках поперечного сечения по формулам теории кручения. Анализируя напряженное состояние рассматриваемого элемента и полагая, что отверстие мало, а стенки вала тонкие, легко убедиться, что это напряженное состояние аналогично тому, какое имеет место для тонкой пластинки с малым отверстием, растянутой в одном направлении некоторым напряжением $\sigma = \tau$ и сжатой таким же по величине напряжением в направлении под углом 90° к первому.

Таким образом, задача об определении величины концентрации напряжений у радиального отверстия в стенке скручиваемого трубчатого вала сводится к определению концентрации напряжений в пластинке с отверстием, подверженной во взаимно перпендикулярных направлениях действию растяжения и сжатия напряжениями $\sigma = \tau$.

Как указывалось выше, в зоне концентрации напряжения у отверстия малого диаметра, сделанного в пластинке, растягиваемой в одном направлении (рис. 234, а), значение максимальных растягивающих напряжений в точках m в три раза выше напряжений, действующих на контуре пластинки, т. е. $\alpha = 3$.

В то же время в точках n , расположенных под углом 90° , возникают сжимающие напряжения, примерно равные по абсолютной величине действующим на контуре пластинки растягивающим напряжениям. Очевидно при сжатии пластинки в перпендикулярном направлении с напряжением σ напряжения в точках m и n будут равны указанным на рис. 234, б.

В случае плоского напряженного состояния, при котором по взаимно перпендикулярным направлениям действуют напряжения σ и $-\sigma$, как это имеет место при кручении (рис. 233), в рассматриваемых точках m и n напряжения будут суммироваться, т. е. напряжения в точках m

$$\sigma_{\max} = 3\sigma + \sigma = 4\sigma,$$

а напряжения в точках n

$$\sigma_{\min} = -3\sigma - \sigma = -4\sigma.$$

Таким образом, имея в виду, что в местах концентрации максимальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{\text{н}},$$

а в нашем случае

$$\sigma_{\text{н}} = \sigma = \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}},$$

получим

$$\sigma_{\max} = 4\sigma = 4 \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}.$$

Значит в рассматриваемом случае (рис. 232) коэффициент концентрации напряжений

$$\alpha_{\tau} = 4.$$

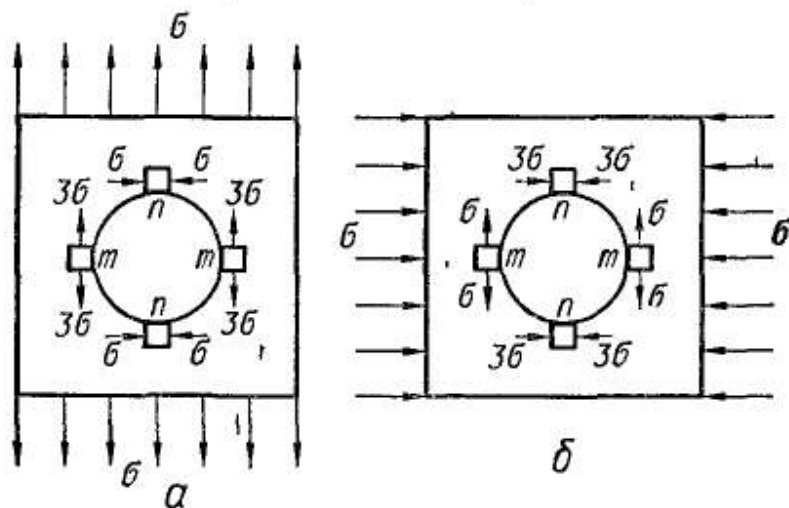


Рис. 234

Такое высокое значение коэффициентов концентрации при кручении валов с отверстием (часто такие отверстия делают для смазки) обязывает особенно осторожно подходить к выбору размеров валов, изготавливаемых из хрупких материалов. Для снижения концентрации напряжений в машиностроительной практике приходится прибегать к различным технологическим мерам: сглаживанию резких переходов, закруглению кромок (у отверстий) и т. п.

Глава 10

ИЗГИБ

§ 60. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим случай чистого плоского изгиба балки (рис. 235, а). Из шести внутренних силовых факторов, которые могут действовать в ее поперечных сечениях в общем случае изгиба, при чистом изгибе отличен от нуля только изгибающий момент M . Ось балки деформируется в плоскости, совпадающей с силовой (на рис. 235 — в плоскости чертежа). В § 17 были указаны условия, необходимые для того, чтобы изгиб был плоским. Настоящий параграф посвятим выводу формулы для вычисления напряжений в любой точке сечения. Пока не будем вводить никаких ограничений в отношении формы и

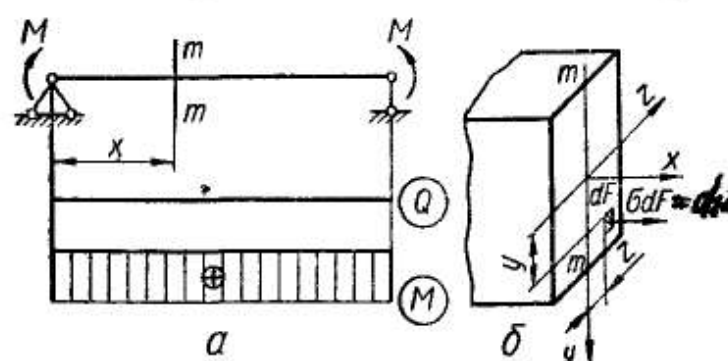


Рис. 235

расположения силовой плоскости (за исключением того, что силовая плоскость должна проходить через ось стержня). Согласно общему плану (§ 26), начнем вывод с рассмотрения статической стороны задачи. Проведем поперечное сечение $m - m$ на произвольном расстоянии x от начала координат (рис. 235, а).

В плоскости сечения (рис. 235, б) проведем координатные оси y и z : ось y совместим с силовой линией (линией пересечения силовой плоскости с плоскостью сечения), а ось z проведем на произвольной пока высоте, но перпендикулярно к оси y . Ось x направим перпендикулярно к плоскости сечения. Выделим в сечении элемент площади dF , координаты которого y и z . В общем случае на элемент могли бы действовать напряжения σ и τ . Однако при чистом изгибе все усилия и моменты, связанные с касательными напряжениями, — Q_y , Q_z и $M_{кр}$ — равны нулю. На основании выражений (3.29) — (3.34) можно принять, что касательных напряжений в сечении нет и на элемент dF будет действовать только усилие $\sigma dF = dN$. Поэто-

му из всех формул (3.29) — (3.34) останутся только три:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F \sigma z dF; \quad M_z = \int_F \sigma y dF. \quad (10.1)$$

Но в данном случае в сечениях балки действует только один изгибающий момент, так что

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = M. \quad (10.2)$$

Из зависимостей (10.1) и (10.2) получаем

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma z dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \quad (10.3)$$

Переходя к геометрической стороне задачи, рассмотрим картину деформаций той же балки (рис. 236). Опыты, поставленные на эластичных (например, резиновых) моделях, позволяющих легко получить значительные деформации, показывают, что если на поверхность модели нанести прямоугольную сетку линий (рис. 236, а), то при чистом изгибе она деформируется (рис. 236, б) следующим образом:

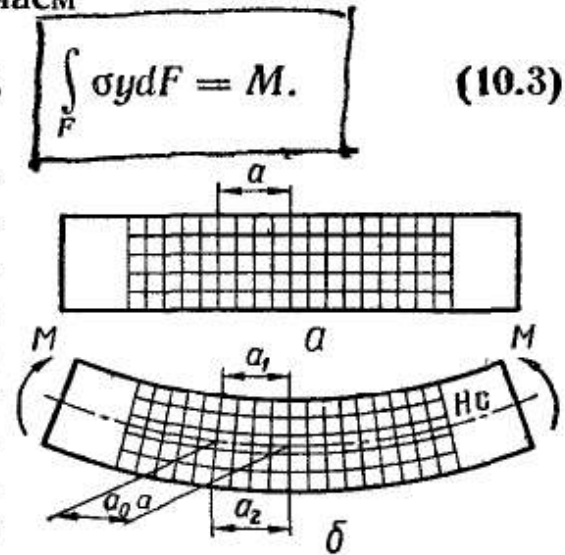


Рис. 236

- а) продольные линии искривляются по дуге окружности;
- б) контуры поперечных сечений остаются плоскими;
- в) линии контуров сечений всюду пересекаются с продольными волокнами под прямым углом.

На основании этого можно предположить, что при чистом изгибе поперечные сечения балки остаются плоскими и поворачиваются так, что остаются нормальными к изогнутой оси балки. Следовательно, при чистом изгибе, как и при растяжении (сжатии) и кручении круглых стержней, будет справедлива гипотеза плоских сечений.

Замеряя расстояния между аналогичными точками контура каких-либо двух сечений, можно обнаружить, что при деформации эти расстояния изменяются. Так, оказывается, что $a_1 < a$ и $a_2 > a$ (рис. 236, а и б). Значит, верхние продольные волокна балки укорачиваются, а нижние — удлиняются. Но можно найти и такие волокна, длина которых при изгибе остается неизменной ($a_0 = a$). Совокупность волокон, не меняющих своей длины при изгибе балки, называется *нейтральным слоем (н. с.)*. Волокна, принадлежащие нейтральному слою, до деформации лежат в одной плоскости, а в деформированном состоянии образуют некоторую цилиндрическую поверхность. В обоих случаях каждое поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем по прямой, которая называется *нейтральной линией (н. л.)* сечения.

При плоском изгибе нейтральный слой оказывается перпендикулярным к силовой плоскости, а значит, нейтральная линия

перпендикулярна к силовой линии в сечении. Будем считать, что ось z (рис. 235, б) проведена в сечении так, что она совпадает с нейтральной линией (но положение последней по высоте сечения пока неизвестно).

Выделим элемент двумя смежными поперечными сечениями $m - m$ и $n - n$, отстоящими друг от друга на расстоянии dx (рис. 237, а), и, приняв во внимание гипотезу плоских сечений, рассмотрим его деформированное состояние (рис. 237, б). Сечения $m - m$ и $n - n$ остаются плоскими и поворачиваются на угол $d\varphi$. Элемент a_0b_0 нейтрального слоя превращается в дугу $a'_0b'_0$ с радиусом ρ , а волокно ab , находящееся на расстоянии y от нейтрального слоя, — в криволинейное волокно a_1b_1 с радиусом кривизны $\rho + y$. Относительное удлинение этого волокна

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Но $a_1b_1 = (\rho + y) d\varphi$ и $ab = dx$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) d\varphi - dx}{dx}. \quad (10.4)$$

Чтобы упростить это выражение, рассмотрим волокно a_0b_0 , принадлежащее нейтральному слою. Его длина $a_0b_0 = dx$. После

деформации оно превращается в дугу $a'_0b'_0 = \rho d\varphi$. Но волокна нейтрального слоя не изменяют своей длины при деформации, поэтому

$$dx = \rho d\varphi. \quad (10.5)$$

Подставив выражение (10.5) в выражение (10.4) и сократив на $d\varphi$, получим

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.6)$$

Следовательно, рассмотрение геометрической стороны задачи показало, что относительная продольная деформация пропорциональна расстоянию волокна от нейтральной оси.

Чтобы записать закон Гука, выражающий физическую сторону задачи, нужно выяснить, в каком напряженном состоянии находится волокно ab . На торцевой поверхности волокна (площадка dF на рис. 235, б), как уже было сказано, касательных напряжений нет. В силу закона парности нет их также и в сечениях, параллельных оси балки. Что же касается нормальных напряжений, выражающих взаимодействие рассматриваемого волокна с соседни-

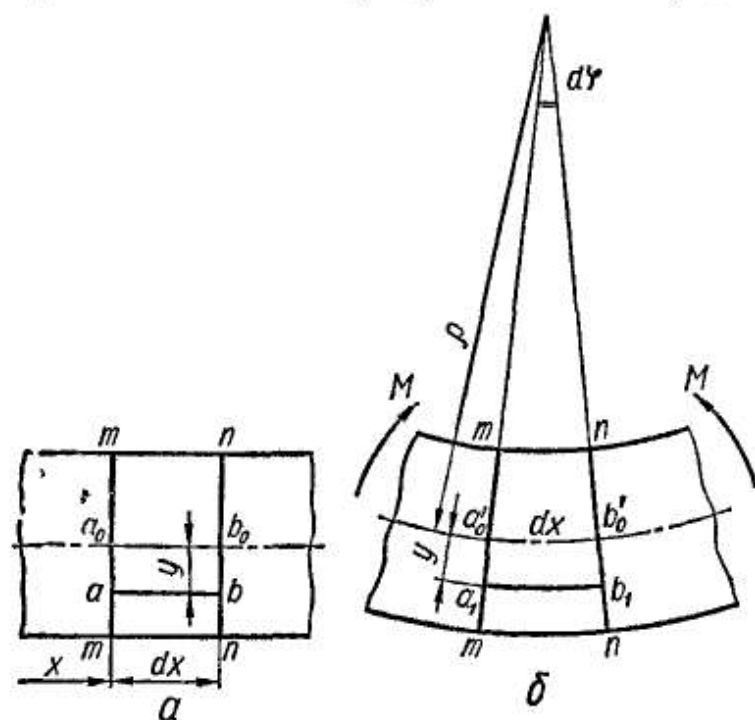


Рис. 237

ми волокнами, то предполагается, что волокна не давят друг на друга, и значит, эти напряжения равны нулю. Таким образом, волокно ab находится в линейном напряженном состоянии — испытывает простое растяжение или сжатие. Поэтому для него закон Гука следует записать в виде

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \quad (10.7)$$

Переходя к синтезу, исключим ε из формул (10.6) и (10.7). В результате будем иметь

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (10.8)$$

Подставляя зависимость (10.8) в третье уравнение (10.3) и учитывая, что E и ρ как величины, не зависящие от положения элемента dF в сечении, можно вынести за знак интеграла, получим

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M.$$

Вспомнив, что $\int_F y^2 dF = J_z$ представляет собой момент инерции сечения относительно оси z , можем последнюю формулу записать в виде

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}} \quad (10.9)$$

Наконец, подставив формулу (10.9) в выражение (10.8), найдем, что

$$\boxed{\sigma = \frac{My}{J_z}} \quad (10.10)$$

Это и есть искомая формула, дающая возможность вычислять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в любой точке ее сечения.

Осталось только установить, где в сечении расположена ось z — нейтральная линия сечения. Чтобы ответить на этот вопрос, внесем значение σ из формулы (10.10) в первые два уравнения (10.3):

$$\frac{M}{J_z} \int_F y dF = 0; \quad \frac{M}{J_z} \int_F yz dF = 0.$$

Поскольку $\frac{M}{J_z} \neq 0$, а

$$\int_F y dF = S_z; \quad \int_F yz dF = J_{yz}$$

то

$$S_z = 0; \quad (10.11)$$

$$J_{yz} = 0. \quad (10.12)$$

На основании равенства (10.11) заключаем, что ось z — нейтральная линия сечения — проходит через центр тяжести (ц. т.) поперечного сечения. Силовая плоскость проходит через ось балки, а значит, силовая линия (ось y) проходит через центр тяжести сечения. Равенство (10.12) показывает, что оси y и z — главные центральные оси сечения. Этим определяется положение нейтральной линии сечения.

Таким образом, если силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, то изгиб будет плоским и нейтральная линия сечения совпадет с другой главной центральной осью. Иначе говоря, если силовая плоскость совпадает с одной из главных

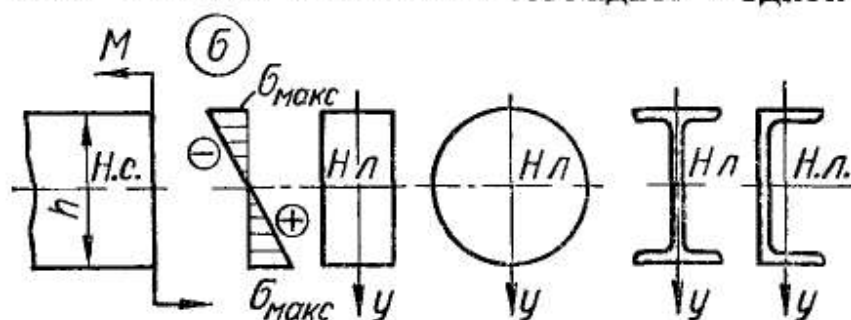


Рис. 238

плоскостей стержня, то нейтральный слой совпадает с другой главной плоскостью.

Заметим, что часто индекс z в обозначении момента инерции опускают, помня, однако, что J вычисляется относительно нейтральной линии сечения.

Теперь проанализируем полученные результаты.

Формула (10.9) в проведенном выводе была вспомогательной, однако она имеет и большое самостоятельное значение. Ее можно трактовать как закон Гука при изгибе, поскольку она связывает деформацию (кривизну нейтрального слоя $\frac{1}{\rho}$) с действующим в сечении моментом. Произведение EJ носит название *жесткости сечения при изгибе*, кгс · см². Из формулы (10.9) видно, что если балка изготовлена из однородного материала ($E = \text{const}$) и имеет постоянное сечение ($J = \text{const}$), то при чистом изгибе ($M = \text{const}$) ось ее искривляется по дуге окружности ($\frac{1}{\rho} = \text{const}$, и, значит, $\rho = \text{const}$).

Формула (10.10) показывает, что, какую бы форму и размеры ни имело сечение, напряжения в точках нейтральной линии равны нулю. Величина σ линейно возрастает по мере удаления от нейтральной линии. При этом напряжения оказываются постоянными по ширине сечения (вдоль линии $y = \text{const}$). Следовательно, эпюра σ для любых сечений, имеющих горизонтальную ось симметрии, всегда будет иметь вид, представленный на рис. 238. Все волокна, расположенные выше нейтральной линии, окажутся сжатыми, а ниже ее — растянутыми. Если же изгибающий момент будет иметь противоположный знак, то верхние волокна будут растягиваться, а нижние — сжиматься.

Наибольшей величины ($\sigma_{\text{макс}}$) напряжения достигают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной линии, т. е. в случае симметрии сечения относительно горизонтальной оси z при $y = \pm \frac{h}{2}$. Подставляя это значение в формулу (10.10), для абсолютной величины напряжения получаем

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M \frac{h}{2}}{J}.$$

Обозначим отношение $\frac{J}{h/2}$ через W и назовем его *осевым моментом сопротивления*, см^3 . Тогда

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W}. \quad (10.13)$$

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии, то нейтральная линия смещена по отношению к середине высоты сечения (рис. 239) и напряжения $\sigma_{\text{макс}}$ в крайних верхних и $\sigma'_{\text{макс}}$ в крайних нижних волокнах не будут одинаковыми:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W}; \quad \sigma'_{\text{макс}} = \frac{M}{W'}, \quad (10.14)$$

где

$$W = \frac{J}{y_{\text{макс}}}; \quad W' = \frac{J}{y'_{\text{макс}}}. \quad (10.15)$$

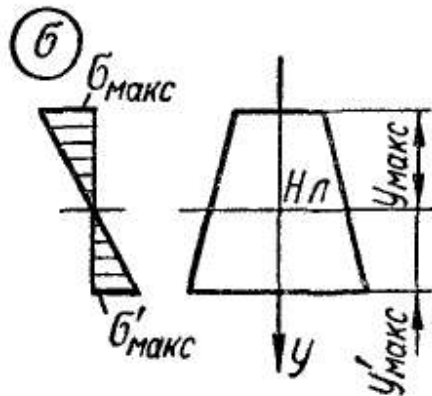


Рис. 239

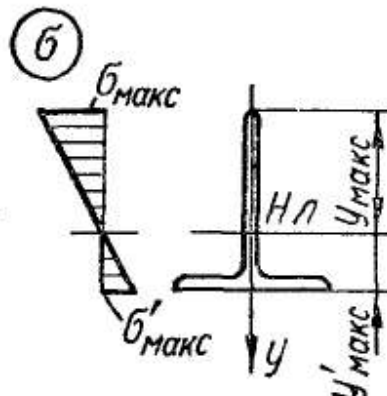


Рис. 240

Характер распределения нормальных напряжений в поперечном сечении наглядно представлен на рис. 240.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы о рациональной форме сечения при чистом изгибе. В отличие от простого растяжения — сжатия при изгибе, как и при кручении, напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен очень мало. Поэтому в целях его экономии и снижения веса конструкции для деталей, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы

большая часть материала была удалена от нейтральной линии. Идеальным с этой точки зрения является сечение, состоящее из двух узких прямоугольников (рис. 241, а). Реально такое сечение невыполнимо, так как эти два прямоугольника должны быть связаны между собой, чтобы представлять одно сечение. Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному двутавровое сечение (рис. 241, б).

Изгибающий момент, который сечение способно выдержать без-опасно, пропорционален W . Величина наибольшего действующего в сечении напряжения σ_{\max} должна быть ограничена значением $[\sigma]$, и тогда из формулы (10.13) допускае-мый момент

$$[M] = \sigma_{\max} W = [\sigma]W. \quad (10.16)$$

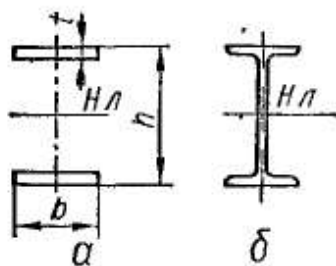


Рис. 241

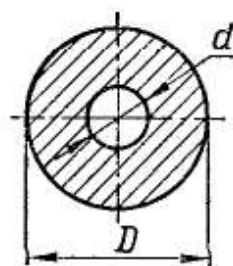


Рис. 242

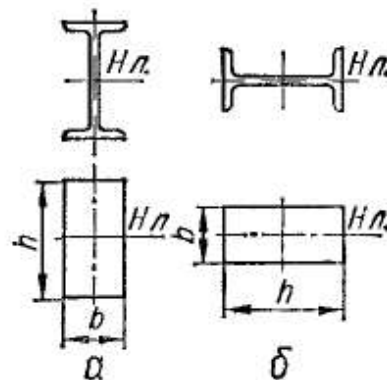


Рис. 243

Расход же материала пропорционален площади сечения F . Следова-тельно, чем больше отношение $\frac{W}{F}$, тем больший изгибающий момент выдерживает сечение с заданной площадью (т. е. с заданным весом стержня) и тем меньше материала уйдет на изготовление стержня, выдерживающего заданный изгибающий момент. Поэтому отно-шение $\frac{W}{F}$ может быть принято за критерий, оценивающий качество профиля.

Основываясь на этом критерии (или просто обратив внима-ние на то, какая часть материала расположена вблизи ней-тральной линии), легко убедиться, что сечение, показанное на рис. 242, рациональнее сплошного круглого, а расположения двутавра и прямоугольника, показанные на рис. 243, а, при вертикальной си-ловой плоскости выгоднее, чем показанные на рис. 243, б.

Все формулы настоящего параграфа получены для случая чистого изгиба прямого стержня. Действие же поперечной силы приво-дит к тому, что гипотезы, положенные в основу выводов, теряют свою силу, так как поперечные сечения не остаются плоскими, а искрив-ляются; продольные волокна взаимодействуют друг с другом, давят друг на друга и находятся, следовательно, не в линейном, а в плоском напряженном состоянии. Однако практика расчетов показывает, что и при поперечном изгибе балок и рам, когда в сечениях кроме M дей-ствует еще N и Q , можно пользоваться формулами, выведенными для чистого изгиба. Погрешность при этом получается весьма незначи-тельной.

§ 61. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе, когда в сечениях бруса действует Q и M , возникают не только нормальные напряжения σ , но и касательные напряжения τ .

Получим формулу для определения τ в простейшем случае поперечного изгиба балки. Как уже указывалось (§ 26), задача об определении напряжений всегда статически неопределима и требует рассмотрения трех сторон задачи. Однако можно принять такие гипотезы

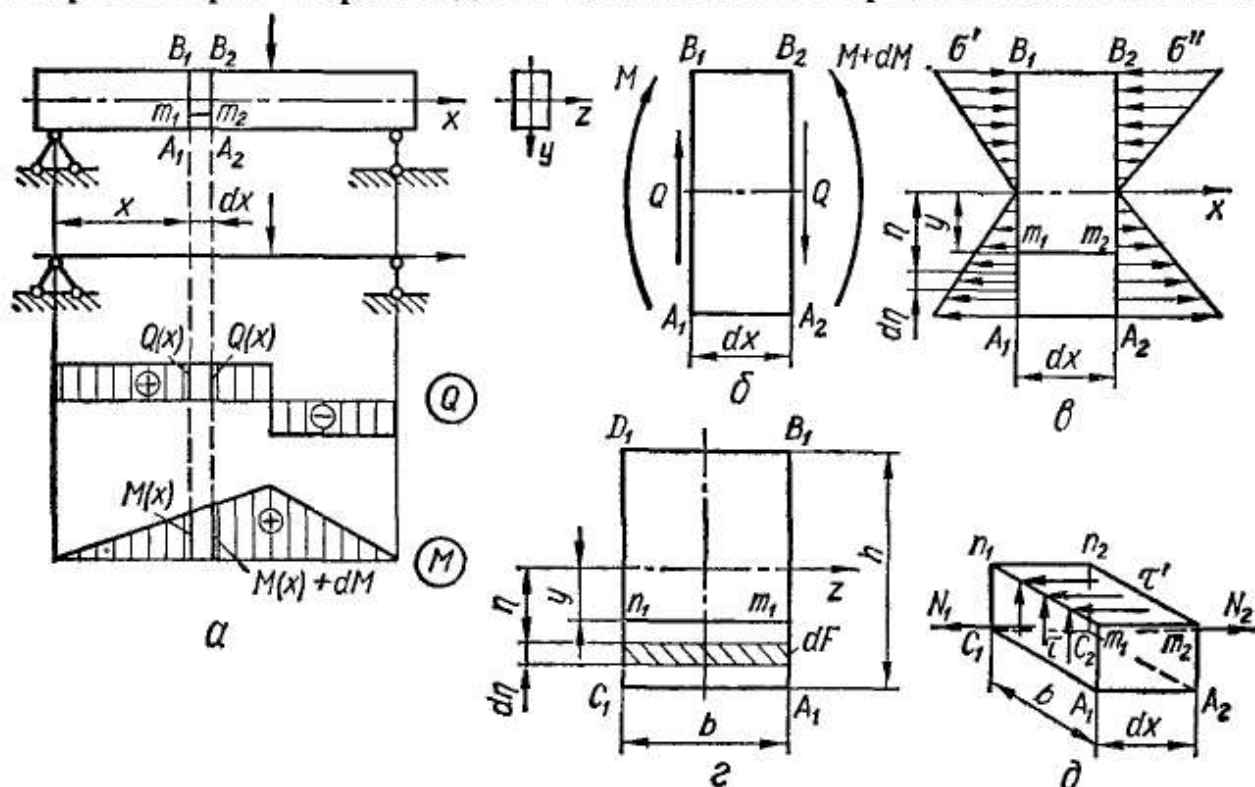


Рис. 244

о распределении напряжений, при которых задача станет статически определимой. Тогда необходимость в привлечении геометрических и физических уравнений отпадет и достаточно рассмотреть одну только статическую сторону задачи. Так именно и будет обстоять дело с выводом формулы для τ при изгибе.

Проведем вывод на примере балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 244, а).

Двумя близкими поперечными сечениями A_1B_1 и A_2B_2 выделим элемент балки (рис. 244, б) длиной dx . Как видно из эпюр, в обоих сечениях Q и M положительны, причем в сечении A_1B_1

$$Q = Q(x); \quad M = M(x),$$

а в сечении A_2B_2

$$Q = Q(x); \quad M = M(x) + dM.$$

Таким образом, в проведенных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения на левом и правом торцах выделенного элемента на основании зависимости (10.10) определяются формулами

$$\sigma' = \frac{M}{J_z} y; \quad \sigma'' = \frac{M + dM}{J_z} y. \quad (10.17)$$

Введем два предположения о характере распределения касательных напряжений в балках прямоугольного сечения:

- 1) τ всюду параллельны Q ;
- 2) во всех точках сечения на данном уровне ($y = \text{const}$) τ одинаковы (т. е. τ постоянны по ширине и зависят только от расстояния точки до нейтральной линии).

Эти предположения справедливы, если $b \ll h$.

Отсечем часть элемента балки, проведя горизонтальную плоскость $m_1 - m_2$ на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 244, в, д). Очевидно в гранях $A_1A_2m_2m_1$, $C_1C_2n_2n_1$ и $A_1A_2C_2C_1$ вообще нет никаких напряжений, так как эти грани являются частью наружной поверхности балки. Вычислим равнодействующую нормальных напряжений, распределенных по грани $A_1C_1n_1m_1$. На элементарную площадку $dF = bd\eta$, проведенную параллельно нейтральной оси z на расстоянии η от нее (рис. 244, з), действует элементарная осевая сила $dN_1 = \sigma' dF = \frac{M(x)\eta}{J_z} dF$. Тогда искомая равнодействующая

$$N_1 = \int_{F_1} \sigma' dF = \int_{F_1} \frac{M(x)\eta}{J_z} dF = \frac{M(x)}{J_z} \int_{F_1} \eta dF.$$

Так как $\int_{F_1} \eta dF = S_z(y)$ представляет собой статический момент площади, заключенной между уровнем y и краем балки, то

$$N_1 = \frac{M(x)}{J_z} S_z(y). \quad (10.18)$$

Аналогично в грани $A_2C_2n_2m_2$ равнодействующая нормальных напряжений σ''

$$N_2 = \frac{M(x) + dM}{J_z} S_z(y). \quad (10.19)$$

Величина $S_z(y)$ будет, очевидно, такой же, как и для первого сечения.

В грани $n_1n_2m_2m_1$ действуют нормальные напряжения, поскольку при поперечном изгибе волокна давят друг на друга. Однако этими нормальными напряжениями пренебрегают, как несущественными для расчета на прочность. Кроме того, согласно закону парности касательных напряжений, здесь непременно возникнут и напряжения

$$\tau' = \tau,$$

причем они направлены так, как показано на рис. 244, д.

Так как размер dx грани $n_1n_2m_2m_1$ элемента мал, можно считать, что τ' равномерно распределены по этой грани и, следовательно, дают усилие

$$dT = \tau' b dx = \tau b dx.$$

Запишем теперь условие равновесия параллелепипеда $A_1A_2C_2C_1n_1n_2m_2m_1$:

$$\sum X = N_2 - N_1 - dT = 0.$$

Внося сюда найденные величины усилий, получаем

$$\frac{[M(x) + dM] S_z(y)}{J_z} - \frac{M(x) S_z(y)}{J_z} - \tau b dx = 0,$$

или

$$\tau b dx = \frac{dM S_z(y)}{J_z}.$$

Разделив это равенство на $b dx$ и учитывая, что $\frac{dM}{dx} = Q$, находим окончательно, что

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b J_z} \quad \begin{array}{l} \text{Ф-ла Журавского (для лучин)} \\ \text{запоминать -} \\ \text{толкая козя сокрушая} \\ \text{- Бурьяны и шибко саром} \end{array} \quad (10.20)$$

Выведенная формула впервые была получена Д. И. Журавским и носит его имя. Несмотря на то что положенные в основу ее вывода гипотезы справедливы только для узких прямоугольных сечений (при $\frac{h}{b} > 2$), на практике ею можно пользоваться для любых сечений, кроме тех мест в сечении, где есть узкие прямоугольники, расположенные перпендикулярно к Q — полки двутавра, швеллера и т. д.

Для произвольного сечения (рис. 245) величины, входящие в формулу (10.20), имеют следующие значения: $Q = Q(x)$ — абсолютная

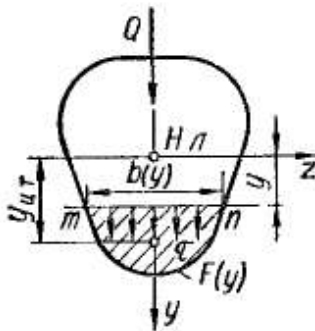


Рис. 245

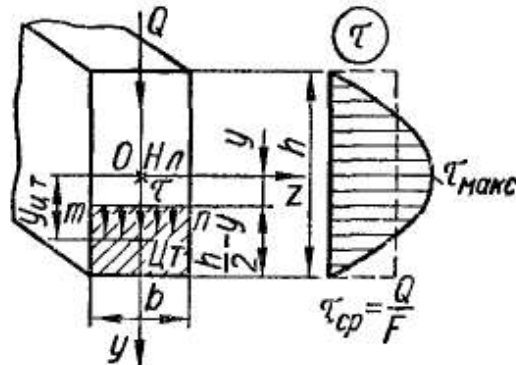


Рис. 246

величина поперечной силы в том сечении, где вычисляются касательные напряжения; J_z — момент инерции этого сечения относительно его нейтральной линии; $b = b(y)$ — ширина сечения на уровне, где определяют τ ; $S_z(y)$ — абсолютная величина статического момента относительно нейтральной линии той части площади $F(y)$, которая заключена между линией, где определяют τ , и краем сечения.

Формула (10.20) дает, таким образом, только величину τ . Что касается направления τ , то в соответствии с исходными допущениями оно считается параллельным Q и направленным в сторону его действия.

Построим эпюру τ для прямоугольного сечения (рис. 246). Проведем линию mn , параллельную нейтральной линии и удаленную от

нее на произвольное расстояние y , и найдем величины τ в точках этой линии. Линия mn отсекает площадь $F(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right)$. Статический момент этой площади

$$\begin{aligned} S_z(y) &= F(y) \cdot y_{ц.т} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \\ &= \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Подставляя в формулу Журавского (10.20) найденное значение $S_z(y)$, а также $J_z = \frac{bh^3}{12}$, получаем

$$\tau = Q \frac{\frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \quad (10.22)$$

Переменная y входит во второй степени, следовательно, эпюра τ будет параболической. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках $y = \pm \frac{h}{2}$ и $\tau = 0$. Для точек нейтральной линии $y = 0$ и

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}. \quad (10.23)$$

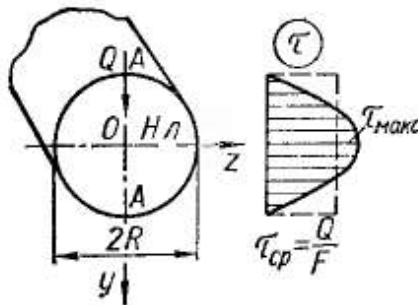


Рис. 247

По этим данным и построена эпюра τ на рис. 246.

Для круглого поперечного сечения (рис. 247) введенные выше гипотезы о характере распределения касательных напряжений не выполняются. Однако с достаточной степенью точности можно полагать, что вертикальную составляющую касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении на уровне y от нейтральной линии, можно вычислить по формуле Журавского. Проводя соответствующие вычисления $S_z(y)$, для круглого сечения получим

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right). \quad (10.24)$$

Как видим, эпюра τ вновь получается параболической. В наиболее удаленных от нейтральной линии точках A ($y = \pm R$) $\tau = 0$. Наибольшее касательное напряжение будет в точках нейтральной линии ($y = 0$):

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = 1,33 \frac{Q}{F}. \quad (10.25)$$

Пример 38. Построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения двутавровой балки № 12, если в сечении действует изгибающий момент $M = 200$ кгс · м и поперечная сила $Q = 1$ тс.

По таблице сортамента (приложение 1) находим основные размеры профиля (рис. 248), момент инерции площади поперечного сечения $J_z = 350 \text{ см}^4$ и статический момент площади половины этого сечения $S_{\text{макс}} = 33,7 \text{ см}^3$.

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения, находящихся на расстоянии y от нейтральной линии (по линии mm), определяем по формуле (10.10):

$$\sigma = \frac{My}{J_z}.$$

Максимальные по абсолютной величине напряжения будут при $y_{\text{макс}} = \frac{h}{2}$. Вычислим их:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{20\,000 \cdot 6}{350} \text{ кгс/см}^2 = 342,8 \text{ кгс/см}^2.$$

Эпюра напряжений σ приведена на рис. 248 слева от профиля сечения.

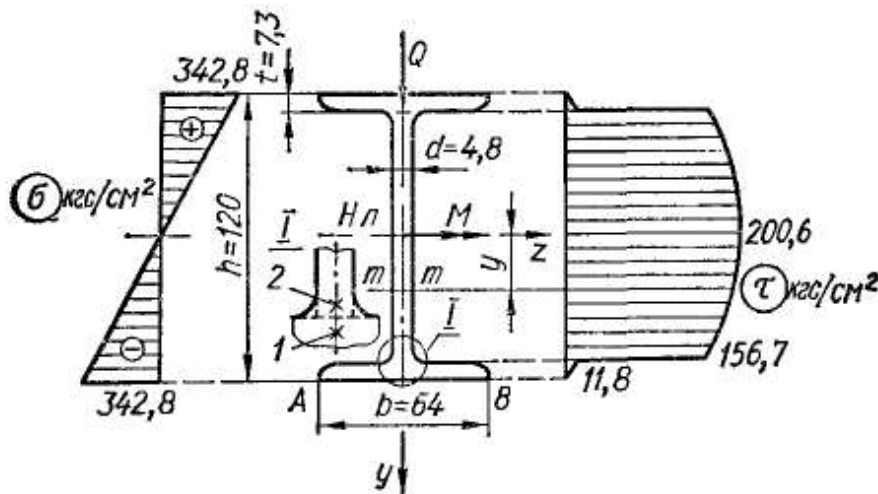


Рис. 248

Касательные напряжения в точках поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной линии определяем по формуле Журавского (10.20):

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{bJ_z},$$

Для построения эпюры касательных напряжений вычислим τ в нескольких характерных точках: а) в крайних волокнах (по линии AB); б) в месте сопряжения полки со стенкой (в точках 1 и 2), причем будем считать, что точки 1 и 2 расположены бесконечно близко к границе полки, но лежат по разные стороны от этой границы (для ясности это место на рис. 248 вынесено отдельно); в) в точках нейтральной линии.

Для точек линии AB статический момент $S_z(y) = S_z\left(\frac{h}{2}\right) = 0$, так как линия AB не отсекает никакой площади. Таким образом, в точках линии AB напряжение $\tau = 0$.

Для точки 1 ширина сечения $b = 6,4 \text{ см}$, статический момент равен статическому моменту полки. С достаточной точностью полку можно считать прямоугольником с размерами $b \times t$. Тогда

$$S_z(y) = S_{z\text{полки}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 6,4 \cdot 0,73 \cdot (6 - 0,365) \text{ см}^2 = 26,3 \text{ см}^2.$$

Касательное напряжение в точке 1

$$\tau_1 = \frac{1000 \cdot 26,3}{6,4 \cdot 350} \text{ кгс/см}^2 = 11,8 \text{ кгс/см}^2.$$

Для точки 2 статический момент остается практически тем же, но ширина сечения $d = 0,48$ см. Поэтому касательное напряжение в точке 2

$$\tau_2 = \frac{1000 \cdot 26,3}{0,48 \cdot 350} \text{ кгс/см}^2 = 156,7 \text{ кгс/см}^2.$$

Следовательно, при переходе от точки 1 к точке 2 касательное напряжение резко возрастает

Для точек нейтральной линии ширина сечения $d = 0,48$ см, а статический момент следует взять для половины сечения. Очевидно, это будет наибольшая величина для данного сечения $-S_{z\text{макс}}$. Тогда

$$\tau = \tau_{\text{макс}} = \frac{QS_{z\text{макс}}}{dJ} = \frac{1000 \cdot 33,7}{0,48 \cdot 350} \text{ кгс/см}^2 = 200,6 \text{ кгс/см}^2.$$

На основании этих данных строим эпюру τ для нижней половины сечения. Для верхней половины в силу симметрии профиля относительно оси z эпюра будет симметричной. Эпюра τ приведена на рис. 248 справа от профиля

Построенная эпюра условна, так как дает верные значения τ только для точек стенки, достаточно удаленных от полки. Вблизи полки касательные напряжения в стенке возрастают ввиду того, что место сопряжения полки со стенкой является источником концентрации напряжений

Формула (10.20) и рассмотренные примеры позволяют сделать некоторые общие заключения о распределении касательных напряжений в сечениях при поперечном изгибе:

- 1) вид эпюры τ зависит от формы поперечного сечения балки;
- 2) в крайних наиболее удаленных от нейтральной линии точках τ всегда равны нулю,
- 3) наибольшей величины касательные напряжения для большинства видов сечений достигают на нейтральной линии сечения, причем

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{QS_{\text{макс}}}{bJ}, \quad (10.26)$$

где $S_{\text{макс}}$ — статический момент половины площади сечения.

Эту формулу можно представить и в виде

$$\tau_{\text{макс}} = k \frac{Q}{F}. \quad (10.27)$$

Здесь k — коэффициент, зависящий от формы сечения. Для прямоугольника $k = 1,50$, для круглого сечения $k = 1,33$;

- 4) формулой Журавского можно пользоваться для вычисления касательных напряжений в любых точках массивных профилей.

Соображения об определении касательных напряжений при изгибе балок тонкостенных профилей изложены в § 72.

§ 62. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

В предыдущих параграфах этой главы были получены формулы для вычисления σ и τ при плоском изгибе балок. Эти формулы дают возможность составить условия прочности, необходимые для проверки и подбора сечений деталей, работающих на изгиб. Чтобы получить эти условия, выясним, в каком напряженном состоянии

находятся элементы стержня, испытывающего плоский изгиб. Для конкретности рассмотрим балку, изображенную на рис. 249.

На рис. 249, а показана схема балки и нагрузка, а также построены эпюры Q и M . На рис. 249, б изображен фасад балки. У ряда точек ее поперечного сечения выделены элементарные кубики, одна

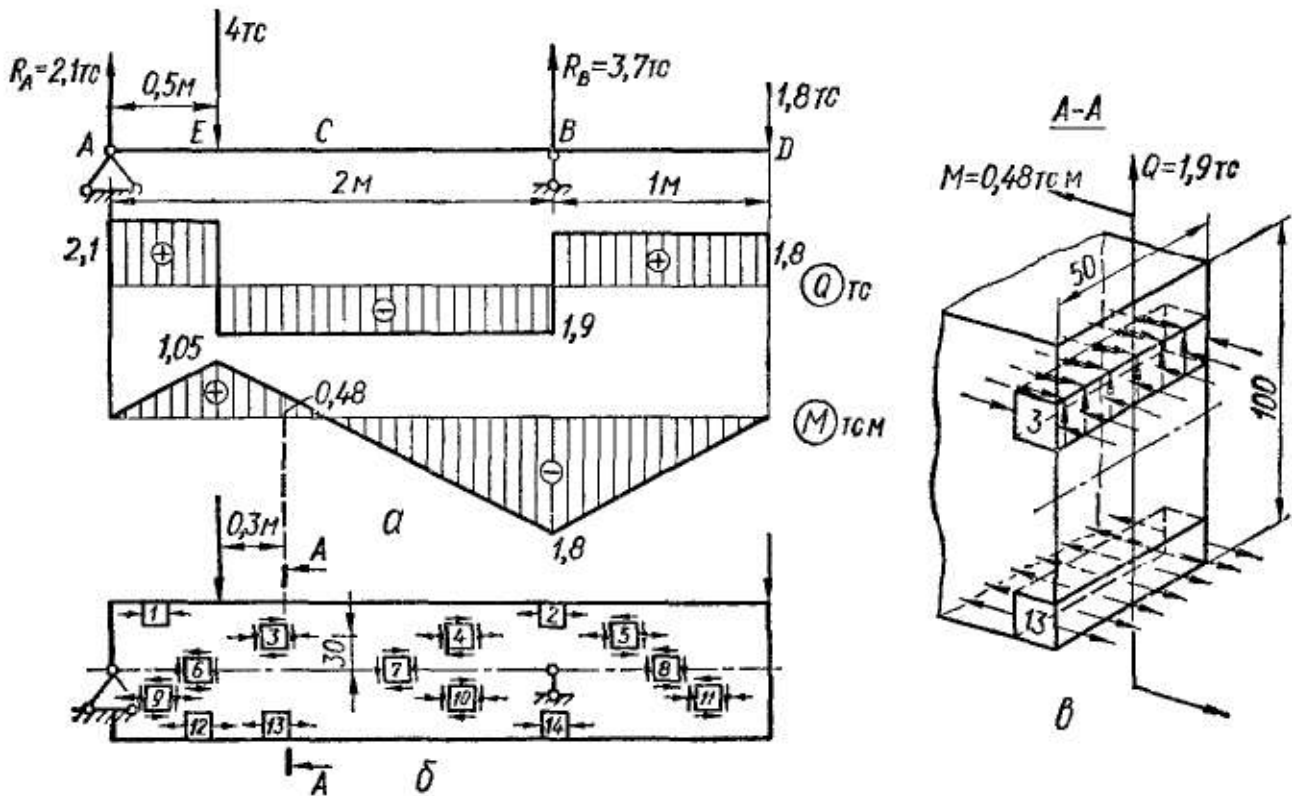


Рис. 249

из граней которых совпадает с плоскостью поперечного сечения. На рис. 249, в для примера показано сечение А—А и выделенные в нем элементы 3 и 13.

Элементы 1, 2, 12, 13 и 14 выделены у крайних точек сечений. Здесь $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{\text{макс}}$ и элементы испытывают простое растяжение или сжатие, т. е. находятся в линейном напряженном состоянии (рис. 250, а).

Элементы 6, 7 и 8 выделены у точек нейтрального слоя, где $\sigma = 0$, а $\tau = \tau_{\text{макс}}$, поэтому в их гранях действуют только касательные напряжения и, следовательно, они испытывают чистый сдвиг (рис. 250, б).

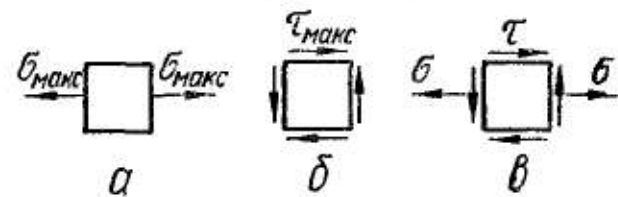


Рис. 250

В вертикальных гранях элементов 3, 4, 5, 9, 10 и 11, выделенных у произвольных точек балки, действуют и σ и τ , поэтому элементы находятся в плоском напряженном состоянии (рис. 250, в).

Величины и направления σ и τ зависят от величины и направления M и Q в рассматриваемом сечении и от положения элемента по высоте сечения. Направления напряжений определяются непосредственно на основании эпюр Q и M . При этом нужно помнить, что эпюры M строят на сжатых волокнах. Поэтому элементы 1, 3, 10,

14 и 11 испытывают сжатие, а элементы 9, 12, 13, 4, 2 и 5 — растяжение.

Чтобы выявить направление τ , обращаем внимание на знаки Q в соответствующих сечениях. Например, в сечении $A-A$ Q отрицательно, а следовательно, стремясь повернуть обе части рассеченной балки против часовой стрелки, Q действует на левую сторону сечения вверх (рис. 249, в). Так именно и будут направлены τ в правой грани элемента 3; в остальных гранях направления τ определяются законом парности касательных напряжений.

Величины напряжений могут быть найдены по формулам, полученным в предыдущих параграфах:

а) для элементов 1, 2, 12, 13 и 14

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W};$$

б) для элементов 6, 7 и 8

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{z_{\max}}}{Jb} = k \frac{Q}{F};$$

в) для элементов 3, 4, 5, 9, 10 и 11

$$\sigma = \frac{My}{J}; \quad \tau = \frac{QS_z(y)}{Jb}.$$

Если балка имеет, например, прямоугольное сечение с размерами, показанными на рис. 249, в, то

$$b = 5 \text{ см}; \quad h = 10 \text{ см}; \quad F = 50 \text{ см}^2; \quad k = 1,5;$$

$$W = \frac{5 \cdot 10^2}{6} \text{ см}^3 = 83,3 \text{ см}^3; \quad J = \frac{5 \cdot 10^3}{12} \text{ см}^4 = 417 \text{ см}^4.$$

Тогда для элементов 2 и 14 ($|M| = 1,8 \text{ тс} \cdot \text{м} = 180\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}$)

$$\sigma_{\max} = \frac{180\,000}{83,3} \text{ кгс/см}^2 = 2160 \text{ кгс/см}^2;$$

для элемента 7 ($|Q| = 1,9 \text{ тс} = 1900 \text{ кгс}$)

$$\tau_{\max} = \frac{1,5 \cdot 1900}{50} \text{ кгс/см}^2 = 57 \text{ кгс/см}^2;$$

для элемента 3 ($M = 48\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}$; $|Q| = 1900 \text{ кгс}$)

$$y = 3 \text{ см}; \quad S = (5 - 3) \cdot 5 \cdot \left(3 + \frac{5 - 3}{2}\right) \text{ см}^3 = 40 \text{ см}^3;$$

$$\sigma = \frac{48\,000 \cdot 3}{417} \text{ кгс/см}^2 = 345 \text{ кгс/см}^2; \quad \tau = \frac{1900 \cdot 40}{5 \cdot 417} \text{ кгс/см}^2 = 37 \text{ кгс/см}^2$$

и т. д.

Таким образом, при поперечном изгибе балки материал её находится в неоднородном плоском напряженном состоянии. Условие прочности должно быть записано для так называемой опасной точки

балки, т. е. той точки, где материал находится в наиболее напряженном состоянии. Опасной будет одна из следующих трех точек: а) точка, где нормальное напряжение достигает наибольшей величины; б) точка, где касательное напряжение достигает наибольшей величины; в) точка, где σ и τ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т. е. наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности. При этом таких точек может оказаться несколько.

Первая точка расположена в крайних волокнах того сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение (например, точки 2 и 14 на рис. 249). Напряженное состояние в такой точке линейное (рис. 250, а) и условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (10.28)$$

Вторая точка находится на нейтральной линии того сечения, где поперечная сила наибольшая (на рис. 249 это точка б и вообще любая точка на участке нейтрального слоя, где $Q = Q_{\max}$). В такой точке наблюдается чистый сдвиг (рис. 250, б) и поэтому условие прочности примет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} = k \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (10.29)$$

Что касается третьей точки, то положение ее не столь определено. Но где бы она ни была выбрана, в ней будет плоское напряженное состояние (рис. 250, в), при котором главные напряжения рассчитывают по формулам

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \\ \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \end{cases} \quad (10.30)$$

Внося эти величины в выражения для эквивалентных напряжений по различным теориям прочности [(7.2), (7.6), (7.11), (7.20), (7.21)], получаем условия прочности

$$\sigma_{\text{экви}} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]; \quad (10.31)$$

$$\sigma_{\text{эквиII}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.32)$$

$$\sigma_{\text{эквиIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.33)$$

$$\sigma_{\text{эквиIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.34)$$

$$\sigma_{\text{эквиV}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (10.35)$$

где

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям [формулы (10.33) и (10.34)].

Практика применения и расчета балок показала, что в подавляющем большинстве реальных случаев опасной является крайняя точка того сечения, где $M = M_{\text{макс}}$. Поэтому практически проверочный расчет балок на прочность состоит в следующем:

- 1) находят *опасное сечение*, т. е. сечение, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент $M_{\text{макс}}$;
- 2) по таблице или вычислением определяют момент сопротивления W сечения относительно нейтральной линии сечения;
- 3) применяют только одно условие прочности (10.28), которое и называется поэтому *основным*.

По этой схеме для большинства профилей (круглого, прямоугольного, двутаврового и других сечений) легко выполним и проектировочный расчет; при этом условие прочности (10.28) записывается в виде

$$W = \frac{M_{\text{макс}}}{[\sigma]}. \quad (10.36)$$

Определив необходимый момент сопротивления балки и приняв определенный профиль поперечного сечения, подбирают его размеры.

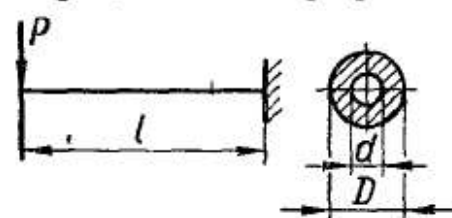


Рис. 251

Рассмотрим некоторые примеры расчета балок по основному условию прочности.

Пример 39. Для балки (рис. 251), считая заданными размеры l , D и d и величину допускаемого напряжения $[\sigma]$, найти допускаемую нагрузку $[P]$.

Опасное сечение будет, очевидно, в заделке, причем $M_{\text{макс}} = Pl$.

Момент сопротивления в данном случае

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Опасными точками в балке будут верхняя и нижняя точки сечения у заделки. Записывая для них условие прочности, получаем

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{32Pl}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\sigma].$$

Отсюда находим допускаемую нагрузку:

$$P \leq [P] = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4) [\sigma]}{32l}.$$

Пример 40. На балку (рис. 252) действует нагрузка 10 тс, равномерно распределенная по пролету. Материал балки Ст3 ($[\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2$). Требуется

подобрать различные варианты сечений. На чертежах горизонтальными осевыми линиями показаны нейтральные линии.

Опасным будет сечение посередине пролета, где

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{ql \cdot l}{8} = \frac{Pl}{8} = \frac{10\,000 \cdot 160}{8} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 200\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Опасными точками будут точки этого сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии. Условие прочности для них следующее:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{200\,000}{W} \leq [\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2.$$

Отсюда находим необходимую величину момента сопротивления:

$$W_{\text{расч}} = \frac{200\,000}{1600} \text{ см}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

Найденные размеры сечения обычно округляют до ближайших стандартных, поэтому фактический момент сопротивления W может отличаться от $W_{\text{расч}}$. В результате напряжение в опасной точке будет отличаться от $[\sigma]$ и, следовательно, будет иметь место перенапряжение ($\delta_{\sigma} > 0$) или недонапряжение ($\delta_{\sigma} < 0$), где

$$\begin{aligned} \delta_{\sigma} &= \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \\ &= \frac{\frac{M_{\max}}{W} - \frac{M_{\max}}{W_{\text{расч}}}}{\frac{M_{\max}}{W_{\text{расч}}}} = \\ &= \frac{W_{\text{расч}} - W}{W} 100\%. \end{aligned}$$

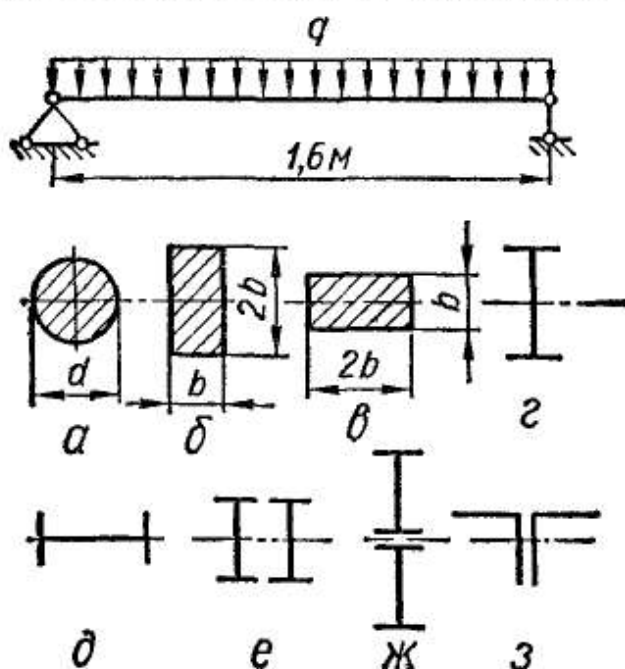


Рис. 252

При расчетах на прочность отклонение расчетных напряжений от допускаемых должно быть в пределах $\pm 5\%$ величин допускаемых напряжений.

Чтобы сравнить веса балок различных вариантов сечений, учитывая, что веса пропорциональны площади F сечения, вычислим также и величину F . Для большей наглядности полученные расчетом размеры поперечных сечений будем округлять до ближайших больших целых чисел, а для стандартных профилей брать ближайший профиль с большим моментом сопротивления.

Перейдем к вычислениям:

1. Для сечения, показанного на рис. 252, а,

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq 125 \text{ см}^3; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{\pi}} \text{ см} = 10,83 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 11 \text{ см} = 110 \text{ мм}$; тогда

$$W = \frac{\pi \cdot 11^3}{32} = 130,5 \text{ см}^3; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 130,5}{130,5} 100\% = -4,2\%;$$

$$F = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} \text{ см}^2 = 95,0 \text{ см}^2.$$

2. Для сечения, показанного на рис. 252, б,

$$W = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 \geq 125 \text{ см}^3; \quad b \geq \sqrt[3]{187,5} \text{ см} = 5,72 \text{ см.}$$

Принимаем $b = 6 \text{ см} = 60 \text{ мм}$; тогда

$$W = \frac{2}{3} \cdot 6^3 \text{ см}^3 = 144 \text{ см}^3;$$

$$\delta_\sigma = \frac{125 - 144}{144} 100\% = -13,2\%; \quad F = 6 \cdot 12 \text{ см}^2 = 72 \text{ см}^2.$$

3. Для сечения, показанного на рис. 252, в,

$$W = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3} b^3 \geq 125 \text{ см}^3; \quad b \geq \sqrt[3]{375} \text{ см} = 7,21 \text{ см.}$$

Принимаем $b = 7,5 \text{ см} = 75 \text{ мм}$; тогда

$$W = \frac{1}{3} 7,5^3 \text{ см}^3 = 140,5 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 140,5}{140,5} 100\% = -11\%;$$

$$F = 7,5 \cdot 15 \text{ см}^2 = 112,5 \text{ см}^2.$$

4. Рассмотрим сечение в виде двутавра (рис. 252, г). Принимаем двутавр № 18, тогда

$$W = W_z = 143 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 143}{143} 100\% = -12,6\%; \quad F = 23,4 \text{ см}^2.$$

5. Для сечения, показанного на рис. 252, д, приемлемыми оказываются профили № 50 и № 55, первый из которых дает незначительное перенапряжение (1,6%), а второй имеет заметный избыток прочности (16,7%). Останавливаемся на двутавре № 50. Для него

$$W = W_z = 123 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 123}{123} 100\% = 1,6\%; \quad F = 100 \text{ см}^2.$$

6. Для сечения в виде двух двутавров (рис. 252, е) подходящим профилем в сортаменте будет двутавр № 14. У этого сечения

$$W = 2W_z = 2 \cdot 81,7 \text{ см}^3 = 163,4 \text{ см}^3; \quad \delta_\sigma = \frac{125 - 163,4}{163,4} 100\% = -23,5\%;$$

$$F = 2 \cdot 17,4 \text{ см}^2 = 34,8 \text{ см}^2.$$

7. Для сечения, показанного на рис. 252, ж, нейтральная линия (она расположена на стыке двух профилей) не совпадает с нейтральной линией каждого профиля. Поэтому момент сопротивления всего сечения не равен сумме моментов сопротивления W_z каждого профиля, а должен быть вычислен делением момента инерции сечения на расстояние от нейтральной линии до крайних волокон (т. е. на высоту одного профиля):

$$W = \frac{2 \left[J_z + \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 F_1 \right]}{h_1},$$

где h_1 , F_1 , J_z и W_z — соответственно высота, площадь, момент инерции и момент сопротивления одного двутавра.

Возьмем двутавр № 12. Для него

$$W = \frac{2(350 + 6^2 \cdot 14,7)}{12} \text{ см}^3 = 146,6 \text{ см}^3.$$

Легко убедиться, что меньший профиль не подходит,

Таким образом,

$$\delta_{\sigma} = \frac{125 - 146,6}{146,6} 100\% = -14,7\%; \quad F = 2 \cdot 14,7 \text{ см}^2 = 29,4 \text{ см}^2.$$

8. Для сечения в виде двух равнобоких уголков (рис. 252, з) момент сопротивления равен сумме моментов сопротивления каждого профиля. Но в таблицах сортамента для уголков значения W нет. Поэтому определяем момент сопротивления сечения как

$$W = 2 \frac{J_z}{b - z_0},$$

где J_z , b , z_0 имеют тот же смысл, что и в таблице сортамента (опасными точками будут нижние концы уголков).

Указать непосредственно, какой именно профиль нужно взять, трудно, поэтому рассмотрим два варианта сечений:

для уголка $140 \times 140 \times 12$

$$W = 2 \frac{602}{14 - 3,9} \text{ см}^3 = 119,3 \text{ см}^3;$$

для уголка $160 \times 160 \times 10$

$$W = 2 \frac{774}{16 - 4,3} \text{ см}^3 = 132 \text{ см}^3.$$

Таблица 16

Сечение на рис. 252	Недостаток или избыток прочности, %	Площадь сечения, см ²	Относительный вес
а	4,2	95,0	4,06
б	13,2	72,0	3,08
в	11,0	112,5	4,81
г	12,6	23,4	1,00
д	1,6	100,0	4,27
е	23,5	34,8	1,49
ж	14,7	29,4	1,26
з	5,3	62,8	2,65

Последний вариант с точки зрения прочности лучший. Получаем

$$W = 132 \text{ см}^3; \quad F = 2 \cdot 31,4 \text{ см}^2 = 62,8 \text{ см}^2; \quad \delta_{\sigma} = \frac{125 - 132}{132} \cdot 100\% = -5,3\%.$$

Таким образом, определены размеры всех сечений и задача решена. Различные формы сечений дали разные избытки прочности и площади сечений, а следовательно, и веса балок.

Приведем сводную таблицу результатов (табл. 16), которая позволяет судить о том, какие из полученных сечений рациональны для данной балки, а какие нет. Числа последнего столбца показывают, во сколько раз балка с данным сечением тяжелее двутавровой балки (рис. 252, з), вес которой получился наименьшим и поэтому принят за единицу.

Заканчивая исследование напряжений в балке при изгибе, сделаем еще некоторые замечания и дополнения.

При изгибе балки (рис. 253, а) в точках определенного поперечного сечения $n - n$, взятых на различных расстояниях от нейтральной оси, мы находили нормальные напряжения σ и касательные τ .

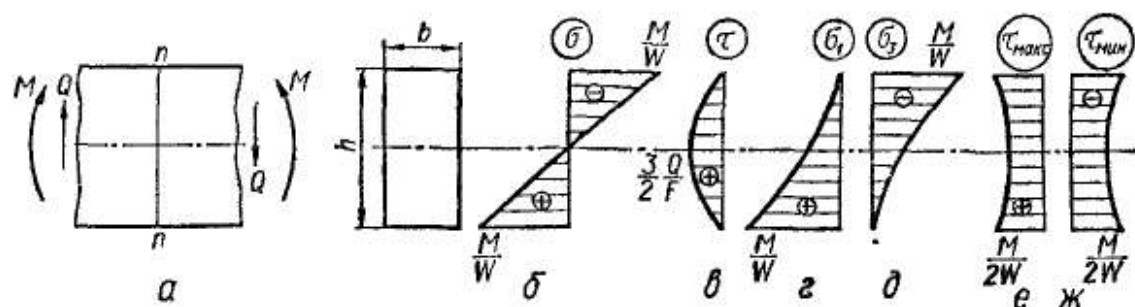


Рис. 253

Для балки прямоугольного поперечного сечения эпюры напряжений σ и τ приведены соответственно на рис. 253, б и в. Кроме того, в каждой из этих точек по напряжениям σ и τ вычисляли главные напряжения: растягивающие σ_1 и сжимающие σ_3 . Эти напряжения действуют на площадках, наклон которых к плоскости поперечного сечения изменяется от точки к точке. Изменение величины главных напряжений по высоте балки может быть представлено в виде эпюр σ_1 и σ_3 . Для той же балки эти эпюры приведены на рис. 253, г, д.

В каждой точке по высоте балки по напряжениям σ и τ (или σ_1 и σ_3) могут быть вычислены также максимальные и минимальные

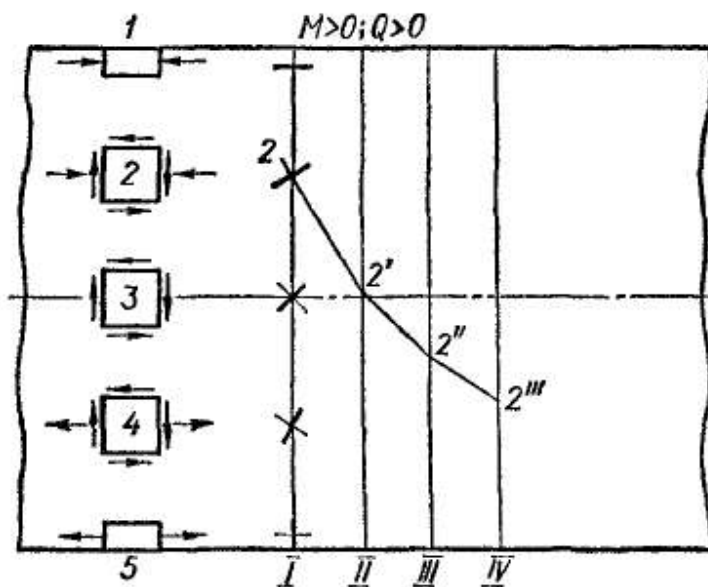


Рис. 254

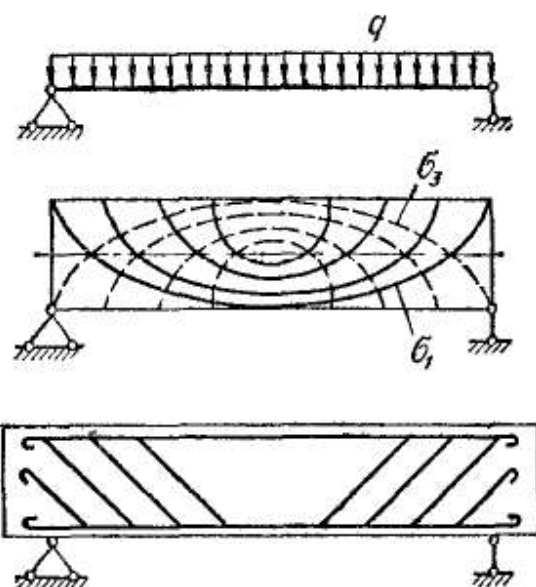


Рис. 255

касательные напряжения, которые действуют в сечениях, наклоненных под углом 45° к сечениям с главными напряжениями σ_1 и σ_3 в этой точке. Эти касательные напряжения вычисляются по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

или, учитывая зависимости (10.30), по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Эпюры значений максимальных и минимальных касательных напряжений для рассматриваемой балки приведены на рис. 253, е, ж.

Отметим, что в точках, взятых на нейтральной линии, абсолютные значения τ , σ_1 , σ_3 , $\tau_{\text{макс}}$, $\tau_{\text{мин}}$ одинаковы. При одном и том же масштабе для всех напряжений ординаты эпюр этих напряжений посередине высоты балки также одинаковые.

Проверяя прочность балки, определяют величины главных напряжений. В ряде случаев важно знать также и направления главных напряжений во всех точках балки. В частности, это необходимо при конструировании железобетонных балок, в которых арматуру нужно располагать в направлении наибольших растягивающих напряжений.

Рассмотрим направления главных напряжений в различных точках какого-либо сечения I (рис. 254). Тонкими линиями показаны направления σ_1 , а толстыми — σ_3 . Продолжим направление σ_1 для точки 2 до пересечения со смежным сечением в точке 2'. В этой точке определим вновь направление рассматриваемого главного напряжения и, далее поступая аналогичным образом, получим ломаную линию 2—2'—2"—2'''. В пределе эта ломаная линия обратится в кривую, касательная к которой совпадает с направлением рассматриваемого главного напряжения в точке касания. Эта кривая называется *траекторией главного напряжения*. Направление траекторий главных напряжений зависит от вида нагрузки и условий закрепления балки. Очевидно, через каждую точку балки проходят две траектории главных напряжений (соответственно σ_1 и σ_3), пересекающиеся между собой под прямым углом.

В железобетонных балках арматуру обычно стремятся располагать примерно в направлении траекторий главных растягивающих напряжений (рис. 255).

§ 63. О РАЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЕЧЕНИЯ

В § 60 настоящей главы были сделаны некоторые замечания о рациональной форме сечения при чистом изгибе. Здесь на основе рассмотренных примеров расчета на изгиб эти замечания будут несколько расширены. При этом мы отвлекаемся от каких-либо конструктивных или технологических соображений, связанных с формой сечения той или иной конкретной детали, и считаем сечение рациональным, если оно обеспечивает прочность данной балки при минимальном ее весе, т. е. при минимальной площади сечения.

В ряде случаев кроме формы сечения большое значение имеет и его расположение — ориентировка относительно силовой плоскости. Как видно из табл. 16, наиболее рациональным является двутавровое сечение, поставленное так, чтобы его нейтральная линия совпадала с осью, относительно которой $J_z = J_{\max}$. Хуже будет сечение, составленное из двух двутавров, поставленных рядом или один на другой. Значительно хуже сечения из двух равнобоких уголков и прямоугольное сечение. Нерационально круглое сечение, так как вес балки такого сечения почти в 4 раза превышает вес двутавровой балки, имеющей ту же прочность. Поэтому выбор круглого сечения может быть оправдан только конструктивными или технологическими соображениями (например, для вращающихся деталей), причем в таком случае выгоднее ставить полое сечение. Совершенно нерационально сечение, ориентированное так, что нейтральная линия совпадает с осью J_{\min} (варианты b и d на рис. 252 и в табл. 16).

Заметим также, что если в условии прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$$

максимальное напряжение близко к допускаемому, то это не означает еще, что сечение подобрано удачно, так как при другой форме сечения

и значительно меньшем σ_{\max} балка может оказаться намного легче.

Изложенные выводы получены из рассмотрения данных примера 40. Эти выводы справедливы для любой балки, работающей на плоский изгиб и изготовленной из пластичного материала, поскольку характер нагрузки и схема балки влияют только на величину расчетного изгибающего момента.

Для балок из хрупкого материала полученные рекомендации теряют силу, так как у него допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_+]$ значительно меньше допускаемого напряжения на сжатие $[\sigma_-]$.

В этом случае нецелесообразно применять сечения, нейтральная линия которых является осью симметрии сечения и, следовательно, максимальные напряжения в растянутой и сжатой зонах одинаковы. Рационально такое сечение, у которого σ_{\max} в растянутой зоне значительно меньше σ_{\max} в сжатой зоне. Добиться этого положения можно, выбирая такую форму сечения, у которой нейтральная линия была бы сдвинута в сторону растянутой зоны. Пример такого сечения и соответствующая ему эпюра σ показаны на рис. 256.

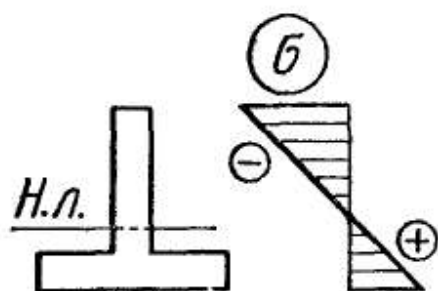


Рис. 256

В этом случае нецелесообразно применять сечения, нейтральная линия которых является осью симметрии сечения и, следовательно, максимальные напряжения в растянутой и сжатой зонах одинаковы. Рационально такое сечение, у которого σ_{\max} в растянутой зоне значительно меньше σ_{\max} в сжатой зоне. Добиться этого положения можно, выбирая такую форму сечения, у которой нейтральная линия была бы сдвинута в сторону растянутой зоны. Пример такого сечения и соответствующая ему эпюра σ показаны на рис. 256.

В настоящем параграфе были рассмотрены некоторые вопросы, связанные с рациональной формой сечения балки. Если же говорить о рациональности балки в целом, то следует иметь в виду, что M и Q неодинаковы в различных сечениях. Поэтому размеры, подобранные по опасному сечению, окажутся излишне большими для других сечений балки. Это обстоятельство побуждает в целях экономии веса и материала применять балки переменного сечения. Основы расчета таких балок рассмотрены в § 69.

§ 64. ПОЛНЫЙ РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

Все рассмотренные примеры расчета на прочность при изгибе относятся к тем случаям, когда опасной является одна из точек крайних волокон балки (рис. 249, б) и напряженное состояние в ней линейное (рис. 250, а). Как уже отмечалось, в подавляющем большинстве практически важных случаев этого расчета достаточно.

Однако, хотя и редко, но встречаются случаи, когда опасная точка принадлежит нейтральному слою. В ней материал испытывает чистый сдвиг (рис. 249, б и 250, б), и для расчета следует пользоваться условием прочности (10.29). Такое положение может быть тогда, когда при больших поперечных силах в сечениях балки действуют незначительные изгибающие моменты, например, при коротких пролетах и значительной поперечной нагрузке.

Пример 41. На балку (рис. 257) действует равномерно распределенная нагрузка $q = 12$ тс/м. Пролет $l = 70$ см, сечение балки двутавровое, материал Ст3 ($[\sigma] = 1600$ кгс/см²; $[\tau] = 1000$ кгс/см²).

Подберем сечение из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

Наибольший изгибающий момент будет в среднем сечении балки:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{120 \cdot 70^2}{8} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 73\,500 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Из условия прочности

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{73\,500}{1600} \text{ см}^3 = 46 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента подбираем двутавр № 12, у которого $W = 58,4 \text{ см}^3$, а $J = 350 \text{ см}^4$.

Проверим прочность по касательным напряжениям.

Условие прочности, согласно формуле (10.29), имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} \leq [\tau].$$

Наибольшая поперечная сила будет в опорном сечении:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{120 \cdot 70}{2} \text{ кгс} = 4200 \text{ кгс}.$$

Ширина сечения по нейтральной линии, т. е. толщина стенки двутавра, $b = 0,48 \text{ см}$ (в сортаменте она обозначена буквой d). Далее по таблице сортамента находим, что $S_{\max} = 33,7 \text{ см}$. Подставляя числовые величины в условие прочности, получим

$$\tau_{\max} = \frac{4200 \cdot 33,7}{0,48 \cdot 350} \text{ кгс/см}^2 = 842,5 \text{ кгс/см}^2 < [\tau] = 1000 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, размеры сечения балки удовлетворяют условиям прочности как по нормальным, так и по касательным напряжениям.

В балках с тонкостенным сечением (двутавр, швеллер) опасной может оказаться точка, расположенная в месте соединения стенки с полкой. Это происходит в тех случаях, когда к балке приложена значительная поперечная нагрузка, причем есть сечения, в которых M и Q одновременно велики. Одно из таких сечений и будет опасным.

Таким образом, если балка имеет тонкостенное сечение и к ней приложена значительная поперечная нагрузка, то необходимо производить полный расчет на прочность (типовой расчет приведен ниже). Если расчет проектировочный, то сначала можно подобрать сечение по основному условию прочности (10.28), а затем произвести проверку по всем условиям прочности.

Пример 42. Требуется подобрать двутавровое сечение для балки, показанной на рис. 258, а. Материал Ст3 ($[\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2$; $[\tau] = 1000 \text{ кгс/см}^2$).

Построив эпюры Q и M , заключаем, что опасными могут оказаться такие точки балки:

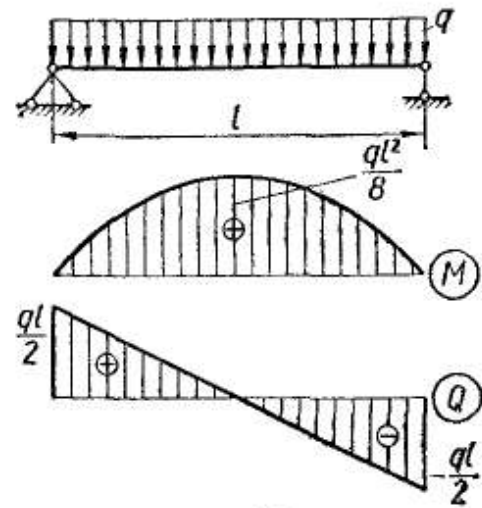


Рис. 257

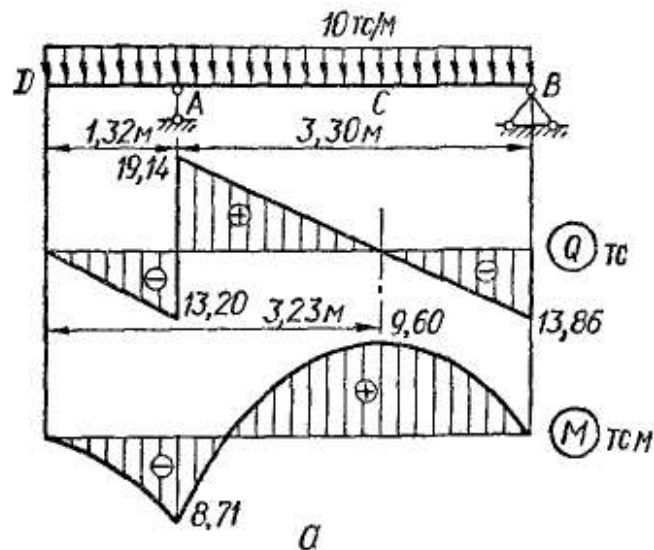
а) крайняя точка (рис. 258, б, точка 1) сечения С;

б) точка, расположенная в месте соединения стенки с полкой (рис. 258, б, точка 2) в сечении справа от опоры А;

в) точка, лежащая на нейтральной линии этого же сечения (рис. 258, б, точка 3).

Подберем поперечное сечение балки, считая опасной точку 1 в сечении С. Из условия прочности (10.28) имеем

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{960\,000}{1600} \text{ см}^3 = 600 \text{ см}^3.$$



По таблице сортамента находим подходящий профиль № 33, у которого $W = 597 \text{ см}^3$. Тогда напряжение в точке 1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{960\,000}{597} \text{ кгс/см}^2 = 1608 \text{ кгс/см}^2.$$

Это больше допускаемого, но перенапряжение составляет всего 0,5%.

Далее находим геометрические характеристики двутавра № 33, необходимые для проверки прочности в точках 2 и 3 сечения А. Согласно таблице сортамента,

$$J = 9840 \text{ см}^4; \quad S_{\max} = 339 \text{ см}^3;$$

ширина сечения стенки, соответствующая точкам 2 и 3, $d = 0,7 \text{ см}$. Находим $S_{\text{полки}} = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 \text{ см}^3 = 250 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность в точке 3 сечения балки непосредственно справа от опоры А. По условию прочности (10.29), учитывая, что $Q_{\max} = 19,14 \text{ тс}$, находим:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bJ} = \frac{19\,140 \cdot 339}{0,7 \cdot 9840} \text{ кгс/см}^2 = 942 \text{ кгс/см}^2 < [\tau] = 1000 \text{ кгс/см}^2.$$

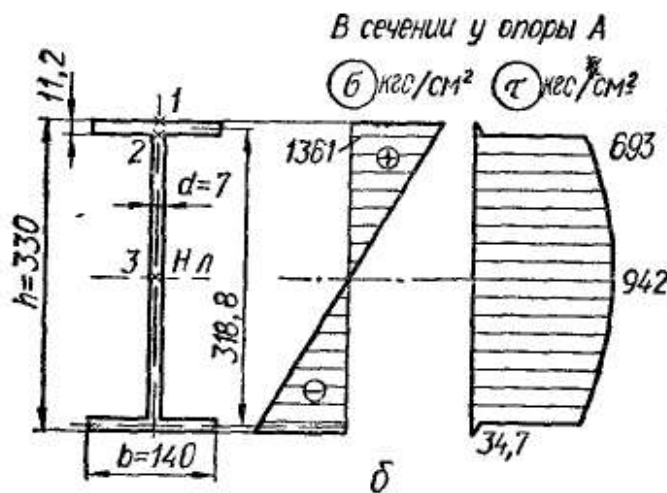


Рис. 258

Проверяем прочность в точке 2 этого же сечения. Материал Ст3 пластичный, поэтому пользуемся условием прочности (10.34) по четвертой теории:

$$\sigma_{\text{экв}IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

В сечении действуют

$$M = 8,71 \text{ тс} \cdot \text{м} = 871\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \quad \text{и} \quad Q = Q_{\max} = 19\,140 \text{ кгс}.$$

Поэтому в точке 2

$$\sigma = \frac{My}{J} = \frac{871\,000 (16,5 - 1,12)}{9840} \text{ кгс/см}^2 = 1361 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\tau = \frac{Q_{\max} S_{\text{полки}}}{bJ} = \frac{19\,140 \cdot 250}{0,7 \cdot 9840} \text{ кгс/см}^2 = 693 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau} = \sigma \sqrt{1 + 3 \frac{\tau^2}{\sigma^2}} = 1361 \sqrt{1 + 3 \cdot 0,259} \text{ кгс/см}^2 =$$

$$= 1814 \text{ кгс/см}^2 > [\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, в данной балке опасной оказывается точка 2 сечения справа от опоры А, причем перенапряжение в ней составляет около 14%, что недопустимо. Поэтому вместо профиля № 33 следует принять профиль № 36.

§ 65. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе, как и при растяжении или кручении, в местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений наблюдается концентрация напряжений. Если нагрузка статическая, то

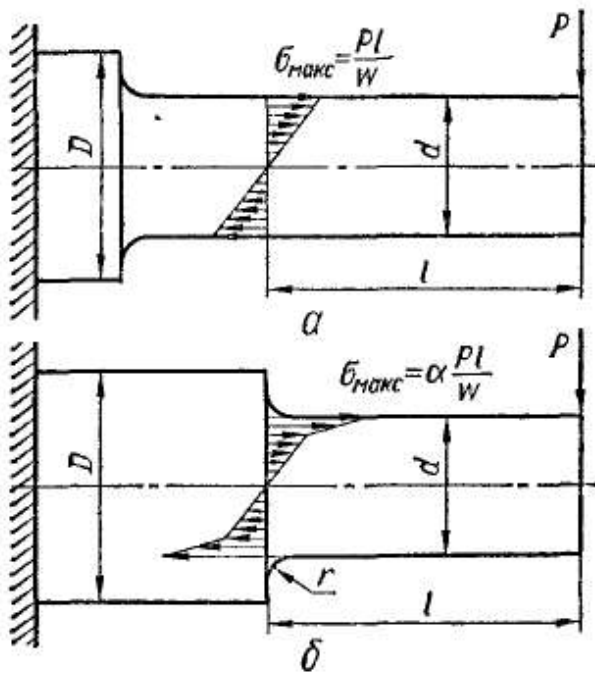


Рис. 259

концентрация напряжений в деталях из пластичного материала неопасна благодаря перераспределению напряжений в зоне концентратора вследствие текучести. В слу-

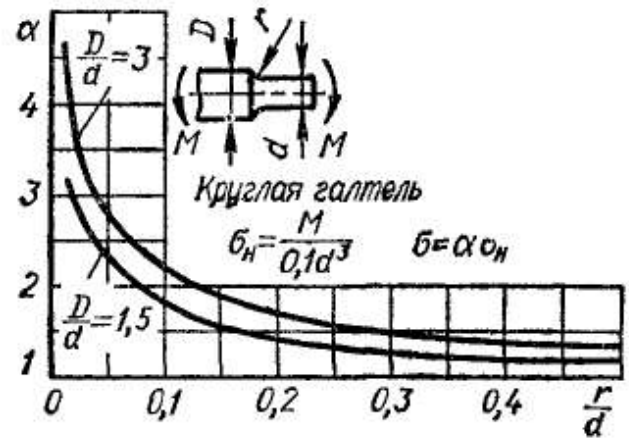


Рис. 260

чае же хрупких материалов, когда не приходится рассчитывать на ограничение максимальных напряжений, так как уровень последних будет определяться временным сопротивлением материала, при расчете детали на прочность нужно учитывать концентрацию напряжений.

В зависимости от степени резкости нарушения призматической формы стержня или сплошности материала будет та или иная степень концентрации напряжений, т. е. местного повышения напряжений.

На рис. 259 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в стержне при отсутствии концентрации напряжений (рис. 259, а) и при наличии концентрации (рис. 259, б). В последнем случае вследствие резкого изменения сечения вала в крайних волокнах сечения действуют максимальные напряжения

$$\sigma_{\text{макс}} = \alpha \sigma_n,$$

где $\sigma_n = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{W}$ — номинальные напряжения при отсутствии концентрации;

α — теоретический коэффициент концентрации, величина которого зависит от соотношения диаметров d и D сопрягаемых участков стержня, а также от радиуса закругления r в месте сопряжения этих участков.

Значения α в зависимости от $\frac{d}{D}$ и r рассчитываются методами теории упругости и приводятся в справочной литературе в виде соответствующих графиков или таблиц. В частности, для круглой галтели при отношениях $\frac{D}{d} = 3$ и $1,5$ на рис. 260 приведен график зависимости теоретического коэффициента концентрации α от отношения $\frac{r}{d}$.

Рассмотрим и другие типичные случаи концентраторов напряжений, встречающихся при изгибе.

Двусторонняя внешняя выточка (рис. 261). С увеличением глубины двусторонней симметричной выточки коэффициент концентрации приближается к своему предельному значению. При этом в силу так называемого закона затухания, согласно которому чем больше максимальное напряжение в

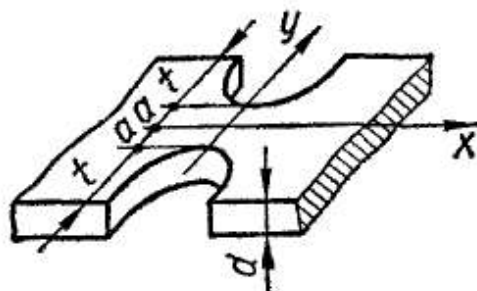


Рис. 261

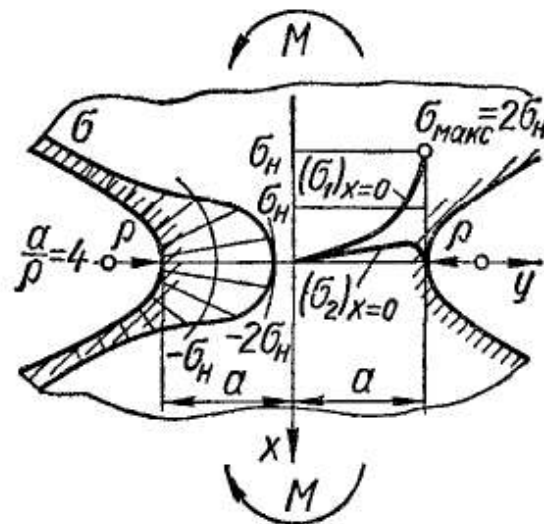


Рис. 262

месте концентрации, тем резче затухание напряжений при удалении от наиболее напряженной зоны, существенное влияние на коэффициент концентрации оказывает только кривизна у дна выточки. Форма выточки в остальной ее части мало влияет на коэффициент концентрации. Учитывая последнее и принимая, что выточка имеет форму гиперболы, формулу для определения максимальных напряжений, выведенную методами теории упругости для случая чистого изгиба (рис. 262), можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \frac{4 \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{3 \left[\sqrt{\frac{a}{\rho}} + \left(\frac{a}{\rho} - 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]}, \quad (10.37)$$

где $\sigma_n = \frac{3M}{2a^2d}$ — номинальное напряжение (без учета концентрации). На рис. 263 изображена зависимость наибольшего напряже-

ния от $\frac{a}{\rho}$, а на рис. 264 — кривые теоретического коэффициента концентрации α для различных соотношений $\frac{H}{h}$ в зависимости от $\frac{\rho}{h}$.

Круглые и продолговатые отверстия в очень широком стержне (рис. 265). Предполагается,

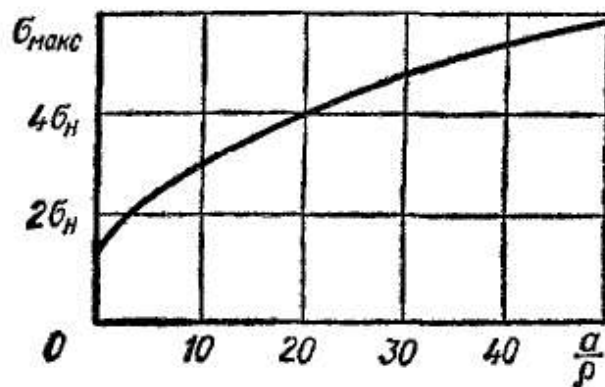


Рис. 263

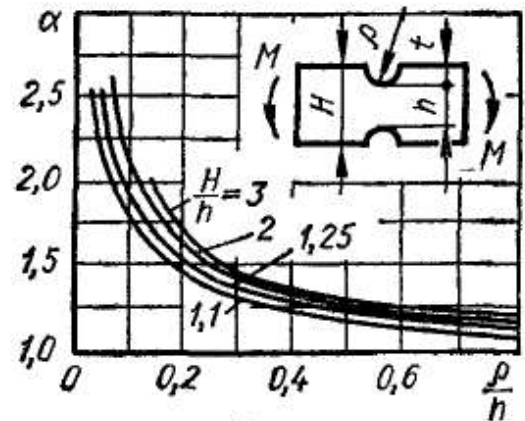


Рис. 264

что большая ось отверстия совпадает с осью стержня или перпендикулярна к ней. На рис. 265 даны графики распределения напряжений для случая, когда $\frac{t}{\rho} = 25$. При перемещении от дна выточки вдоль ее контура, а также вдоль оси y напряжения быстро убывают. Напряжения, показанные штриховой ли-

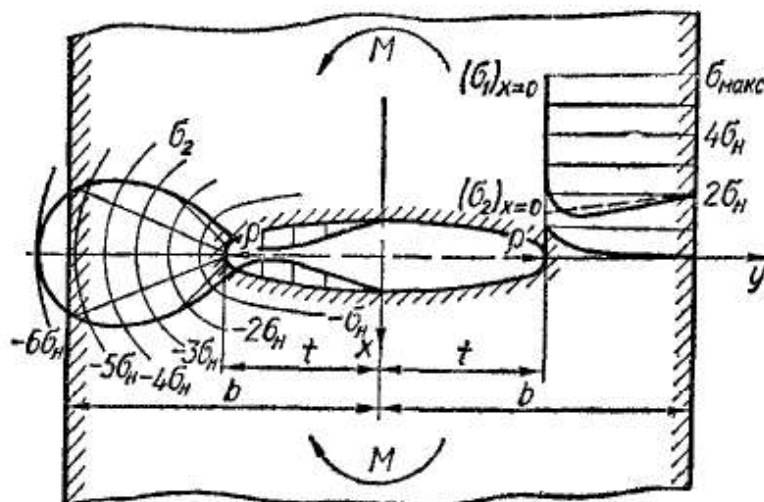


Рис. 265

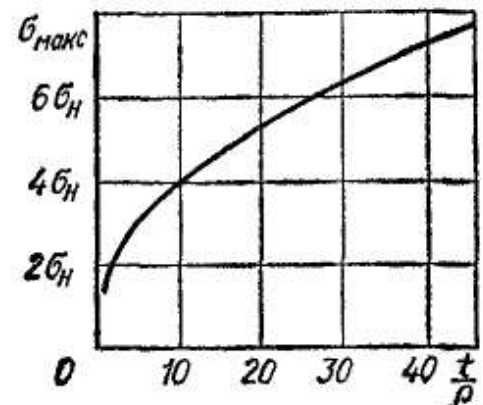


Рис. 266

нией, соответствуют результатам, полученным на основании элементарной теории изгиба с учетом ослабления стержня в результате высверливания отверстия. Для наибольшего напряжения, возникающего у дна выточки, формула может быть записана в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_H \left(1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \right), \quad (10.38)$$

где

$$\sigma_H = \frac{3Mt}{2\delta b^3} ;$$

δ — толщина стержня.

Зависимость наибольшего напряжения от $\frac{t}{\rho}$ представлена на рис. 266. Для круглого отверстия $\sigma_{\max} = 2\sigma_H$. Когда продолговатое отверстие расположено параллельно оси стержня, концентрации напряжений около отверстия нет.

Глубокая внешняя кольцевая выточка на теле вращения (рис. 267). Наибольшее напряжение при

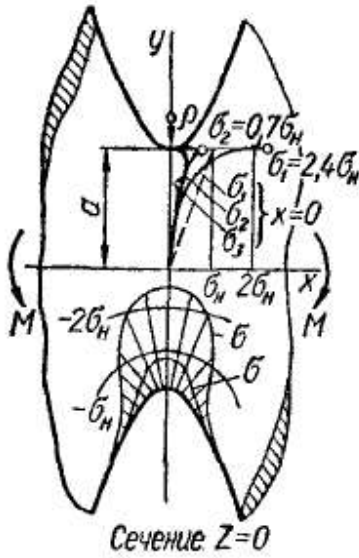


Рис. 267

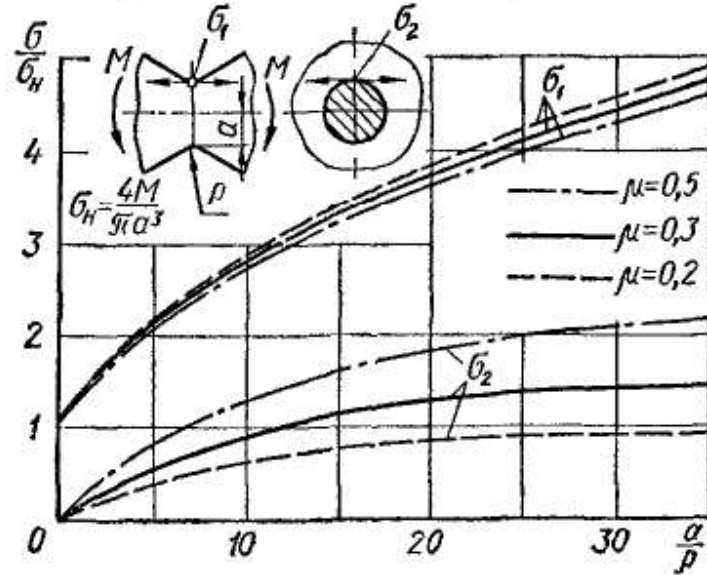


Рис. 268

изгибе возникает у дна выточки, где материал испытывает плоское напряженное состояние. На рис. 267 показано распределение напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 в точках по поперечному сечению в месте выточки, а на рис. 268 дано распределение напряжений σ_1 и σ_2 у дна выточки в зависимости от отношения $\frac{a}{\rho}$ при различных коэффициентах Пуассона.

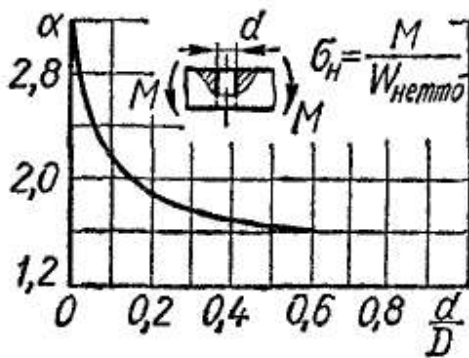


Рис. 269

$\alpha = f\left(\frac{d}{D}\right)$ приведена на рис. 269.

Распространенными концентраторами напряжений есть также различного рода мелкие выточки на круглых деталях, приводящие к ступенчатости стержня. Величина коэффициента концентрации в данном случае зависит главным образом от отношения радиуса закругления r к меньшему диаметру ступенчатого стержня (диаметру выточки d). На рис. 270 приведен график зависимости $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$ для рассматриваемого случая.

Кроме концентрации нормальных напряжений при изгибе в некоторых случаях приходится иметь дело с концентрацией касательных напряжений, в частности при поперечном изгибе угловых, швеллерных, тавровых и двутавровых балок. В данном случае концентрация напряжений обуславливается резким изменением толщины элементов сечения балки в месте соединения полки со стенкой. Как показывают детальные исследования картины распределения касательных напряжений при изгибе, например в балке двутаврового сечения, фактическое распределение касательных напряжений не отвечает картине, приведенной на рис. 271, а, полученной на основании расчетов по формуле (10.20). По линии 1—1,

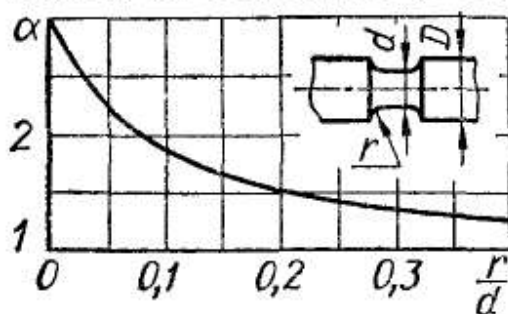


Рис. 270

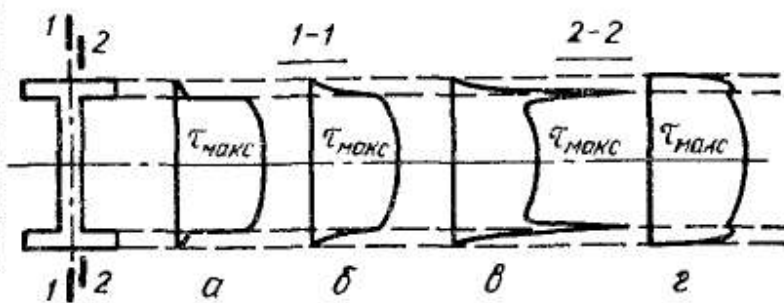


Рис. 271

совпадающей с осью симметрии сечения, распределение касательных напряжений будет с достаточной точностью изображаться графиком рис. 271, б. По линии же 2—2, проходящей у самого края стенки, распределение напряжений в случае малого радиуса закругления в месте сопряжения стенки с полкой будет представляться кривой, показанной на рис. 271, в. Из этого графика видно, что в точках входящих углов сечения касательные напряжения теоретически достигают очень большой величины. На практике эти входящие углы скругляют, напряжения падают и их распределение в точках линии 2—2 примерно представляется кривой, приведенной на рис. 271, г.

Во всех случаях снизить концентрацию напряжений можно, вводя соответствующие плавные переходы от одного размера сечения к другому, закругляя углы, уменьшая жесткость более массивной части детали в месте перехода и т. п.

Если при статическом изгибе концентрация напряжений не представляет собой опасности, особенно для элементов конструкций, изготовленных из пластичных материалов, то в случае динамических и повторно-переменных нагрузок вопросам концентрации должно уделяться особенно большое внимание (см. гл. 21).

§ 66. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ

В предыдущих параграфах были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. В большинстве случаев практического расчета деталей, работающих на изгиб, необходимо также производить расчет их на жесткость. Под *расчетом на жесткость* мы понимаем оценку упругой податливости балки под действием

приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов. Для выполнения такого расчета необходимо научиться вычислять перемещения точек балки под действием любой внешней нагрузки. Такое умение необходимо также для расчета статически неопределимых балок.

Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе. Ось балки (рис. 272) под действием нагрузки, расположенной в одной из главных плоскостей инерции (в плоскости xOy), искривляется в той

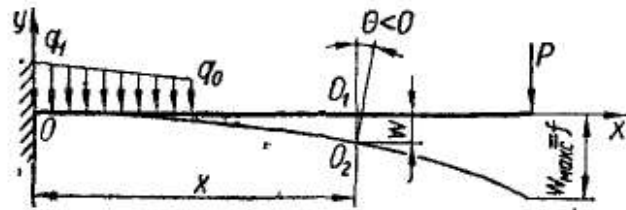


Рис. 272

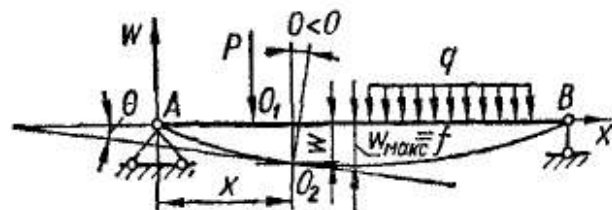


Рис. 273

же плоскости, а поперечные сечения поворачиваются и одновременно получают поступательные перемещения. Искривленная ось балки называется *изогнутой осью* или *упругой линией*. На рис. 272 и 273 изогнутая ось изображена тонкой кривой линией.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется *прогибом балки в данном сечении* и обозначается буквой w . На рис. 272 и 273 центр тяжести произвольного сечения, взятого на расстоянии x от начала координат, переместился по вертикали из точки O_1 в точку O_2 на расстояние O_1O_2 . Это перемещение и является прогибом балки $w(x)$ в сечении с абсциссой x . Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба* и обозначается буквой f .

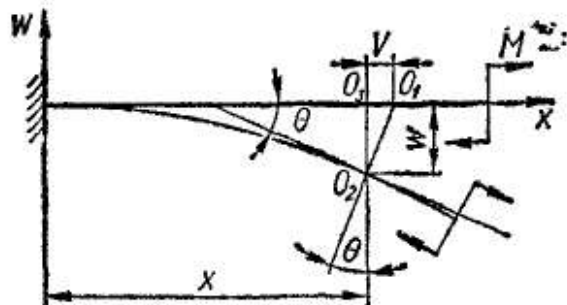


Рис. 274

Угол θ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота сечения*. Угол поворота также может быть определен как угол между касательной к упругой линии и осью x (рис. 273).

Заметим, что длина изогнутой оси, принадлежащей нейтральному слою, при искривлении бруса не изменяется, следовательно, при этом происходит смещение ее точек также и в направлении оси x (перемещение O_1O_3 на рис. 274). Однако в большинстве случаев смещения V (проекции на ось x полных перемещений) настолько малы, что ими можно пренебречь.

Условимся оси координат всегда располагать следующим образом: начало координат помещать на левом конце балки, ось x направлять по оси балки вправо, а ось w — вверх.

Прогиб w будем считать положительным, если перемещение соответствующей точки происходит вверх, т. е. в направлении оси w .

Угол поворота Θ будем считать положительным при повороте сечения против часовой стрелки.

В связи с малостью деформаций балок можно полагать $\text{tg } \Theta \approx \Theta$. Так как тангенс угла поворота есть производная от ординаты прогиба:

$$\text{tg } \Theta = \frac{dw}{dx}, \quad (10.39)$$

то с достаточной степенью точности можно считать угол поворота $\Theta(x)$ в данном сечении равным производной прогиба $w(x)$ по абсциссе сечения:

$$\Theta(x) \approx \frac{dw(x)}{dx}. \quad (10.40)$$

Таким образом, для определения деформации балки в ее произвольном сечении необходимо прежде всего получить уравнение упругой линии

$$w = F(x).$$

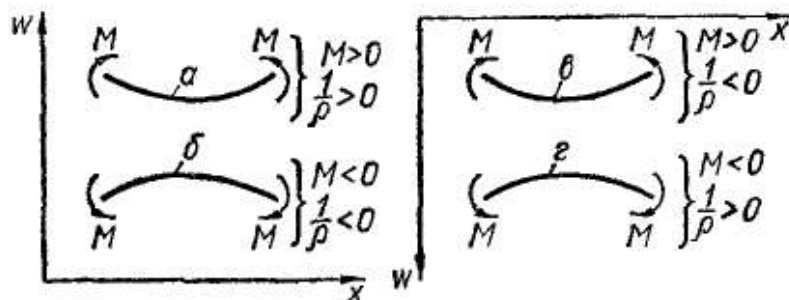


Рис. 275

Исходя из физической природы изогнутой оси бруса, можем утверждать, что упругая линия должна быть непрерывной и гладкой (не имеющей изломов) кривой, следовательно, на протяжении всей оси бруса должны быть непрерывны функция w и ее первая производная. Прогибы и углы поворота и являются перемещениями сечений балок при изгибе. Деформация того или иного участка балки определяется искривлением его изогнутой оси, т. е. кривизной. Так как влияние поперечной силы на кривизну мало, то и в общем случае поперечного изгиба уравнение (10.9) можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.41)$$

Из курса высшей математики известно такое уравнение кривизны плоской кривой:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (10.42)$$

Теперь для получения дифференциального уравнения изогнутой оси остается приравнять правые части выражений (10.41) и (10.42), выяснив предварительно вопрос о знаке.

Если изгибающий момент положителен, то упругая линия своей вогнутой стороной обращена вверх (рис. 275, а) и, следовательно, при принятом направлении координатных осей кривизна $k = \frac{1}{\rho}$ считается положительной. При отрицательном изгибающем моменте кривизна также отрицательна (рис. 275, б). Если бы ось w была

нами направлена вниз, то при положительном изгибающем моменте кривизна была бы отрицательной (рис. 275, в), а при отрицательном моменте — положительной (рис. 275, з).

Сохраняя принятое нами направление оси w вверх, имеем соответствие между знаком момента и знаком кривизны, поэтому можем просто приравнять правые части равенств (10.41) и (10.42). Тогда

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.43)$$

Если бы ось w была направлена вниз, то в правой части следовало бы поставить знак «минус».

Полученное уравнение называется *точным уравнением изогнутой оси бруса*. Оно является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, интегрирование которого, как известно, представляет значительные трудности. В связи с этим и так как в подавляющем большинстве рассматриваемых на практике задач прогибы малы, точное уравнение (10.43) заменяют приближенным уравнением — уравнением для малых перемещений.

В знаменателе уравнения (10.43) стоит сумма двух слагаемых:

$$1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta.$$

При малых деформациях величина второго слагаемого во много раз меньше первого. Действительно, при расчете обычных машиностроительных или строительных элементов нормы допускаемого прогиба составляют 1/100—1/1000 пролета в зависимости от условий работы балки, а получающиеся при этом углы поворота не превышают 1° . Даже приняв больший предел для прогиба ($f = \frac{1}{100} l$), наибольшую величину тангенса θ получим следующей:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{tg} 1^\circ \approx 0,02.$$

Таким образом, значение $\operatorname{tg}^2 \theta$ не превышает 0,0004, т. е. весьма мало по сравнению с единицей. Этими величинами и можно пренебречь без ощутимой для практических целей ошибки. Тогда получим упрощенное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\boxed{\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)},} \quad (10.44)$$

в котором величина изгибающего момента $M(x)$ вычисляется для недеформированной балки. В дальнейшем уравнение (10.44) будем называть *основным дифференциальным уравнением упругой линии* (для малых деформаций). С его помощью можно вычислять перемещения в балках при любых условиях нагружения.

Решая задачу аналитическим методом, углы поворота $\theta(x)$ и прогибы $w(x)$ вычисляют последовательным интегрированием ос-

нового дифференциального уравнения (10.44). Проинтегрировав уравнение первый раз, получим выражение для угла поворота $\Theta(x)$:

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C, \quad (10.45)$$

содержащее одну произвольную постоянную C . Интегрируя второй раз, находим выражение для прогиба $w(x)$:

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + Cx + D, \quad (10.46)$$

содержащее две произвольные постоянные C и D . Значения постоянных C и D определяют из условий закрепления балки следующим образом:

а) если балка имеет на конце заделку (рис. 276), то прогиб и угол поворота в ней равны нулю:

$$w_B = 0; \quad \Theta_B = 0; \quad (10.47)$$

б) для балки на двух шарнирных опорах (см. рис. 273) равны нулю прогибы на этих опорах:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0. \quad (10.48)$$

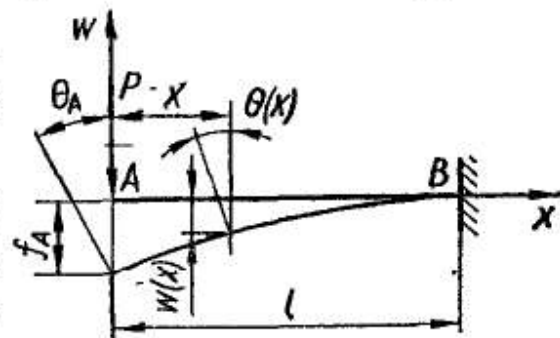


Рис. 276

Заметим, что уравнение упругой линии иногда удобно записать в иной форме, считая заданным не момент $M(x)$, а нагрузку $q(x)$. Вспомнив, что $\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$, и продифференцировав уравнение (10.44) два раза, получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] = q(x). \quad (10.49)$$

Уравнение упругой линии в форме (10.49) применяют при расчете балок на упругом основании и при рассмотрении колебаний балок.

§ 67. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Рассмотрим несколько примеров определения деформаций балок методом непосредственного интегрирования основного дифференциального уравнения (10.44), а затем установим правила построения эпюр углов поворота и прогибов, которые необходимы при исследовании деформированного состояния балок при сложной системе нагрузок.

Определим Θ_{\max} и w_{\max} для консоли постоянного поперечного сечения с сосредоточенной силой P на свободном конце (рис. 276).

Изгибающий момент в сечении x будем вычислять как результат действия внешних сил, расположенных слева от сечения:

$$M(x) = -Px.$$

Подставляя выражение для $M(x)$ в уравнение (10.44), получаем

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ}.$$

Интегрируем дважды:

$$\Theta(x) = -\frac{Px^2}{2EJ} + C;$$

$$w(x) = -\frac{Px^3}{6EJ} + Cx + D.$$

Для определения постоянных C и D имеем граничные условия:

1) при $x = l$ $w = 0$;

2) при $x = l$ $\Theta = 0$.

Из второго условия

$$\Theta(l) = -\frac{Pl^2}{2EJ} + C = 0,$$

откуда

$$C = \frac{Pl^2}{2EJ}. \quad (10.50)$$

Тогда

$$w(x) = -\frac{Px^3}{6EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ}x + D.$$

Из первого условия

$$w(l) = -\frac{Pl^3}{6EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ}l + D = 0,$$

откуда

$$D = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (10.51)$$

Окончательные уравнения прогиба и угла поворота следующие:

$$w(x) = -\frac{P}{6EJ} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]; \quad (10.52)$$

$$\Theta(x) = -\frac{P}{2EJ} (x^2 - l^2) = \frac{Pl^2}{2EJ} \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]. \quad (10.53)$$

Упругая линия балки (10.52) представляет собой параболу третьей степени.

Теперь можно определить w_{\max} и Θ_{\max} . Как легко убедиться, w_{\max} и Θ_{\max} имеют место на свободном конце балки в точке A (при $x = 0$). Следовательно,

$$\boxed{w_{\max} = f_A = -\frac{Pl^3}{3EJ};} \quad (10.54)$$

$$\boxed{\Theta_{\max} = \Theta_A = \frac{Pl^2}{2EJ}.} \quad (10.55)$$

Отрицательное значение f_A показывает, что прогиб происходит в направлении, противоположном направлению оси w (т. е. вниз). Положительный угол поворота Θ_A показывает, что поворот сечения происходит против часовой стрелки.

Сравнивая выражения (10.50), (10.51) для произвольных постоянных с выражениями (10.55), (10.54) для $\Theta(0)$ и $w(0)$, убеждаемся, что C равно углу поворота на свободном конце консоли (при $x = 0$), а D равно прогибу свободного конца консоли (при $x = 0$).

Построим эпюры прогибов и углов поворота для простой балки постоянного сечения (рис. 277), несущей сплошную равномерную распределенную нагрузку q .

Опорные реакции

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Составляем дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right).$$

Интегрируя его дважды, получаем

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{ql}{4EJ}x^2 - \frac{q}{6EJ}x^3 + C; \quad (10.56)$$

$$w(x) = \frac{ql}{12EJ}x^3 - \frac{q}{24EJ}x^4 + Cx + D. \quad (10.57)$$

Граничные условия следующие:

1) на левом конце прогиб равен нулю, т. е. при $x = 0$ $w = 0$;

2) на правом конце прогиб равен нулю, т. е. при $x = l$ $w = 0$.

Первое условие дает $w(0) = D = 0$. (10.58)

Второе условие дает

$$w(l) = \frac{ql^4}{12EJ} - \frac{ql^4}{24EJ} + Cl = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{ql^3}{24EJ}. \quad (10.59)$$

Подставив вычисленные значения произвольных постоянных в уравнения (10.56) и (10.57), получим уравнение изогнутой оси:

$$w(x) = \frac{qlx^3}{12EJ} - \frac{qx^4}{24EJ} - \frac{ql^3x}{24EJ} = -\frac{ql^3x}{24EJ} \left[1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (10.60)$$

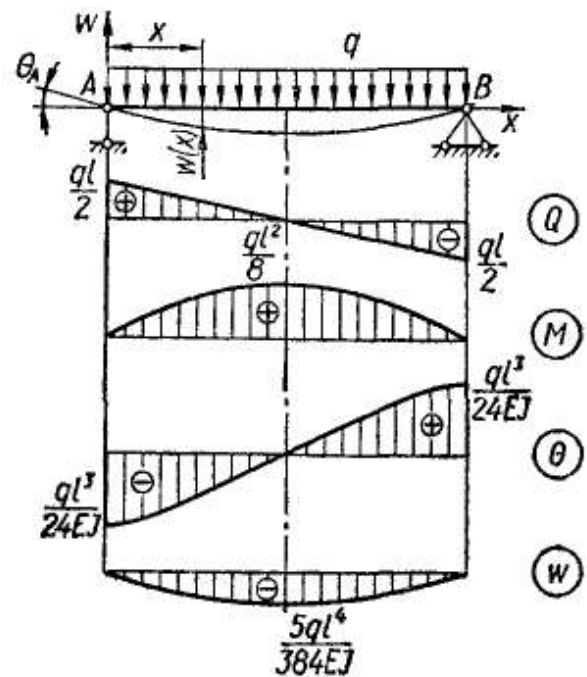


Рис. 277

и уравнение углов поворота:

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= \frac{d\omega}{dx} = \frac{qlx^2}{4EJ} - \frac{qx^3}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = \\ &= -\frac{ql^3}{24EJ} \left[1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right].\end{aligned}\quad (10.61)$$

Для построения эпюр $\Theta(x)$ и $\omega(x)$ вычислим углы поворота по концам балки, а также прогиб посередине пролета $\omega\left(\frac{l}{2}\right) = f$. Углы поворота на опорах найдем из уравнения (10.61). При $x = 0$ получим величину угла поворота на левой опоре:

$$\Theta_A = \Theta(0) = -\frac{ql^3}{24EJ}.\quad (10.62)$$

На правой опоре, т. е. при $x = l$,

$$\Theta(l) = \Theta_B = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Сравнивая значения произвольных постоянных C и D с выражениями для $\Theta(0)$ и $\omega(0)$, вновь убеждаемся, что они соответственно равны углу поворота и прогибу на той опоре, где находится начало координат:

$$C = \Theta(0) = -\frac{ql^3}{24EJ}; \quad D = \omega(0) = 0.$$

Отметим, что таким будет геометрический смысл произвольных постоянных на участке, примыкающем к началу координат, для любой балки при произвольной нагрузке.

Подставив в уравнение (10.60) $x = \frac{l}{2}$, вычислим величину прогиба:

$$f = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.\quad (10.63)$$

Из уравнения (10.60) упругой линии заключаем, что балка изгибается по кривой, являющейся параболой четвертого порядка. Так как изгибающий момент на всем протяжении балки положителен, то, значит, всюду сжаты верхние волокна и, следовательно, балка изгибается выпуклостью вниз.

Вычислив величины прогибов в различных сечениях, откладываем их в определенном масштабе вниз от базисной линии. Соединив концевые точки отложенных отрезков кривой, получаем эпюру прогибов ω . Эпюра прогибов в принятом масштабе изображает изогнутую ось рассматриваемой балки.

Для построения эпюры Θ отложим вычисленные значения Θ_A и Θ_B от базисной линии вниз и вверх соответственно. Из условия симметрии балки и нагрузки заключаем, что сечение на оси симметрии (т. е. при $x = \frac{l}{2}$) не поворачивается. Значит,

$$\Theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

В соответствии с уравнением (10.61) эпюра углов поворота должна быть очерчена параболой третьего порядка. Строим эпюру по точкам (рис. 277), вычислив промежуточные ординаты:

$$\Theta\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ};$$

$$\Theta\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{9}{384} \frac{ql^3}{EJ}.$$

При этом параболическая кривая на левой половине балки обращена вогнутостью вверх, а на правой — вниз.

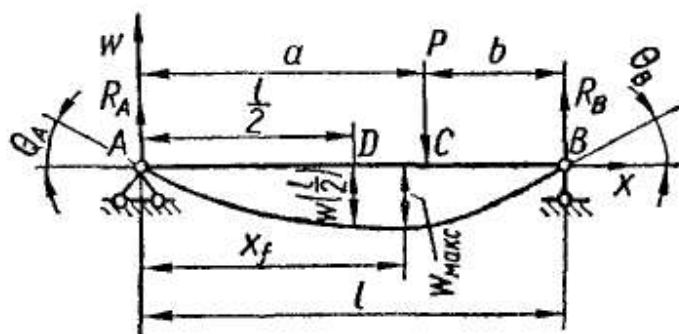


Рис. 278

Рассмотрим еще один случай определения перемещений. Для простой балки постоянного поперечного сечения, нагруженной силой P в точке C (рис. 278), необходимо:

- найти уравнения упругой линии и углов поворота;
- вычислить прогибы в точке C и посередине пролета, а также определить положение и величину стрелы прогиба f ;
- вычислить углы поворота сечений в точках A , B и C ;
- построить эпюры Q , M , Θ и w , приняв $P = 18$ тс, $l = 6$ м, $a = 2,2$ м, $J_2 = 46\,470$ см⁴, $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см².

Предоставим читателю возможность самостоятельно решить этот пример. Укажем лишь, что на каждом из участков балки при интегрировании дифференциальных уравнений упругой линии будут получены по две произвольные постоянные: C_1, D_1 и C_2, D_2 . Для их определения к двум опорным условиям балки

$$w(0) = 0; \quad w(l) = 0$$

должны быть добавлены условия плавного и непрерывного сопряжения участков AC и CB в точке C при $x = a$:

$$\Theta(a)_{\text{лев}} = \Theta(a)_{\text{прав}}; \quad w(a)_{\text{лев}} = w(a)_{\text{прав}}.$$

Эти дополнительные условия выражают отсутствие разрыва и отсутствие излома упругой линии балки под силой P .

Для самоконтроля приводим окончательные уравнения прогибов и углов поворота:

для участка AC

$$w(x) = -\frac{Pbx}{6EJl} (a^2 + 2ab - x^2); \quad (10.64)$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pb}{6EJl} (a^2 + 2ab - 3x^2); \quad (10.65)$$

для участка BC

$$w(x) = -\frac{Pa}{6EJl} [-a^2l + (a^2 + 2l^2)x + x^3 - 3lx^2]; \quad (10.66)$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pa}{6EJl} (a^2 + 2l^2 - 6lx + 3x^2). \quad (10.67)$$

Эпюры Q , M , Θ , w изображены на рис. 279.

Воспользуемся результатами этого примера для того, чтобы определить абсциссы сечений с наибольшим прогибом и величины f при различных положениях груза P на балке. Наибольший прогиб будет иметь место в сечении x_f , где

$$\Theta(x_f) = \frac{dw}{dx} = 0. \quad (10.68)$$

При $a > b$ это сечение находится на участке AC .

Приравняв к нулю уравнение (10.65), получим

$$x_f = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \quad (10.69)$$

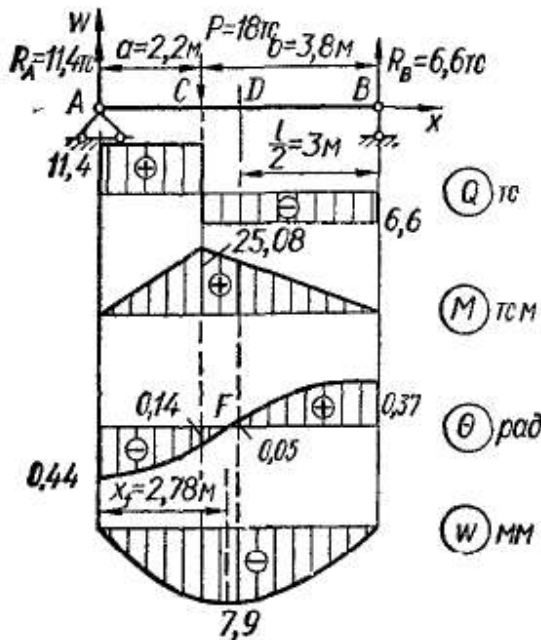


Рис. 279

Исследуем, как будет меняться абсцисса сечения с наибольшим прогибом при перемещении силы P от середины балки к правой опоре. При $b \rightarrow 0$ абсцисса $x_f = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$.

Значит даже в предельном случае, когда груз P подойдет к опоре B , точка F с наибольшим прогибом будет находиться от середины балки на расстоянии всего

$$t = 0,577l - 0,5l = 0,077l = \frac{l}{13}.$$

Заметим, что на таком же расстоянии от середины пролета находится наибольший прогиб и в случае, когда балка на двух опорах нагружена моментом, действующим над одной из опор (см. рис. 62).

Подставив выражение (10.69) в уравнение (10.64) для упругой линии на участке AC , получим формулу для $w_{\max} = f$:

$$f = -\frac{Pb}{6EJl} \left(a^2 + 2ab - \frac{a^2 + 2ab}{3} \right) \sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{3}} = \frac{P}{9\sqrt{3}EJ} \frac{b(a^2 + 2ab)^{3/2}}{a+b} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EJ} \frac{(l^2 - b^2)^{3/2}}{l}. \quad (10.70)$$

Прогиб посередине пролета найдем из уравнения (10.64), подставив $x = \frac{l}{2}$:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pb}{12EJ} \left(a^2 + 2ab - \frac{l^2}{4} \right). \quad (10.71)$$

Анализ формул (10.69) и (10.64) показывает, что даже при $b \rightarrow 0$ разница между прогибом посередине балки и максимальным прогибом не превышает 3%. Следовательно, прогиб балки посередине пролета $w\left(\frac{l}{2}\right) = f\left(\frac{l}{2}\right)$ приблизительно равен наибольшему прогибу f . Это заключение применимо при действии на балку любых нагрузок, вызывающих изгиб в одну сторону.

Во многих случаях построение эпюр ω и Θ возможно и без составления аналитических выражений для прогибов и углов поворота по участкам: достаточно лишь вычислить прогибы и углы поворота для некоторых характерных сечений. При построении же эпюр следует пользоваться правилами, которые могут быть получены на основе анализа дифференциальных зависимостей, существующих между ω , Θ , M и Q . Запишем эти зависимости в удобной для анализа форме.

Из уравнения (10.44) с учетом выражения (10.40) находим, что

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (10.72)$$

Продифференцировав уравнение (10.72) по x и учтя зависимость $\frac{dM}{dx} = Q$, получим

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}. \quad (10.73)$$

Таким образом, имеем две группы дифференциальных зависимостей:

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}; \quad \frac{d\omega}{dx} = \Theta(x); \quad (10.74)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}; \quad \frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (10.75)$$

аналогичных зависимостям, на основании которых были получены правила для построения эпюр Q и M (§ 21).

Выражения (10.74), (10.75), а также сопоставление построенных эпюр позволяют установить общие для любых балок зависимости между эпюрами ω , Θ , Q и M , которые будут в дальнейшем служить правилами построения эпюр. Укажем наиболее важные из этих правил:

1. Так как $M(x)$ представляет собой диаграмму производной эпюры углов поворота Θ , то ординаты эпюры M пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре Θ . В сечениях, где $M(x) = 0$, касательная к кривой $\Theta = F(x)$ должна быть параллельна оси абсцисс (рис. 277 и 279, сечения A и B). Скачку на эпюре моментов соответствует угловая точка на эпюре Θ (рис. 283, сечение C ; рис. 286, сечение D).

2. Если изгибающий момент равен нулю на протяжении какого-либо участка балки, то на этом участке эпюра Θ прямоугольна, а эпюра ω прямолинейна, но, вообще говоря, наклонна (рис. 286, участок DE).

3. На участках, где действует постоянный момент (на участках, находящихся в условиях чистого изгиба), эпюра Θ прямолинейна и наклонна, а эпюра ω — параболическая (рис. 286, участок BD).

Здесь обнаруживается противоречие с изложенным выше утверждением, что при чистом изгибе кривизна постоянна ($k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \text{const}$) и балка изгибается по дуге окружности. Причина

этого кроется в приближенности дифференциального уравнения упругой линии, которым мы пользуемся для вывода уравнения (10.72). Строго говоря, при чистом изгибе балка изгибается по дуге окружности, которая в пределах малых деформаций с весьма большой точностью может быть представлена квадратичной параболой.

4. Вторая производная прогиба

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

имеет знак момента. Если момент положителен (сжаты верхние волокна), то вогнутость на эпюре w будет обращена в сторону положительных w (вверх). При отрицательном моменте вогнутость параболы обращена вниз. Так как ординаты эпюр изгибающих моментов мы условились откладывать со стороны сжатых волокон (§ 20), то вогнутость эпюры прогибов w всегда обращена в ту сторону, с которой расположены ординаты эпюры изгибающих моментов. В сечении, где действует сосредоточенный момент M , имеем точку перегиба упругой линии (рис. 283, точка C).

5. Вторая производная угла поворота

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}$$

имеет знак поперечной силы. Если Q положительна, то выпуклость на эпюре θ будет обращена вниз (рис. 279, участок AC ; рис. 286, участки AC и CB). При $Q < 0$ выпуклость направлена в сторону оси w , т. е. вверх (рис. 279, участок CB). В сечении, где Q меняет знак, на эпюре θ имеем точку перегиба (рис. 279, сечение C).

6. На тех участках балки, где эпюра M изменяется по линейному закону (участки AC и CB , рис. 279), эпюра θ будет квадратичной параболой, а эпюра w — параболой третьего порядка.

7. Так как θ представляет собой график изменения по длине балки тангенсов углов наклона касательных к упругой линии, то можно утверждать следующее:

а) на участках, где в направлении оси x прогиб w возрастает, угол наклона θ положителен (рис. 279, участок FB), при уменьшении w углы наклона θ отрицательны (рис. 279 и 286, участки AC);

б) в сечениях, где $\theta = 0$, касательная к эпюре w горизонтальна, т. е. здесь на эпюре w получается аналитический максимум или минимум (рис. 279, сечение F).

8. В тех сечениях, где на балке расположены промежуточные шарниры (рис. 286, сечение C), на эпюре углов поворота будут скачки. На эпюре w в этих сечениях получаются переломы, т. е. угловые точки, в которых скачкообразно изменяется угол наклона касательной к эпюре w .

Перечисленные особенности эпюр позволяют по самому их виду установить, не допущены ли принципиальные ошибки при построении. Несколько примеров построения эпюр рассмотрено в следующем параграфе. В дальнейшем всегда будем пользоваться этими общими правилами.

§ 68. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПО МЕТОДУ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии в случае балок с большим количеством участков сопряжено со значительными трудностями. Эти затруднения заключаются не в интегрировании дифференциальных уравнений, а в технике определения произвольных постоянных интегрирования — составлении и решении систем линейных алгебраических уравнений. Так, если балка по условиям нагружения разбивается на n участков, то интегрирование дифференциальных уравнений для всех участков балки дает $2n$ произвольных постоянных. Добавив к двум основным опорным условиям балки $2(n - 1)$ условий непрерывного и плавного сопряжения всех участков упругой линии, можно составить $2n$ уравнений для определения этих постоянных.

Задача становится очень трудоемкой уже при $n = 3$. Для уменьшения большой вычислительной работы, связанной с определением произвольных постоянных интегрирования, в настоящее время разработан ряд методов. К ним относится и метод начальных параметров, позволяющий при любом числе участков свести решение к отысканию всего двух постоянных — прогиба и угла поворота в начале координат.

Вывод общих уравнений и примеры их применения. Рассмотрим некоторую часть балки длиной l_1 (рис. 280, а), проведя сечения в точках K и L . На рис. 280, б изображен этот отрезок, нагруженный следующими наиболее часто встречающимися нагрузками:

- а) сосредоточенным моментом M в сечении с абсциссой a ;
- б) сосредоточенной силой P в сечении с абсциссой b ;
- в) нагрузкой, распределенной по закону трапеции от сечения с абсциссой c до сечения с абсциссой d , интенсивностью

$$q(x) = q_c + k(x - c),$$

где k — тангенс угла наклона β касательной к эпюре нагрузки (рис. 280, а):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c} = k;$$

г) кроме того, по концам рассматриваемой части балки приложены поперечные силы и изгибающие моменты, заменяющие действие мысленно отброшенных частей балки.

При выводе уравнений направления всех нагрузок выберем такими, чтобы они вызывали положительные изгибающие моменты. Заметим также, что на рассматриваемом отрезке может быть несколько сосредоточенных моментов и сосредоточенных сил, а также несколько участков распределенной нагрузки. Мы показали на балке по одному из перечисленных силовых факторов лишь с целью упростить дальнейшие выкладки.

Чтобы резко сократить число неизвестных произвольных постоянных, сведя решение к определению только двух постоянных интегрирования, необходимо обеспечить равенство соответствующих постоянных на всех участках балки. Это равенство может быть только тогда, когда в уравнениях моментов, углов поворота и прогибов при переходе от участка к участку повторяются все члены

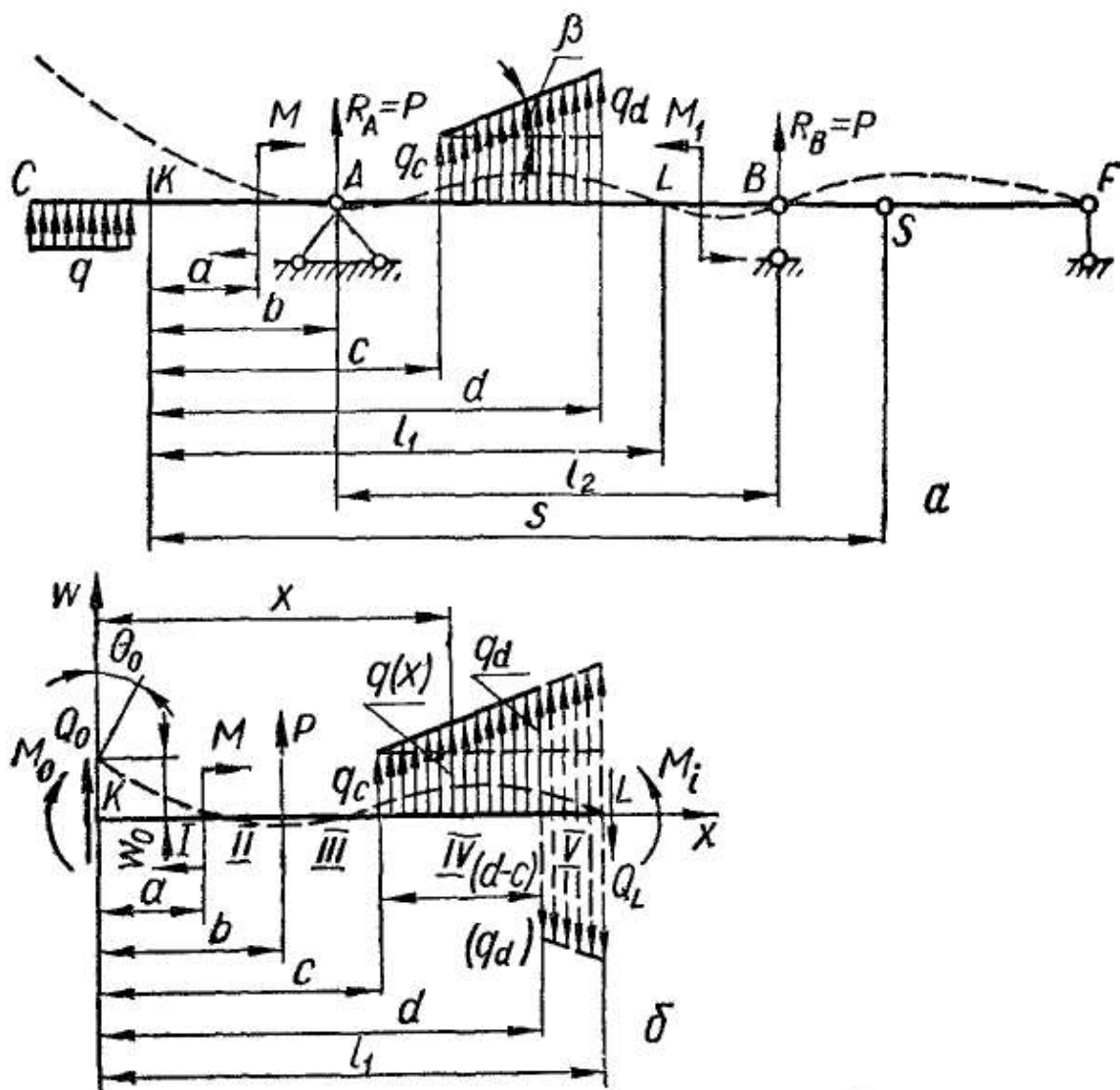


Рис. 280

предыдущего участка, а вновь появляющиеся слагаемые обращаются в нуль на левых границах своих участков. Для обеспечения этих условий при составлении дифференциальных уравнений упругой линии и их интегрирования должны соблюдаться следующие правила:

1. Начало координат необходимо выбирать в крайней левой точке рассматриваемой балки и делать его общим для всех участков.

2. Выражение для изгибающего момента $M(x)$ составлять, вычисляя моменты сил, расположенных слева от рассматриваемого сечения.

3. При включении в уравнения внешнего сосредоточенного момента M его нужно умножать на множитель $(x - a)^0$, равный единице. Здесь a — абсцисса точки, где приложен момент M

4. В случае обрыва распределенной нагрузки (например, в сечении $x = d$, рис. 280, б) ее продлевают до конца рассматриваемого сечения, а для восстановления действительных грузовых условий вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления. «Дополнительную» и «компенсирующую» нагрузки будем показывать на чертежах штриховыми линиями.

5. Интегрировать уравнения на всех участках следует, не раскрывая скобок.

Итак, выбрав начало координат в крайней левой точке рассматриваемого отрезка балки (в точке K), составим выражение для изгибающего момента $M(x)$ в произвольном сечении крайнего правого (V) участка с соблюдением пунктов 2—4 указанных правил. При этом условимся разбивать трапецеидальную нагрузку на треугольную и равномерно распределенную. Изгибающий момент запишется так:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c \frac{(x-c)^2}{2} - \\ - q_d \frac{(x-d)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6} - k \frac{(x-d)^3}{6}. \quad (10.76)$$

Рассматривая чертеж балки (рис. 280, б), легко убеждаемся в том, что выражение для изгибающего момента на IV участке легко получить из уравнения (10.76), вычеркивая члены, учитывающие нагрузку, появляющуюся лишь на V участке.

Действительно, выражение для изгибающего момента на IV участке имеет вид

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x-a)^0 + P(x-b) + \\ + q_c \frac{(x-c)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6}. \quad (10.77)$$

Полезно запомнить, что выражения $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ..., $(x-j)$ могут быть только положительными величинами. Если окажется, что $(x-j) < 0$, то это означает, что соответствующая нагрузка расположена справа от рассматриваемого сечения и такое слагаемое должно быть вычеркнуто из уравнения.

Изгибающий момент M_0 и поперечная сила Q_0 , действующие в сечении, совпадающем с началом координат, называют *статическими начальными параметрами*.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии на участке V :

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 + Q_0x + M(x-a)^0 + P(x-b) + \\ + q_c \frac{(x-c)^2}{2} - q_d \frac{(x-d)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6} - k \frac{(x-d)^3}{6} \right]. \quad (10.78)$$

Интегрируем обе части равенства, не раскрывая скобок. Тогда получаем

$$\Theta(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + \right. \\ \left. + q_c \frac{(x-c)^3}{6} - q_d \frac{(x-d)^3}{6} + k \frac{(x-c)^4}{24} - k \frac{(x-d)^4}{24} + C_V \right]. \quad (10.79)$$

Интегрируя вторично, находим

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + \right. \\ \left. + q_c \frac{(x-c)^4}{24} - q_d \frac{(x-d)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} - k \frac{(x-d)^5}{120} + C_V x + D_V \right]. \quad (10.80)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии на *IV* участке запишется так:

$$\frac{d^2\omega(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + \right. \\ \left. + q_c \frac{(x-c)^2}{2} + k \frac{(x-c)^3}{6} \right]. \quad (10.81)$$

Проинтегрировав его дважды, получим

$$\Theta(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + \right. \\ \left. + P \frac{(x-b)^2}{2} + q_c \frac{(x-c)^3}{6} + k \frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV} \right]; \quad (10.82)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + \right. \\ \left. + q_c \frac{(x-c)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} + C_{IV} x + D_{IV} \right]. \quad (10.83)$$

Теперь можно показать, что соблюдение правил составления и интегрирования уравнений упругой линии обеспечило равенство произвольных постоянных на *IV* и *V* участках. Действительно, положив в выражениях (10.79) и (10.82) $x = d$, из условий плавного сопряжения участков получим

$$\Theta(d)_{IV} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + \right. \\ \left. + q_c \frac{(d-c)^3}{6} + k \frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV} \right] = \Theta(d)_V = \frac{1}{EJ} \left[M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + \right. \\ \left. + M(d-a) + P \frac{(d-b)^2}{2} + q_c \frac{(d-c)^3}{6} - q_d \frac{(d-d)^3}{6} + \right. \\ \left. + k \frac{(d-c)^4}{24} - k \frac{(d-d)^4}{24} + C_V \right]. \quad (10.84)$$

Следовательно, $C_{IV} = C_V$.

Положив $x = d$ в уравнениях (10.80) и (10.83), из условия непрерывного сопряжения участков $\omega(d)_{IV} = \omega(d)_V$ найдем, что и

$$D_{IV} = D_V.$$

Выполнив аналогичные операции для остальных участков, заключаем, что соответствующие произвольные постоянные равны на всех участках рассматриваемого отрезка балки:

$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V = C; \quad (10.85)$$

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V = D. \quad (10.86)$$

Геометрический смысл этих двух постоянных интегрирования установим, рассматривая уравнения углов поворота и прогибов на первом участке. Вычеркивая в уравнениях (10.79) и (10.80) слагаемые, учитывающие нагрузки, приложенные на $II-V$ участках, получим уравнения для первого участка:

$$\Theta(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + C \right]; \quad (10.87)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + Cx + D \right]. \quad (10.88)$$

Подставив в эти уравнения $x = 0$, найдем:

$$\Theta(0) = \Theta_0 = C/EJ; \quad (10.89)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = D/EJ. \quad (10.90)$$

Следовательно, произвольные постоянные C и D равны соответственно углу поворота и прогибу в начале координат. Прогиб ω_0 и угол поворота Θ_0 являются начальными параметрами.

Подставив значения C и D в уравнение (10.80), получим общее выражение для прогиба в произвольном сечении балки:

$$\begin{aligned} \omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + \right. \\ \left. + P \frac{(x-b)^3}{6} + q_c \frac{(x-c)^4}{24} - q_d \frac{(x-d)^4}{24} + k \frac{(x-c)^5}{120} - \right. \\ \left. - k \frac{(x-d)^5}{120} \right]. \end{aligned} \quad (10.91)$$

Для случая нескольких моментов и сил, а также нескольких участков распределенной нагрузки уравнение записывают в следующей форме:

$$\begin{aligned} \omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \right. \\ \left. + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \right. \\ \left. + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \right]. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Уравнение (10.92) обычно называют *универсальным уравнением упругой линии*. При этом имеют в виду, что это уравнение применимо для любых расчетных схем балок.

Дифференцируя уравнение (10.92), получаем уравнение углов поворота сечений:

$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x}{1!} + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_0 \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum k \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(x-d)^4}{4!} \right]. \quad (10.93)$$

В уравнения (10.92) и (10.93) подставляют только те нагрузки, которые расположены слева от рассматриваемого сечения. Знаки слагаемых определяются знаком соответствующих силовых факторов.

Таким образом, определение перемещений по методу начальных параметров сводится в первую очередь к определению величин начальных параметров Q_0 , M_0 , Θ_0 , w_0 . Статические начальные параметры Q_0 и M_0 находят из условий равновесия балки. Геометрические начальные параметры Θ_0 и w_0 определяют из условий на опорах. Уравнения (10.92) и (10.93), выведенные для произвольного

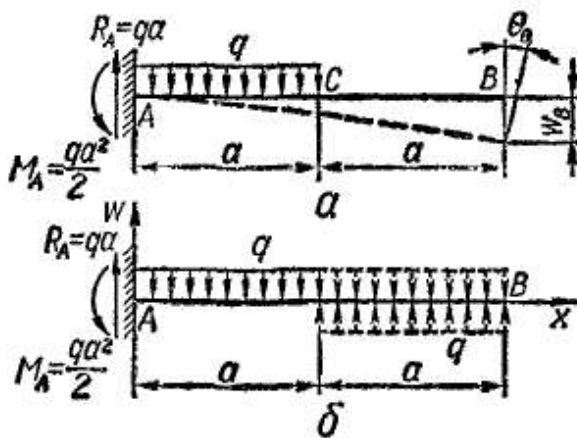


Рис. 281

отрезка балки, пригодны и для всей балки в целом. Начало координат, как правило, будем выбирать в крайней левой точке балки.

Рассмотрим примеры определения перемещений в балках по методу начальных параметров.

В консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой на половине длины (рис. 281, а), определим прогибы в сечениях балки с абсциссами $x = a$ и $x = 2a$.

Запишем уравнение упругой линии для правого участка балки. Так как распределенная нагрузка обрывается в точке С, продлим ее до конца балки, одновременно вводя компенсирующую нагрузку такой же интенсивности (рис. 281, б). Уравнение упругой линии в общем случае будет иметь вид

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + q \frac{(x-a)^4}{4!} \right]. \quad (10.94)$$

Из условий равновесия балки определяем статические начальные параметры:

$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2}; \quad Q_0 = R_A = qa. \quad (10.95)$$

Так как начало координат совпадает с заделкой, то геометрические начальные параметры — прогиб и угол поворота в начале координат — равны нулю:

$$\omega_0 = 0; \quad \Theta_0 = 0. \quad (10.96)$$

Подставив в уравнение (10.94) найденные значения начальных параметров, получим уравнение упругой линии в окончательном виде:

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{qa^2}{2} \frac{x^2}{2!} + qa \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + q \frac{(x-a)^4}{4!} \right]. \quad (10.97)$$

Положив в выражении (10.97) $x = 2a$, получим формулу для прогиба свободного конца консоли:

$$\omega_B = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Положив в выражении (10.97) $x = a$, получим формулу для прогиба в точке C :

$$\omega_C = -\frac{qa^4}{8EJ}. \quad (10.98)$$

В балке, нагруженной, как показано на рис. 282, определим прогибы и углы поворота в точках C и D .

Запишем уравнение упругой линии для крайнего правого участка балки (участка BD , где $l \leq x \leq \frac{5}{4}l$), предварительно продлив распределенную нагрузку до конца балки и приложив компенсирующую нагрузку:

$$\omega(x) = \omega_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[-R_A \frac{x^3}{3!} + R_B \frac{(x-l)^3}{3!} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + q \frac{(x-l)^4}{4!} \right]. \quad (10.99)$$

Уравнение (10.99) записано с учетом того, что статические начальные параметры нам уже известны:

$$Q_0 = -R_A = -\frac{7}{8} ql; \quad M_0 = 0.$$

Для определения геометрических начальных параметров имеем опорные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad \omega(0) = \omega_A = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad \omega(l) = \omega_B = 0.$$

Из первого опорного условия следует, что

$$\omega_0 = \omega_A = 0.$$

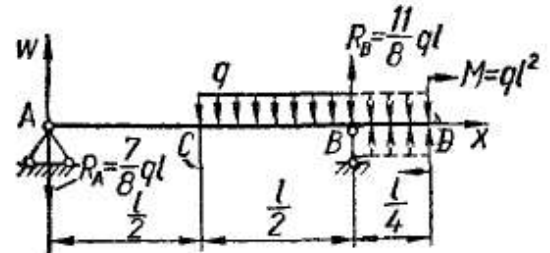


Рис. 282

Второе опорное условие дает

$$w(l) = \Theta_0 l + \frac{1}{EJ} \left[-\frac{7}{8} ql \frac{l^3}{6} - q \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \right] = 0,$$

откуда

$$\Theta_0 = \frac{57}{384} \frac{ql^3}{EJ}.$$

Теперь уравнение упругой линии для участка балки BD примет вид

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{57ql^3}{384} x - \frac{7}{8} ql \frac{x^3}{3!} + \frac{11}{8} ql \frac{(x-l)^3}{3!} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + q \frac{(x-l)^4}{4!} \right]. \quad (10.100)$$

Чтобы найти перемещение точки D , достаточно положить в этом уравнении $x = \frac{5}{4} l$. Тогда

$$w\left(\frac{5}{4} l\right) = \left[\frac{57}{384} \cdot \frac{5}{4} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{24} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right] \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{167}{1536} \frac{ql^4}{EJ} \approx -0,11 \frac{ql^4}{EJ},$$

т. е.

$$w_D = -0,11 \frac{ql^4}{EJ}. \quad (10.101)$$

Чтобы вычислить перемещение точки C , нужно записать уравнение упругой линии для того участка, где находится эта точка. Так как она лежит на границе I и II участков, запишем уравнение упругой линии для первого участка. С этой целью в уравнении (10.100) нужно вычеркнуть слагаемые, соответствующие нагрузкам, появляющимся лишь на II и III участках. Другими словами, в уравнение должен войти лишь один силовой фактор —

$$R_A = \frac{7}{8} ql.$$

Таким образом, уравнение упругой линии на первом участке имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{57}{384} ql^3 x - \frac{7}{8} ql \frac{x^3}{3!} \right]. \quad (10.102)$$

Положив здесь $x = \frac{l}{2}$, получим формулу для прогиба точки C :

$$w_C = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{43}{768} \frac{ql^4}{EJ} \approx 0,056 \frac{ql^4}{EJ}.$$

Чтобы вычислить угол поворота какого-либо сечения балки, необходимо иметь выражение для угла поворота на соответствующем участке балки. Уравнение углов поворота для участка BD получим дифференцированием уравнения (10.100):

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{57}{384} ql^3 - \frac{7}{8} ql \frac{x^2}{2l} + \frac{11}{8} ql \frac{(x-l)^2}{2l} - q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{3l} + \right. \\ \left. + q \frac{(x-l)^3}{3l} \right]. \quad (10.103)$$

Положив здесь $x = \frac{5}{4}l$, получим формулу для угла поворота сечения D :

$$\Theta_D = \Theta\left(\frac{5}{4}l\right) = \left[\frac{57}{384} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \frac{ql^3}{EJ} = -\frac{215}{384} \frac{ql^3}{EJ} = -0,56 \frac{ql^3}{EJ},$$

следовательно,

$$\Theta_D = -0,56 \frac{ql^3}{EJ}. \quad (10.104)$$

Уравнение углов поворота для первого участка (участка AC) получим дифференцированием уравнения (10.102):

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{57}{384} ql^3 - \frac{7}{8} ql \frac{x^2}{2l} \right]. \quad (10.105)$$

Отсюда при $x = \frac{l}{2}$ получаем формулу для угла поворота в сечении C :

$$\Theta_C = \Theta\left(\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{57}{384} - \frac{7}{8 \cdot 2 \cdot 2^2} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{15}{384} \frac{ql^3}{EJ} \approx 0,039 \frac{ql^3}{EJ}.$$

Расчет на жесткость при изгибе. Овладев методикой определения прогибов и углов поворота, можно перейти к проверке жесткости балок, а также к подбору размеров сечения балок из условия жесткости.

Обозначив абсолютное значение максимального прогиба балки через f , а допускаемую стрелу прогиба через $[f]$, получим условие жесткости балки:

$$f \leq [f]. \quad (10.106)$$

Допускаемые величины прогибов устанавливают на основании экспериментальных и эксплуатационных данных.

Пример 43. Для балки, нагруженной на расстоянии $a = 4$ м от левой опоры сосредоточенным моментом $M = 12$ тс · м (рис. 283), построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота сечений и прогибов, а также подобрать двутавровое сечение из условий прочности и жесткости; $[\sigma] = 1600$ кгс/см²;

$$[f] = \frac{1}{600} l; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2.$$

Определив опорные реакции, строим эпюры поперечных сил и моментов.

Перемещения характерных сечений будем определять в соответствии с рекомендованным выше порядком решения. Записываем уравнение прогибов для участка CB :

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - M \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = \\ &= w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\frac{x^3}{3} - 6(x-4)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Начало координат совмещено с левой опорой A , следовательно, $w_0 = w_A = 0$. В соответствии со вторым опорным условием $w(l) = w_B = 0$.

Из уравнения (10.107) при $l = 6$ м имеем

$$w(l) = \Theta_0 l + \frac{1}{EJ} \left[\frac{l^3}{3} - 6(l-4)^2 \right] = 0,$$

откуда

$$\Theta_0 = -\frac{8}{EJ}. \quad (10.108)$$

Подставив выражение (10.108) в уравнение (10.107), запишем уравнение упругой линии на участке CB в окончательном виде:

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[-8x + \frac{x^3}{3} - 6(x-4)^2 \right]. \quad (10.109)$$

Уравнение упругой линии на участке AC запишется так:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{EJ} \left(-8x + \frac{x^3}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{x}{3} (24 - x^2) \right]. \end{aligned} \quad (10.110)$$

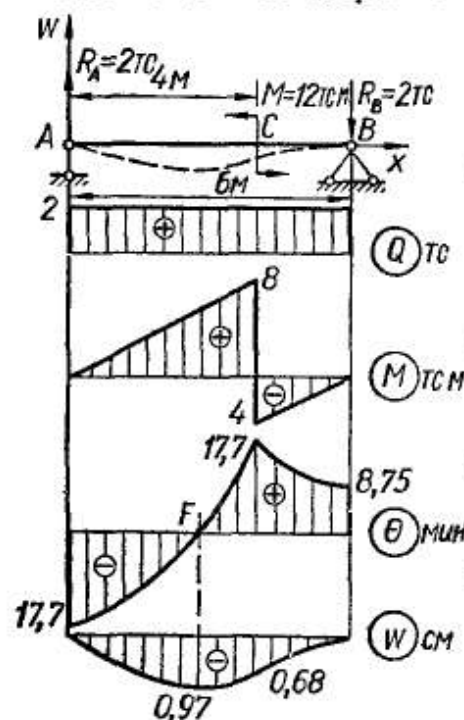


Рис. 283

Продифференцировав уравнение (10.109), получим уравнение углов поворота на участке балки CB :

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} [-8 + x^2 - 12(x-4)]. \quad (10.111)$$

Для построения эпюры Θ необходимо вычислить углы поворота на границах этого участка:

$$\Theta_C = \Theta(4) = \frac{-8 + 4^2}{EJ} = \frac{8}{EJ};$$

$$\Theta_B = \Theta(6) = \frac{1}{EJ} [-8 + 6^2 - 12(6-4)] = \frac{4}{EJ}.$$

Если E измеряется в кгс/см^2 , а J — в см^4 , то, чтобы получить угол поворота в радианах, необходимо правую часть умножить на 10^7 . Тогда

$$\Theta_C = \frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад}; \quad \Theta_B = \frac{4 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад}.$$

Дифференцируя уравнение (10.110), получаем уравнение углов поворота на участке AC :

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ} (-8 + x^2). \quad (10.112)$$

Углы поворота на границах этого участка уже известны. Таким образом, можно построить эпюру Θ^1 .

На границах участка откладываем ординаты

$$\Theta_A = \Theta_0 = -\frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад и } \Theta_C = \frac{8 \cdot 10^7}{EJ} \text{ рад.}$$

Вершины этих ординат в соответствии с уравнением (10.112) соединяем параболической кривой. Так как $Q > 0$, то парабола Θ должна быть обращена выпуклостью вниз (см. п. 5 на с. 280). В точке A касательная к эпюре должна быть параллельна оси абсцисс (см. п. 1). Аналогично проводим построение на участке CB .

Для построения эпюры прогибов вычислим наибольший прогиб. Он имеет место в сечении, где $\Theta(x) = 0$. Запишем это условие:

$$\Theta(x_f) = \frac{1}{EJ} (-8 + x_f^2) = 0,$$

откуда

$$x_f = 2,83 \text{ м.}$$

В этой точке прогиб имеет экстремальное значение $w_{\text{макс}} = f$. Вычислим величину стрелы прогиба, подставив в выражение (10.110) $x = x_f$:

$$f = -\frac{2,83}{3EJ} (24 - 2,83^2) \text{ м} = -\frac{0,943 \cdot 16}{EJ} \text{ м} = -\frac{15,09}{EJ} \text{ м.}$$

E и J измеряются в кгс/см^2 и см^4 соответственно. Поэтому, чтобы получить прогиб в сантиметрах, необходимо умножить правую часть на 10^9 :

$$f = -\frac{15,09}{EJ} 10^9 \text{ см.}$$

Для построения эпюры прогибов необходимо еще вычислить прогиб в точке C , являющейся точкой перегиба для эпюры прогибов (в этой точке на эпюре моментов меняется знак). Полагая в уравнении (10.110) $x = 4$ м, получим

$$w_C = w(4) = -\frac{4}{3} \frac{(24 - 4^2)}{EJ} = -\frac{32}{3EJ} \text{ м,}$$

или

$$w_C = -\frac{10,6}{EJ} 10^9 \text{ см.}$$

Откладываем вычисленную ординату вниз от базисной линии. В соответствии с уравнениями (10.109) и (10.110) эпюра прогибов должна быть очерчена на обоих участках кубическими параболой. На участке AC момент $M > 0$, поэтому парабола обращена здесь вогнутостью вверх; на участке CB момент $M < 0$ и парабола обращена вогнутостью вниз (п. 4).

Перейдем к подбору сечения балки из условия жесткости. Условие жесткости (10.106) принимает вид

$$f = \left| \frac{15,09}{EJ} 10^9 \right| \text{ см} \leq [f],$$

откуда

$$J \geq \frac{15,09}{[f]E} 10^9 \text{ см}^4.$$

При $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$ и допустимой стреле $[f] = \frac{l}{600} = 1 \text{ см}$ необходим момент инерции

$$J = \frac{15,09 \cdot 10^9}{1 \cdot 2 \cdot 10^6} \text{ см}^4 = 7545 \text{ см}^4.$$

¹ На эпюрах Θ и w отложены ординаты, полученные после окончательного расчета; $J = 7780 \text{ см}^4$.

По каталогу сортамента (приложение 1) находим, что нужен двутавр № 30а, момент инерции которого $J = 7780 \text{ см}^4$.

Необходимо проверить прочность выбранного двутавра № 30а, момент сопротивления которого $W = 518 \text{ см}^3$. Вычисляем наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{800\,000}{518} = 1545 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2.$$

Следовательно, прочность балки обеспечена.

Расчет балок с промежуточным шарниром. Полученные выше универсальные уравнения упругой линии и углов поворота были найдены из рассмотрения участка KL (рис. 280, б), на котором балка не имеет промежуточных шарниров, нарушающих плавность изогнутой оси. Поэтому, рассматривая всю балку в целом и оставляя общее для всех участков начало координат, применить эти уравнения к непосредственному определению перемещений на участке SF балки, расположенном правее шарнира S , нельзя. В этом случае определить перемещения можно, лишь рассматривая балку по частям (отдельно часть CS и отдельно — SF).

Можно, однако, показать способ обобщения уравнений метода начальных параметров и для случая балки с промежуточным шарниром (рис. 280). С этой целью, записав дифференциальные уравнения для участков BS и SF , проинтегрируем их дважды:

для участка BS

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_n; \quad (10.113)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_n x + D_n; \quad (10.114)$$

для участка SF

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{\text{пр}}; \quad (10.115)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{\text{пр}} x + D_{\text{пр}}. \quad (10.116)$$

Вследствие наличия шарнира углы поворота слева и справа от точки S будут отличаться на некоторый угол α . Для того чтобы установить связь между постоянными C_n , D_n и $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$, составим условия сопряжения участков в точке S :

$$w(s)_n = w(s)_{\text{пр}}; \quad (10.117)$$

$$\Theta(s)_n + \alpha = \Theta(s)_{\text{пр}}. \quad (10.118)$$

Подставляя в равенства (10.117) и (10.118) соответствующие значения $w(s)$ и $\Theta(s)$ из выражений (10.114), (10.116) и (10.113),

(10.115), при $x = s$ получим

$$C_n + \alpha = C_{np}; \quad (10.119)$$

$$C_n s + D_n = C_{np} s + D_{np}. \quad (10.120)$$

Из равенств (10.119) и (10.120) находим

$$D_{np} = -\alpha s + D_n. \quad (10.121)$$

Подставив равенства (10.119) и (10.121) в уравнения (10.115) и (10.116), сможем записать уравнения углов поворота и прогибов на участке SF в таком виде:

$$\Theta(x) = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_n + \alpha; \quad (10.122)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_n x + D_n + \alpha(x - s). \quad (10.123)$$

Так как было установлено, что левее шарнира S произвольные постоянные C и D на всех участках одинаковы и представляют собой соответственно угол поворота и прогиб в начале координат, заключаем, что для сечений правее шарнира в универсальное уравнение прогибов следует ввести дополнительный член $\alpha(x - s)$, а в уравнение углов поворота — член α . Итак, при наличии шарнира

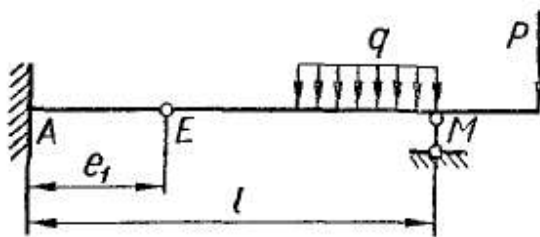


Рис. 284

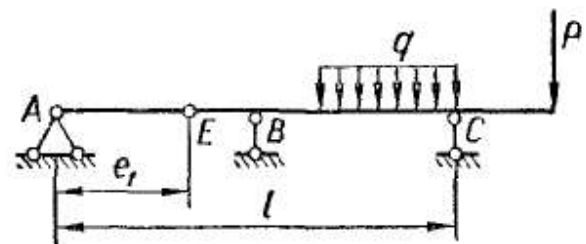


Рис. 285

слева от рассматриваемого участка уравнение (10.92) для этого участка принимает вид

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \alpha(x - s) + \frac{1}{EJ} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \right. \\ \left. + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \right. \\ \left. - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \right]. \quad (10.124)$$

Взаимный угол наклона α является дополнительной неизвестной величиной в универсальных уравнениях для $w(x)$ и $\Theta(x)$. Как и начальные параметры w_0 и Θ_0 , его определяют из опорных условий.

В зависимости от вида расчетной схемы балки возможны два основных варианта дополнительных опорных условий:

1. Условие равенства нулю прогиба на правой опоре (рис. 284). Отсюда определяют только угол α .

2. Условие равенства нулю прогиба на опорах B и C (рис. 285). Угол α здесь определяется совместно с Θ путем решения системы двух алгебраических уравнений.

Пример 44. Для балки (рис. 286) построить эпюры Q , M , Θ и w ; подобрать двутавровое сечение из условий прочности и жесткости, если $M = 16$ тс · м; $a = 2$ м; $[\sigma] = 1600$ кгс/см²; $[f] = 10$ мм.

Вычислив опорные реакции M_A , R_A и R_B , строим эпюры Q и M . Для построения эпюр Θ и w необходимо прежде всего вычислить их значения на границах всех участков.

Запишем универсальное уравнение упругой линии (10.124) для крайнего правого участка балки DE , учтя, что геометрические начальные параметры Θ_0 и w_0 равны нулю. Получим

$$w(x) = \alpha(x-a) + \frac{1}{EJ} \left[-M_0 \frac{x^2}{2!} + R_A \frac{x^3}{3!} - R_B \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \frac{\left(x - \frac{5}{2}a\right)^2}{2!} \right]. \quad (10.125)$$

Значение взаимного угла поворота сечений в шарнире C — (α_C) — найдем из условия равенства нулю прогиба в сечении над правой опорой B :

$$w_B = w(2a) = 0.$$

Уравнение для прогиба в сечении B получим из выражения (10.125), вычеркнув последнее слагаемое и положив $x = 2a$:

$$w_B = w(2a) = \alpha a + \frac{1}{EJ} \left[-M \frac{4a^2}{2} + \frac{M}{a} \frac{8a^3}{6} \right] = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{Ma}{EJ}. \quad (10.126)$$

Подставив выражение (10.126) в уравнение (10.125), получим окончательное уравнение упругой линии для участка балки DE :

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{3} Ma(x-a) - M \frac{x^2}{2!} + \frac{M}{a} \frac{x^3}{3!} - \frac{M}{a} \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \frac{(x-2,5a)^2}{2!} \right]. \quad (10.127)$$

Из уравнения (10.127) можно получить уравнения для всех остальных участков.

Уравнения углов поворота для всех участков получим дифференцированием уравнений упругой линии на соответствующих участках.

Предоставляем читателю возможность самостоятельно провести все указанные вычисления и построить эпюры Θ и w . Для самоконтроля на рис. 286 приведены эпюры прогибов и углов поворота,

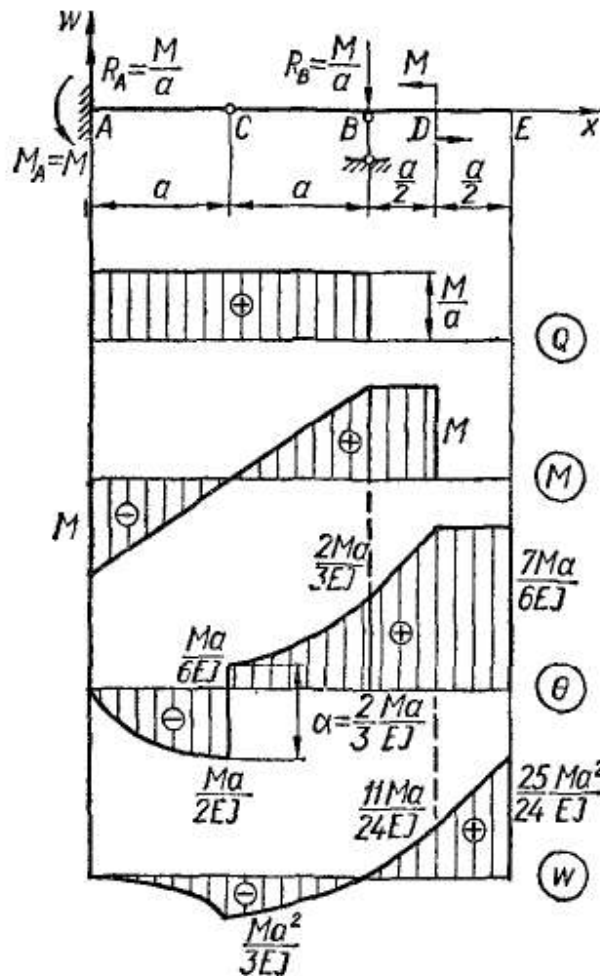


Рис. 286

Перейдем к подбору сечения балки. Наибольший изгибающий момент $M_{\text{макс}} = M = 16 \text{ тс} \cdot \text{м}$. Из условия прочности

$$W \geq \frac{M_{\text{макс}}}{[\sigma]} = \frac{1\,600\,000}{1600} \text{ см}^3 = 1000 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 45, для которого

$$W = 1231 \text{ см}^3; \quad J = 27\,696 \text{ см}^4.$$

Проверим, выполняется ли условие жесткости. Находим численное значение стрелы прогиба:

$$f = |w_E| = \frac{25}{24} \frac{Ma^2}{EJ} = \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 2^2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 \cdot 27\,696} \text{ см} \approx 1,20 \text{ см},$$

Условие жесткости (10.106) не удовлетворяется:

$$f = 1,20 \text{ см} > [f] = 1 \text{ см}.$$

Следовательно, размеры поперечного сечения балки необходимо увеличить, исходя из условия жесткости:

$$f = \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 J_z} \leq [f] = 1 \text{ см}. \quad (10.128)$$

Из выражения (10.128) находим, что

$$J_z \geq \frac{25}{24} \cdot \frac{16 \cdot 4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \text{ см}^4 \approx 33\,400 \text{ см}^4.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 50 ($J = 39\,727 \text{ см}^4$).

§ 69. РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

До сих пор мы рассматривали расчет на изгиб стержней, сечение которых оставалось постоянным по длине. Такие стержни, особенно при значительной их длине, нельзя считать рациональными с точки зрения веса и расхода материала, так как размеры сечения подбираются по усилиям, действующим в опасном сечении, в остальных же сечениях получается весьма значительный избыток прочности. Кроме того, по конструктивным соображениям стержни, работающие на изгиб, часто имеют конусность, отверстия, выточки, ступеньки и т. д. В силу указанных причин на практике широко распространены стержни непостоянного по длине сечения.

С точки зрения расчета на прочность и жесткость все такие стержни можно разделить на три основные группы:

а) стержни, имеющие местные изменения формы и размеров сечений (рис. 287, а);

б) стержни ступенчато-переменного сечения (рис. 287, б);

в) стержни, имеющие непрерывно изменяющиеся по длине размеры (иногда и форму) сечений (рис. 287, в).

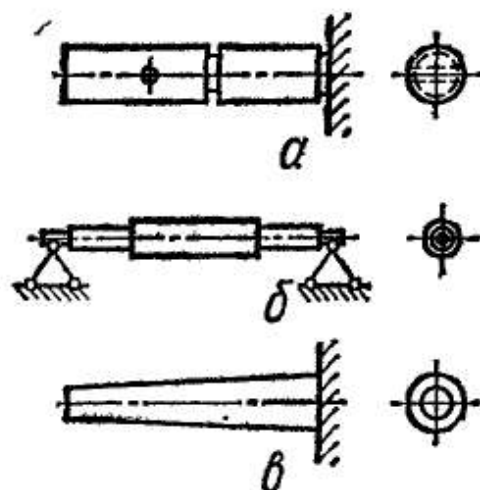


Рис. 287

Разумеется, есть много деталей, в которых сочетаются различные виды нарушения размеров и формы сечений. В этом случае при расчете на прочность и жесткость следует учитывать все особенности, присущие тому или иному виду нарушения формы и размеров. Перейдем к рассмотрению каждой группы в отдельности.

Местные изменения формы и размеров сечений. Отверстия, выточки и прочие нарушения формы и размеров сечений вызывают резкое и значительное изменение картины распределения напряжений и деформаций. Однако это возмущение носит местный характер и на напряженное и деформированное состояние стержня в целом влияет незначительно. Поэтому, определяя прогибы и углы поворота сечений, отверстия и прочие нарушения не учитывают. При расчете на прочность касательные напряжения не принимают во внимание, а основное условие прочности записывают для опасной точки, расположенной в одном из ослабленных сечений, так как здесь может иметь место концентрация напряжений (§ 65). В зависимости от чувствительности материала к концентрации условия прочности будут иметь различный вид, а именно: для высокопластичных материалов (малоуглеродистых сталей, меди, алюминия) и хрупких неоднородных материалов (чугунов) концентрацию можно не учитывать и условие прочности записывать в обычном виде:

$$\frac{M}{W} \leq [\sigma]; \quad (10.129)$$

для однородных хрупких материалов (высокопрочных закаленных сталей)

$$\alpha \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (10.130)$$

где α — теоретический коэффициент концентрации, определяемый по справочным таблицам (§ 65).

В обеих формулах W — это момент сопротивления ослабленного сечения.

Пример 45. Палец (неподвижная ось), изготовленный из легированной стали 20X ($\sigma_T = 60$ кгс/мм²), имеет размеры, указанные на рис. 288, а, и нагружен силой 400 кгс. Посредине пальца есть отверстие диаметром 3 мм для смазки. Требуется проверить прочность, если коэффициент запаса прочности $n_T = 1,6$, и найти прогиб посредине. Расчетная схема пальца и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 288, б.

Опасным будет ослабленное сечение, в котором действует $M = 400$ кгс · см. Опасной точкой, строго говоря, будет точка a (рис. 288, а), однако для расчета удобнее принять в качестве опасной условную точку b , что, очевидно, не внесет в расчет заметной погрешности.

Момент инерции ослабленного сечения

$$J = J_{бр} - J_{отв},$$

где

$$J_{бр} = \frac{\pi \cdot 1,5^4}{64} \left[1 - \left(\frac{0,8}{1,5} \right)^4 \right] \text{ см}^4 = 0,228 \text{ см}^4;$$

$$J_{отв} = 2 \left[\frac{0,3 \cdot 0,35^3}{12} + 0,3 \cdot 0,35 \cdot 0,575^2 \right] \text{ см}^4 = 0,072 \text{ см}^4,$$

причем $J_{отв}$ вычислено для двух прямоугольников размерами $0,3 \times 0,35$ см. Таким образом,

$$J = 0,228 - 0,072 \text{ см}^4 = 0,156 \text{ см}^4.$$

Тогда момент сопротивления для определения напряжений в точке b

$$W = \frac{J}{0,750} = \frac{0,156}{0,750} \text{ см}^3 = 0,208 \text{ см}^3.$$

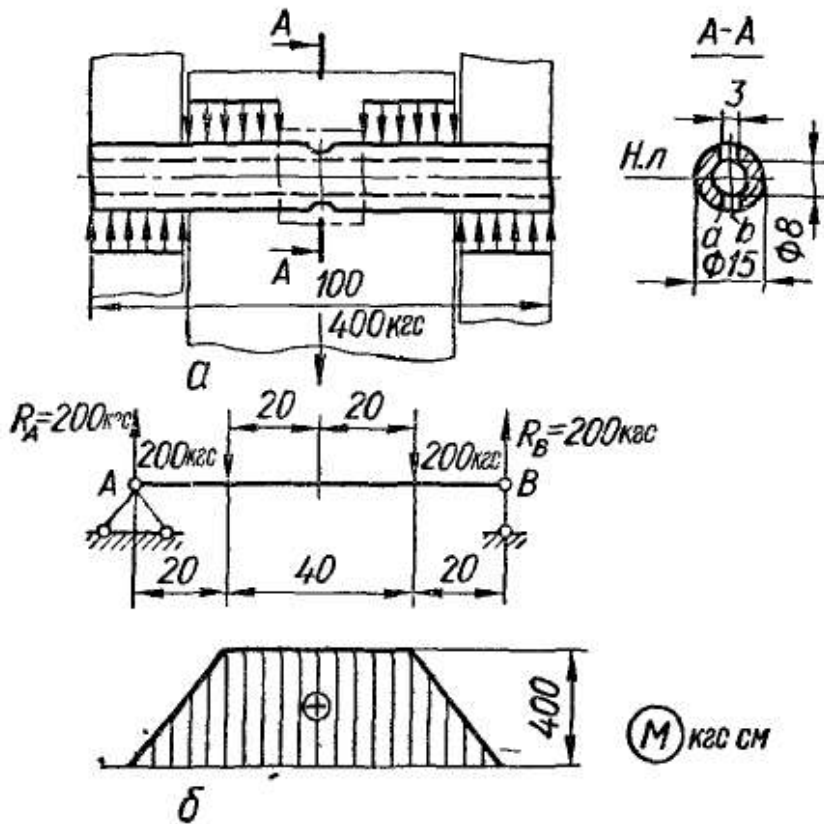


Рис. 288

При заданном запасе прочности допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r} = \frac{6000}{1,6} \text{ кгс/см}^2 = 3750 \text{ кгс/см}^2.$$

Вычислим номинальное напряжение в опасной точке b :

$$\sigma_n = \frac{M}{W} = \frac{400}{0,208} \text{ кгс/см}^2 = 1920 \text{ кгс/см}^2.$$

Так как рассматриваемая опасная точка находится возле конструктивного концентратора — отверстия для смазки, то наибольшее напряжение должно быть вычислено с учетом концентрации напряжений. Величину теоретического коэффициента концентрации α находим по графику рис. 269, где при $\frac{d}{D} = \frac{0,3}{1,5} = 0,2$ коэффициент $\alpha = 1,87$.

Вычислим максимальное напряжение и проведем проверку прочности:

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_n = 1,87 \cdot 1920 \text{ кгс/см}^2 = 3590 \text{ кгс/см}^2 < 3750 \text{ кгс/см}^2.$$

Следовательно, прочность обеспечена.

Переходим к определению прогиба. Пользуясь универсальным уравнением упругой линии (10.92), для крайнего правого участка получаем

$$w(x) = \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\frac{200x^3}{6} - \frac{200(x-2)^3}{6} - \frac{200(x-6)^3}{6} \right].$$

Из условия, что прогиб на правой опоре ($x = 8$ см) равен нулю, получаем уравнение для определения начального параметра:

$$\Theta_0 \cdot 8 + \frac{1}{EJ} \frac{200}{6} (8^3 - 6^3 - 2^3) = 0,$$

отсюда

$$\Theta_0 = -\frac{1200}{EJ}.$$

Теперь для определения прогиба посередине пролета получаем выражение

$$w(4) = f = \Theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \frac{200}{6} (4^3 - 2^3),$$

откуда при $E = 2,0 \cdot 10^6$ кгс/см² и $J = J_{бр} = 0,228$ см⁴ найдем, что

$$f = \frac{-1200 \cdot 4 + 1867}{0,228 \cdot 2,0 \cdot 10^6} \text{ см} = -\frac{2933}{0,228 \cdot 2} 10^{-6} \text{ см} = -6,44 \cdot 10^{-3} \text{ см} = \\ = -0,0064 \text{ см},$$

т. е.

$$f = 0,064 \text{ мм} \quad \text{и} \quad \frac{f}{l} = \frac{0,064}{80} = \frac{1}{1250}.$$

Ступенчатые стержни. В местах сопряжения участков с различными размерами сечений возникает концентрация напряжений. Если материал чувствителен к ней, то нужно применить условие прочности (10.130) ко всем сечениям на границах участков. Если же материал нечувствителен к концентрации напряжений, то нужно применить условие прочности (10.129) к нескольким вероятным опасным сечениям.

Для определения перемещений в ступенчатом стержне можно или пользоваться общими методами, изложенными ниже (гл. 13), или применять видоизмененный метод начальных параметров. Суть последнего заключается в замене ступенчатого стержня эквивалентным ему по деформациям стержнем постоянной жесткости. Рассмотрим обоснование такой замены на примере произвольной многоступенчатой балки (рис. 289, а). Расчленим балку на части постоянного сечения (рис. 289, б), приложив в местах разрезов соответствующие внутренние силовые факторы — Q и M .

Дифференциальное уравнение упругой линии для первой части имеет вид

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_1}. \quad (10.131)$$

Аналогично для всех последующих призматических частей

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_2}; \dots; \frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_n}. \quad (10.132)$$

Преобразуем заданную ступенчатую балку в эквивалентную балку постоянного сечения с моментом инерции J_0 , равным моменту инерции одного из участков балки, например первого. Умножив числитель и знаменатель правой части последнего дифференциаль-

ного уравнения (10.132) для произвольного участка n на J_0 , получим

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_n} \frac{J_0}{J_0} = \frac{M(x)}{EJ_0} \frac{J_0}{J_n} = \frac{M(x)}{EJ_0} \beta_n, \quad (10.133)$$

где β_n — коэффициент приведения.

Отсюда следует, что, умножив изгибающие моменты каждой части балки на соответствующие коэффициенты приведения и заменив момент инерции J_n моментом инерции J_0 , получим балочки одинакового сечения с моментом инерции J_0 , упругие линии которых тождественны упругим линиям соответствующих частей заданной ступенчатой балки.

Так как изгибающие моменты находятся в линейной зависимости от нагрузок, то для каждой части балки вместо умножения на коэффициент приведения изгибающих моментов можно умножить на этот коэффициент все нагрузки этой части вместе с внутренними усилиями Q и M в торцовых сечениях (рис. 289, в).

Соединяя теперь отдельные разрезанные части, получаем эквивалентную балку постоянного сечения. Эта балка нагружена приведенными внешними нагрузками (т. е. нагрузками, измененными в β_n раз);

в местах сопряжения частей балки действуют дополнительные силы ΔQ и моменты ΔM . Величина этих дополнительных нагрузок определяется разностью приведенных внутренних силовых факторов, приложенных к левой и правой сторонам сечения:

$$\Delta Q_1 = Q_1 (\beta_2 - \beta_1);$$

$$\Delta Q_2 = Q_2 (\beta_3 - \beta_2);$$

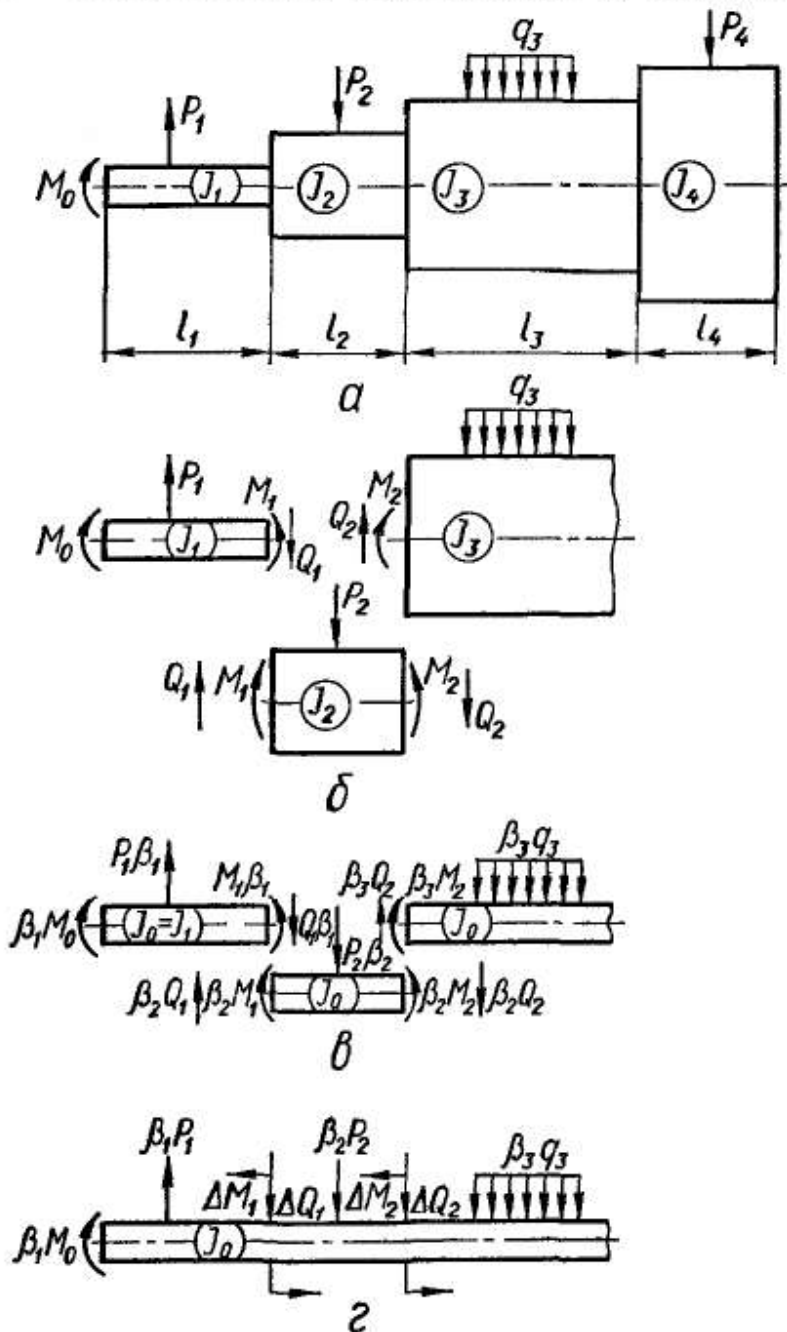


Рис. 289

$$\Delta M_1 = M_1 (\beta_2 - \beta_1);$$

$$\Delta M_2 = M_2 (\beta_3 - \beta_2). \quad (10.134)$$

Таким образом, получена эквивалентная балка (рис. 289, з), упругая линия которой полностью совпадает с упругой линией

заданной ступенчатой балки. Для любого участка этой эквивалентной балки упругая линия определяется интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_{\text{пр}}(x)}{EJ_0}, \quad (10.135)$$

где $M_{\text{пр}}(x)$ — момент от приведенных внешних нагрузок и дополнительных нагрузок ΔQ и ΔM .

Для определения перемещений в полученной эквивалентной балке можно использовать универсальное уравнение упругой линии (10.92).

Пример 46. Определить углы поворота опорных сечений и прогибы для трехступенчатой балки, лежащей на двух опорах (рис. 290, а). Отношение моментов инерции сечений отдельных ступеней балки $J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 3 : 2$.

Определяем опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Разрезаем балку на три части в местах сопряжения ступеней. На рис. 290, б изображены отдельные части балки, находящиеся под действием внешних сил и внутренних усилий Q и M в местах разрезов.

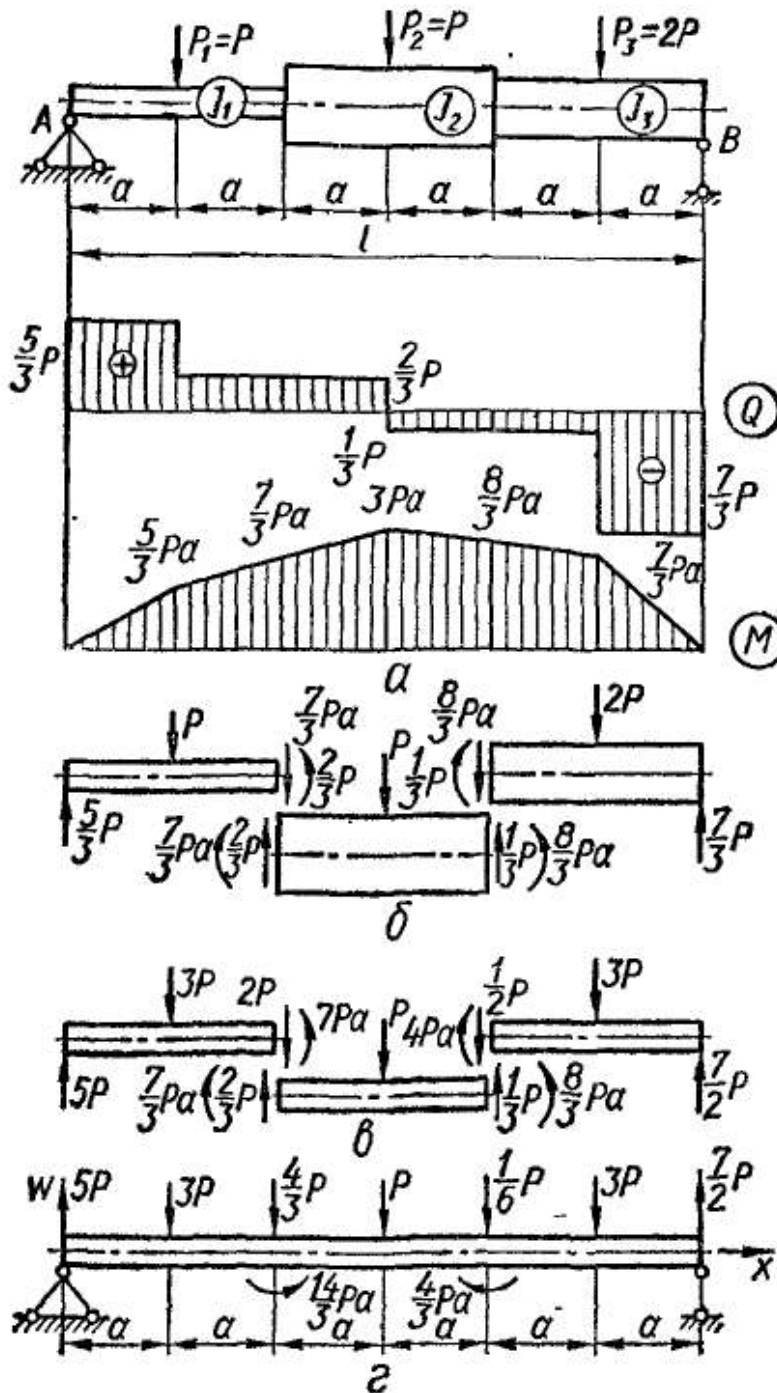


Рис. 290

Приведем заданный ступенчатый брус к эквивалентному брусу постоянной жесткости с моментом инерции J_0 , равным моменту инерции J_2 сечения его средней части. Коэффициенты приведения следующие:

$$\beta_1 = \frac{J_0}{J_1} = \frac{3}{1} = 3; \quad \beta_2 = \frac{J_0}{J_2} = \frac{3}{3} = 1; \quad \beta_3 = \frac{J_0}{J_3} = \frac{3}{2}. \quad (10.136)$$

Умножаем на всех участках заданные нагрузки, а также Q и M в сечениях разрезов на соответствующие коэффициенты приведения β_n . Все три части с приложенными к ним приведенными нагрузками показаны на рис. 290, в. Теперь составим их в один брус постоянной жесткости $EJ_0 = EJ_2$, приложив в сечениях сопряжений добавочные силы $\Delta Q_1, \Delta Q_2$ и добавочные моменты ΔM_1 и ΔM_2 .

Вычисляем добавочные силы

$$\Delta Q_1 = \frac{2}{3} P - 2P = -\frac{4}{3} P, \quad \text{или} \quad \Delta Q_1 = \frac{2}{3} P (1 - 3) = -\frac{4}{3} P;$$

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{3} P - \frac{1}{2} P = -\frac{1}{6} P, \quad \text{или} \quad \Delta Q_2 = -\frac{1}{3} P \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{6} P.$$

Вычисляем добавочные моменты:

$$\Delta M_1 = \frac{7}{3} Pa - 7Pa = -\frac{14}{3} Pa, \quad \text{или} \quad \Delta M_1 = \frac{7}{3} Pa (1 - 3) = -\frac{14}{3} Pa;$$

$$\Delta M_2 = 4Pa - \frac{8}{3} Pa = \frac{4}{3} Pa, \quad \text{или} \quad \Delta M_2 = \frac{8}{3} Pa \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{4}{3} Pa.$$

Эквивалентная балка с приложенными к ней нагрузками изображена на рис. 290, г. Чтобы убедиться в правильности произведенных подсчетов загрузки эквивалентной балки, проверяем, соблюдены ли условия ее равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_{(A)} = & 3Pa + \frac{4}{3} P \cdot 2a + P \cdot 3a + \frac{1}{6} P \cdot 4a + 3P \cdot 5a - \frac{7}{2} P \cdot 6a - \\ & - \frac{14}{3} Pa + \frac{4}{3} Pa = \left(21 \frac{14}{3} - 21 \frac{14}{3} \right) Pa = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к определению перемещений при помощи метода начальных параметров. Возьмем сечение на крайнем правом участке и запишем для него уравнение упругой линии:

$$\begin{aligned} w(x) = & w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ_2} \left[-\frac{14}{3} Pa \frac{(x-2a)^2}{2} + \frac{4}{3} Pa \frac{(x-4a)^2}{2} + \right. \\ & + 5P \frac{x^3}{6} - 3P \frac{(x-a)^3}{6} - \frac{4}{3} P \frac{(x-2a)^3}{6} - P \frac{(x-3a)^3}{6} - \\ & \left. - \frac{1}{6} P \frac{(x-4a)^3}{6} - 3P \frac{(x-5a)^3}{6} \right]. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Начальные параметры находим из опорных условий: при $x = 0$ $w(0) = 0$, следовательно, $w_0 = 0$; при $x = l = 6a$ $w(l) = 0$. Используем условие для определения второго начального параметра Θ_0 :

$$\begin{aligned} w(l) = & \Theta_0 6a + \frac{1}{EJ_2} \left[-\frac{14}{3} Pa \frac{(4a)^2}{2} + \frac{4}{3} Pa \frac{(2a)^2}{2} + 5P \frac{(6a)^3}{6} - \right. \\ & - 3P \frac{(5a)^3}{6} - \frac{4}{3} P \frac{(4a)^3}{6} - P \frac{(3a)^3}{6} - \frac{P}{6} \cdot \frac{(2a)^3}{6} - 3P \frac{a^3}{6} \left. \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\Theta_0 = -10,58 \frac{Pa^2}{EJ_2}. \quad (10.138)$$

Для определения угла поворота Θ_B правого конца балки продифференцируем уравнение упругой линии (10.137) для крайнего правого участка балки ($5a \leq x \leq 6a$) и в полученное таким образом уравнение для $\Theta(x)$ подставим $x = l = 6a$.

Получим

$$\Theta_B = \Theta(6a) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[-\frac{14}{3} Pa(6a-2a) + \frac{4}{3} Pa(6a-4a) + \right. \\ \left. + 5P \frac{(6a)^2}{2} - 3P \frac{(6a-a)^2}{2} - \frac{4}{3} P \frac{(6a-2a)^2}{2} - P \frac{(6a-3a)^2}{2} - \right. \\ \left. - \frac{P}{6} \cdot \frac{(6a-4a)^2}{2} - 3P \frac{(6a-5a)^2}{2} \right],$$

откуда находим, что

$$\Theta_B = 8,92 \frac{Pa^2}{EJ_2}. \quad (10.139)$$

Определим, для примера, прогибы в местах приложения внешних нагрузок P_1 и P_2 (т. е. в сечениях $x = a$ и $x = 3a$).

При $x = a$

$$w(a) = \Theta_0 a + 5P \frac{a^3}{6EJ_2} = \left[-\frac{10,58 + 0,83}{EJ_2} \right] Pa^3 = -\frac{9,75Pa^3}{EJ_2}.$$

При $x = 3a$

$$w(3a) = \Theta_0 3a - \frac{14}{3} \frac{Pa}{EJ_2} \cdot \frac{a^2}{2} + 5P \frac{(3a)^3}{6EJ_2} - 3P \frac{(2a)^3}{6EJ_2} - \\ - \frac{4}{3} P \frac{a^3}{6EJ_2} = (-10,58 \cdot 3 - 2,33 + 22,5 - 4 - 0,222) \frac{Pa^3}{EJ_2} = -\frac{15,80Pa^3}{EJ_2}.$$

Определение линейных и угловых перемещений любых других сечений балки также не представляет каких-либо затруднений.

Стержни с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений. Если размеры сечения стержня непрерывным образом изменяются по длине, то формулы, полученные на основании гипотезы плоских поперечных сечений, становятся, вообще говоря, неверными (как и сама гипотеза). Однако некоторые точные решения теории упругости показывают, что в том случае, когда угол наклона образующей поверхности стержня к его осп невелик (не превышает 15—20°), с достаточной для инженерной практики точностью можно принимать распределение нормальных напряжений по высоте сечения прямолинейным. Тогда, естественно, можно пользоваться обычным условием прочности и дифференциальным уравнением упругой линии, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} \leq [\sigma] \quad (10.140)$$

и

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (10.141)$$

Касательные же напряжения более чувствительны к наклону образующих поверхности стержня, поэтому формула Журавского в применении к стержням переменного сечения дает значительные погрешности.

Расчет на прочность и жесткость стержней переменного сечения осложняется тем обстоятельством, что момент сопротивления и момент инерции сечения являются функциями абсциссы x сечения. На это указывают и обозначения в формулах (10.140) и (10.141). Последнюю формулу можно записать в несколько измененном виде.

Обозначим через J_0 момент инерции какого-либо сечения (обычно наибольшего или наименьшего) и введем понятие приведенного изгибающего момента:

$$M_{\text{пр}}(x) = M(x) \frac{J_0}{J(x)}. \quad (10.142)$$

Тогда, умножив на J_0 числитель и знаменатель правой части формулы (10.141), получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_{\text{пр}}(x)}{EJ_0}. \quad (10.143)$$

Эта формула по своему внешнему виду совпадает с формулой (10.135), но входящие в формулы величины $M_{\text{пр}}(x)$ имеют различный смысл.

Частным случаем балок с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений являются балки *равного сопротивления изгибу*, во всех сечениях которых максимальное напряжение равно допускаемому, т. е.

$$\sigma_{\text{макс}}(x) = \frac{|M(x)|}{W(x)} = [\sigma].$$

Отсюда получают уравнение для определения размеров балки равного сопротивления:

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \quad (10.144)$$

Задавшись какой-либо формой сечения (причем таким образом, чтобы размеры его определялись только одним параметром), из уравнения (10.144) находим закон изменения этого параметра по длине балки. Тем самым определяем размеры всех сечений. Для нахождения перемещений можно пользоваться дифференциальным уравнением упругой линии (10.143).

Найдем форму консоли равного сопротивления изгибу. Сечение прямоугольное с постоянной шириной b и переменной высотой (рис. 291).

Обозначим высоту балки в произвольном сечении через $h(x)$. Тогда

$$W(x) = \frac{bh^2(x)}{6},$$

кроме того, очевидно,

$$|M(x)| = Px.$$

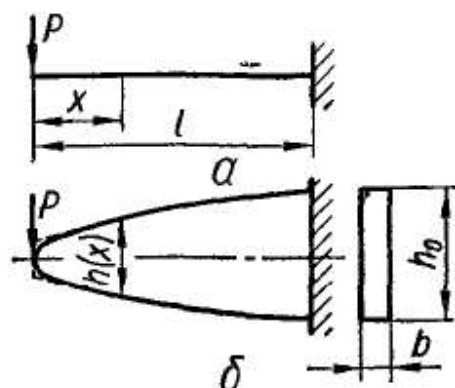


Рис. 291

Поэтому, согласно уравнению (10.144),

$$\frac{bh^2(x)}{6} = \frac{Px}{[\sigma]},$$

откуда

$$h(x) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{x}.$$

Следовательно, высота рассматриваемой балки равного сопротивления будет изменяться по параболическому закону (рис. 291, б).

При этом

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{l}.$$

Заметим, что в окрестности концевого сечения ($x = 0$) изгибающие моменты малы, поэтому высоту сечения следует определять из условия прочности по τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh} \leq [\tau],$$

откуда

$$h \geq \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

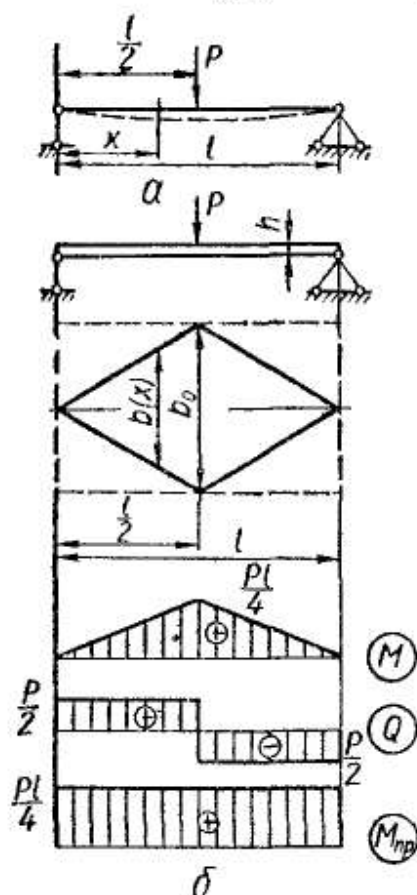


Рис. 292

Построенная балка параболического очертания наиболее рациональна с точки зрения экономии материала, однако из-за сложности формы не удовлетворяет технологическим требованиям. Поэтому на практике применяют не балки равного сопротивления, а близкие к ним ступенчатые стержни.

Аналогично обстоит дело и в случаях двутаврового, круглого и других видов сечений. Есть один вид балок равного сопротивления с весьма простым очертанием, который получил широкое распространение в листовых рессорах, — это балки прямоугольного сечения с постоянной высотой h и переменной шириной $b(x)$.

Найдем форму балки равного сопротивления изгибу для схемы, показанной на рис. 292, а. Сечение балки прямоугольное с постоянной высотой h и переменной по длине шириной $b(x)$.

В силу симметрии для определения формы балки достаточно рассмотреть только левую половину пролета. Тогда

$$M(x) = \frac{P}{2} x; \quad W(x) = \frac{b(x)h^2}{6}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (10.144), получим

$$\frac{6Px}{2b(x)h^2} = [\sigma],$$

откуда

$$b(x) = \frac{3P}{h^3 [\sigma]} x.$$

Ширина сечения меняется по линейному закону, и, следовательно, балка имеет вид, представленный на рис. 292, б. Максимальная ширина b_0 будет посередине пролета:

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^3 [\sigma]}.$$

Определим наибольший прогиб f этой балки. Согласно выражениям (10.142) и (10.143), имеем

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{M_{\text{пр}}(x)}{EJ_0},$$

где

$$M_{\text{пр}}(x) = M(x) \frac{J_0}{J(x)} = \frac{P}{2} x \frac{J_0}{J(x)}.$$

В данном случае

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}; \quad J(x) = \frac{b(x) h^3}{12},$$

так что

$$\frac{J_0}{J(x)} = \frac{b_0}{b(x)} = \frac{l}{2x}$$

и, значит,

$$M_{\text{пр}}(x) = \frac{P}{2} x \cdot \frac{l}{2x} = \frac{Pl}{4}.$$

На рис. 292, б показаны эпюры M и Q , а также эпюра приведенных изгибающих моментов.

Таким образом, дифференциальное уравнение упругой линии для левой половины пролета имеет вид

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Дважды интегрируя его, получаем

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{Pl}{4} x + C \right];$$

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{Pl}{8} x^2 + Cx + D \right].$$

Для нахождения постоянных C и D используем симметрию упругой линии (она показана штриховой линией на рис. 292, а):

$$\omega(0) = \Theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$C = -\frac{Pl^2}{8}; \quad D = 0.$$

Тогда

$$\omega(x) = \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{Pl}{8} x^2 - \frac{Pl^2}{8} x \right],$$

значит,

$$\omega\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{Pl}{8} \frac{l^2}{4} - \frac{Pl^2}{8} \frac{l}{2} \right)$$

и, следовательно,

$$f = \left| \omega\left(\frac{l}{2}\right) \right| = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

Если бы балка имела постоянное сечение, то из условия прочности мы нашли бы, что она будет прямоугольного очертания в плане (балка с постоянной шириной b_0 на рис. 292, б показана штриховым контуром). Для такой балки максимальный прогиб

$$f' = \frac{Pl^3}{48EJ_0}. \quad (10.145)$$

Таким образом, балка равного сопротивления имеет вдвое меньший вес, чем балка постоянного сечения, а максимальный прогиб ее в полтора раза больше, т. е.

$$f = 1,5f'. \quad (10.146)$$

В заключение отметим, что

у опор ширина сечения b должна быть определена из условия прочности по τ_{\max} . Но размер b получается незначительным, и обычно прочность у концов обеспечивается конструктивным устройством, необходимым для опирания балки.

Расчет обычной листовой рессоры (рис. 293, г), состоящей из пакета листов, приводится к расчету только что рассмотренной балки. Будем рассуждать следующим образом.

Разрежем балку равного сопротивления (рис. 293, а) на полосы, как показано на рис. 293, б, а затем сложим одинаковые полосы шириной $\frac{t}{2}$. В результате получим n полос шириной

$$t = \frac{b_0}{n},$$

изображенных на рис. 293, в. Сложив эти полосы вместе, получим представленную на рис. 293, г листовую рессору.

Если все листы соединить между собой (например, сварить или склепать), то получится балка постоянной ширины t и переменной высоты сечения. В рессорах же листы не связаны друг с другом (хомуты, имеющиеся в рессорах, служат для того, чтобы рессора не рассыпалась) и имеют возможность свободно проскальзывать относительно друг друга. Кроме того, приближенно можно считать, что при деформации все полосы получают одинаковую кривизну. Тогда сумма полос, находящихся в рессоре, с точки зрения напря-

жений и деформаций будет эквивалентна сумме полос, показанных на рис. 293, б, т. е. балке равного сопротивления постоянной высоты и переменной ширины (рис. 293, а). Поэтому для такой рессоры условие прочности (учитывается, что $b_0 = tn$) имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2tnh^2} \leq [\sigma], \quad (10.147)$$

а наибольший прогиб [см. равенство (10.146)]

$$f = 1,5f' = 1,5 \frac{Pl^3}{48EJ_0}, \quad (10.148)$$

где

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12} = \frac{tnh^3}{12}.$$

Для рессоры, показанной на рис. 294, а, соответствующая балка равного сопротивления имеет форму треугольника (рис. 294, б) и, очевидно,

$$f' = \frac{Pl^3}{3EJ_0};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6Pl}{tnh^2}.$$

Поэтому условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{tnh^2} \leq [\sigma], \quad (10.149)$$

а

$$f = 1,5 \frac{Pl^3}{3EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}. \quad (10.150)$$

Заметим, что рессоры изготовляют из высокопрочных сталей, так что обычно величина $[\sigma]$ достигает 4000 кгс/см^2 и выше. Что касается прогиба рессор, то на практике (главным образом из-за трения между листами) он получается несколько меньше, чем у соответствующей балки равного сопротивления, поэтому в формулах (10.148) и (10.150) вместо коэффициента 1,5 принимают $\beta = 1,2 \div 1,40$.

Пример 47. Рессора (рис. 292, 293) длиной 100 см, состоящая из семи полос сечением $60 \times 8 \text{ мм}$, нагружена силой $P = 750 \text{ кгс}$. Требуется проверить прочность рессоры ($[\sigma] = 4500 \text{ кгс/см}^2$) и найти максимальный прогиб.

В данном случае $h = 0,8 \text{ см}$; $t = 6 \text{ см}$; $l = 100 \text{ см}$; $P = 750 \text{ кгс}$; $n = 7$. Тогда

$$J_0 = \frac{tnh^3}{12} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 0,8^3}{12} \text{ см}^4 = 1,79 \text{ см}^4.$$

По условию прочности (10.147)

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2tnh^2} = \frac{3 \cdot 750 \cdot 100}{2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 0,8^2} \text{ кгс/см}^2 = 4180 \text{ кгс/см}^2 < 4500 \text{ кгс/см}^2.$$

Следовательно, рессора прочная.

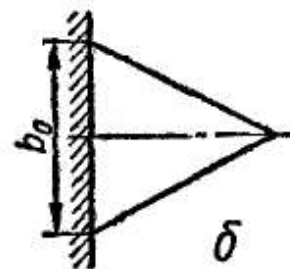
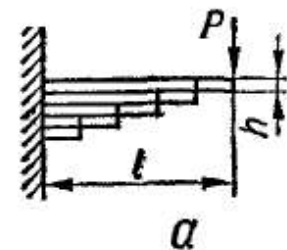


Рис. 294

Далее, пользуясь формулой (10.148) и заменяя в ней коэффициент 1,5 на β , находим, что

$$f = \beta \frac{Pl^3}{48EJ_0} = (1,25 \div 1,40) \frac{750 \cdot 100^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,79} \text{ см} = (1,25 \div 1,40) 4,16 \text{ см} = 5,2 \div 5,8 \text{ см},$$

т. е. наибольший прогиб лежит в пределах 52—58 мм.

В заключение отметим, что приведенный способ расчета листовых рессор в известной мере условен, так как:

- 1) не учитывает трения между листами рессоры;
- 2) в действительности листы рессоры соприкасаются друг с другом не всюду, а только в отдельных точках, вследствие чего кривизна листов при деформации неодинакова, а значит, и напряжения в них различны.

§ 70. РАСЧЕТ НА ДЕЙСТВИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Расчет на изгиб с учетом сил инерции приходится проводить в том случае, когда элементы конструкций в процессе эксплуатации испытывают большие ускорения, вызывающие значительные инерционные усилия. Классическим примером деталей, прочные размеры которых следует выбирать из условия расчета на изгиб с учетом сил инерции, являются спарники локомотивов и шатуны двигателей.

Рассмотрим спарник AB (рис. 295), соединяющий два колеса, одно из которых (O_1) является ведущим и на него передается вращающий момент от машины. В точках A и B спарник присоединен к колесам при помощи цилиндрических шарниров; расстояния AO_2 и BO_1 равны радиусу кривошипа r ; диаметр колеса — D ; длина спарника l ; локомотив движется с постоянной скоростью v .

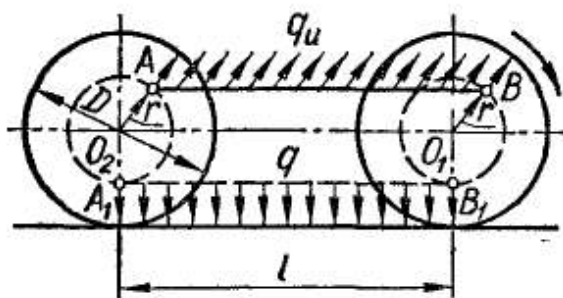


Рис. 295

Участвуя в переносном движении вместе с локомотивом с постоянной скоростью v , спарник, не имея ускорений, не будет испытывать инерционных усилий. Ускорение он получит только в процессе относительного движения. Так как в этом движении точки A и B спарника перемещаются одинаково, описывая в одной плоскости окружности радиуса r , то это движение будет плоским и поступательным. Следовательно, все точки спарника будут иметь те же скорости и ускорения, что и точки A и B .

Точка A движется вместе со вторым колесом, описывая окружность радиуса r . При постоянной скорости движения локомотива угловая скорость вращения колеса ω постоянна. Следовательно, тангенциальное ускорение точки A равно нулю, а центростремительное ускорение ω_n , направленное от точки A к точке O_2 , равно $\omega^2 r$.

Точка B движется вместе с первым колесом, описывая окружность радиуса r . При постоянной скорости движения локомотива угловая скорость вращения колеса ω постоянна. Следовательно, тангенциальное ускорение точки B равно нулю, а центростремительное ускорение ω_n , направленное от точки B к точке O_1 , равно $\omega^2 r$.

Любой элемент спарника испытывает такое же ускорение, направленное параллельно O_2A .

Определяя изгибающие моменты в спарнике, необходимо к равномерно распределенным силам инерции, интенсивность которых

$$q_n = \frac{\gamma F}{g} \omega_n = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

прибавить его собственный вес. При этом наиболее опасным положением спарника, очевидно, будет крайнее нижнее, т. е. положение, в котором нагрузка от сил инерции суммируется с нагрузкой от собственного веса. Тогда полная нагрузка q на единицу длины спарника

$$q = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r = \gamma F \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

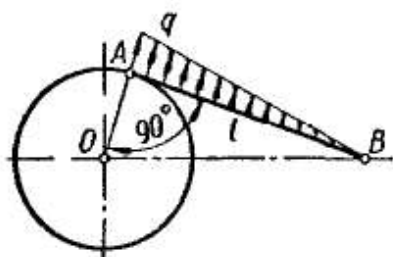


Рис. 296

При выборе расчетной схемы спарник в данном случае надо рассматривать как балку, шарнирно опертую в точках A и B и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q .

Наибольший изгибающий момент будет, как известно, посередине пролета:

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{8} = \frac{\gamma Fl^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right),$$

а наибольшее напряжение в опасном сечении

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{F}{W} \cdot \frac{\gamma l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

Кроме инерционных нагрузок и собственного веса, вызывающих изгиб, спарник при работе подвергается действию осевой силы, которая также должна быть учтена в расчете на прочность. Условие прочности при совместном действии изгиба и осевой силы приведено в § 76.

Подобным же образом можно выполнить и расчет шатуна (рис. 296), шарнирно скрепленного в точке A с кривошипом OA , вращающимся вокруг точки O с угловой скоростью ω .

Если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью, то точка A шатуна испытывает только центростремительное, а точка B — только тангенциальное ускорение. Все промежуточные точки шатуна, расположенные между A и B , имеют и то и другое ускорения. Ограничимся учетом только центростремительного ускорения.

При таком положении, когда кривошип составляет с шатуном угол 90° , направление центростремительного ускорения перпендикулярно к оси шатуна. Естественно предположить, что центробежные силы инерции везде перпендикулярны к оси шатуна и по длине его меняются от $q = q_{\text{макс}}$ в точке A до $q = 0$ в точке B . Это предположение тем ближе к истине, чем больше длина шатуна по сравнению с длиной кривошипа.

Составляя расчетную схему, шатун следует рассматривать как балку AB на двух шарнирных опорах A и B с нагрузкой, распределенной по закону треугольника (см. рис. 73). Максимальный изгибающий момент, как известно, будет в сечении на расстоянии $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ от точки B :

$$M_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{9\sqrt{3}},$$

а максимальное напряжение

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W}.$$

Учитывая, что

$$q_{\text{макс}} = \frac{F\gamma}{g} \omega^2 r,$$

найдем

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{q_{\text{макс}} l^2}{9\sqrt{3}W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9g\sqrt{3}W}.$$

Заметим, что в рассмотренных случаях, определяя напряжения в спарнике и в шатуне, мы из всех возможных положений, непрерывно меняющихся в процессе эксплуатации, выбрали положение рассчитываемого элемента, соответствующее опасному положению.

Помимо нормальных напряжений, вызванных изгибом, при расчете шатуна на прочность следует учитывать также и действие осевой силы (см. гл. 19).

Глава 11

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА

§ 71. О РАСЧЕТЕ СОСТАВНЫХ БАЛОК

В строительной практике, а также в самолетостроении, судостроении и т. д. встречаются балки, однородные в отношении материала, но не представляющие собой монолитного стержня. Это главным образом сварные (рис. 297) и клепаные (рис. 298) балки двутаврового сечения. Такие балки состоят из трех основных частей: двух поясов и стенки. Стенка 1 представляет собой вертикальный лист (рис. 297 и 298). Пояса 2 сварной балки (рис. 297) — это горизонтальные листы большей по сравнению со стенкой толщины. Пояс клепаной балки в свою очередь состоит из нескольких деталей — поясного листа 2 и поясных уголков 3 (рис. 298).

Отдельные части составной балки скрепляют в одно целое при помощи соединительных элементов. Соединительным элементом

сварной балки есть сварной шов 3 (рис. 297). В клепаной балке соединительными элементами являются поясные заклепки 4, а также заклепки 5, соединяющие поясные листы с поясными уголками (рис. 298).

При расчете на прочность составных балок нужно удовлетворить следующим требованиям:

1. Сечение в целом должно иметь необходимую прочность.
2. Листы поясов, а особенно стенки составных балок представляют собой тонкостенные элементы и способны при сжатии (пояса) или при сдвиге (стенки) терять устойчивость, коробиться. Чем меньше толщина листов и чем больше длина свисающей части с поясных листов, тем меньшую нагрузку может выдержать балка без опасности коробления листов. Поэтому

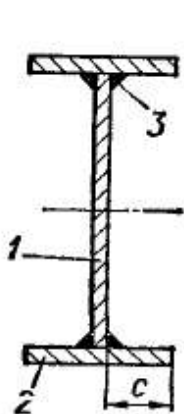


Рис. 297

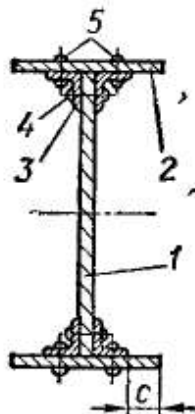


Рис. 298

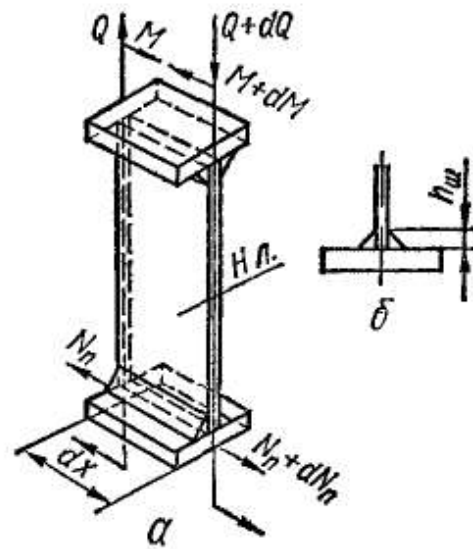


Рис. 299

му необходимо ограничивать величину c (рис. 297 и 298) и не принимать для листов слишком малую толщину. Чтобы предотвратить потерю устойчивости стенки, ставят уголки или ребра жесткости.

3. Соединительные элементы должны обладать достаточной прочностью.

Первый вопрос решается методами, изложенными в предыдущей главе, и сводится к расчету сечения по $\sigma_{\text{макс}}$, к определению толщины стенки из расчета по $\tau_{\text{макс}}$ и, в ряде случаев, к проверке сечения по теориям прочности в месте перехода стенки в полку.

Второй вопрос, как и вообще подробный расчет составных балок, излагается в специальных курсах (например, в курсе металлических конструкций). Здесь же остановимся только на расчете соединительных элементов.

Двумя близкими сечениями выделим элемент dx сварной балки (рис. 299, а). Пусть в левом сечении поперечная сила и изгибающий момент равны Q и M , а в правом — $Q + dQ$ и $M + dM$. Тогда по формуле (10.18) нормальное усилие в левом сечении пояса

$$N_{\Pi} = \frac{MS_{\Pi}}{J},$$

где S_{Π} — статический момент пояса относительно нейтральной линии сечения.

В правом сечении пояса

$$N_{\pi} + dN_{\pi} = \frac{(M + dM) S_{\pi}}{J}.$$

Нормальные усилия в правом и левом сечениях пояса отличаются на величину

$$dN_{\pi} = \frac{dMS_{\pi}}{J}.$$

Усилие dN_{π} стремится сдвинуть пояс относительно стенки, в результате чего сварные швы, прикрепляющие пояс к стенке (их два), работают на срез как фланговые швы. Условие прочности для них имеет вид (§ 52)

$$\tau = \frac{dN_{\pi}}{dF_{\text{ср}}} \leq [\tau_s].$$

Если обозначить через $h_{\text{ш}}$ катет шва (рис. 299, б), то площадь среза

$$dF_{\text{ср}} = 2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}dx.$$

Тогда касательное напряжение в опасном сечении шва

$$\tau = \frac{dN_{\pi}}{dF_{\text{ср}}} = \frac{S_{\pi}}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}J} \frac{dM}{dx}.$$

Но $\frac{dM}{dx} = Q$, поэтому окончательно условие прочности для шва примет следующий вид:

$$\tau = \frac{QS_{\pi}}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}J} \leq [\tau_s]. \quad (11.1)$$

Заметим, что найденная выше разность усилий в двух сечениях пояса относится к тому случаю, когда расстояние между этими сечениями равно dx . На единицу же длины пояса нормальное усилие получает приращение, кгс/см,

$$q_t = \frac{dN_{\pi}}{dx} = \frac{dMS_{\pi}}{dxJ},$$

или

$$\dot{q}_t = \frac{QS_{\pi}}{J}. \quad (11.2)$$

Часто применяют не сплошные, а прерывистые (шпоночные) швы (рис. 300). Рассмотрим шпоночное сварное соединение.

На рис. 300 $l_{\text{ш}}$ — длина шпонки, a — шаг шва. Расчетная длина шпонки с учетом непровара будет $l_{\text{ш}} - 1$ см. На участке АВ длиной a в поясе развивается разность нормальных усилий

$$\Delta N_{\pi} = q_t a = \frac{QS_{\pi} a}{J}. \quad (11.3)$$

Рассчитывая шпонку на это усилие, получим

$$\tau = \frac{QS_{\pi} a}{2 \cdot 0,7h_{\text{ш}}(l_{\text{ш}} - 1)J} \leq [\tau_s]. \quad (11.4)$$

В клепаной балке (рис. 301) усилие ΔN_n воспринимается поясной заклепкой 1. Эта заклепка должна быть рассчитана на срез и смятие. Поскольку заклепка двусрезная, площадь среза $F_{ср} = 2 \frac{\pi d^2}{4}$. Расчетная площадь смятия $F_{см} = t_{ст}d$ или $F_{см} = 2t_{уг}d$. Обычно толщина стенки $t_{ст}$ меньше удвоенной толщины полки уголка. Поэтому будем считать $F_{см} = t_{ст}d$.

Условия прочности на срез и смятие для поясных заклепок имеют вид

$$\tau = \frac{\Delta N_n}{F_{ср}} = \frac{QS_n a}{2 \frac{\pi d^2}{4} J} \leq [\tau]; \quad (11.5)$$

$$\sigma_{см} = \frac{\Delta N_n}{F_{см}} = \frac{QS_n a}{t_{ст} d J} \leq [\sigma_{см}]. \quad (11.6)$$

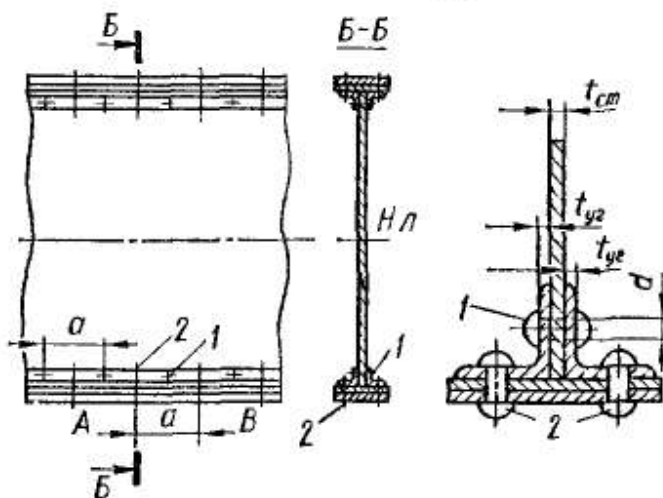


Рис. 301

Заклепки 2, соединяющие поясные листы с уголками, расчету не подлежат, так как они имеют те же диаметр d и шаг a , что поясные, а нагрузка на них меньше, поскольку в формуле (11.3) вместо S_n для них нужно принимать $S'_n = S_n - S_{уг}$, где $S_{уг}$ — статический момент уголков.

§ 72. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ. ЦЕНТР ИЗГИБА

Допущения, положенные в основу вывода формулы (10.20), в достаточной степени соответствуют действительности, если ширина сечения b мала по сравнению с высотой (размером, перпендикулярным к нейтральной линии сечения). Так, во всех сечениях, показанных на рис. 302,

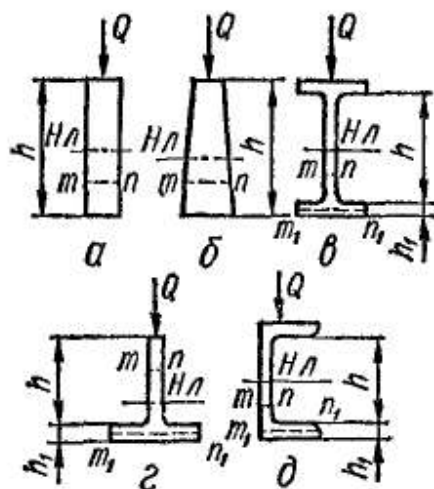


Рис. 302

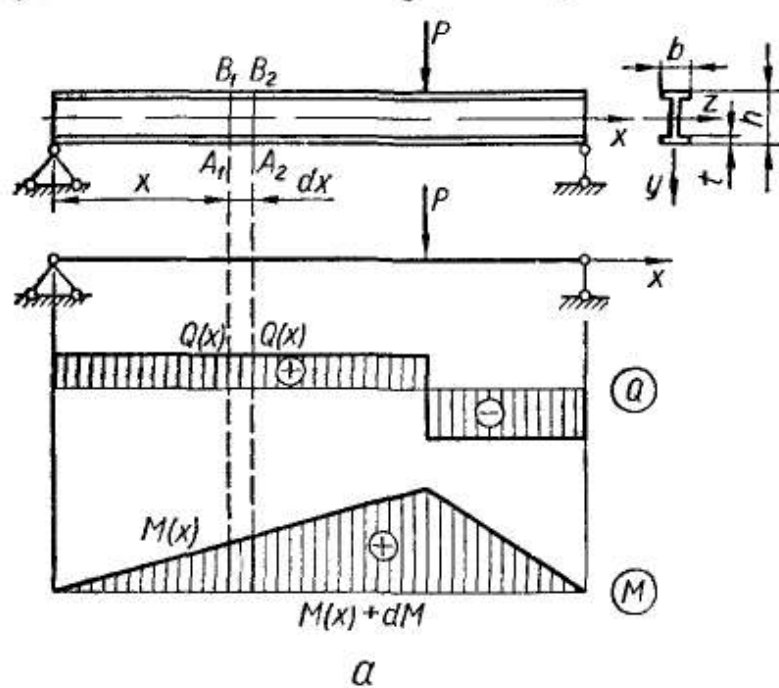
ширина m на уровне, где определяются касательные напряжения, мала по сравнению с h . В этих случаях формула (10.20) дает верные результаты. Если сечение представляет собой тонкостенный профиль (рис. 302, в, г, д), то в полках ширина сечения $m_1 n_1$ значительна и картина распределения касательных напряжений здесь существенно меняется: они не только переменны вдоль средней линии полки $m_1 n_1$, но и направление их становится не параллельным, а перпендикулярным к усилию Q .

Заметим, что в полках будут действовать и касательные напряжения, параллельные Q . Однако эти напряжения настолько малы по сравнению с касательными напряжениями, параллельными средней

линии полки (будем обозначать их τ_{π}), что их можно совсем не принимать во внимание.

Получим формулу для вычисления касательных напряжений τ_{π} в полках тонкостенных профилей.

Для определенности проведем вывод на примере балки двутаврового сечения. На рис. 303, а показана балка, ее схема и эпюры Q и M .



Двумя близкими поперечными сечениями A_1B_1 и A_2B_2 выделим элемент балки длиной dx (рис. 303, б).

Проведем в сечении балки $A_1B_1D_1E_1$ в нижней полке линию m_1n_1 на произвольном расстоянии z от оси y . В точках этой линии будут действовать σ и τ_{π} . Сейчас нас интересуют лишь касательные напряжения τ_{π} .

Учитывая, что полка узкая (t мало по сравнению с b), примем следующие допущения:

1) во всех точках линии m_1n_1 касательные напряжения одинаковы, т. е. τ_{π} постоянны по толщине полки и зависят только от расстояния z до вертикальной оси;

2) всюду в полке τ_{π} параллельны средней линии полки.

Отсечем часть элемента балки, проведя через m_1n_1 вертикальную плоскость, параллельную оси балки (рис. 303, б и в), и рассмотрим только те напряжения, которые действуют в гранях отсеченной части полки и дают усилия, проектирующиеся на ось x .

Нормальные напряжения приводятся к усилию N_1 . Согласно формуле (10.18),

$$N_1 = \frac{M(x) S(z)}{J_z}.$$

Здесь

$$S(z) = \left(\frac{b}{2} - z\right)t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right), \quad (11.7)$$

т. е. $S(z)$ — статический момент площади $A_1 C_1 m_1 n_1$ относительно нейтральной линии. Он является функцией координаты z .

В грани $A_2 C_2 m_2 n_2$ нормальные напряжения приводятся к усилию

$$N_2 = \frac{[M(x) + dM] S(z)}{J_z},$$

причем, очевидно, величина $S(z)$ такая же, как и для первого сечения.

В грани $n_1 m_1 m_2 n_2$, согласно закону парности касательных напряжений, возникнут напряжения

$$\tau' = \tau_n.$$

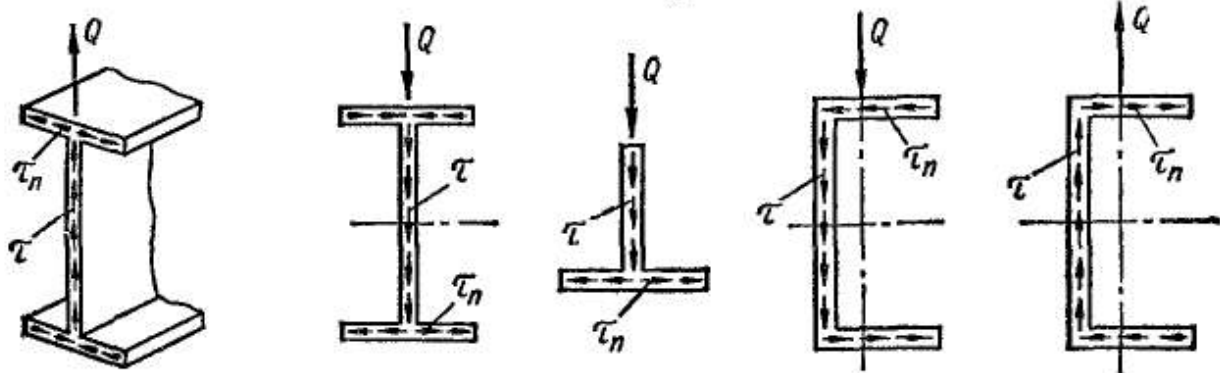


Рис. 304

В силу первого допущения τ' считаем равномерно распределенными по толщине полки t , а в силу малости размера $n_1 n_2 = m_1 m_2 = dx$ можно считать, что τ' распределены равномерно и по длине dx грани $n_1 m_1 m_2 n_2$. Площадь этой грани равна tdx , поэтому действующие в ней касательные напряжения приводятся к усилию

$$dT = \tau' t dx = \tau_n t dx.$$

Направление τ' должно быть таким, чтобы усилие dT уравновесило разность

$$dN = N_2 - N_1 = \frac{[M(x) + dM] S(z)}{J_z} - \frac{M(x) S(z)}{J_z} = \frac{dM \cdot S(z)}{J_z}.$$

Если в уравнение равновесия

$$\sum X = dT - dN = 0$$

подставим выражение для dT и dN , то получим

$$\tau_n t dx = \frac{dM \cdot S(z)}{J_z}.$$

Разделив последнее равенство на tdx и имея в виду, что $\frac{dM}{dx} = Q$, получим

$$\boxed{\tau_n = \frac{QS(z)}{J_z t}} \quad (11.8)$$

Напряжения τ_n всегда образуют единый поток с касательными напряжениями τ в стенке профиля (рис. 304). Последние же определяются по формуле Журавского и направлены в сторону Q .

Формула (11.8) для касательных напряжений τ_n в полках и формула (10.20) для касательных напряжений τ в стенке дают возможность вычислить касательные напряжения в любой точке тонкостенного профиля и построить полную эпюру касательных напряжений. При этом обычно пренебрегают уклоном полок в двутаврах и швеллерах и считают, что полка имеет постоянную, указанную в сортаменте, толщину t . Кроме того, пренебрегая закруглениями, эпюру τ доводят до полок, а эпюру τ_n , пренебрегая наличием стенки, — до оси профиля.

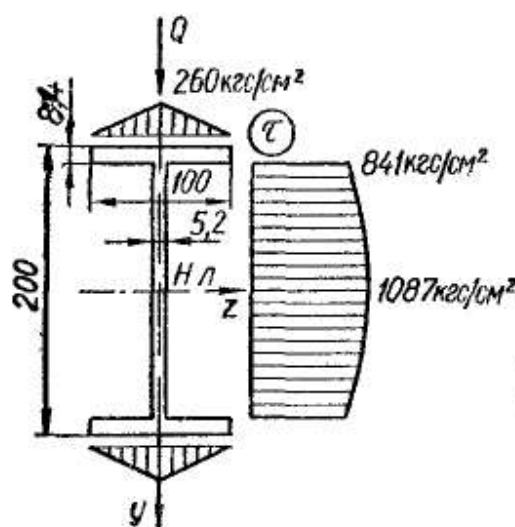


Рис. 305

Пример 48. Построить полную эпюру касательных напряжений для сечения двутавровой балки № 20, в котором действует поперечная сила $Q = 10\,000$ кгс (рис. 305).

По сортаменту находим, что $J = 1840$ см⁴; $S = 104$ см³, и вычисляем статический момент полки относительно нейтральной линии:

$$S_{\text{полки}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \\ = 10 \cdot 0,84 \left(\frac{20}{2} - \frac{0,84}{2} \right) \text{ см}^3 = 80,47 \text{ см}^3.$$

Тогда касательные напряжения в месте соединения стенки с полкой

$$\tau_1 = \frac{QS_{\text{полки}}}{Jd} = \frac{10\,000 \cdot 80,47}{1840 \cdot 0,52} \text{ кгс/см}^2 = 841 \text{ кгс/см}^2$$

и наибольшие касательные напряжения в точках нейтральной линии

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{QS}{Jd} = \frac{10\,000 \cdot 104}{1840 \cdot 0,52} \text{ кгс/см}^2 = 1087 \text{ кгс/см}^2.$$

По этим данным строим параболическую эпюру τ для стенки.

Для построения эпюры касательных напряжений τ_n в полках двутавра обратим внимание на то, что, согласно выражениям (11.7) и (11.8),

$$\tau_n = \frac{Q}{J} \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \left(\frac{b}{2} - z \right).$$

Координата z точки, где определяется τ_n , входит в это выражение в первой степени, значит, эпюра τ_n будет прямолинейной.

Непосредственные вычисления проведем по формуле (11.8). Для края полки $S\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, а значит, $\tau_n = 0$. Для середины полки ($z = 0$)

$$S(0) = \frac{1}{2} S_{\text{полки}} = 40,2 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{n,\text{макс}} = \frac{Q \frac{1}{2} S_{\text{полки}}}{Jt} = \frac{10\,000 \cdot 40,2}{1840 \cdot 0,84} \text{ кгс/см}^2 = 260 \text{ кгс/см}^2.$$

По этим данным строим треугольную эпюру τ_n на правой половине полки. На ее левой половине эпюра будет симметричной, так как статические моменты по абсолютной величине там такие же, как и на правой половине полки. Очевидно, такой же вид имеет эпюра τ_n и для нижней полки,

Наличие касательных напряжений в полках тонкостенных профилей приводит к тому, что в крайних волокнах балки, где действуют наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{\text{макс}}$, напряженное состояние будет плоским, а не линейным (рис. 306). Поэтому в таких балках вероятной опасной точкой будет не произвольная точка крайних волокон, а та точка, где $\tau_n = \tau_{n \text{ макс}}$. Условие прочности для этих балок следовало бы писать не в обычном виде

$$\sigma_{n \text{ макс}} = \frac{M}{W} \leq [\sigma], \quad (11.9)$$

а с использованием теорий прочности, что имеет смысл для нестандартных профилей, особенно при наличии широкой полки.

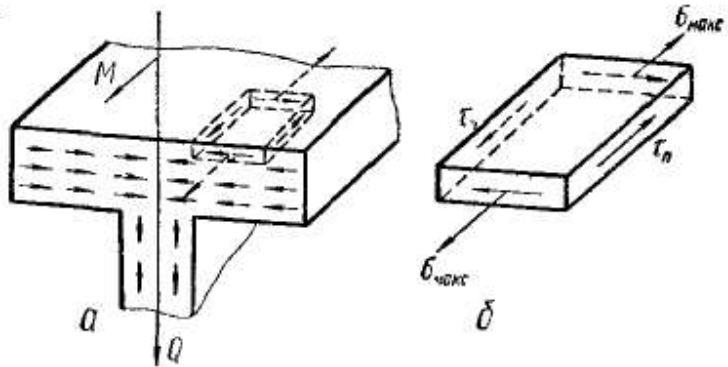


Рис. 306

Касательные напряжения в полках тонкостенных профилей могут существенно изменить характер напряженного состояния стержня и вид его деформации.

Если сечение имеет две оси симметрии и силовая плоскость проходит через одну из них (например, у двутавра), то в нем возникают касательные напряжения, показанные на рис. 307, а (см. также рис. 306). Эти напряжения дают равнодействующие усилия $T_{\text{ст}}$ и T_n (рис. 307, б). В силу симметрии полок относительно вертикальной оси усилия T_n взаимно уравновешиваются на каждой полке.

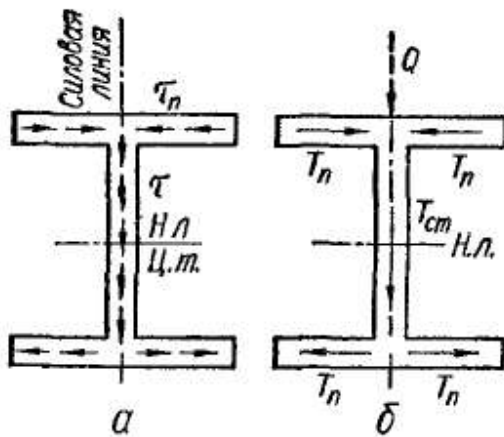


Рис. 307

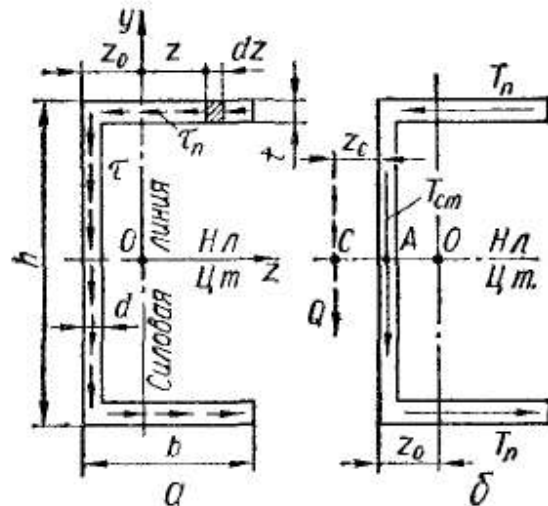


Рис. 308

Иначе обстоит дело в том случае, когда главная центральная ось сечения, перпендикулярная к нейтральной линии, не является осью симметрии (рис. 308). Касательные напряжения в стенке и полках здесь приводятся к усилиям $T_{\text{ст}}$ и T_n , показанным на рис. 308, б (как и раньше, вертикальными касательными напряжениями в полках пренебрегаем). Поперечная сила Q , являющаяся равнодействующей этих усилий,

$$Q = T_{\text{ст}}$$

очевидно, будет направлена вертикально вниз, но она уже не будет проходить через центр тяжести сечения, так как две силы T_n дают еще и пару сил. Сила Q сместится на некоторое расстояние z_C (рис. 308, б), пересекая нейтральную линию в точке C .

Чтобы найти z_C , воспользуемся тем, что момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов составляющих относительно этой же точки. Будем вычислять моменты относительно точки C .

Тогда получим

$$\sum M_C = Q \left(z_C + \frac{d}{2} \right) - T_n (h - t) = 0,$$

откуда

$$z_C = \frac{T_n}{Q} (h - t) - \frac{d}{2}. \quad (11.9)$$

Эта формула не дает еще окончательного ответа на вопрос о положении точки C , поскольку она выражает координату z_C не только через геометрические, но также и через силовые факторы. Чтобы исключить последние, вычислим усилие T_n .

На элемент полки dz (рис. 308, а) действует элементарное усилие $dT_n = \tau_n t dz$. Следовательно,

$$T_n = t \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} \tau_n dz.$$

Пользуясь выражением (11.8):

$$\tau_n = \frac{QS(z)}{Jt}$$

и учитывая, что

$$S(z) = (b - z_0 - z)t \frac{h-t}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} T_n &= Q \frac{t(h-t)}{2J} \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} (b - z_0 - z) dz = \\ &= -Q \frac{t(h-t)}{4J} (b - z_0 - z)^2 \Big|_{-(z_0-d)}^{b-z_0} = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J}. \end{aligned}$$

Внеся последний результат в формулу (11.9), получим окончательно

$$z_C = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}. \quad (11.10)$$

Выясним теперь, какое значение имеет смещение равнодействующей Q относительно центра тяжести сечения. Для наглядности рассмотрим один из простейших случаев, когда на консоль швеллерного сечения действует вертикальная нагрузка P (рис. 309, а), причем силовая плоскость совпадает с одной из двух главных плоскостей стержня (плоскостью xy). Эта нагрузка вызывает в сечениях

балки переменные по длине изгибающие моменты $M(x) = Px$ и поперечную силу $Q(x) = P$ (рис. 309, б). В сечениях появляются касательные напряжения: τ — в стенке и τ_n — в полках. Поперечная сила $Q(x) = P$, являющаяся равнодействующей касательных усилий, в любом сечении смещена относительно геометрической оси стержня (оси x) на одно и то же расстояние $z_0 + z_c$.

Таким образом, участок балки, заключенный между концевым и произвольным сечениями (рис. 309, б), находится под действием сил P , $Q(x) = P$ и момента $M(x) = Px$. Эта система сил удовлетворяет всем условиям равновесия, кроме одного. Здесь сумма моментов относительно оси x не равна нулю. Но рассматриваемый участок балки находится в равновесии. Значит, в сечении x должен

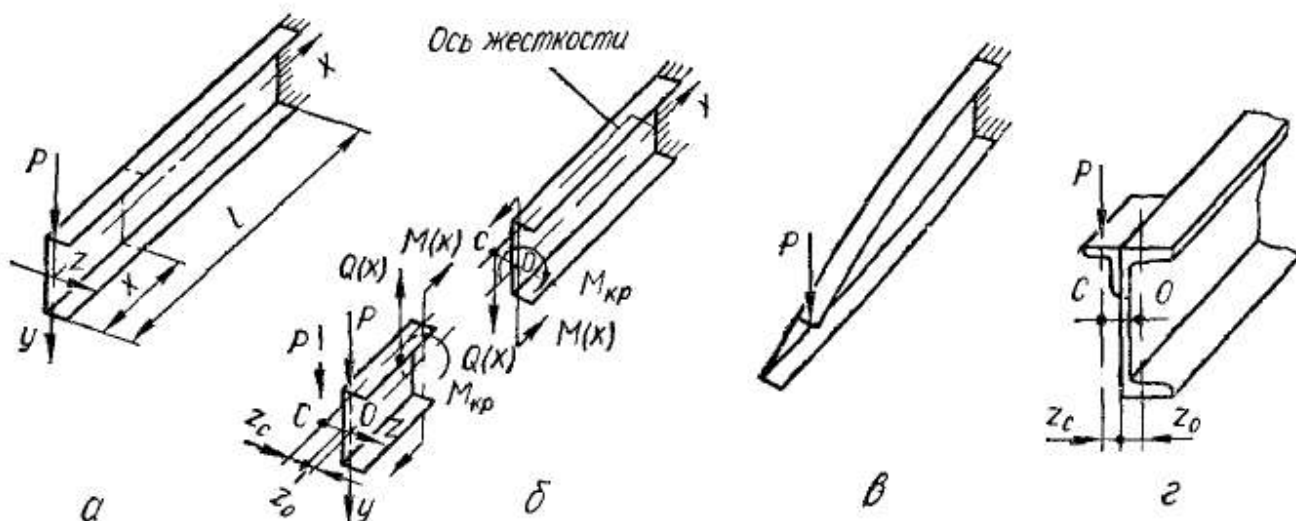


Рис. 309

действовать еще один силовой фактор, обеспечивающий выполнение также и этого условия равновесия. Таким фактором будет, очевидно, крутящий момент $M_{кр} = P(z_0 + z_c)$, направленный, как показано на рис. 309, б. Следовательно, несмотря на то что нагрузка пересекает ось x , балка будет не только изгибаться, но и скручиваться. Опыты подтверждают это (рис. 309, в).

Как известно, открытые тонкостенные профили плохо работают на кручение. Кроме того, если балка заделана так, что депланация сечения в заделке становится невозможной, то будет иметь место так называемое стесненное кручение, при котором в поперечном сечении возникают не только касательные, но и значительные нормальные напряжения. Поэтому желательно принимать меры, устраняющие кручение в балках прокатного профиля. Обычно по этой причине ставят симметричное сечение из двух швеллеров. Если же профиль один, а нагрузка значительна, то ее нужно выносить из главной плоскости так, чтобы она проходила через точку C (на рис. 309, б такое положение нагрузки показано пунктиром; на рис. 309, г дан один из возможных вариантов конструктивного оформления вынесения нагрузки). В этом случае участок балки длиной x полностью уравнивается силами P , $Q(x) = P$ и моментом $M(x) = Px$; кручения не будет. Поэтому точка C называется *центром изгиба*

(иногда — *центром жесткости*). Центры изгиба всех сечений балки расположены на прямой, которая называется *осью жесткости* балки (рис. 309, б).

К балке может быть приложено несколько сил. Тогда, чтобы не было кручения, все они должны пересекать ось жесткости. Положение последней определено, если известно положение центра изгиба в сечении. Если сечение имеет две (или больше) оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести сечения. Так будет, например, в двутавровом сечении.

Пример 49. В качестве примера применения формулы (11.10) определим положение центра изгиба для швеллера № 18а. Согласно сортаменту, $h = 18$ см, $b = 7,4$ см, $d = 0,51$ см, $t = 0,93$ см, $J = 1190$ см⁴.

Тогда

$$z_c = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2} = \left(\frac{0,93 \cdot 17,07^2 \cdot 6,89^2}{4 \cdot 1190} - 0,26 \right) \text{ см} = 2,7 \text{ см.}$$

§ 73. ОСНОВЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим балку (рис. 310), опирающуюся на сплошное упругое основание, реакция которого на балку в каждой точке может быть с известным приближением принята пропорциональной упругому прогибу w в этой точке. Это предположение соответствует модели, в которой упругое основание представляет собой набор не связанных между собой упругих пружин.

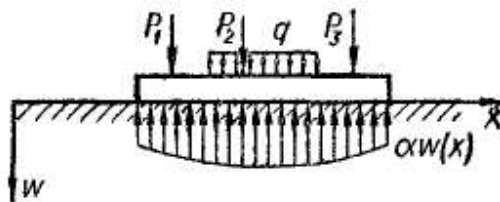


Рис. 310

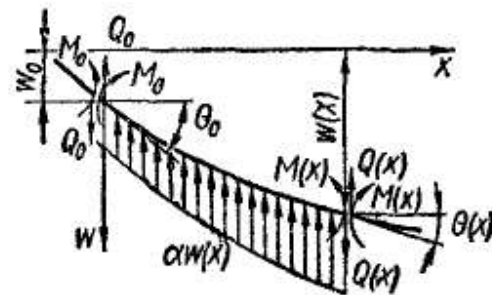


Рис. 311

Обозначив коэффициент пропорциональности буквой α и предположив, что упругое основание по всей длине балки однородно, получим, что интенсивность реакции основания равна $-\alpha w$, где коэффициент α имеет размерность $\left| \frac{\text{сила}}{(\text{длина})^2} \right|$.

Таким образом, полная распределенная нагрузка $p(x)$, действующая на балку, будет состоять из заданной внешней распределенной нагрузки $q(x)$ и неизвестной реакции упругого основания $\alpha w(x)$:

$$p(x) = q(x) - \alpha w(x). \quad (11.11)$$

Для удобства положительное направление оси прогибов и распределенной нагрузки принято вниз.

Расчет балки на упругом основании является статически неопределимой задачей, так как одних уравнений равновесия ($\sum X = 0$

и т. д.) недостаточно для определения закона изменения интенсивности реакции основания по длине балки. Интенсивность реакции основания связана с деформацией балки, поэтому для решения задачи сначала найдем уравнение упругой линии балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси для балки постоянного поперечного сечения на упругом основании в соответствии с выражением (10.49) можно, учитывая принятые направления прогибов w и интенсивности нагрузки q , записать так:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{1}{EJ} [q(x) - \alpha w(x)]. \quad (11.12)$$

Ограничимся рассмотрением участка балки (рис. 311), на котором отсутствует внешняя распределенная нагрузка. Дифференциальное уравнение для этого случая упрощается. Получим

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -\frac{\alpha}{EJ} w(x). \quad (11.13)$$

Поместим начало координат в крайнюю левую точку рассматриваемого участка, направив ось w вниз, и обозначим прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в этом сечении соответственно через w_0 , Θ_0 , M_0 и Q_0 . Все эти величины являются начальными параметрами.

Приведем уравнение (11.13) к виду, удобному для интегрирования, обозначив $\frac{EJ}{\alpha} = \frac{L^4}{4}$. Отсюда

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}, \quad (11.14)$$

т. е. характеристика L измеряется в единицах длины (см). В уравнении (11.13) независимую переменную x заменим безразмерной абсциссой

$$\xi = \frac{x}{L}. \quad (11.15)$$

Тогда уравнение (11.13) с учетом выражений (11.14) и (11.15) приводится к виду

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0. \quad (11.16)$$

Напишем общий интеграл этого уравнения в такой известной форме:

$$w = Ae^{\xi} \cos \xi + Be^{\xi} \sin \xi + Ce^{-\xi} \cos \xi + De^{-\xi} \sin \xi. \quad (11.17)$$

Последовательно продифференцируем это выражение по ξ , приняв во внимание дифференциальные зависимости между w , Θ , Q , M и соотношение (11.15):

$$\begin{aligned} w' = \Theta L = & Ae^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) + Be^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - \\ & - Ce^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + De^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\omega'' = -\frac{M(x)L^2}{EJ} = -2(Ae^\xi \sin \xi - Be^\xi \cos \xi - Ce^{-\xi} \sin \xi + De^{-\xi} \cos \xi); \quad (11.19)$$

$$\omega''' = -\frac{Q(x)L^3}{EJ} = -2[Ae^\xi (\cos \xi + \sin \xi) - Be^\xi (\cos \xi - \sin \xi) - Ce^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - De^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]. \quad (11.20)$$

Выразим произвольные постоянные A , B , C и D через начальные параметры ω_0 , Θ_0 , Q_0 и M_0 , положив для этого в уравнениях (11.17) — (11.20) $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= A + C; \\ L\Theta_0 &= A + B - C + D; \\ L^2M_0 &= (-2B + 2D)EJ; \\ L^3Q_0 &= (2A - 2B - 2C - 2D)EJ. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Решая систему (11.21) четырех линейных алгебраических уравнений, получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0}{2} + \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ B &= \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ C &= \frac{\omega_0}{2} - \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\ D &= \frac{L\Theta_0}{4} + \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Подставив эти выражения произвольных постоянных в формулы (11.17) — (11.20) для ω , Θ , M и Q , найдем:

$$\omega(x) = \omega_0 Y_1(\xi) + L\Theta_0 Y_2(\xi) - \frac{L^2M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{L^3Q_0}{EJ} Y_4(\xi); \quad (11.23)$$

$$\Theta(x) = \Theta_0 Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) - \frac{L^2Q_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4\omega_0}{L} Y_4(\xi); \quad (11.24)$$

$$M(x) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \omega_0 Y_3(\xi) + \alpha L^3 \Theta_0 Y_4(\xi); \quad (11.25)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1(\xi) + \alpha L \omega_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \Theta_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi). \quad (11.26)$$

Здесь через Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 обозначены функции А. Н. Крылова¹:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \\ &= \frac{1}{4} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi + (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi]; \end{aligned}$$

¹ Сокращенные таблицы функций А. Н. Крылова приведены в приложении 12.

$$\left. \begin{aligned}
 Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^\xi - e^{-\xi}) \right] \sin \xi; \\
 Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \\
 &= \frac{1}{8} [(e^\xi + e^{-\xi}) \sin \xi - (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi].
 \end{aligned} \right\} (11.27)$$

Заметим, что при дифференцировании функций Крылова получаются следующие простые, но очень важные для практического применения зависимости:

$$\begin{aligned}
 LY'_1 &= -4Y_4; & LY'_2 &= Y_1; \\
 LY'_3 &= Y_2; & LY'_4 &= Y_3.
 \end{aligned} \quad (11.28)$$

Перейдем к выводу общих уравнений для ω , Θ , M и Q при действии произвольных распределенных или сосредоточенных внешних нагрузок. Пусть на отрезке x балки (рис. 312) действуют вертикальная сосредоточенная сила P_i в точке с абсциссой b_i , сосредоточенный момент M_i в точке с абсциссой a_i и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q_i на участке от $x = c$ до $x = d$.

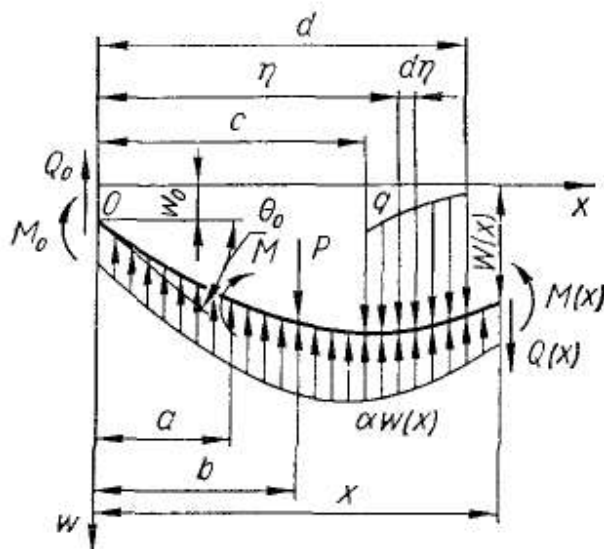


Рис. 312

Для вывода воспользуемся принципом независимости действия сил, а также будем считать перемещения малыми. Сначала допустим, что все внешние нагрузки на участке x равны нулю, тогда общий интеграл, или прогиб $\omega(x)$, будет функцией начальных параметров и абсциссы x по формуле (11.23). Пусть теперь все начальные параметры равны нулю, но действуют сосредоточенные нагрузки P_i и M_i . Вдумываясь в геометрический и статический смысл факторов P_i и M_i (рис. 312), легко видим, что их можно принять за новые статические начальные параметры и вновь определить $\omega(x)$ по формуле (11.23), подставив

$$M_0 = M_i; \quad Q_0 = -P_i.$$

При этом за начало координат следует принять не точку O , а соответственно расположению каждого силового фактора точки с абсциссами a_i и b_i . Поэтому аргументами функций Крылова Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 будут расстояния от рассматриваемого сечения до новых силовых факторов P_i и M_i , т. е. отрезки $(x - a_i)$, $(x - b_i)$ и т. п.

Если сил и моментов несколько, то вводят их суммы. При распределенных нагрузках суммы превращаются в интегралы от элементарных силовых факторов $q d\eta$, а при нескольких участках распределенных нагрузок — в суммы интегралов.

Ограничимся рассмотрением случая действия равномерно распределенной нагрузки. Тогда в результате интегрирования с учетом

зависимостей (11.28) получим простую формулу

$$\int_c^d q Y_4(\xi - \eta) d\eta = -\frac{qL}{4} Y_1(\xi - \eta) \Big|_c^d = \\ = -\frac{qL}{4} [Y_1(\xi - d) - Y_1(\xi - c)]. \quad (11.29)$$

Таким образом, при одновременном действии всех перечисленных силовых факторов и начальных параметров полный интеграл $w(x)$ можно представить так:

$$w(x) = w_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \Theta_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ \left. + Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + L^2 \sum M_i Y_3\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - L^3 \sum P_i Y_4\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \right. \\ \left. + \frac{L^4}{4} \sum q_i \left[Y_1\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_1\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right] \right\}. \quad (11.30)$$

Обобщив аналогичным образом выражения для $\Theta(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$, получим следующие универсальные уравнения метода начальных параметров для балки на упругом основании:

$$\Theta(x) = \Theta_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \right. \\ \left. + \alpha L^3 w_0 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + L \sum M_i Y_2\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - L^2 \sum P_i Y_3\left(\frac{x-b_i}{L}\right) - \right. \\ \left. - L^3 \sum q_i \left[Y_4\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_4\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right] \right\}; \quad (11.31)$$

$$M(x) = M_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + Q_0 L Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \alpha L^2 w_0 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) + \\ + \alpha L^3 \Theta_0 Y_4\left(\frac{x}{L}\right) + \sum M_i Y_1\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - L \sum P_i Y_2\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \\ + L^2 \sum q_i \left[Y_3\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_3\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right]; \quad (11.32)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1\left(\frac{x}{L}\right) + \alpha L w_0 Y_2\left(\frac{x}{L}\right) + \alpha L^2 \Theta_0 Y_3\left(\frac{x}{L}\right) - \\ - \frac{4M_0}{L} Y_4\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{4}{L} \sum M_i Y_4\left(\frac{x-a_i}{L}\right) - \sum P_i Y_1\left(\frac{x-b_i}{L}\right) + \\ + L \sum q_i \left[Y_2\left(\frac{x-c_i}{L}\right) - Y_2\left(\frac{x-d_i}{L}\right) \right]. \quad (11.33)$$

Теперь вычисление $w(x)$, $\Theta(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ в каком угодно сечении балки на упругом основании не представит затруднений, если известны начальные параметры w_0 , Θ_0 , Q_0 и M_0 . В каждом конкретном случае начальные параметры можно определить из концевых условий балки. Эти условия для различных случаев закрепления

балки представлены в форме таблицы (табл. 17), при составлении которой предполагалось, что начало координат совмещено с левым концом балки.

Таблица 17

Условия закрепления		Перемещения и силовые факторы для							
левого конца балки	правого конца балки	левого конца ($x = 0$)				правого конца ($x = l$)			
		$w(0)$	$\theta(0)$	$M(0)$	$Q(0)$	$w(l)$	$\theta(l)$	$M(l)$	$Q(l)$
Свободен	Свободен	—	—	M_0	Q_0	—	—	M_l	Q
»	Оперт	—	—	M_0	Q_0	0	—	M_l	—
»	Заделан	—	—	M_0	Q_0	0	0	—	—
Оперт	Оперт	0	—	M_0	—	0	—	M_l	—
»	Заделан	0	—	M_0	—	0	0	—	—
Заделан	»	0	0	—	—	0	0	—	—

В таблице через $M(l)$ и $Q(l)$ обозначены внешние сосредоточенные момент и сила на правой опоре. Если на свободных концах балки внешние силы и моменты отсутствуют, то необходимо положить

$$M_0 = Q_0 = M_l = Q_l = 0.$$

В результате анализа данных таблицы заключаем, что при выборе начала координат на левом конце однопролетной балки два начальных параметра всегда известны. Для определения двух остальных параметров нужно решить систему двух алгебраических уравнений, составляемую из условий закрепления правого конца балки.

§ 74. ИЗГИБ БАЛОК, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ НЕ СЛЕДУЕТ ЗАКОНУ ГУКА

Изложенные ранее расчеты на прочность и жесткость при изгибе, основанные на гипотезе плоских сечений и законе Гука с одинаковым модулем упругости на растяжение и сжатие, не исчерпывают всех случаев, с которыми приходится встречаться конструкторам.

Известно, что закон Гука справедлив, пока напряжения не превышают определенной величины, называемой пределом пропорциональности, а в некоторых случаях расчеты на прочность приходится проводить при более высоких напряжениях, с учетом пластических деформаций. Кроме того, и в пределах упругости зависимость между напряжениями и деформациями у ряда материалов нелинейна, т. е. не подчиняется закону Гука. К таким материалам относятся чугун, камень, бетон, некоторые пластмассы. У некоторых материалов, подчиняющихся закону Гука, модули упругости при растяжении и сжатии различны. Поэтому в последнее время расчеты на

прочность во всех указанных случаях приобретают все большее значение.

Расчеты на прочность с учетом пластических деформаций будут рассмотрены в гл. 18. Здесь ограничимся лишь определением нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного поперечного сечения, материал которой не следует закону Гука на протяжении всего процесса нагружения, причем зависимости между напряжениями и деформациями различны при растяжении и сжатии.

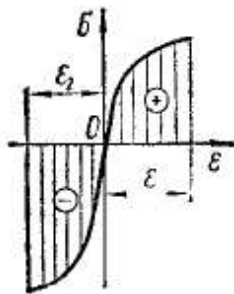


Рис. 313

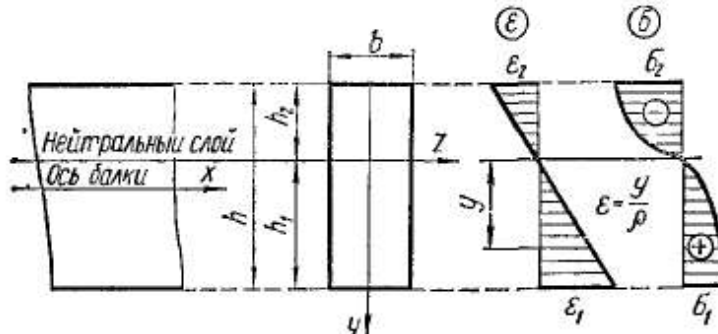


Рис. 314

Рассмотрим также случай изгиба при различных модулях упругости для растяжения и сжатия. Опыты показывают, что и в указанных случаях гипотеза плоских сечений справедлива.

Пусть балка подвергается чистому изгибу. Если предположить, как и прежде, что волокна при изгибе не давят друг на друга, то материал балки будет находиться в состоянии простого растяжения и сжатия.

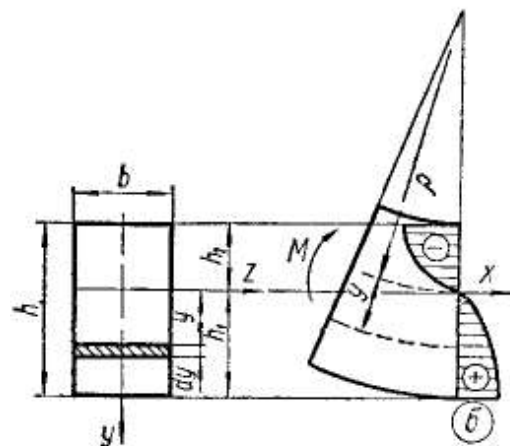


Рис. 315

Диаграммы растяжения и сжатия, записанные для материалов, не следующих закону Гука (чугунов, камней и др.), показывают, что напряжения растут медленнее деформаций и отставание роста напряжений от роста деформаций значительнее при растяжении, чем при сжатии (рис. 313). В этом случае нейтральная линия поперечного сечения не проходит через его центр тяжести, а смещается в сторону центра кривизны оси балки.

На основании гипотезы плоских сечений и указанного характера диаграммы растяжения (сжатия) материала можно изобразить эпюры относительных удлинений и нормальных напряжений (рис. 314) в поперечном сечении балки. Если обозначить радиус кривизны нейтрального слоя через ρ , то относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 315), выразится известной зависимостью

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (11.34)$$

Для определения относительных удлинений волокон балки, а затем нормальных напряжений необходимо установить положение

нейтральной оси поперечного сечения, радиус кривизны нейтрального слоя и выразить аналитически или графически связь между деформациями и напряжениями.

Проведем какое-либо поперечное сечение балки, перпендикулярное к ее оси. При изгибе балки парами сил внутренние силы упругости в поперечном сечении должны привести также к паре, следовательно, проекция нормальных усилий на ось x (рис. 315) равна нулю, а момент их относительно нейтральной оси z равен изгибающему моменту.

Таким образом, получим следующих два уравнения статики:

$$\begin{aligned}\sum X &= \int_F \sigma dF = 0; \\ \sum M_z &= \int_F \sigma y dF - M = 0.\end{aligned}\quad (11.35)$$

Так как $dF = bdy$, то соответственно

$$b \left(\int_0^{h_1} \sigma_p dy - \int_0^{h_2} \sigma_{сж} dy \right) = 0; \quad (11.36)$$

$$b \left(\int_0^{h_1} \sigma_p y dy + \int_0^{h_2} \sigma_{сж} y dy \right) = M. \quad (11.37)$$

Для многих материалов зависимость между напряжениями и деформациями при растяжении и сжатии может быть с достаточной точностью представлена степенным законом

$$\epsilon_p = k_p \sigma_p^n; \quad \epsilon_{сж} = k_{сж} \sigma_{сж}^m, \quad (11.38)$$

где $k_p, k_{сж}, n$ и m — величины, характеризующие физические свойства материала.

Учитывая формулу (11.34) для относительной деформации, из зависимостей (11.38) выразим нормальные напряжения следующим образом:

$$\sigma_p = \left(\frac{\epsilon_p}{k_p} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{y}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_{сж} = \left(\frac{\epsilon_{сж}}{k_{сж}} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{y}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (11.39)$$

Эти зависимости и уравнения (11.36) и (11.37) позволяют определить положение нейтральной оси, величину радиуса кривизны, а также напряжения σ_p и $\sigma_{сж}$.

Подставив формулу (11.39) в уравнение (11.36), получим

$$b \left[\int_0^{h_1} \left(\frac{y}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} dy - \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} dy \right] = 0,$$

а выполнив интегрирование, будем иметь

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{k_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1 - \frac{m}{m+1} \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2 = 0. \quad (11.40)$$

Затем, подставив формулу (11.39) в уравнение (11.37), найдем, что

$$b \left[\int_0^{h_1} \left(\frac{y}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} y dy + \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} y dy \right] = M,$$

и после интегрирования получим

$$\frac{n}{2n+1} b \left(\frac{h_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2^2 = M. \quad (11.41)$$

Имея в виду, что $h_1 + h_2 = h$, из уравнений (11.40) и (11.41) найдем ρ , h_1 и h_2 , а затем по формулам (11.39) — напряжения σ_p и $\sigma_{сж}$.

Можно решить и обратную задачу — определить наибольший допускаемый изгибающий момент по допускаемому напряжению на растяжение $[\sigma_p]$ или сжатие $[\sigma_{сж}]$. Для решения этой задачи запишем по формулам (11.39) напряжения растяжения и сжатия в крайних волокнах балки, находящихся на расстояниях h_1 и h_2 от нейтрального слоя:

$$\sigma_1 = \left(\frac{h_1}{k_p \rho} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_2 = \left(\frac{h_2}{k_{сж} \rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (11.42)$$

На основании этого выражения (11.40) и (11.41) представим в следующем виде:

$$\frac{n}{n+1} \sigma_1 h_1 - \frac{m}{m+1} \sigma_2 h_2 = 0; \quad (11.43)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \sigma_1 h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \sigma_2 h_2^2 = M. \quad (11.44)$$

Кроме того, из формул (11.42) следует, что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1^n k_p}{\sigma_2^m k_{сж}}. \quad (11.45)$$

Присоединив к последним трем уравнениям равенство $h_1 + h_2 = h$, можно вычислить по допускаемому напряжению $[\sigma_1]$ или $[\sigma_2]$ положение нейтральной оси и допускаемое значение изгибающего момента. По предельным значениям напряжений может быть определен предельный изгибающий момент, величина которого соответствует достижению предельного значения одним из напряжений в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах в области растяжения или сжатия.

Подобно тому, как это сделано для балки прямоугольного поперечного сечения, можно решить задачу и для других простых сечений, например состоящих из прямоугольников (таких, как двутавр, тавр и т. п.).

Рассмотрим еще определение нормальных напряжений при изгибе в случае, когда материал следует закону Гука, но модули

упругости при растяжении и сжатии различны. Пусть E_p — модуль упругости материала при растяжении, $E_{сж}$ — при сжатии. Для таких материалов обычно $E_{сж} > E_p$. Эпюра нормальных напряжений в сечении балки для этого случая изображена на рис. 316.

Для волокон, расположенных на расстоянии y от нейтрального слоя, в области растяжения и сжатия

$$\sigma_p = \frac{y}{\rho} E_p \text{ и } \sigma_{сж} = \frac{y}{\rho} E_{сж}. \quad (11.46)$$

Из равенства (11.36) следует, что

$$\int_0^{h_1} \sigma_p dy = \int_0^{h_2} \sigma_{сж} dy. \quad (11.47)$$

Подставив вместо σ_p и $\sigma_{сж}$ их выражения (11.46), будем иметь

$$\frac{E_p}{\rho} \int_0^{h_1} y dy = \frac{E_{сж}}{\rho} \int_0^{h_2} y dy, \quad (11.48)$$

откуда после интегрирования и сокращения на $\frac{1}{2\rho}$ получим

$$E_p h_1^2 = E_{сж} h_2^2, \quad (11.49)$$

или

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{E_{сж}}{E_p}.$$

Принимая во внимание, что $h_1 + h_2 = h$, найдем

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h \sqrt{E_{сж}}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{сж}}}; \\ h_2 &= \frac{h \sqrt{E_p}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{сж}}}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

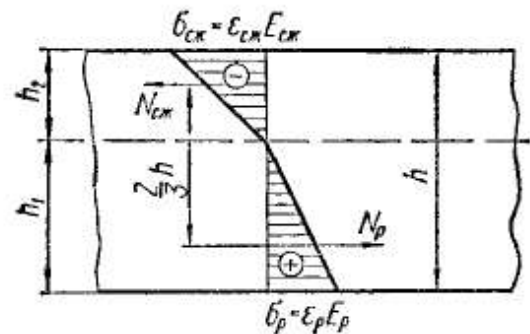


Рис. 316

Таким образом, положение нейтральной оси определено.

Теперь найдем напряжения в крайних волокнах балки в области растяжения σ_p и в области сжатия $\sigma_{сж}$. Из эпюры напряжений следует, что суммарная растягивающая сила N_p в зоне растяжения и сжимающая сила $N_{сж}$ в зоне сжатия поперечного сечения определяются следующими выражениями:

$$N_p = \frac{\sigma_p b h_1}{2}; \quad N_{сж} = \frac{\sigma_{сж} b h_2}{2}. \quad (11.51)$$

Действуют эти силы на расстоянии $\frac{2}{3} h_1$ и $\frac{2}{3} h_2$ от нейтрального слоя. Так как усилия в поперечном сечении приводятся к паре сил, то $N_p = N_{сж}$. Плечо пары равно $\frac{2}{3} h$. Изгибающий момент может быть записан как момент пары сил, равный растягивающей

или сжимающей силе, умноженной на плечо пары:

$$M = N_p \frac{2}{3} h; \quad M = N_{сж} \frac{2}{3} h.$$

Учитывая выражения (11.51) и (11.50), будем иметь

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma_p b h_1 h}{3} = \frac{\sigma_p b h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{E_{сж}}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{сж}}}; \\ M &= \frac{\sigma_{сж} b h_2 h}{3} = \frac{\sigma_{сж} b h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{сж}}}, \end{aligned} \quad (11.52)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_{сж}}} \right); \\ \sigma_{сж} &= \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\sqrt{E_{сж}}}{\sqrt{E_p}} \right). \end{aligned} \quad (11.53)$$

Пользуясь этими формулами, можем по изгибающему моменту найти наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения, если известно отношение модулей упругости.

Представим формулы (11.53) в несколько ином виде. В соответствии с выражениями (11.50) имеем

$$\sqrt{\frac{E_p}{E_{сж}}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{h_2}{\rho}}{\frac{h_1}{\rho}} = \frac{\epsilon_{сж}}{\epsilon_p}.$$

Внеся это отношение в формулы (11.53), получим

$$\sigma_p = \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\epsilon_{сж}}{\epsilon_p} \right); \quad (11.54)$$

$$\sigma_{сж} = \frac{3M}{bh^2} \left(1 + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{сж}} \right). \quad (11.55)$$

В таком виде формулы удобны для вычисления напряжений в случае, когда в крайних волокнах балки измеряются относительные деформации при помощи тензометров.

Глава 12

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под сложным сопротивлением подразумевают различные комбинации ранее рассмотренных простых напряженных состояний брусков (растяжения, сжатия, сдвига, кручения и изгиба).

В общем случае нагружения бруса (рис. 317) в поперечных сечениях могут действовать шесть компонентов внутренних сил — N ,

$Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_{кр}$, связанные с четырьмя простыми деформациями стержня — растяжением (сжатием), сдвигом, кручением и изгибом.

Чего-либо принципиально новой задачи сложного сопротивления при достаточно жестких брусках не вносят, так как совместное действие указанных усилий приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. Умея определять нормальные и касательные напряжения в различных точках стержня, а также главные напряжения, можно по той или иной теории прочности проверить прочность данного стержня. Аналогично могут быть изучены деформация или перемещение бруса путем соответствующего сложения перемещений, получаемых при отдельных более простых нагружениях.

Принцип суммирования действия сил применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука.

На практике одновременное действие всех силовых факторов встречается редко. Чаще приходится иметь дело с различными комбинациями их, которые и рассмотрим ниже.

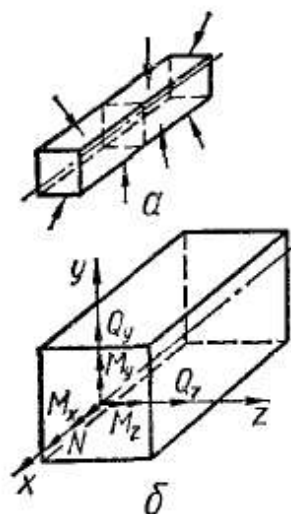


Рис. 317

§ 75. СЛОЖНЫЙ И КОСОЙ ИЗГИБ

Сложный изгиб вызывается силами или моментами, расположенными в разных плоскостях, проходящих через ось балки (рис. 318, а). Такой изгиб называется также *неплоским изгибом*,

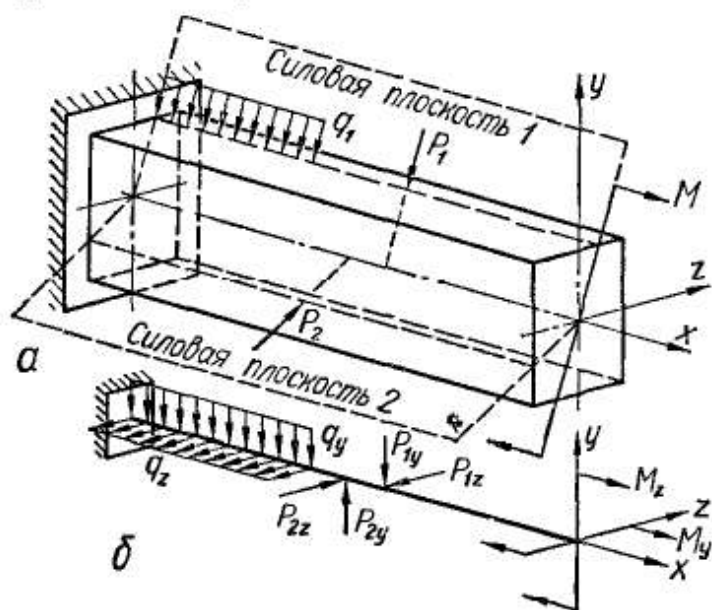


Рис. 318

так как изогнутая ось балки не является плоской кривой.

Если все нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей, то изгиб называется *косым* (рис. 319, а).

Как в случае неплоского, так и в случае косоугольного изгиба, наиболее удобно приводить сложный изгиб к двум плоским. Для этого нагрузки, действующие в произвольных продольных силовых плоскостях, нужно разложить на составляющие, расположенные в главных плоскостях xu и xz , где оси y и z — главные оси инерции сечения (рис. 318 и 319). Таким образом, схемы нагружения брусков при сложном и косоугольном изгибе

составляющие, расположенные в главных плоскостях xu и xz , где оси y и z — главные оси инерции сечения (рис. 318 и 319). Таким образом, схемы нагружения брусков при сложном и косоугольном изгибе

могут быть представлены так, как показано на рис. 318, б и 319, б соответственно.

При сложном изгибе в поперечных сечениях бруса в общем случае возникают четыре внутренних силовых фактора: Q_z , Q_y , M_z и M_y . Проводя расчет на прочность при сложном изгибе, обычно пренебрегают влиянием касательных напряжений.

Вычислим напряжения в некоторой точке (y, z) произвольного поперечного сечения, расположив ее для определенности в первом квадранте (рис. 320, а). Направления главных осей показаны на рисунке. Изгибающие моменты будем считать положительными, если они вызывают в точках первого квадранта растягивающие напряжения.

Исходя из принципа суперпозиции, найдем напряжения в указанной точке, рассматривая два плоских изгиба. Пусть вначале действует только момент M_z . Тогда нормальное напряжение в точке

$$\sigma' = \frac{M_z y}{J_z}.$$

Если действует только момент M_y , то напряжение

$$\sigma'' = \frac{M_y z}{J_y}.$$

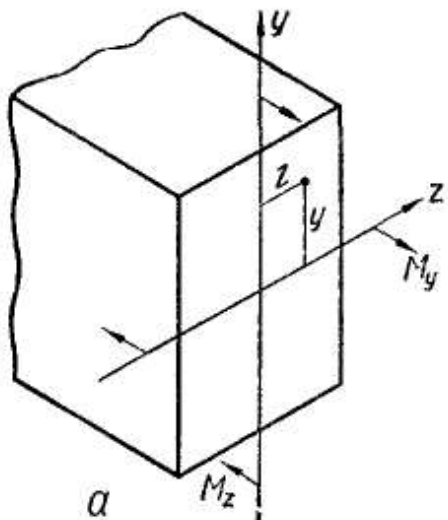


Рис. 320

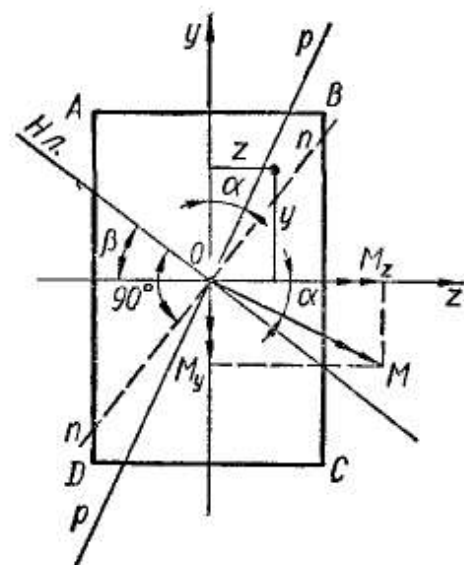
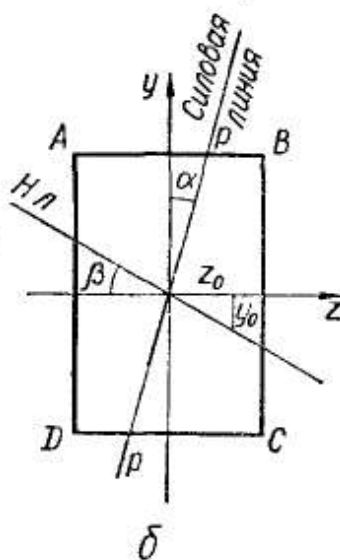


Рис. 321

Очевидно, что при одновременном действии обоих изгибающих моментов напряжения

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}. \quad (12.1)$$

Формула (12.1) позволяет определить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения при сложном, или, как говорят еще, пространственном, изгибе. Изгибающие моменты и координаты точек, в которых определяют напряжения, подставляют в эту формулу со своими знаками.

В случае косоугольного изгиба (рис. 321) изгибающие моменты M_z и M_y связаны зависимостями

$$\begin{aligned} M_z &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha, \end{aligned} \quad (12.2)$$

где M — изгибающий момент в данном сечении в силовой плоскости $p-p$ (рис. 321).

Тогда, используя формулу (12.1), будем иметь

$$\sigma = \frac{M_y \cos \alpha}{J_z} + \frac{M_z \sin \alpha}{J_y},$$

или

$$\sigma = M \left(\frac{y \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (12.3)$$

Уравнение нейтральной линии при сложном изгибе в любом поперечном сечении получим из формулы (12.1), положив $\sigma = 0$ и обозначив координаты точек нейтральной линии через y_0 и z_0 (рис. 320, б). Тогда

$$\sigma = \frac{M_z y_0}{J_z} + \frac{M_y z_0}{J_y} = 0. \quad (12.4)$$

Это уравнение представляет собой уравнение прямой, проходящей через начало координат (центр тяжести O сечения). Положение нейтральной линии характеризуется ее угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y}. \quad (12.5)$$

В общем случае сложного (пространственного) изгиба углы наклона нейтральных линий вдоль оси бруса не остаются постоянными, а изменяются в соответствии с изменением соотношения величин изгибающих моментов M_z и M_y , как это следует из выражения (12.5).

Если в некотором сечении бруса, где действуют изгибающие моменты M_z и M_y (рис. 322, а), нужно найти положение нейтральной линии, то удобно для наглядности сначала показать положение силовой линии $p-p$. Наиболее просто выполнить это, построив векторную диаграмму моментов (рис. 322, б), которая показывает направление результирующего вектора-момента M и, следовательно, определяет угол α наклона его плоскости действия (силовой линии $p-p$):

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}}. \quad (12.6)$$

Теперь выражение (12.5) для угла наклона нейтральной линии с учетом формулы (12.6) можно представить так:

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.} \quad (12.7)$$

Анализируя это выражение, находим, что в отличие от плоского (прямого) изгиба при сложном изгибе нейтральная и силовая линии в общем случае (когда $J_z \neq J_y$) не будут взаимно перпендикулярны.

При косом изгибе в соответствии с формулами (12.2) отношение изгибающих моментов M_y и M_z постоянно по всей длине бруса

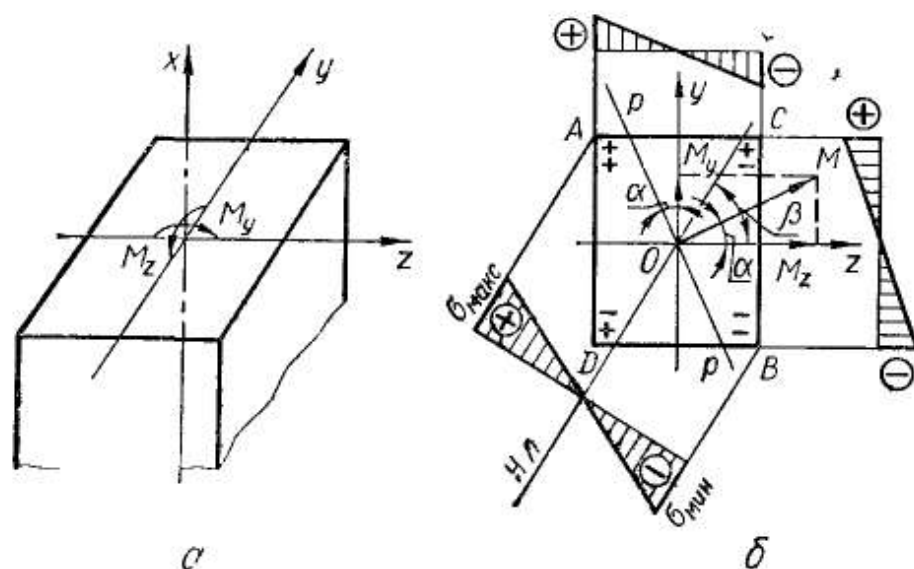


Рис. 322

$\left(\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{tg} \alpha\right)$. Поэтому из выражения (12.7) следует, что и угол β наклона нейтральной линии также постоянен. Значит, поперечные сечения бруса, оставаясь плоскими, поворачиваются вокруг параллельных друг другу нейтральных линий, как и при простом плоском изгибе. Искривление оси бруса при этом происходит в одной плоскости $n-n$, нормальной к направлению нейтральной линии (рис. 321). Эта плоскость называется *плоскостью изгиба*.

Проверку прочности следует проводить в тех сечениях, где изгибающие моменты M_y и M_z одновременно велики. Таких сечений в общем случае сложного изгиба может быть несколько.

Если опасное сечение известно, то в нем нужно отыскать опасные точки. Наглядное представление о распределении напряжений σ (M_1) и σ (M_2) по поперечному сечению бруса дают соответствующие эпюры, представленные на рис. 322, б. Для построения эпюры суммарных напряжений σ_x необходимо провести базис эпюры перпендикулярно к нейтральной линии. Так как из формулы (12.1) следует, что эпюра σ линейна, то для ее построения кроме известной нулевой точки достаточно вычислить какую-либо одну ординату, например для точки А. Очевидно наиболее напряженными точками сечения будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии — точки А и В (рис. 322, б). В данном случае в точке А действует наибольшее растягивающее, а в точке В — наибольшее сжимающее напряжение.

Таким образом, условия прочности для опасных точек имеют вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{M_z y_A}{J_z} + \frac{M_y z_A}{J_y} \leq [\sigma_+]; \quad (12.8)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{M_z y_B}{J_z} - \frac{M_y z_B}{J_y} \leq [\sigma_-]. \quad (12.9)$$

В случае косоугольного изгиба, когда направления изгибающих моментов такие, как показано на рис. 320, а, наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке В, а наибольшие сжимающие — в точке D (рис. 320, б). Условия прочности принимают вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left(\frac{z_B \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_+]; \quad (12.10)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left(\frac{z_D \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (12.11)$$

В частности, для прямоугольного сечения

$$\frac{J_y}{z_D} = \frac{J_y}{z_B} = W_y; \quad \frac{J_z}{y_B} = \frac{J_z}{y_D} = W_z,$$

поэтому формулы (12.10), (12.11) можно упростить так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_+]; \quad (12.12)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_-].$$

В общем случае неплоского изгиба условие прочности принимает вид

$$\left(\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \right) \quad (12.13)$$

Аналогично проверяется прочность в точке, где действуют наибольшие сжимающие напряжения.

Подбор сечений при неплоском изгибе — задача более сложная, чем при простом плоском изгибе. При ее решении необходимо сначала задаться отношением моментов сопротивлений и находить сечения методом подбора.

Заметим, что, если нужно найти касательные напряжения при неплоском изгибе, последние можно определить по формулам

$$\tau_y = \frac{Q_y S_z}{J_z b}; \quad \tau_z = \frac{Q_z S_y}{J_y h}.$$

Определяя перемещения, также исходим из принципа независимости действия сил и вычисляем перемещения в каждой из главных плоскостей. Сохраняя прежнее обозначение прогиба в направлении главной оси y через w и обозначая прогиб в направлении главной оси z через v , дифференциальные уравнения прогибов в плоскостях xz и xy запишем в виде

$$EJ_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M_y; \quad EJ_z \frac{d^2 w}{dx^2} = M_z.$$

Пользуясь указанными дифференциальными уравнениями, непосредственным их интегрированием или по методу начальных параметров можно получить перемещения. Кроме того, перемещения могут быть определены энергетическими методами, которые рассмотрим ниже.

Значение полного прогиба f сечения определится как геометрическая сумма прогибов v и w :

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} . \quad (12.14)$$

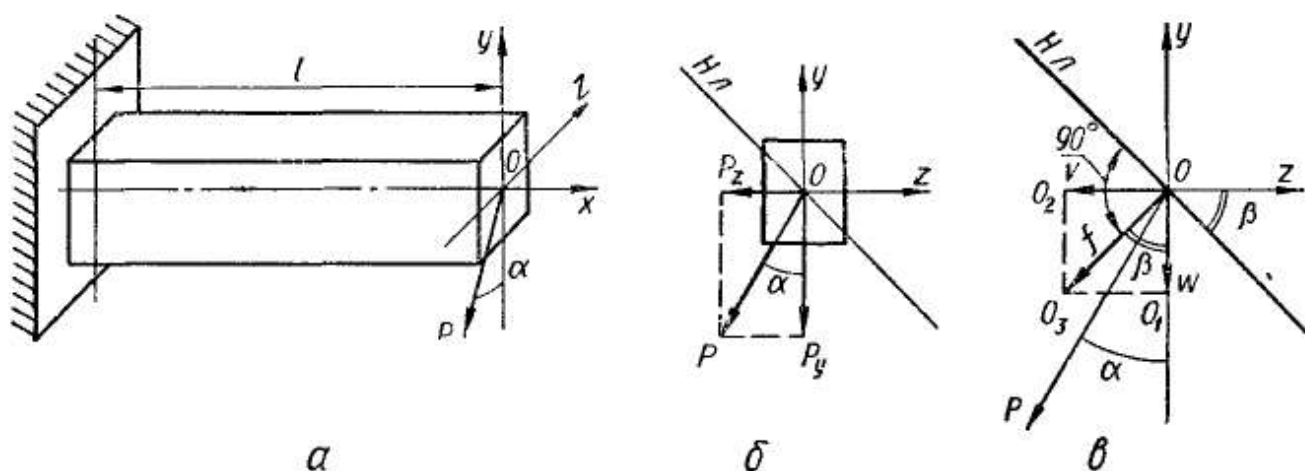


Рис. 323

В качестве примера вычислим прогиб свободного конца консоли, нагруженной силой P , как показано на рис. 323. Раскладывая силу P по направлениям главных осей, получим составляющие

$$P_y = P \cos \alpha; \quad P_z = P \sin \alpha. \quad (12.15)$$

На основании формулы (10.54) определяем прогибы в главных плоскостях (рис. 323, в):

$$w = -\frac{P_y l^3}{3EJ_z}; \quad v = -\frac{P_z l^3}{3EJ_y}. \quad (12.16)$$

Полное перемещение

$$f = \sqrt{w^2 + v^2} = \frac{Pl^3}{3E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}. \quad (12.17)$$

Определим направление полного прогиба f , для чего найдем угол между отрезком OO_3 и осью y :

$$\operatorname{tg} \angle O_1 O O_3 = \frac{v}{w} = \frac{P_z J_z}{P_y J_y} = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}. \quad (12.18)$$

Сравнивая формулы (12.18) и (12.7), замечаем, что угол между плоскостью изгиба и осью y по абсолютной величине равен углу между нейтральной линией сечения и осью z . Отсюда следует, что полный прогиб при косом изгибе перпендикулярен к нейтральной линии сечения (рис. 323, в). Очевидно отклонение полного прогиба от силовой плоскости тем больше, чем больше отношение $\frac{J_z}{J_y}$.

Заметим, что, когда $J_z = J_y$ (это имеет место для круглого сечения и любого правильного многоугольника), суммарный прогиб лежит в силовой плоскости. В этих случаях косо́й изгиб невозможен.

Пример 50. Деревянный прогон сечения 16×20 см (рис. 324, б) свободно опирается на стропильные фермы (рис. 324, а), расстояние между которыми 3 м. Прогон нагружен вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = 400$ кгс/м. Уклон верхнего пояса стропил фермы 1 : 2. Определить наибольшие напряжения сжатия и растяжения в сечении балки, указать точки сечения, где они имеют место, и найти полный прогиб среднего сечения балки.

Максимальный изгибающий момент, который будет посредине балки,

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 800^2}{8} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 45\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Составляющие этого момента, действующие в главных плоскостях инерции (относительно осей z и y), определим по формулам

$$M_z = -M_{\max} \cos \alpha = -45\,000 \cdot 0,894 \text{ кгс} \cdot \text{см} = -40\,248 \text{ кгс} \cdot \text{см};$$

$$M_y = -M_{\max} \sin \alpha = -45\,000 \cdot 0,447 \text{ кгс} \cdot \text{см} = -20\,115 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Угол наклона нейтральной линии $n-n$ определится из формулы (12.7) так

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{b^2} = -\frac{1 \cdot 20^2}{2 \cdot 16^2} = \\ &= -0,7813 = -\operatorname{tg} 38^\circ. \end{aligned}$$

Наибольшими будут напряжения сжатия в точке B и растяжения — в точке D , т. е. в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = 6 \left(\frac{M_z}{bh^2} + \frac{M_y}{b^2h} \right) = \\ &= -\frac{6}{16 \cdot 20} \left(\frac{40\,248}{20} + \frac{20\,115}{16} \right) \text{ кгс/см}^2 = -61,3 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

В точке D , очевидно, будет такое же по величине напряжение растяжения:

$$\sigma_D = 61,3 \text{ кгс/см}^2.$$

Наибольший прогиб имеет место посредине пролета. Определится он по формуле

$$|f| = \frac{5ql^4}{384EJ},$$

в которую вместо интенсивности распределенной нагрузки должны подставляться ее составляющие в направлении главных осей:

$$q_y = q \cos \alpha = 400 \cdot 0,894 = 357,6 \text{ кгс/м} = 3,576 \text{ кгс/см},$$

$$q_z = q \sin \alpha = 400 \cdot 0,447 = 178,8 \text{ кгс/м} = 1,788 \text{ кгс/см},$$

а также моменты инерции относительно главных осей z и y . Составляющие прогиба тогда

$$w = -\frac{5q_y l^4}{384EJ_z} = -\frac{5 \cdot 3,576 \cdot 300^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 20^3} \text{ см} = -0,35 \text{ см};$$

$$v = -\frac{5q_z l^4}{384EJ_y} = -\frac{5 \cdot 1,788 \cdot 300^4 \cdot 12}{384 \cdot 10^5 \cdot 16^3 \cdot 20} \text{ см} = -0,28 \text{ см},$$

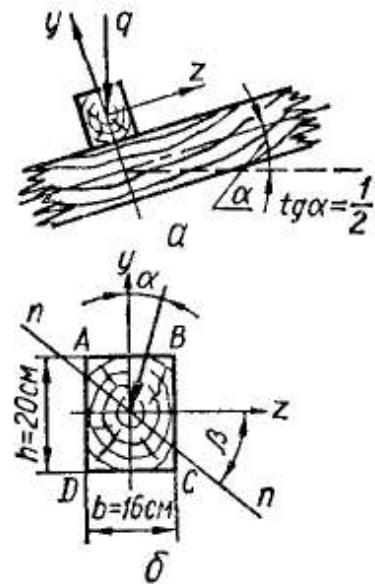


Рис. 324

а полный прогиб найдем как геометрическую сумму указанных составляющих прогиба:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{0,28^2 + 0,35^2} \text{ см} = 0,45 \text{ см.}$$

Прогиб f лежит в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии.

§ 76. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

Расчеты на совместное действие изгиба и растяжения можно свести к следующим двум основным видам:

- расчеты на действие продольно-поперечных нагрузок;
- расчеты на внецентренное растяжение (сжатие).

Отдельно должен быть рассмотрен изгиб с растяжением (сжатием) кривого бруса.

Сложный изгиб с растяжением (сжатием) прямого бруса. Если на балку действуют и продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса, то в общем случае (рис. 325, а) в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_z и M_y в двух плоскостях, поперечные силы Q_z и Q_y , а также продольная сила N (рис. 325, б). Таким образом, в этом случае будет сложный изгиб с

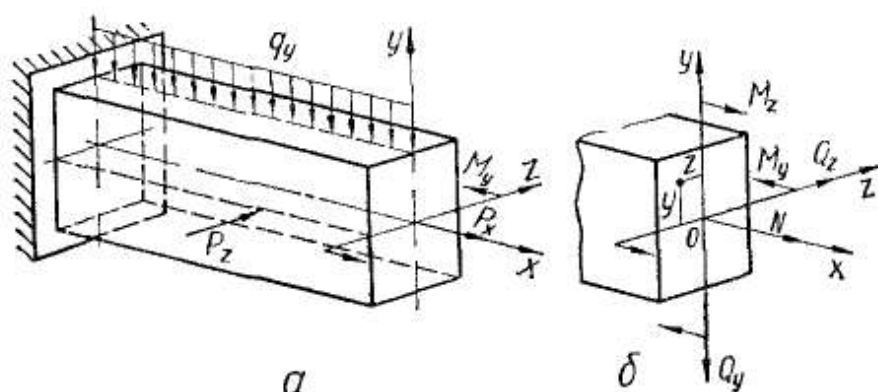


Рис. 325

растяжением или сжатием. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (12.19)$$

Изгибающие моменты, продольную силу и координаты точки, в которой вычисляют напряжения, подставляют сюда с их знаками.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что напряженное состояние в опасной точке линейно. Следовательно, условие прочности имеет простейший вид:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (12.20)$$

Если сечение имеет две оси симметрии и выступающие углы, то опасной будет одна из угловых точек. Напряжения в ней опреде-

ляют по формуле (12.19) или же так ¹:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (12.21)$$

Знаки в этой формуле комбинируют по смыслу или на основе сопоставления с формулой (12.19).

В случае плоского изгиба в главной плоскости yOx с растяжением (сжатием) трехчленная формула превращается в двухчленную:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z} \quad (12.22)$$

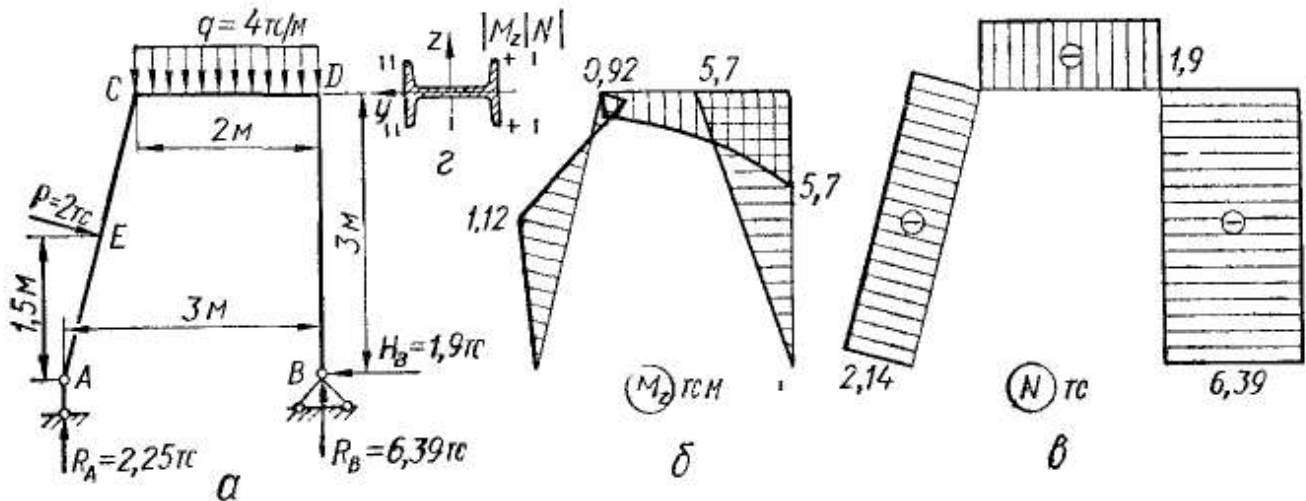


Рис. 326

Эти формулы применяют при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. Опасными в этом случае являются те сечения, где действует наибольший изгибающий момент M_{\max} .

В случае расчета брусьев с поперечным сечением произвольной формы для определения опасной точки сечения необходимо прежде всего установить положение нейтральной линии. Способ определения положения нейтральной линии описан ниже при рассмотрении внецентренного растяжения.

Пример 51. Подобрать двутавровое сечение плоской стальной рамы (рис. 326, а) при $[\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2$.

Определив опорные реакции и построив эпюры M_z и N (рис. 326, б, в), обнаруживаем, что опасным является сечение D правой стойки, в котором

$$M_{\max} = 57 \cdot 10^4 \text{ кгс} \cdot \text{см}; \quad N = -63,9 \cdot 10^2 \text{ кгс}.$$

Опасные точки в этом сечении находятся слева (рис. 326, г), так как здесь арифметически складываются напряжения от M_z и N . В соответствии с формулой (12.22) условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{57 \cdot 10^4}{W_z} + \frac{63,9 \cdot 10^2}{F} \text{ кгс/см}^2 \leq 1600 \text{ кгс/см}^2. \quad (12.23)$$

¹ При изгибе со сжатием применять приведенные формулы можно лишь к коротким стержням большой жесткости, так как в случае тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости (см. гл. 19).

Условие прочности содержит две неизвестные величины — W_z и F . В большинстве случаев напряжения σ_x от изгиба больше, чем от продольной силы, поэтому при подборе сечения можно вначале опустить второе слагаемое и найти приближенное значение W_z^H из расчета на изгиб

$$W_z^H \geq \frac{57 \cdot 10^4}{1600} \text{ см}^3 = 356 \text{ см}^3.$$

Затем по сортаменту (приложение 1) нужно выбрать двутавр с моментом сопротивления, несколько большим, чем W . Выбираем двутавр № 27, для которого $W_z = 371 \text{ см}^3$, $F = 40,2 \text{ см}^2$

Далее проверяем прочность выбранного сечения, вычисляя максимальные нормальные напряжения по формуле (12.22)

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{57 \cdot 10^4}{371} + \frac{63,9 \cdot 10^2}{40,2} \text{ кгс/см}^2 = 1536 + 159 \text{ кгс/см}^2 = 1695 \text{ кгс/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{1695 - 1600}{1600} \cdot 100 \% \approx 6 \% > 5 \%,$$

поэтому необходимо увеличить размер сечения, приняв по сортаменту следующий больший номер двутавра — № 27а, для которого

$$W_z = 407 \text{ см}^3, \quad F = 43,2 \text{ см}^2$$

Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса. Ядро сечения. Внецентренное растяжение (сжатие) представляет собой частный случай сложного изгиба с растяжением (сжатием), при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса, так что их равнодействующая не совпадает с осью бруса (рис. 327), а проходит через точку p , называемую полюсом силы

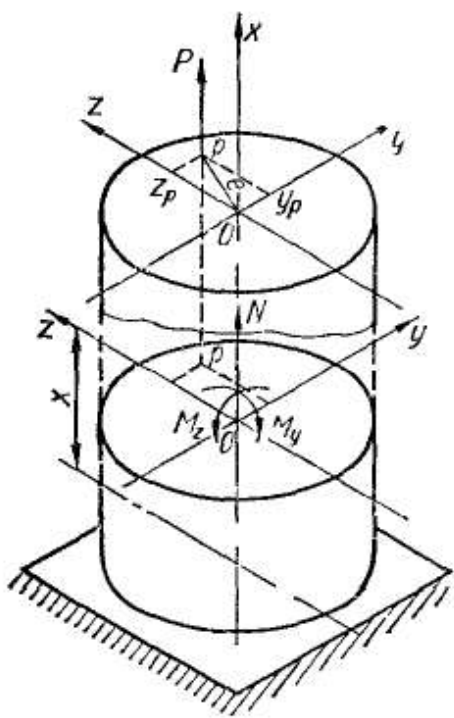


Рис. 327

Пусть на брус произвольного сечения действует одна сила P , параллельная оси бруса и пересекающая любое поперечное сечение в точке p (рис. 327). Координаты этой точки в системе главных осей сечения обозначим через y_p и z_p , а расстояние этой точки до оси x , называемое эксцентриситетом, — через e . В любом поперечном сечении при такой нагрузке внутренние силовые факторы $N = P$; $M_y = Pz_p$; $M_z = Py_p$.

Таким образом, напряжения в произвольной точке сечения будут складываться

из напряжений осевого растяжения силой N и напряжений от чистого изгиба моментами M_y и M_z :

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (12.24)$$

Внеся сюда вместо N , M_y и M_z их значения, получим

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p F}{J_y} z + \frac{y_p F}{J_z} y \right). \quad (12.25)$$

Этой формуле можно придать несколько иной вид, выразив главные моменты инерции через радиусы инерции:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y \right). \quad (12.26)$$

Для определения опасной точки при сложном профиле целесообразно построить нейтральную линию сечения. Опасной в сечении будет точка, наиболее удаленная от нейтральной линии.

Уравнение нейтральной линии получим, приравняв к нулю правую часть уравнения (12.26) и обозначив координаты точек на нейтральной линии через y_0 и z_0 :

$$\frac{z_p}{i_y^2} z_0 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 = -1. \quad (12.27)$$

Полагая в этом уравнении поочередно $z_0 = 0$ и $y_0 = 0$, найдем отрезки y_n и z_n , отсекаемые нейтральной линией на осях y и z (рис. 328):

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_n = -\frac{i_z^2}{y_p}. \quad (12.28)$$

Из зависимостей (12.28) следует, что нейтральная линия пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка p .

Теперь, проведя параллельно нейтральной линии касательные к контуру сечения, найдем наиболее напряженные точки A и B в растянутой и сжатой зонах сечения (рис. 328). Напряжения в этих точках и условия прочности имеют вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_A + \frac{y_p}{i_z^2} y_A \right) \leq [\sigma_+]; \quad (12.29)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{z_p}{i_y^2} z_B - \frac{y_p}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_-].$$

Здесь z_A , y_A и $-z_B$, $-y_B$ — координаты точек A и B соответственно. Эпюра напряжений σ приведена на рис. 328. Для прямоугольного сечения условие прочности удобнее представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12.30)$$

Формулы (12.29) и (12.30) справедливы и в случае действия сжимающей силы P , если нет опасности возникновения продольного изгиба.

Ядро сечения. Хотя до сих пор мы изображали нейтральную линию проходящей через сечение, она в общем случае может проходить и вне его. Действительно, если сила P приложена в центре

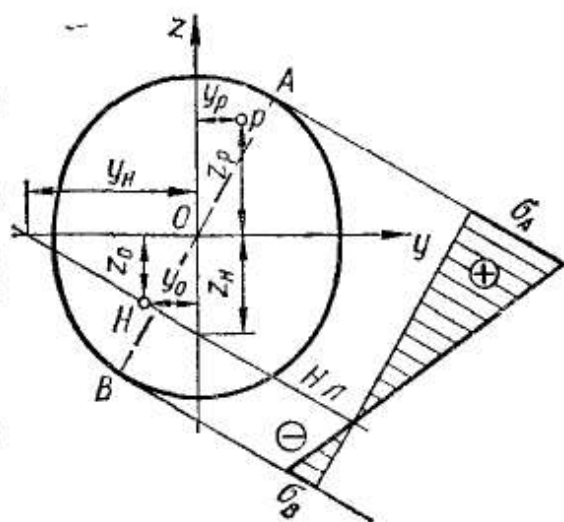


Рис. 328

тяжести, то нейтральная линия проходит в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно.

По мере увеличения эксцентриситета e (рис. 329) нейтральная линия будет приближаться к сечению и при некотором положении силы P (на рис. 329, например, при положении A_3) впервые коснется контура сечения. При дальнейшем увеличении эксцентриситета нейтральная линия пересечет сечение, причем нормальные напряжения в сечении будут обоих знаков: по одну сторону от нейтральной линии — растягивающими, а по другую — сжимающими.

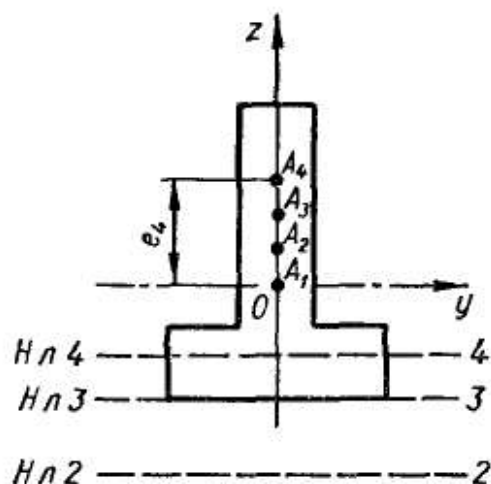


Рис. 329

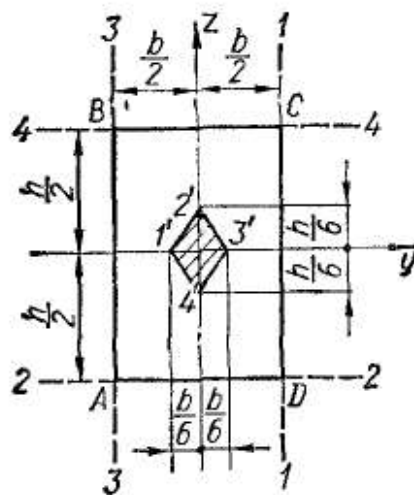


Рис. 330

Представляет интерес установить область таких удалений силы P от оси, при которых нормальные напряжения по всему поперечному сечению будут одного знака. Такая область называется ядром сечения. Это важно для брусков из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (например, для кирпичной кладки, бетона и серого чугуна).

Итак, ядром сечения называется область вокруг центра тяжести поперечного сечения, которая обладает следующим свойством: если внецентренно приложенная нагрузка расположена в области ядра, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения имеют один знак.

Для построения ядра сечения будем задаваться различными положениями нейтральной линии, касательными к контуру сечения, и вычислять координаты соответствующих точек приложения силы P по следующим формулам, вытекающим из выражения (12.28):

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n}. \quad (12.31)$$

Вычисленные координаты определяют точки, лежащие на границе ядра сечения.

Чтобы облегчить построение ядра сечения, используем следующее свойство нейтральной линии: при повороте нейтральной линии вокруг некоторой фиксированной точки A контура сечения точка приложения силы перемещается вдоль некоторой прямой. Для обо-

снования этого свойства достаточно подставить в уравнение (12.27) координаты точки $A (y_{OA}, z_{OA})$, лежащей на нейтральной линии. Получим

$$\boxed{\frac{z_p z_{OA}}{i_y^2} + \frac{y_p y_{OA}}{i_z^2} = -1.} \quad (12.32)$$

Действительно, уравнение (12.32) при $z_{OA} = \text{const}$, $y_{OA} = \text{const}$ является уравнением прямой относительно координат точек приложения силы $P - (y_p, z_p)$.

Таким образом, для построения ядра сечения какой-либо фигуры нужно провести ряд положений нейтральной линии, совпадающих со сторонами сечения, а также касающихся его выступающих точек.

Построим, например, ядро сечения для прямоугольника $ABCD$ (рис. 330). Совместим вначале нейтральную линию со стороной CD (положение 1—1). Очевидно в этом случае

$$y_n = \frac{b}{2}; \quad z_n = \infty.$$

Тогда из выражений (12.31)

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{b}{6}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{z_n} = 0.$$

Здесь учтено, что

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Таким образом, координаты точки $1'$ ядра сечения определены.

Совместим теперь нейтральную линию со стороной AD (положение 2—2). Имеем

$$y_n = \infty; \quad z_n = \frac{h}{2}.$$

Тогда координаты точки $2'$ ядра

$$y_p = 0; \quad z_p = -\frac{h^2}{12 \left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}.$$

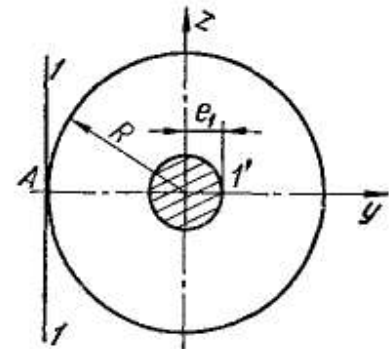


Рис. 331

Аналогично определяются координаты точек $3'$ и $4'$, соответствующих положениям нейтральной линии 3—3 и 4—4.

Так как при переходе нейтральной линии с одной стороны на другую она поворачивается вокруг угловой точки сечения, то точка приложения силы перемещается по прямой, образуя контур ядра. Таким образом, ядро сечения будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения.

Пример 52. Для круглого сечения построить ядро сечения (рис. 331).

В круге все центральные оси — главные. Поэтому при касании нейтральной линии 1—1 в любой точке A точка $1'$ лежит на диаметре, также проходящем через

точку A , и ее координаты следующие:

$$y_p = -\frac{l_2^2}{y_n} = -\frac{l_2^2}{-R} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}; \quad z_p = 0.$$

Можно, очевидно, сделать вывод, что благодаря симметрии сечения ядро сечения также будет кругом с радиусом

$$e_1 = \frac{R}{4}.$$

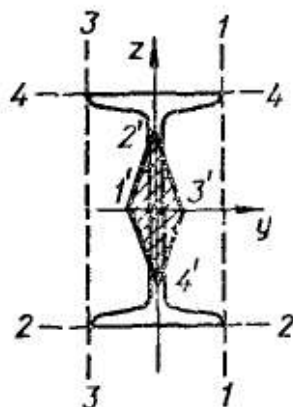


Рис. 332

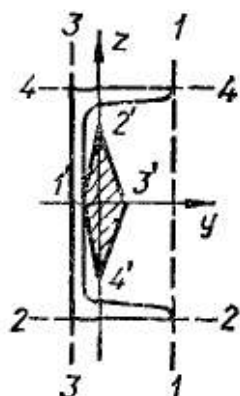


Рис. 333

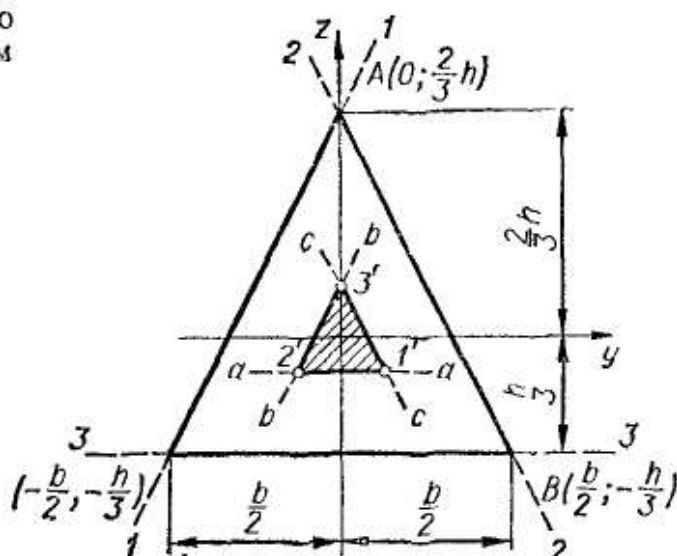


Рис. 334

Построение ядра сечения для двутавра (рис. 332), швеллера (рис. 333) и треугольника (рис. 334) рекомендуем читателю выполнить самостоятельно.

§ 77. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Круглые валы. Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т. п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы: $M_{кр} = M_x$; M_y ; M_z ; Q_y и Q_z . Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и изгиба.

Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью должны быть построены эпюры изгибающих моментов M_y , M_z и крутящего момента M_x .

Нагрузки, действующие на вал, разлагаем на составляющие вдоль координатных осей (рис. 335), а затем строим эпюры: от сил P_{1z} , P_{2z} , ..., P_{nz} — эпюру M_y , от сил P_{1y} , P_{2y} , ..., P_{ny} — эпюру M_z (рис. 335, б и в).

При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений имеет место прямой изгиб под действием результирующего изгибающего момента (рис. 336)

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (12.33)$$

Вектор момента M в разных сечениях может иметь различные направления, в силу чего даже при отсутствии распределенных нагрузок эпюра M может быть криволинейной (рис. 335, г). Для общего случая это легко показать аналитически.

Пусть $M_y = a + bx$; $M_z = c + dx$ (a , b , c и d — постоянные коэффициенты). Тогда

$$M = \sqrt{(a + bx)^2 + (c + dx)^2}.$$

Выражение, стоящее под радикалом, лишь в некоторых частных случаях является полным квадратом (например, при $a = c = 0$), а в большинстве случаев эпюра криволинейна, причем

$$M \leq \sqrt{a^2 + c^2} + (\sqrt{b^2 + d^2})x.$$

Это позволяет строить эпюры M упрощенным способом, несколько завышая значения суммарного изгибающего момента M на участках между переломами эпюры: величины суммарного изгибающего момента M вычисляют лишь для тех сечений, в которых на эпюрах M_y и M_z есть переломы. Эти величины откладывают в масштабе по одну сторону от оси на эпюре M и соединяют прямой линией.

Далее строим эпюру $M_{кр} = M_x$ (рис. 335, δ) и ищем опасные сечения, в которых одновременно велики M и $M_{кр}$. Сопоставляя эпюры, построенные в одном масштабе, находим, что опасным будет сечение 1—1 или 2—2.

Теперь в опасном сечении нужно найти опасные точки. Легко определяем положение нейтральной линии ($\beta = \alpha$) и строим эпюры нормальных напряжений σ от результирующего изгибающего момента M (рис. 337), которые изменяются пропорционально расстоянию то-

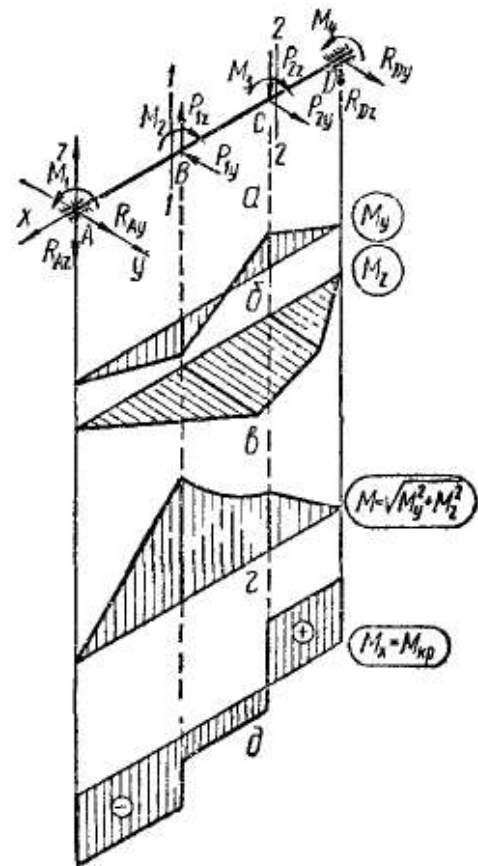


Рис. 335

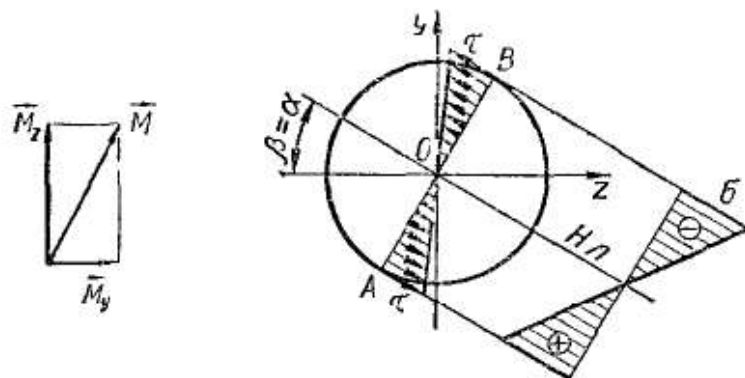


Рис. 336

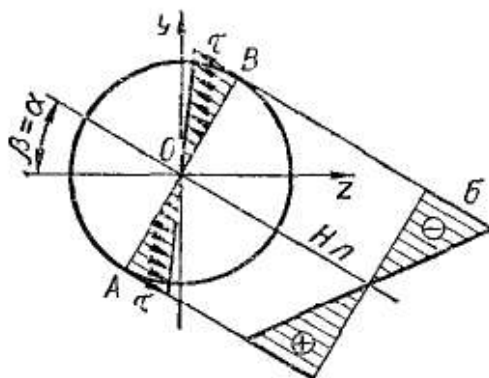


Рис. 337

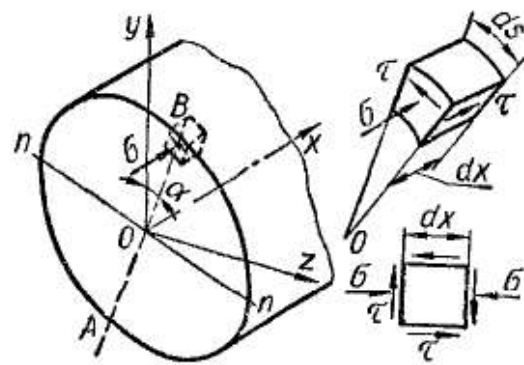


Рис. 338

чек от нейтральной линии. Очевидно, опасными являются точки A и B , наиболее удаленные от нейтральной линии, — в них одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные

напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}; \quad (12.34)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}. \quad (12.35)$$

У наиболее опасной точки B выделим элемент (рис. 338). По четырем его граням действуют касательные напряжения, а к двум из этих граней приложены еще и нормальные напряжения. Остальные две грани свободны от напряжений. Таким образом, при изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии. Совершенно аналогичные напряжения на гранях мы имели при изучении главных напряжений в изгибаемом брусе (гл. 10), поэтому здесь главные напряжения нужно определять по тем же формулам:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).} \quad (12.36)$$

Разница между выражениями (10.30) и (12.36) лишь в том, что в последнем случае касательные напряжения вызываются крутящим моментом, а при изгибе они вызывались поперечной силой.

Заметим, что в данном случае сложного напряженного состояния влиянием касательных напряжений от поперечных сил пренебрегаем, так как они значительно меньше касательных напряжений, вызванных кручением.

Для проверки прочности элемента, выделенного у опасной точки, нужно, выбрав соответствующую теорию прочности, воспользоваться одной из формул § 62, например формулами (10.35), (10.34): по теории Мора

$$\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (12.37)$$

по IV теории

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (12.38)$$

Подставляя в формулы (12.37), (12.38) выражения (12.34), (12.35) для напряжений и учитывая, что $W_p = 2W$, получим

$$\boxed{\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{\frac{1-m}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma];} \quad (12.39)$$

$$\boxed{\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{\sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \leq [\sigma].} \quad (12.40)$$

Числители этих формул представляют собой приведенные моменты, действие которых эквивалентно совместному действию трех моментов (согласно принятой теории прочности). Следовательно,

$$M_{\text{пр}M} = \frac{1-m}{2} \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (12.41)$$

$$M_{\text{пр}IV} = \sqrt{0,75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} \quad (12.42)$$

В случае необходимости подобным же образом можно получить формулы для приведенных моментов и по другим теориям прочности.

Нетрудно заметить, что теперь условия прочности (12.37), (12.38) можно заменить одной простой формулой

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (12.43)$$

Таким образом, при совместном действии изгиба с кручением стержни круглого сечения рассчитывают на изгиб от приведенного момента $M_{\text{пр}}$.

Решая неравенство (12.43) относительно W , получаем формулу для определения момента сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} \quad (12.44)$$

и диаметра круглого вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{пр}}}{\pi [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{10M_{\text{пр}}}{[\sigma]}} \quad (12.45)$$

Заметим, что приведенные формулы полностью применимы и к стержням кольцевого сечения.

Рассмотрим простейший пример расчета вала на изгиб с кручением.

Пример 53. На вал (рис. 339) насажены три зубчатых колеса. Колеса нагружены силами $P_1 = 400$ кгс; $P_2 = 300$ кгс; $P_3 = 200$ кгс, причем сила P_1 вертикальна, а силы P_2 и P_3 — горизонтальны. Диаметры зубчатых колес следующие: $D_1 = 100$ мм; $D_2 = 300$ мм; $D_3 = 250$ мм. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 600$ кгс/см². Подобрать диаметр вала по четвертой теории прочности.

Заменяем действующую нагрузку статически эквивалентной системой сил.

Перенесем силы P_1 , P_2 и P_3 на ось вала, заменяя каждую из них силой, приложенной в точке B , C или D соответственно, и скручивающей парой сил $M_1 = \frac{1}{2} P_1 D_1$; $M_2 = \frac{1}{2} P_2 D_2$; $M_3 = \frac{1}{2} P_3 D_3$ соответственно. Таким образом, получаем расчетную схему (рис. 339). На схеме сразу указаны как значения приложенных внешних нагрузок (P_i , M_{ki}), так и величины вызванных ими опорных реакций.

Рассматривая отдельно силы в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 340, *a* и *b*), строим эпюры изгибающих моментов. Для построения суммарной эпюры моментов M вычисляем ординаты в характерных точках по формуле (12.33):

в сечении *B*

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1600^2 + 500^2} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \sqrt{2\,810\,000} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 1676 \text{ кгс} \cdot \text{см},$$

в сечении *C*

$$M = \sqrt{4400^2 + 5625^2} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \sqrt{51\,000\,625} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 7142 \text{ кгс} \cdot \text{см};$$

в сечении *D*

$$M = \sqrt{6400^2 + 2500^2} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \sqrt{47\,210\,000} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 6871 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Эпюра *M*, построенная по этим данным, приведена на рис. 340, *в*. Как указывалось выше, на участках *BC* и *CD* такая эпюра имеет завышенные значения ординат (действительные значения показаны штриховой линией)

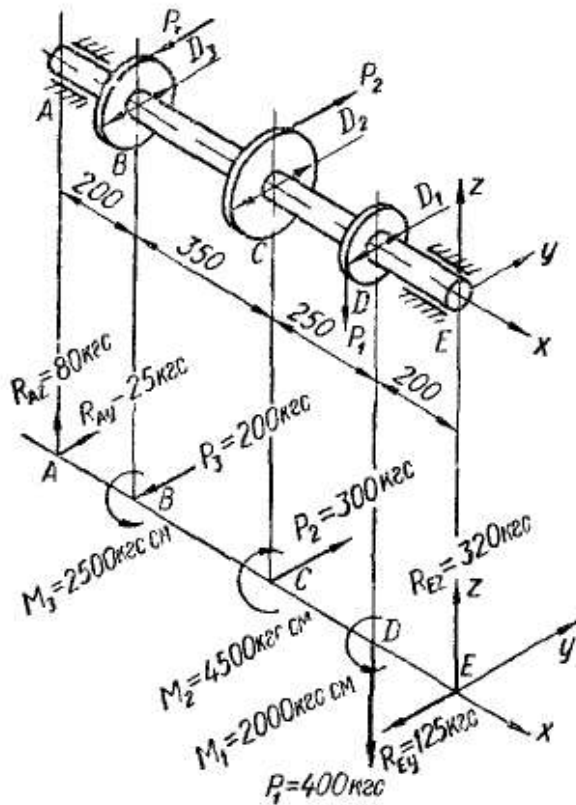


Рис. 339

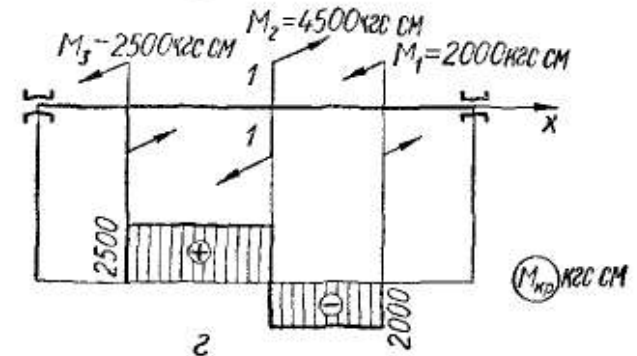
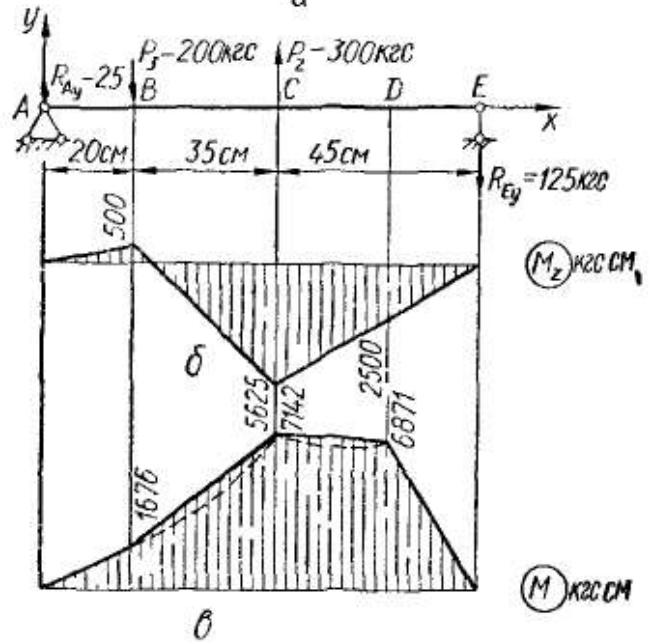
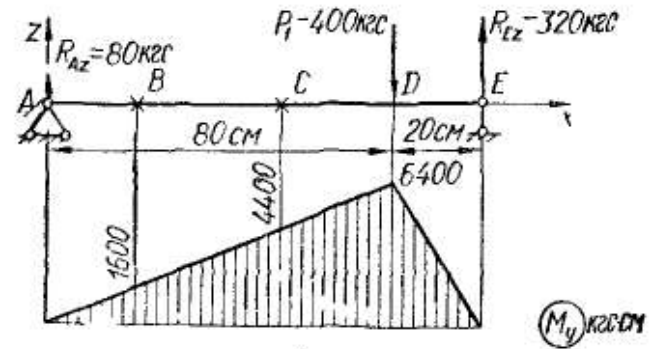


Рис. 340

Рассматривая действующие на вал моменты, строим эпюру крутящих моментов (рис. 340, *г*)

Сопоставляя эпюры *M* и *M_{кр}*, находим, что опасным является сечение 1—1, расположенное слева от точки *C*, где одновременно действуют $M = 7142 \text{ кгс} \cdot \text{см}$ и $M_{кр} = 2500 \text{ кгс} \cdot \text{см}$

Согласно IV теории прочности, приведенный момент вычислим по формуле (12.42). Получим

$$M_{пр} = \sqrt{0,75 \cdot 2500^2 + 7142^2} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \sqrt{55\,688\,125} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 7463 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Подставляя приведенный момент в формулу (12.44), находим требуемый осевой момент сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]} = \frac{7463}{600} \text{ см}^3 = 12,44 \text{ см}^3$$

и, положив $W \approx 0,1 d^3$, вычисляем необходимый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 12,44} \text{ см} = \sqrt[3]{124,4} \text{ см} = 4,99 \text{ см}.$$

Округлив до ближайшего стандартного диаметра, принимаем $d = 50 \text{ мм}$.

Брус прямоугольного сечения. На практике часто встречаются стержни некруглого сечения, подверженные действию крутящих и изгибающих моментов. В качестве примера рассмотрим брус прямоугольного сечения (рис. 341, а), нагруженный силами P_1 и P_2 , вызывающими в поперечных сечениях изгибающие моменты M_y и M_z , а также поперечные силы Q_y и Q_z .

Расчет выполняем в такой последовательности. Раскладываем заданные нагрузки (силы P_1 и P_2) на составляющие вдоль координатных осей и приводим их к оси вала; при этом получаем в поперечных сечениях, в плоскостях которых находятся точки приложения сил, внешние скручивающие моменты $M_{к1} = M_{1x}$ и $M_{к2} = M_{2x}$. Полученная таким образом расчетная схема представлена на рис. 341, б.

Для того чтобы установить положение опасного сечения, строим эпюры изгибающих моментов M_y и M_z , а также эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ (рис. 341, в).

Сопоставление эпюр показывает, что наиболее опасным является сечение 1—1 бруса, расположенное левее точки приложения силы P_2 . В этом сечении действуют наибольшие изгибающие моменты M_z , M_y и максимальный крутящий момент $M_{кр}$. Чтобы проверить прочность бруса, нужно в опасном сечении найти опасную точку, вычислить для нее эквивалентное напряжение (по одной из теорий прочности) и сопоставить его с допускаемым напряжением.

Для нахождения опасной точки сечения строим эпюры напряжений от всех силовых факторов (рис. 342, б—е): $\sigma_x (M_z)$; $\sigma_x (M_y)$; $\tau_{zx} (Q_z)$; $\tau_{yx} (Q_y)$; $\tau (M_{кр})$.

Эпюра $\tau (M_{кр})$ для длинной стороны контура имеет максимум, который обо-

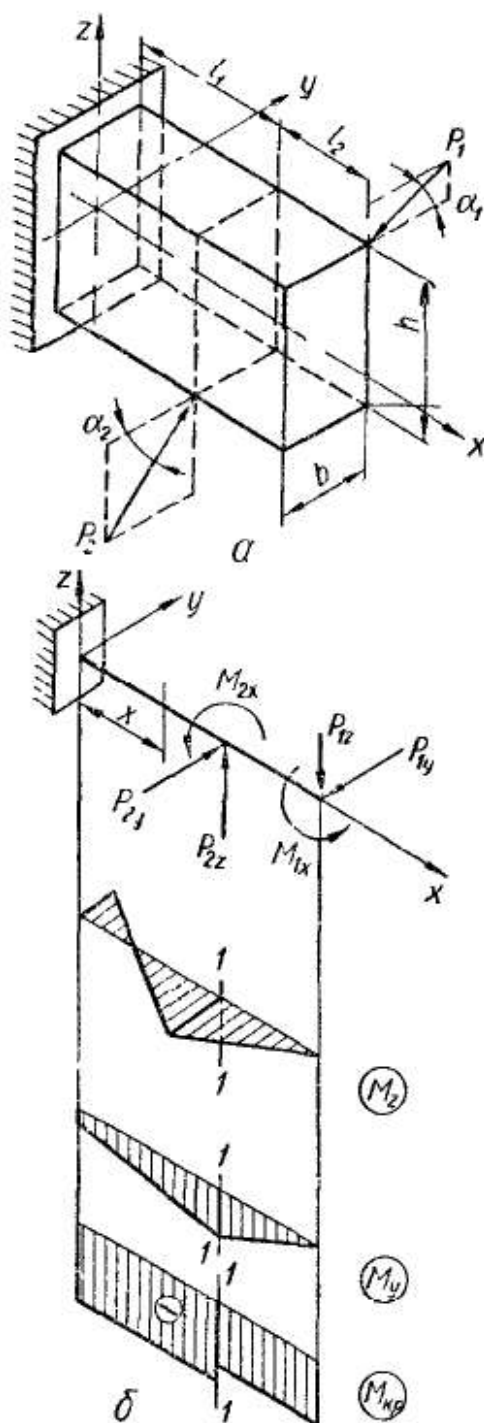


Рис. 341

значим $\tau_{\max}(M_{кр})$. Наибольшую ординату эпюры τ ($M_{кр}$) на короткой стороне обозначим τ' ($M_{кр}$). Эти напряжения можно рассчитать по известным формулам кручения брусьев прямоугольного сечения (гл. 9):

$$\tau_{\max}(M_{кр}) = \tau_L = \tau_T = \frac{M_x}{\alpha h b^2}; \quad (12.46)$$

$$\tau'(M_{кр}) = \tau_S = \tau_K = \gamma \tau_{\max}(M_x).$$

Эпюры нормальных и касательных напряжений наглядно показывают, что в отличие от круглого сечения в рассматриваемом слу-

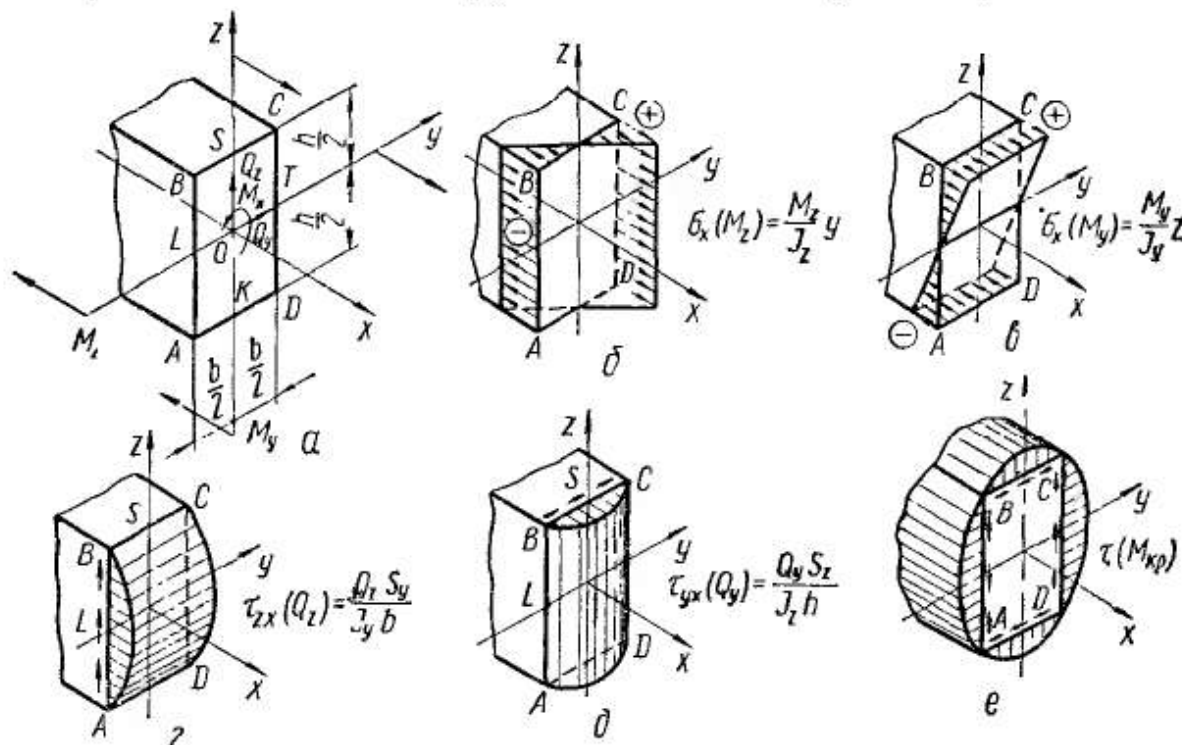


Рис. 342

чае наибольшие нормальные напряжения σ_x и наибольшие касательные напряжения $\tau(Q)$ и $\tau(M_{кр})$ имеют место не в одной и той же точке.

Следовательно, для выявления самой опасной точки в сечении нужно сопоставить эквивалентные напряжения в нескольких опасных точках. Обычно считают достаточным рассмотреть три точки сечения: одну угловую точку (A или C), одну точку посередине длинной стороны прямоугольника (L или T) и одну точку посередине короткой стороны прямоугольника (S или K).

Элемент, выделенный в окрестности точки C (при принятых на рис. 342, a направлениях M_y и M_z), находится в условиях простого растяжения напряжениями, равными сумме нормальных напряжений от M_y и M_z . Поэтому условие прочности для этой точки должно быть записано как для случая линейного напряженного состояния:

$$\sigma_C = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (12.47)$$

Элемент в окрестности точки A также находится в условиях линейного напряженного состояния — простого сжатия, так как σ_A от-

личается от σ_c только знаком. Если материал бруса имеет разные допускаемые напряжения для растяжения и для сжатия, то проверять прочность по формуле (12.47) необходимо в каждой из этих точек.

Элементы в окрестности точек L и K находятся в плоском напряженном состоянии, и, следовательно, главные напряжения в них, как и в круглом брус, можно вычислить по формуле (12.36). В общем случае касательные напряжения, входящие в формулу (12.36), следует вычислять как от действия крутящего момента $M_{кр}$, так и от действия поперечных сил:

$$\begin{aligned}\tau_L &= \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_z}{bh}; \\ \tau_K &= \gamma \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh}.\end{aligned}\quad (12.48)$$

Однако касательные напряжения от поперечных сил Q_y и Q_z , как указывалось, обычно бывают малы, а поэтому в большинстве случаев их влиянием можно пренебречь.

Для вычисления эквивалентных напряжений в точках L и K подставляем значения нормальных и касательных напряжений в формулы (12.37) и (12.38). Одновременно получим и соответствующие условия прочности (по IV теории и по теории Мора):

в точке L

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.49)$$

$$\sigma_{эквM} = \frac{1-m}{2} \frac{M_z}{W_z} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.50)$$

в точке K

$$\sigma_{эквIV} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]; \quad (12.51)$$

$$\sigma_{эквM} = \frac{1-m}{2} \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.52)$$

Знаки моментов при подстановке их в уравнения (12.49) — (12.52) не имеют значения, так как в эти формулы входят квадраты моментов.

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках (C , L и K) по формулам (12.47) и (12.49) — (12.52), причем в каждом отдельном случае положение наиболее опасной точки зависит от конкретного соотношения величин моментов M_x , M_y и M_z . Для иллюстрации методики расчета рассмотрим числовой пример.

Пример 54. Проверить прочность бруса (рис. 341, а) по IV теории прочности, если силы, действующие на брус, таковы: $P_1 = 721$ кгс; $P_2 = 1340$ кгс; с осью y они составляют углы $\alpha_1 = 33^\circ 41'$ и $\alpha_2 = 26^\circ 34'$; размеры поперечного сечения

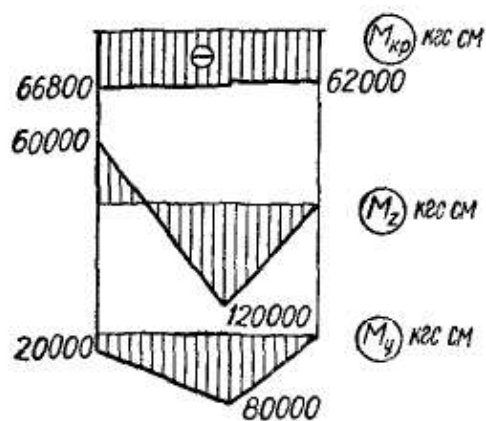


Рис. 343

$h = 12$ см; $b = 8$ см; длины участков $l_1 = 300$ см, $l_2 = 200$ см. Сила P_1 приложена к рычагу, прикрепленному в торцовом сечении бруса. Длина рычага $d = 100$ см. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1400$ кгс/см².

Расчетная схема почти совпадает с рассмотренной выше (рис. 341, б).

Вычисляем составляющие нагрузок вдоль координатных осей:

$$P_{1y} = P_1 \cos \alpha_1 = 721 \cdot 0,832 \text{ тс} = 0,6 \text{ тс};$$

$$P_{2y} = P_2 \cos \alpha_2 = 1340 \cdot 0,834 \text{ тс} = 1,2 \text{ тс};$$

$$P_{1z} = P_1 \sin \alpha_1 = 721 \cdot 0,555 \text{ тс} = 0,4 \text{ тс};$$

$$P_{2z} = P_2 \sin \alpha_2 = 1340 \cdot 0,447 \text{ тс} = 0,6 \text{ тс}.$$

Приведя нагрузки к оси, получаем скручивающие моменты:

$$M_{кр1} = -P_{1y} \left(d + \frac{h}{2} \right) + P_{1z} \frac{b}{2} = (-600 \cdot 106 + 400 \cdot 4) \text{ кгс} \cdot \text{см} = \\ = -62000 \text{ кгс} \cdot \text{см};$$

$$M_{кр2} = -P_{2y} \frac{h}{2} + P_{2z} \frac{b}{2} = (-1200 \cdot 6 + 600 \cdot 4) \text{ кгс} \cdot \text{см} = -4800 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Эпюры крутящих и изгибающих моментов построены из рис. 343.

Сопоставление эпюр показывает, что опасным является сечение с абсциссой $x = l_1 = 300$ см; действующие в этом сечении моменты

$$M_{кр} = 66800 \text{ кгс} \cdot \text{см}; \quad M_y = 80000 \text{ кгс} \cdot \text{см}; \quad M_z = 120000 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

В соответствии с формулами (12.47), (12.49) и (12.51) составим условия прочности для трех опасных точек C , L и K сечения (значения коэффициентов α и γ приведены в табл. 14 — § 56). Получим

$$\sigma_C = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \left(\frac{80000}{192} + \frac{120000}{128} \right) \text{ кгс/см}^2 = (417 + 938) \text{ кгс/см}^2 = \\ = 1355 \text{ кгс/см}^2 < 1400 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} \right)^2 + 3 \left(\frac{M_{кр}}{\alpha' b^2} \right)^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{120000}{128} \right)^2 + 3 \left(\frac{66800}{0,231 \cdot 12 \cdot 8^2} \right)^2} \text{ кгс/см}^2 = 1140 \text{ кгс/см}^2 < \\ < 1400 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_K = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} \right)^2 + 3 \left(\gamma \frac{M_{кр}}{\alpha' b^2} \right)^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{80000}{192} \right)^2 + 3 \left(0,859 \frac{66800}{0,231 \cdot 12 \cdot 8^2} \right)^2} \text{ кгс/см}^2 = 699 \text{ кгс/см}^2 < \\ < 1400 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, наиболее опасной является точка C , но и в ней эквивалентное напряжение меньше допускаемого. Прочность бруса обеспечена.

Общий случай действия сил на брус. В качестве примера более общего случая сложного сопротивления рассмотрим расчет коленчатого вала. Для него в ряде сечений имеет место одновременное действие осевых сил, крутящих и изгибающих моментов.

Исследуем случай работы наиболее простого вала — вала, имеющего только одно колено. Вал (рис. 344, а) состоит из шатунной шейки 3, двух щек 2 и двух коренных шеек 1, опирающихся на

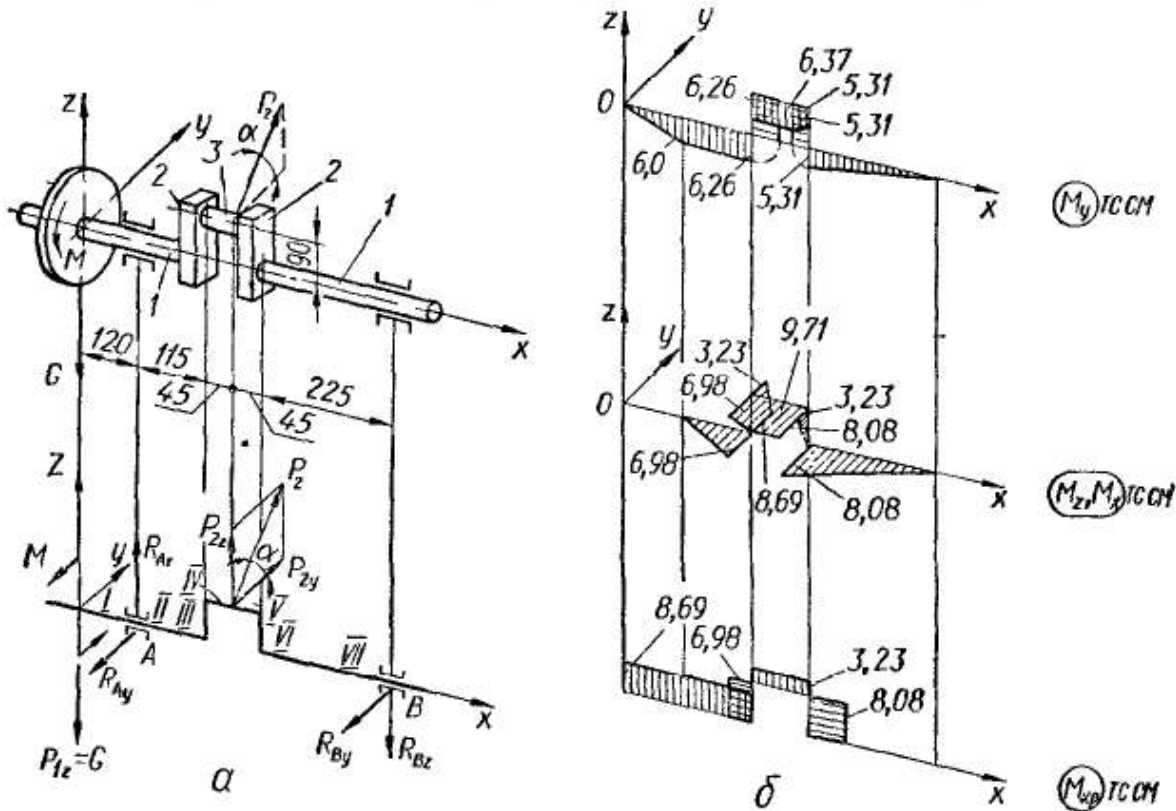


Рис. 344

коренные подшипники. Все необходимые размеры вала указаны на чертеже.

На шатунную шейку 3 со стороны шатуна действует под углом $\alpha = 15^\circ$ к горизонтальной оси y сила $P_2 = 1$ тс. Момент этой силы относительно оси вращения уравнивается крутящим моментом M на маховике. Вес маховика $G = 0,5$ тс.

При заданных условиях необходимо определить размеры сечений вала и шатунной шейки, а также назначить размеры прямоугольного сечения щек в зависимости от большего из диаметров по соотношениям $h = 1,25D$; $b = 0,6h$, после чего провести проверочный расчет на прочность. Принять допускаемые напряжения $[\sigma] = 800$ кгс/см². Расчет вести по IV теории прочности.

От заданной конструкции переходим к расчетной схеме. Прежде всего необходимо определить реакцию в подшипниках, а также скручивающий момент на маховике. Для этого разложим силу P_2 на горизонтальную и вертикальную составляющие (P_{2y} и P_{2z}):

$$P_{2y} = P_2 \cos \alpha = 1 \cdot 0,966 = 0,966 \text{ тс};$$

$$P_{2z} = P_2 \sin \alpha = 1 \cdot 0,259 = 0,259 \text{ тс}.$$

Реакции в опорах также можно представить в виде двух проекций — R_{Ay} , R_{Az} и R_{By} , R_{Bz} . Их величины находим из уравнений равновесия:

$$\sum M_A^{(xOy)} = 0,966 \cdot 16 - R_{By} \cdot 43 = 0; \quad R_{By} = 0,359 \text{ тс};$$

$$\sum M_B^{(xOy)} = -0,966 \cdot 27 + R_{Ay} \cdot 43 = 0; \quad R_{Ay} = 0,607 \text{ тс};$$

$$\sum M_A^{(xOz)} = 0,5 \cdot 12 + 0,259 \cdot 16 - R_{Bz} \cdot 43 = 0; \quad R_{Bz} = 0,236 \text{ тс};$$

$$\sum M_B^{(xOz)} = 0,5 \cdot 55 - R_{Az} \cdot 43 - 0,259 \cdot 27 = 0; \quad R_{Az} = 0,477 \text{ тс};$$

$$\sum M_x = -M + 0,966 \cdot 9 = 0; \quad M = 8,69 \text{ тс} \cdot \text{см}.$$

Переходим к построению эпюр изгибающих моментов. Вычислим ординаты эпюры моментов M_y (в плоскости xOz):

для I участка ($0 \leq x \leq 12$ см)

$$M_y(x) = -0,5x; \quad M_y(0) = 0; \quad M_y(12) = -6 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для II участка ($12 \text{ см} \leq x \leq 23,5$ см)

$$M_y(x) = -0,5x + 0,477(x - 12); \quad M_y(12) = -6 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

$$M_y(23,5) = -6,26 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для III участка ($0 \leq x \leq 9$ см)

$$M_y(x) = -0,5 \cdot 23,5 + 0,477 \cdot 11,5 = -6,26 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для IV участка ($23,5 \text{ см} \leq x \leq 28$ см)

$$M_y(x) = -0,5x + 0,477(x - 12); \quad M_y(23,5) = -6,26 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

$$M_y(28) = -6,37 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для V участка ($28 \text{ см} \leq x \leq 32,5$ см)

$$M_y(x) = -0,236(55 - x); \quad M_y(28) = -6,37 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

$$M_y(32,5) = -5,31 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для VI участка ($0 \leq x \leq 9$ см)

$$M_y(x) = -0,236 \cdot 22,5 = -5,31 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для VII участка ($32,5 \text{ см} \leq x \leq 55$ см)

$$M_y(x) = -0,236(55 - x); \quad M_y(32,5) = -5,31 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_y(55) = 0.$$

Откладывая вычисленные ординаты, строим эпюру M_y (рис. 344, б).

Аналогично вычисляем ординаты и строим эпюры изгибающих моментов M_z и M_x , действующих в плоскостях xOy и yOz , а также эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.

В результате сопоставления эпюр устанавливаем, что опасными являются следующие сечения:

для вала — сечение у нижнего конца левой щеки (рис. 345),
причем

$$M_{кр} = 8,69 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_y = 6,26 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_z = 6,98 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

для щек — нижнее сечение левой щеки (рис. 346), причем

$$M_z = 8,69 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_y = 6,26 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_{кр} = 6,98 \text{ тс} \cdot \text{см};$$

$$N = 23 \text{ кгс};$$

для шатунной шейки — среднее ее сечение, причем

$$M_{кр} = 3,23 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_y = 6,37 \text{ тс} \cdot \text{см}; \quad M_z = 9,71 \text{ тс} \cdot \text{см}.$$

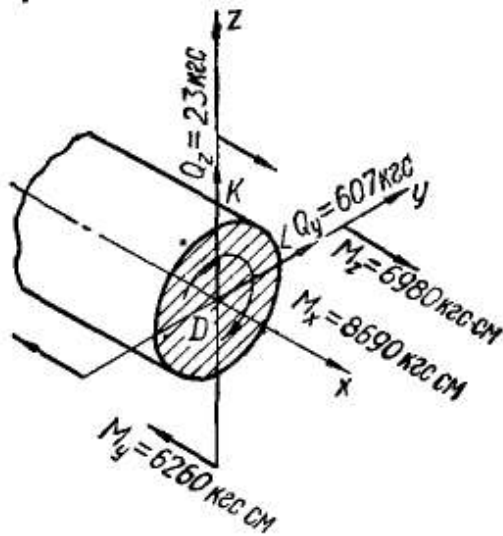


Рис. 345

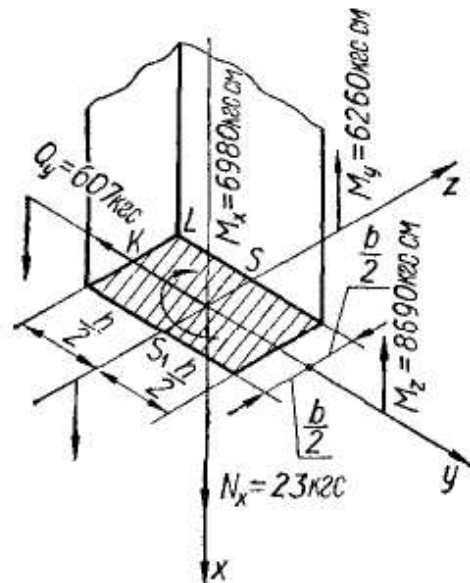


Рис. 346

Определение диаметров вала и шатунной шейки. Расчет на прочность круглого бруса при изгибе с кручением по IV теории производится по формуле (12.40), откуда

$$W \geq \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75M_{кр}^2}}{[\sigma]} = \frac{M_{пр}}{[\sigma]}. \quad (12.53)$$

При $[\sigma] = 800 \text{ кгс/см}^2 = 0,8 \text{ тс/см}^2$ вал должен иметь момент сопротивления

$$W = \frac{\sqrt{6,26^2 + 6,98^2 + 0,75 \cdot 8,69^2}}{0,8} \text{ см}^3 = \frac{\sqrt{144,54}}{0,8} \text{ см}^3 \approx \frac{12}{0,8} \text{ см}^3 = 15 \text{ см}^3.$$

Приняв приближенно $W \approx 0,1D^3$, найдем диаметр вала:

$$D \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 15} \text{ см} = \sqrt[3]{150} \text{ см} \approx 5,31 \text{ см}.$$

Шатунная шейка должна иметь момент сопротивления

$$W \geq \frac{\sqrt{6,37^2 + 9,71^2 + 0,75 \cdot 3,23^2}}{0,8} \text{ см}^3 \approx 14,95 \text{ см}^3,$$

тогда ее диаметр

$$d \geq \sqrt[3]{10 \cdot 14,92} \text{ см} \approx 5,31 \text{ см}.$$

Назначаем для шатунной шейки и вала одинаковый диаметр сечения: $d = D = 54$ мм.

Проверочный расчет щеки. В соответствии с условием задачи подбираем размеры сечения щеки такими: $h = 1,25D = 1,25 \cdot 54 = 67,5 \approx 68$ мм; $b = 0,6h \approx 41$ мм. Переходя к проверке прочности принятого сечения щеки, вычислим его геометрические характеристики:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,1 \cdot 6,8^3}{12} = 107,4 \text{ см}^4; \quad W_z = 31,6 \text{ см}^3;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6,8 \cdot 4,1^3}{12} = 39,0 \text{ см}^4; \quad W_y = 19,0 \text{ см}^3.$$

Проверять на прочность в опасном сечении прямоугольную щеку, работающую на изгиб с кручением (рис. 346), следует в нескольких точках — K , S и L .

В точке K по формуле (12.51)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{8690}{31,6}\right)^2 + 3\left(0,839 \cdot \frac{6980}{0,234 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2}\right)^2} \text{ кгс/см}^2 = \\ &= \sqrt{214\,558} \text{ кгс/см}^2 = 464 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma]. \end{aligned}$$

В точке S по формуле (12.49)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha hb^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{6260}{19,0}\right)^2 + 3\left(\frac{6980}{0,234 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2}\right)^2} \text{ кгс/см}^2 = \sqrt{312\,604} \text{ кгс/см}^2 = \\ &= 559 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma]. \end{aligned}$$

В точке L по формуле (12.47)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{8690}{31,6} + \frac{6260}{19,0} \text{ кгс/см}^2 \approx (275 + \\ &+ 328) \text{ кгс/см}^2 = 603 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma]. \end{aligned}$$

Таким образом, самой опасной является точка L , но и в ней наибольшее нормальное напряжение меньше допускаемого.

Оценка влияния поперечных и продольных сил. Учет продольных и поперечных сил при подборе сечения чрезвычайно усложнил бы расчет. Так как дополнительные напряжения от действия поперечных сил обычно невелики, то при подборе сечения ими пренебрегаем. Наиболее просто оценить их влияние, проверяя сечение после его подбора.

В опасном сечении вала (рис. 345) кроме учтенных при подборе сечения моментов M_x , M_y и M_z действуют еще поперечные силы

$Q_y = 607$ кгс и $Q_z = 23$ кгс. Наибольшие касательные напряжения от этих сил будут соответственно в точках K и L :

в точке K

$$\tau_{y\text{макс}} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} = \frac{4}{3} \frac{607}{3,14 \cdot 2,7^2} \text{ кгс/см}^2 = 35,4 \text{ кгс/см}^2;$$

в точке L

$$\tau_{z\text{макс}} = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{F} = \frac{4}{3} \frac{23}{3,14 \cdot 2,7^2} \text{ кгс/см}^2 = 1,34 \text{ кгс/см}^2.$$

Опасную точку сечения найдем, определив положение нейтральной линии. Последняя перпендикулярна к плоскости действия результирующего изгибающего момента

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \\ &= \sqrt{6260^2 + 6980^2} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \\ &= 9375 \text{ кгс} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Направление нейтральной линии легко определить графически (рис. 347), так как оно совпадает с направлением вектора \vec{M} .

Опасной точкой в сечении является точка S (рис. 347). Естественно, что в этой точке касательные напряжения $\tau_y^{(S)}$ и $\tau_z^{(S)}$ будут значительно меньше вычисленных выше максимальных значений. Примем приближенно и с некоторым запасом, что в опасной точке S к касательным напряжениям τ'_S от крутящего момента M_K :

$$\tau'_S = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{8690 \cdot 16}{3,14 \cdot 5,4^3} \text{ кгс/см}^2 = 282 \text{ кгс/см}^2$$

добавляется следующее касательное напряжение τ''_S от поперечных сил Q_y и Q_z :

$$\tau''_S \approx 0,7 (\tau_{y\text{макс}} - \tau_{z\text{макс}}) \approx 24 \text{ кгс/см}^2.$$

Вычислим эквивалентное напряжение в точке S по IV теории:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \\ &= \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3(\tau'_S + \tau''_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{9375}{15,45}\right)^2 + 3(282 + 24)^2} \text{ кгс/см}^2 = \\ &= \sqrt{606^2 + 3 \cdot 306^2} \text{ кгс/см}^2 = 804 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

Эквивалентное напряжение в той же точке без учета влияния поперечных сил

$$\sigma'_S = \sqrt{606^2 + 3 \cdot 282^2} \text{ кгс/см}^2 \approx 779 \text{ кгс/см}^2.$$

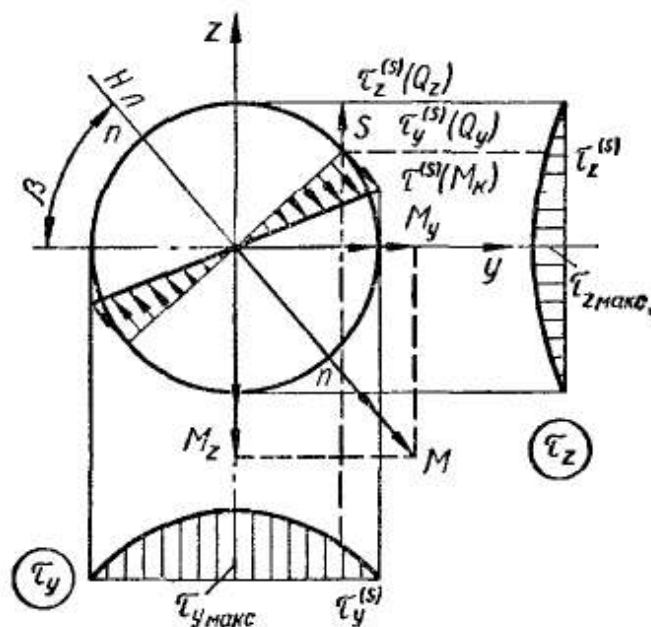


Рис. 347

Следовательно, если учесть действие поперечных сил, то напряжения увеличатся на

$$\frac{804 - 779}{804} \cdot 100 \% \approx 3 \%$$

В опасном сечении щеки (рис. 346) действует только поперечная сила $Q_y = 607$ кгс; поперечная сила $Q_z = 0$. Поперечная сила Q_y не дает касательных напряжений в наиболее опасной точке сечения L . Поэтому рассмотрим ее влияние в точке S_1 , где вызванные ею касательные напряжения достигают наибольшей величины

$$\tau_y = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} = \frac{3}{2} \frac{607}{6,8 \cdot 4,1} \text{ кгс/см}^2 = 32,7 \text{ кгс/см}^2$$

и совпадают по направлению с касательными напряжениями от воздействия крутящего момента $M_{кр}$. Величина последних

$$\tau_{у\text{макс}} = \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} = \frac{6980}{0,236 \cdot 6,8 \cdot 4,1^2} \text{ кгс/см}^2 = 257 \text{ кгс/см}^2.$$

Вычислим эквивалентное напряжение по IV теории прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эквIV}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_y + \tau_{у\text{макс}})^2} = \sqrt{328^2 + 3(32,7 + 257)^2} \text{ кгс/см}^2 = \\ &= \sqrt{359\,700} \text{ кгс/см}^2 = 600 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

В той же точке напряжения без учета Q_y нами уже вычислены:

$$\sigma'_{\text{пр}} = 559 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, поперечные силы увеличивают напряжения в точке S_1 на

$$\frac{605 - 559}{605} 100 \% = 7,6 \%$$

Если в сечении действует осевая сила, изгибающие моменты в главных плоскостях и крутящий момент, то условие прочности, например по IV теории, в точке K (рис. 346) имеет вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{N}{F}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.54)$$

Аналогично в точке S

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (12.55)$$

В рассматриваемом опасном сечении щеки действует продольная растягивающая сила $N = 23$ кгс. Вызываемое ею нормальное растягивающее напряжение

$$\sigma_x = \frac{N}{F} = \frac{23}{6,8 \cdot 4,1} \text{ кгс/см}^2 \approx 0,83 \text{ кгс/см}^2$$

настолько мало, что им можно пренебречь.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 78. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Одной из важнейших задач сопротивления материалов является оценка жесткости конструкции, т. е. степени ее искажения под действием нагрузки, смещения связей, изменения температуры. Для решения этой задачи необходимо определить перемещения (линейные и угловые) любым образом нагруженной упругой системы (балки, рамы, криволинейного стержня, фермы и т. д.). Та же задача возникает при расчете конструкций на динамические нагрузки и при раскрытии статической неопределимости системы. В последнем случае, как уже отмечалось, составляются так называемые уравнения совместности деформаций, содержащие перемещения определенных сечений.

В предыдущих разделах рассматривались некоторые частные способы определения перемещений, удобные при решении простейших задач. Ниже излагается общий метод определения перемещений в стержневых системах, в основе которого лежат два основных принципа механики: начало возможных перемещений и закон сохранения энергии.

Как известно из теоретической механики, работа постоянной силы P на перемещении Δ по ее направлению равна произведению величины силы на указанное перемещение:

$$A = P\Delta.$$

В задачах сопротивления материалов и строительной механики внешняя нагрузка отличается большим разнообразием и обычно представляет собой группы сил. Выражение для работы группы постоянных сил также можно представить в виде произведения двух величин:

$$A = P\Delta_P, \tag{13.1}$$

в котором множитель P зависит только от сил группы и называется *обобщенной силой*, а Δ_P зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, под обобщенной силой будем понимать любую нагрузку (сосредоточенные силы, сосредоточенные пары, распределенную нагрузку), а под обобщенным перемещением — тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу.

Рассмотрим некоторые примеры часто встречающихся обобщенных сил и перемещений.

1. На рис. 348 показана обобщенная сила, состоящая из двух равных по величине противоположных сил P , приложенных в точках A и B и направленных по одной прямой. Предположим, что

точки приложения сил переместились в направлении BA на отрезки Δ_1 и Δ_2 . Очевидно работа системы постоянных сил на этих перемещениях

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P, \quad (13.2)$$

где $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$ — изменение расстояния l между точками приложения сил.

Следовательно, в данном примере P — обобщенная сила, а изменение Δl длины отрезка AB — обобщенное перемещение

2. Пусть группа сил состоит из пары сил, момент которой $M =$

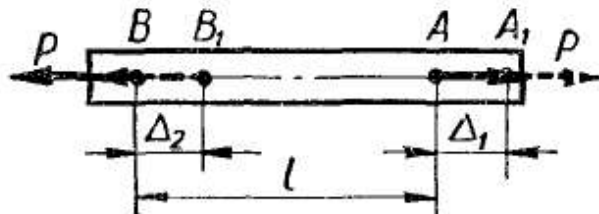


Рис. 348

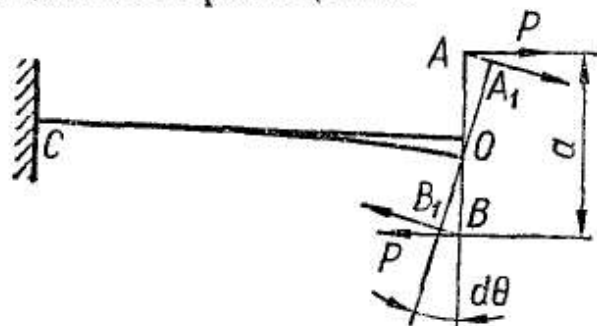


Рис. 349

$= Pa$ (рис. 349). Допустим, что элемент AB повернулся на угол $d\theta$. Пути, пройденные силами пары по направлению их действия,

$$AA_1 = OA d\theta; \quad BB_1 = OB d\theta.$$

Суммарная работа обеих сил

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB) d\theta = Pad\theta = Md\theta. \quad (13.3)$$

Следовательно, если обобщенной силой является момент M пары, то обобщенным перемещением будет угол поворота $d\theta$.

Легко также показать, что при действии на элементы AB и CD (рис. 350) двух равных и противоположно направленных пар с моментом M обобщенной силой является момент пары M , а обобщенным пере-

мещением — изменение угла φ между элементами AB и CD . Иначе:

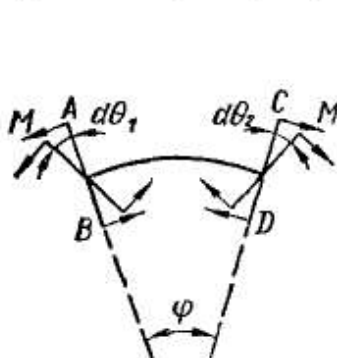


Рис. 350

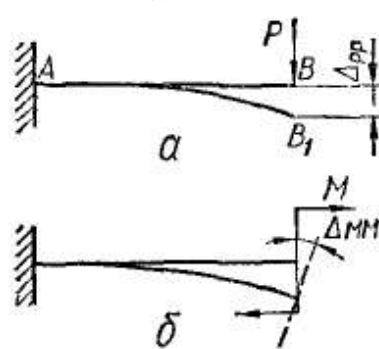


Рис. 351

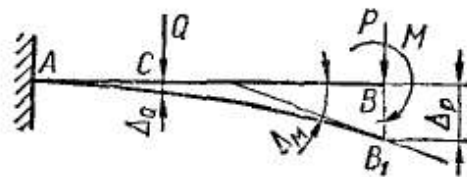


Рис. 352

мещением — изменение угла φ между элементами AB и CD . Иначе:

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

Условимся в дальнейшем обобщенные перемещения (как линейные, так и угловые) какого-либо сечения стержня обозначать буквами Δ или δ с двумя индексами. Первый индекс отмечает точку и направление перемещения, второй — указывает причину, вызвавшую искомое перемещение. Например, Δ_{PP} обозначает перемещение

точки приложения силы P по направлению ее действия, вызванное этой же силой (рис. 351, а). На рис. 351, б изображена консоль, нагруженная на свободном конце сосредоточенным моментом. Очевидно угол поворота сечения, где приложен момент, следует обозначить через Δ_{MM} . Здесь первый индекс указывает перемещение по направлению момента M , т. е. угол поворота.

Для обозначения полного перемещения точки, вызванного несколькими усилиями, при Δ сохраняется только первый индекс. Так, полный прогиб и угол поворота сечения B балки, показанной на рис. 352, следует обозначить соответственно через Δ_P и Δ_M , прогиб сечения C — через Δ_Q .

Рассматривая достаточно жесткие линейно деформируемые конструкции (т. е. системы, деформации которых следуют закону Гука), можно на основании принципа независимости действия сил определять полные перемещения точек как сумму перемещений, вызванных отдельными нагрузками.

Для показанной на рис. 352 балки прогиб и угол поворота сечения B можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta_P &= \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \\ \Delta_M &= \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM},\end{aligned}\tag{13.4}$$

где Δ_{PP} — перемещение точки B по направлению силы P от силы P ;

Δ_{PQ} — то же от силы Q ;

Δ_{PM} — то же от момента M ;

Δ_{MP} — перемещение сечения B по направлению пары M (угол поворота) от силы P ;

Δ_{MQ} — то же от силы Q ;

Δ_{MM} — то же от пары M .

Перемещение, вызванное единичной силой ($\bar{P} = 1$) или единичной парой ($\bar{M} = 1$), будем обозначать буквой δ и называть *удельным*. При этом условимся считать единичные силы или пары, вызывающие перемещение δ , безразмерными.

Если единичная сила $\bar{P} = 1$ вызвала перемещение δ_P , то на основании принципа независимости действия сил полное перемещение, вызванное силой P ,

$$\Delta_P = P\delta_P.\tag{13.5}$$

Из выражения (13.5) легко установить единицу удельного перемещения:

$$[\delta_P] = \frac{\text{единица обобщенного перемещения}}{\text{единица обобщенной силы}}.\tag{13.6}$$

Заметим, что нагрузку, действующую на сооружение, обычно обозначают буквами P, M, X и т. д. с числовыми индексами (например, X_1, X_2, \dots). В этих случаях буквенные индексы при Δ или δ заменяют соответствующими числовыми, т. е. вместо Δ_{X_1} пишут $\Delta_1, (\Delta_2, \delta_{12}, \dots)$.

На рис. 353 показаны обозначения перемещений свободного конца рамы под действием различных усилий (P, X_1, X_2, X_3). Полные перемещения сечения C в горизонтальном и вертикальном направлениях (т. е. в направлениях сил X_1 и X_2), а также угол поворота (перемещение по направлению X_3) соответственно можно представить в виде

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 = \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 = \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}. \end{cases} \quad (13.7)$$

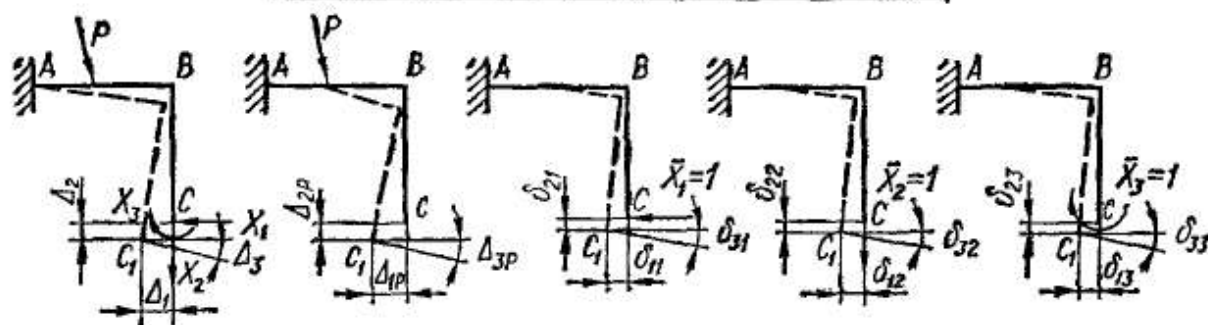


Рис. 353

Здесь

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \quad \dots; \\ X_i\delta_{mi} = \Delta_{mi}. \end{aligned}$$

Для оценки единицы перемещений δ_{mi} умножим последнее равенство на X_m . Тогда выражение

$$X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$$

будет измеряться в единицах работы (кгс · см). Отсюда

$$[\delta_{mi}] = \frac{\text{кгс} \cdot \text{см}}{[X_m][X_i]}.$$

Например, в формуле (13.7)

$$[\delta_{13}] = \frac{\text{кгс} \cdot \text{см}}{[X_1][X_3]} = \frac{\text{кгс} \cdot \text{см}}{\text{кгс} \cdot \text{кгс} \cdot \text{см}} = \frac{1}{\text{кгс}}.$$

§ 79. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ

При деформировании конструкции различные ее точки перемещаются. Перемещаются также точки приложения внешних сил. В результате этого внешние силы совершают работу.

Вычислим работу некоторой обобщенной силы P , приложенной к любой упруго-линейно деформируемой системе (рис. 354, а). Предполагается, что нагрузка возрастает от нуля до заданной величины достаточно медленно, чтобы при этом можно было пренебречь силами инерции перемещаемых масс. Такая нагрузка в дальнейшем именуется статической.

Пусть в данный момент силе P соответствует обобщенное перемещение Δ . Бесконечно малое приращение силы на величину dP вызовет бесконечно малое приращение перемещения $d\Delta$. Очевидно элементарная работа внешней силы, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка,

$$dA = (P + dP) d\Delta \approx Pd\Delta.$$

Полная работа, совершенная статически приложенной обобщенной силой P , вызвавшей обобщенное перемещение Δ ,

$$A = \int_{\Delta} Pd\Delta. \quad (13.8)$$

Интеграл (13.8) представляет собой площадь диаграммы $P - \Delta$ для данной конструкции (рис. 354, б).

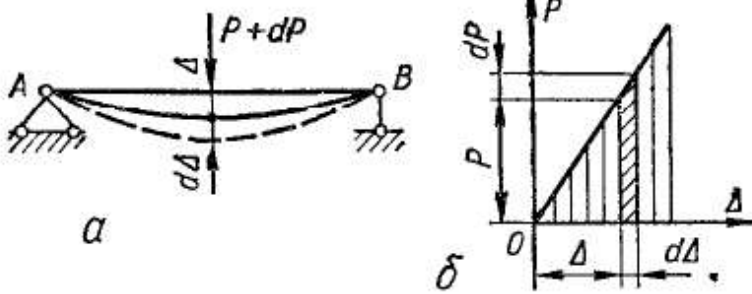


Рис. 354

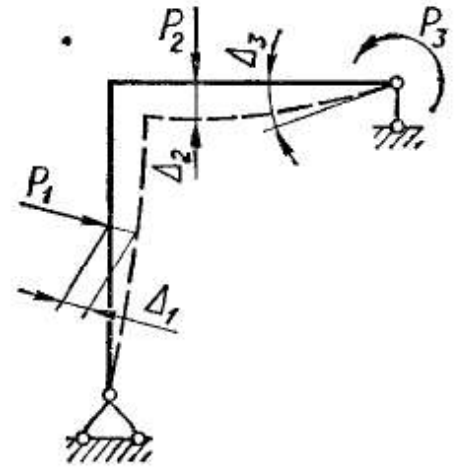


Рис. 355

В линейно деформируемых системах перемещения пропорциональны величине силы (закон Гука):

$$\Delta = P\delta_{PP}, \quad (13.9)$$

где δ_{PP} — перемещение, вызванное силой $\bar{P} = 1$.

Дифференцируем выражение (13.9):

$$d\Delta = dP\delta_{PP}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (13.8), найдем, что

$$A = \delta_{PP} \int_0^P PdP = \frac{\delta_{PP}P^2}{2}.$$

Учитывая выражение (13.9), окончательно получим

$$A = \frac{\delta_{PP}P^2}{2} = \frac{P\Delta}{2}. \quad (13.10)$$

Таким образом, *действительная работа при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего ей обобщенного перемещения* (теорема Клапейрона).

В случае статического действия на упругую систему нескольких обобщенных сил (рис. 355) P_1, P_2, \dots, P_n работа деформации равна

полусумме произведений окончательного значения каждой силы на окончательное значение соответствующего суммарного перемещения.

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \quad (13.11)$$

и не зависит от порядка нагружения системы.

§ 80. РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ

При упругой деформации тела во всех деформируемых элементах развиваются *внутренние силы* — *силы упругого сопротивления*. Они также совершают работу. Вначале определим работу внутренних

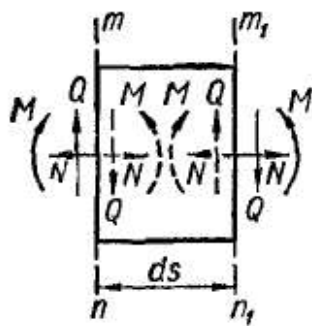


Рис. 356

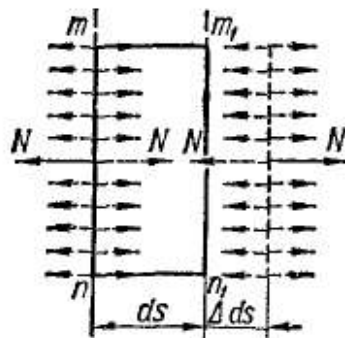


Рис. 357

сил упругости при деформировании плоской стержневой системы.

Двумя смежными сечениями выделим из стержня элемент длиной ds (рис. 356). В общем случае для плоского изгиба действие удаленных частей стержня на оставленный элемент выражается равнодействующими

осевыми силами N , поперечными Q и изгибающими моментами M . Эти усилия, показанные на чертеже сплошными линиями, по отношению к выделенному элементу являются внешними.

Внутренние силы препятствуют развитию деформации, вызываемой внешними силами, равны им по величине и обратны по направлению. На рис. 356 равнодействующие внутренних сил показаны штриховыми линиями.

Учитывая направления внутренних сил по отношению к деформации, вызванной внешними силами, можно утверждать, что при нагружении тела суммарная работа внутренних сил всегда отрицательна.

Вначале вычислим работу, совершенную отдельно внутренними осевыми силами, поперечными силами и изгибающими моментами. Пусть элемент испытывает действие только осевых сил N , равномерно распределенных по сечению (рис. 357). Удлинение элемента в результате этого

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF},$$

где EF — жесткость поперечного сечения на растяжение — сжатие.

Работа постепенно возрастающих от нуля до величины N внутренних сил на этом перемещении выразится формулой

$$dW_N = -\frac{1}{2} N \Delta ds = -\frac{N^2 ds}{2EF}. \quad (13.12)$$

Как указывалось, работа внутренних сил отрицательна, поэтому в формуле (13.12) поставлен знак «минус».

Рассмотрим теперь элемент, находящийся под действием изгибающих моментов (рис. 358). В результате изгиба сечения mn и m_1n_1 повернутся на углы $d\theta$. Моменты внутренних сил (показанные штриховыми линиями) на указанных перемещениях совершат работу

$$dW_M = -\frac{1}{2} M d\theta - \frac{1}{2} M d\theta = -\frac{1}{2} M d\varphi, \quad (13.13)$$

где $d\varphi = 2d\theta$ — взаимный угол поворота сечений элемента. Как было показано в гл. 10,

$$d\varphi = ds \frac{1}{\rho} = ds \frac{M}{EJ} = \frac{M ds}{EJ}.$$

Таким образом,

$$dW_M = -\frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (13.14)$$

Вычислим, наконец, работу постепенно возрастающих внутренних поперечных сил Q (рис. 359, а). Как указывалось, поперечные силы являются равнодействующими распределенных в точках сечения касательных напряжений τ . Последние в любой элементар-

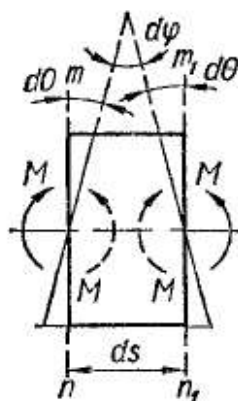


Рис. 358

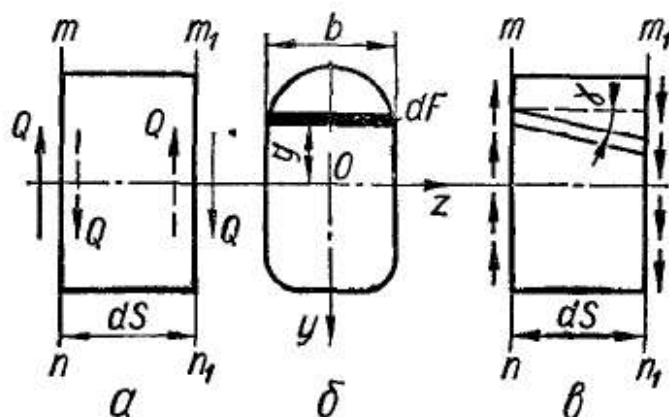


Рис. 359

ной площадке dF , параллельной нейтральной линии (рис. 359, б), согласно формуле Журавского, таковы:

$$\tau = \frac{QS_z}{J_z b},$$

где S_z — статический момент относительно нейтральной оси z части сечения, заключенной между уровнем полоски и краем сечения.

На основании закона Гука взаимный сдвиг двух соответствующих площадок dF , взятых на торцах mn и m_1n_1 (рис. 359, в),

$$\gamma ds = \frac{\tau}{G} ds.$$

Следовательно, работа внутренних элементарных сил τdF при их нарастании от нуля до окончательного значения

$$-\frac{1}{2} \tau dF \gamma ds = -\frac{\tau^2 ds}{2G} dF.$$

Интегрируя в пределах сечения F , получим работу сил сдвига:

$$\begin{aligned} dW_Q &= - \int_F \frac{1}{2} \tau \gamma ds dF = - \int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF = \\ &= - \frac{Q^2 ds}{2GJ_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF = - k_y \frac{Q^2 ds}{2GF}, \end{aligned} \quad (13.15)$$

где $k_y = \frac{F}{J_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF$ — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;
 GF — жесткость поперечного сечения стержня при сдвиге.

Для прямоугольного сечения $b \times h$

$$\begin{aligned} F &= bh; \quad J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad S_z = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right); \\ k_y &= \frac{9}{2h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 dy = 1,2. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Аналогично определяются значения коэффициента k и для других сечений. Например, для кругового сечения $k = \frac{32}{27}$, для прокатных профилей приближенно $k = \frac{F}{F_c}$, где F_c — площадь стенки.

В случае чистого сдвига касательные напряжения распределяются равномерно по сечению:

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Следовательно,

$$dW_Q = - \frac{1}{2} \int_F \tau \gamma ds dF = - \frac{1}{2} \tau F \gamma ds = - \frac{Q \gamma ds}{2} = - \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.17)$$

При одновременном действии осевых и поперечных сил, а также изгибающих моментов полную работу можно получить как сумму работ отдельных составляющих. Это объясняется тем, что работа каждого из этих усилий на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Например, при удлинении, вызванном силами N , поперечные сечения остаются плоскими и параллельными, а потому пары M и силы Q работы не производят. Аналогично силы N не производят работы на перемещениях, вызванных силами Q и парами M .

Таким образом, в рассмотренном случае полная элементарная работа внутренних сил

$$dW = - \frac{M^2 ds}{2EJ} - \frac{N^2 ds}{2EF} - k \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.18)$$

Интегрируя выражение (13.18) в пределах всего стержня и суммируя по всем стержням системы, получим формулу для работы внутренних сил в случае плоского изгиба:

$$W = - \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (13.19)$$

Когда стержень подвергается деформации кручения, в сечениях, ограничивающих выделенный элемент длиной ds , действуют крутящие моменты $M_{кр}$ (рис. 360), являющиеся по отношению к элементу внешними. Моменты сил упругости равны по величине моментам $M_{кр}$ и направлены в противоположные стороны. Взаимный угол поворота сечений m_1 и m_2

$$d\varphi = \frac{M_{кр} ds}{GJ_k},$$

где GJ_k — жесткость поперечного сечения стержня при кручении.

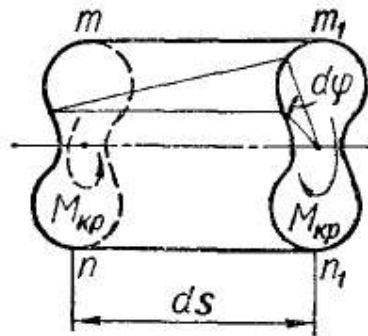


Рис. 360

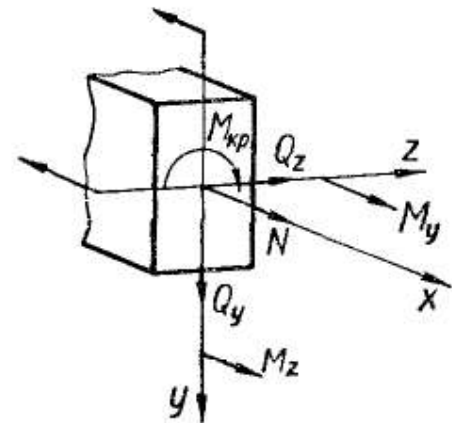


Рис. 361

Таким образом, при кручении элементарная работа постепенно возрастающих внутренних сил

$$dW_{кр} = - \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = - \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k}. \quad (13.20)$$

Полная работа внутренних сил при кручении стержня

$$W_{кр} = - \int_s \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = - \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k}. \quad (13.21)$$

Наконец, в общем случае действия сил на брус в сечениях имеем шесть силовых факторов (рис. 361): осевую силу N , поперечные силы Q_y и Q_z , крутящий момент $M_{кр}$, изгибающие моменты M_y и M_z .

Учитывая, что работа каждого из этих усилий на перемещениях, вызванных остальными усилиями, равна нулю, получаем следующую формулу для работы внутренних сил (сил упругости):

$$W = - \int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \int_s \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} - \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_k} - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{2GF} - \int_s k_z \frac{Q_z^2 ds}{2GF}. \quad (13.22)$$

Заметим, что выражение (13.22) справедливо также и для криволинейных стержней малой кривизны.

§ 81. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К УПРУГИМ СИСТЕМАМ

Начало возможных перемещений, являясь общим принципом механики, имеет важнейшее значение для теории упругих систем. Применительно к ним этот принцип можно сформулировать следующим образом: *если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равна нулю, т. е.*

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \quad (13.23)$$

где P_i — внешние силы;

Δ_{im} — возможные перемещения этих сил;

$\sum P_i \Delta_{im}$ — работа внешних сил;

W_{im} — работа внутренних сил.

Заметим, что в процессе совершения системой возможного перемещения величина и направление внешних и внутренних сил остаются неизменными. Поэтому при вычислении работ следует брать не половину, а полную величину произведения соответствующих сил и перемещений.

Учитывая малость деформаций и их линейную зависимость от нагрузок, в качестве возможных перемещений можно принимать упругие перемещения, вызванные любым видом нагрузки и происходящие без нарушения связей.

Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях называется *возможной* или *виртуальной* работой.

Покажем, как определяется возможная работа внешних и внутренних сил, на примере плоской системы. Рассмотрим два состояния какой-либо системы, находящейся в равновесии (рис. 362). В состоянии a система деформируется обобщенной силой P_a (рис. 362, a), в состоянии b — силой P_b (рис. 362, b).

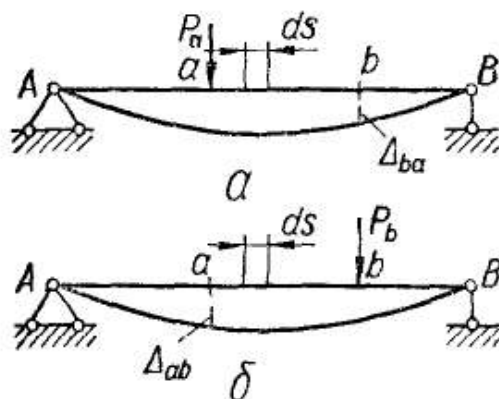


Рис. 362

Очевидно перемещения состояния b можно рассматривать как возможные для состояния a , и наоборот, перемещения состояния a являются возможными для состояния b .

Поэтому работа сил состояния a на перемещениях состояния b (A_{ab}), равно как и работа сил состояния b на перемещениях состояния a (A_{ba}), будет возможной. Указанные работы внешних сил соответственно

$$\begin{aligned} A_{ab} &= P_a \Delta_{ab}; \\ A_{ba} &= P_b \Delta_{ba}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Вычислим теперь возможную работу внутренних сил состояния a на перемещениях, вызванных нагрузкой состояния b . С этой целью

рассмотрим произвольный элемент стержня длиной ds в обоих состояниях. Для плавкого изгиба действие удаленных частей на элемент выражается системой усилий N_a, Q_a, M_a (рис. 363, а). Внутренние усилия, действующие на элемент, имеют направления, противоположные внешним, и показаны штриховыми линиями. На рис. 363, б показаны внешние усилия N_b, Q_b, M_b , действующие на элемент ds в состоянии b . Деформации элемента, вызванные этими усилиями, показаны на рис. 364.

Очевидно удлинение элемента ds , вызванное силами N_b ,

$$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}.$$

Работа внутренних осевых сил N_a на этом возможном перемещении

$$- N_a (\Delta ds)_b = - \frac{N_a N_b ds}{EF}. \quad (13.25)$$

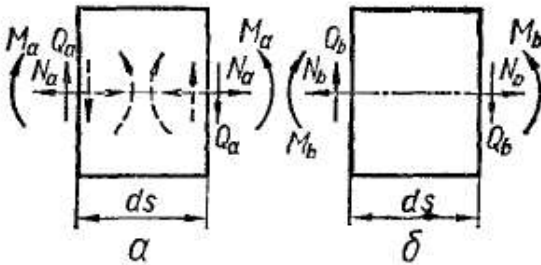


Рис. 363

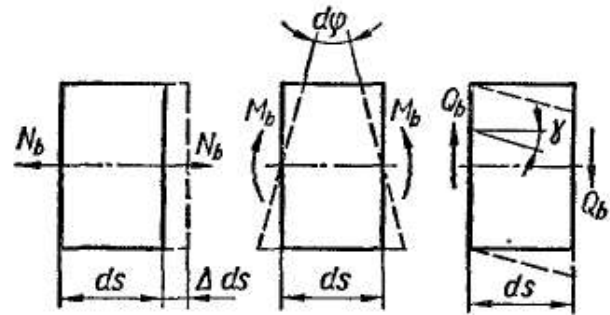


Рис. 364

Взаимный угол поворота граней элемента, вызванный парами M_b ,

$$(d\varphi)_b = \frac{M_b ds}{EJ}.$$

Работа внутренних изгибающих моментов M_a на этом перемещении

$$- M_a (d\varphi)_b = - \frac{M_a M_b ds}{EJ}. \quad (13.26)$$

Взаимный сдвиг граней элемента, вызванный поперечными силами Q_b ,

$$(\gamma ds)_b = k \frac{Q_b ds}{GF}.$$

Работа внутренних поперечных сил Q_a на этом перемещении

$$- Q_a (\gamma ds)_b = - k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (13.27)$$

Суммируя выражения (13.25), (13.26) и (13.27), получаем возможную работу внутренних сил, приложенных к элементу ds стержня, на перемещениях, вызванных другой, вполне произвольной нагрузкой, отмеченной индексом b :

$$dW_{ab} = - M_a (d\varphi)_b - N_a (\Delta ds)_b - Q_a (\gamma ds)_b, \quad (13.28)$$

или

$$dW_{ab} = - \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \frac{N_a N_b ds}{EF} - k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (13.29)$$

Просуммировав элементарные работы в пределах стержня, а затем по всем стержням системы, получим полное значение возможной работы внутренних сил:

$$W_a = - \left[\sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b \right]. \quad (13.30)$$

Запишем его в более удобном виде:

$$\boxed{W_{ab} = - \sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} - \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}}. \quad (13.31)$$

Внеся теперь в уравнение (13.23) выражения для возможной работы внешних сил [первую из формул (13.24)] и внутренних сил [формулу (13.30) или (13.31)], получим общее выражение начала возможных перемещений для плоской упругой стержневой системы:

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[\sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b \right] = 0, \quad (13.32)$$

или

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.33)$$

Иными словами, если упругая система находится в равновесии, то работа внешних и внутренних сил в состоянии a на возможных перемещениях, вызванных другой, вполне произвольной нагрузкой, отмеченной индексом b , равна нулю. Выражения (13.32) и (13.33) применимы и для стержня малой кривизны. Аналогичные выражения легко составить и для общего случая нагружения стержня.

Если в качестве возможных принять действительные перемещения Δ_a , вызванные заданной нагрузкой P_a , то выражение (13.33) примет вид

$$\sum P_a \Delta_a - \left[\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.34)$$

Нетрудно видеть, что, разделив выражение (13.34) на два, получим

$$\frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a = A, \quad (13.35)$$

т. е. A представляет собой действительную работу внешних сил в процессе статической деформации [см. формулу (13.11)], а

$$-\frac{1}{2} \left[\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = W \quad (13.36)$$

— работу внутренних сил [см. формулы (13.19)].

Таким образом,

$$\boxed{A + W = 0,} \quad (13.37)$$

т. е. суммарная работа внешних и внутренних сил при статическом деформировании упругой системы равна нулю. Отсюда следует, что действительные значения работы внешних и внутренних сил равны по величине и обратны по знаку.

§ 82. ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим произвольную упругую систему, например балку, в двух состояниях. В первом состоянии (рис. 365, а) пусть действует обобщенная нагрузка, отмеченная индексом 1; перемещения соответствующих точек системы будут Δ_{11} , Δ_{21} , ..., Δ_{i1} .

Во втором состоянии (рис. 365, б) система нагружается обобщенной нагрузкой, отмеченной индексом 2, а перемещения соответствующих точек системы от этой нагрузки будут Δ_{12} , Δ_{22} , ..., Δ_{i2} .

Напишем выражение возможных работ внешних и внутренних сил для обоих состояний системы, взяв для первого состояния в ка-

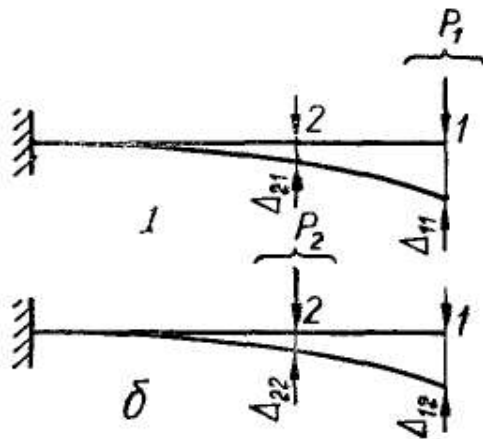


Рис. 365

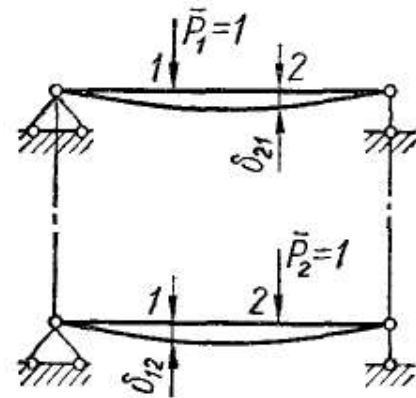


Рис. 366

честве возможных перемещения, вызванные силами второго состояния, а для второго — перемещения, вызванные силами первого. На основании формулы (13.33) для первого состояния

$$P_1 \Delta_{12} - \sum \left[\int_s \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} + \int_s \frac{N_1 N_2 ds}{EF} + \int_s k \frac{Q_1 Q_2 ds}{GF} \right] = 0, \quad (13.38)$$

для второго состояния

$$P_2 \Delta_{21} - \sum \left[\int_s \frac{M_2 M_1 ds}{EJ} + \int_s \frac{N_2 N_1 ds}{EF} + \int_s k \frac{Q_2 Q_1 ds}{GF} \right] = 0. \quad (13.39)$$

Так как выражения для работ внутренних сил одинаковы, то на основании уравнений (13.38) и (13.39) приходим к равенству

$$\boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}.} \quad (13.40)$$

Выражение (13.40) носит название *теоремы о взаимности работ* (теоремы Бетти). Она формулируется следующим образом: *возможная работа внешних (или внутренних) сил состояния 1 на перемещениях состояния 2 равна возможной работе внешних (или внутренних) сил состояния 2 на перемещениях состояния 1.*

Применим теорему о взаимности работ к частному случаю нагружения, когда в обоих состояниях системы приложено по одной единичной обобщенной силе $\bar{P}_1 = 1$ и $\bar{P}_2 = 1$ в точках 1 и 2 (рис. 366). На основании формулы (13.40)

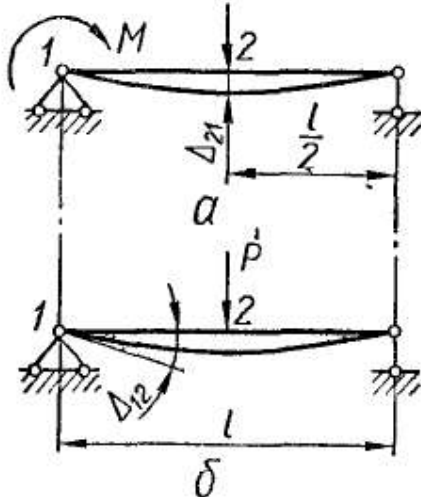


Рис. 367

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

а так как $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 1$, то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (31.41)$$

Выражение (13.41) носит название *теоремы о взаимности перемещений* (теоремы Максвелла). Формулируется она так: *перемещение точки приложения первой силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению точки приложения второй силы по ее направлению, вызванному действием первой единичной силы.*

Теоремы о взаимности работ и перемещений имеют большое значение в общей теории исследования напряженного и деформированного состояния стержней, пластинок, оболочек и других расчетных объектов. Их применение существенно упрощает решение многих задач строительной механики, а также производство опытов по определению перемещений.

Пользуясь теоремой о взаимности работ, определим прогиб Δ_{21} балки посередине пролета при действии на опоре момента M (рис. 367, а).

Используя второе состояние балки — действие в точке 2 сосредоточенной силы P (рис. 367, б) — по формуле (10.65) при $a = b = \frac{l}{2}$ и $x = 0$ найдем угол поворота опорного сечения

$$\Delta_{12} = -\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Согласно теореме о взаимности работ,

$$M\Delta_{12} = P\Delta_{21},$$

откуда

$$\Delta_{21} = M \frac{\Delta_{12}}{P} = -\frac{Ml^2}{16EJ}. \quad (13.42)$$

Пример 55. Определить прогибы точек 1, 2 и 3 вала, нагруженного силой P в точке С (рис. 368).

Вместо того чтобы устанавливать прогибомеры в указанных точках, как это показано на рис. 368, а, на основании теоремы о взаимности перемещений доста-

точно установить прогибомер в точке C , а силу последовательно прикладывать в точках 1, 2 и 3 (рис. 368, б). Измеренные при этом в точке C прогибы равны искомому.

Пример 56. Показать, что при нагружении балки с консолью (рис. 369, а) моментом M , приложенным на расстоянии $\frac{l}{\sqrt{3}}$ от левой опоры A , консоль BC остается неподвижной.

Если нагрузить балку в опорном сечении B моментом M (рис. 369, б), то максимальный прогиб на участке AB будет в сечении D , находящемся на расстоянии $\frac{l}{\sqrt{3}}$ от опоры A . Следовательно, угол поворота этого сечения равен нулю ($\theta_D = 0$).

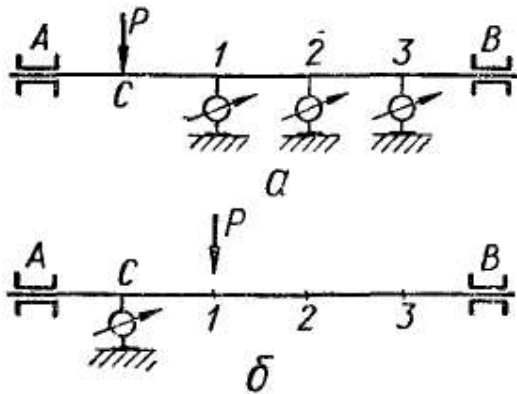


Рис. 368

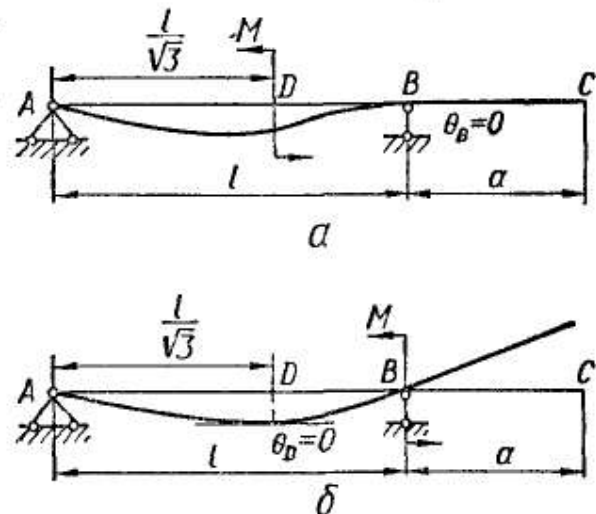


Рис. 369

Если момент M приложить в сечении D (рис. 369, б), то на основании теоремы о взаимности перемещений на опоре B угол поворота сечения будет равен нулю ($\theta_B = 0$). Консоль BC остается неподвижной, так как ее перемещение, очевидно, может произойти только в результате поворота опорного сечения B , а он отсутствует.

§ 83. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. МЕТОД МОРА

Рассмотрим вначале произвольную плоскую стержневую систему (балку, раму, ферму и т. п.), нагруженную заданными силами P (рис. 370, а). Усилия в произвольном сечении системы обозначим через M_P , Q_P , N_P . Пусть требуется определить перемещение (обобщенное) любой точки m системы по направлению $i-i$.

Введем вспомогательное состояние (рис. 370, б), представляющее собой заданную систему, нагруженную лишь одной единичной силой (обобщенной) $\bar{X}_i = 1$, приложенной в той же точке m и по тому же направлению, по которому надлежит разыскать перемещение Δ_{iP} . Усилия в произвольном сечении вспомогательного состояния, вызванные действием единичной силы $\bar{X}_i = 1$, обозначим через \bar{M}_i , \bar{Q}_i , \bar{N}_i .

Применим начало возможных перемещений для вспомогательного состояния, принимая в качестве возможных действительные перемещения заданной системы. Согласно формуле (13.33),

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}. \quad (13.43)$$

Выражение (13.43) является общей формулой для упругого перемещения плоской стержневой системы.

Если исходить из выражения начала возможных перемещений в форме (13.32), то общую формулу для упругого перемещения можно записать в виде

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \bar{M}_i (d\varphi)_P + \sum_s \int \bar{N}_i (\Delta ds)_P + \sum_s \int \bar{Q}_i (\gamma ds)_P. \quad (13.44)$$

В общем случае действия сил (см. рис. 361) формула для перемещения содержит шесть слагаемых:

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \left(\frac{\bar{M}_i^y M_P^y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_i^z M_P^z}{EJ_z} + \frac{\bar{M}_i^{кр} M_P^{кр}}{GJ_k} + \right. \\ \left. + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_P^y}{GF} + k_z \frac{\bar{Q}_i^z Q_P^z}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) ds. \quad (13.45)$$

Индексы y, z в формуле (13.45) обозначают главные оси, индекс «кр» — крутящий момент. Заметим, что общая формула (13.45) применима и для кривых стержней малой кривизны.

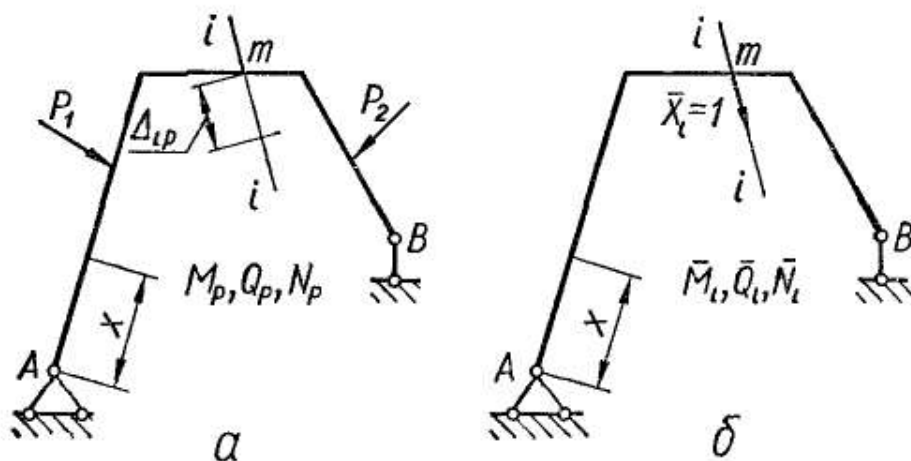


Рис. 370

Формулы (13.43) и (13.45) впервые были получены Мором. Определение перемещений по этим формулам часто называют методом Мора. Отметим, что метод Мора является самым общим методом определения перемещений стержневых систем. Его значение особенно велико при расчете статически неопределимых систем.

В большинстве случаев при определении перемещений в балках, рамах и арках можно пренебречь влиянием продольных деформаций и деформаций сдвига, учитывая лишь перемещения, которые вызываются изгибом и кручением. Тогда формула (13.43) для плоской системы принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (13.46)$$

При пространственном нагружении, согласно формуле (13.45),

$$\Delta_{iP} = \sum \left[\int_s \frac{\bar{M}_i^y M_P^y ds}{EJ_y} + \int_s \frac{\bar{M}_i^z M_P^z ds}{EJ_z} + \int_s \frac{\bar{M}_i^{KP} M_P^{KP} ds}{GJ_K} \right]. \quad (13.47)$$

Если рассчитываются шарнирные фермы, образованные прямыми стержнями, то в формуле Мора сохраняется лишь член, содержащий продольную силу:

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} l. \quad (13.48)$$

Формула (13.48) носит название *формулы Максвелла*.

Можно указать следующий порядок определения перемещений по методу Мора:

1. Строят вспомогательную систему, которую нагружают единичной нагрузкой в точке, где требуется определить перемещение. Определяя линейные перемещения, в заданном направлении прикладывают единичную силу, определяя угловые перемещения, — единичный момент.

2. Для каждого участка системы выписывают выражения силовых факторов в произвольном сечении заданной (M_P , N_P , Q_P) и вспомогательной (\bar{M}_i , \bar{N}_i , \bar{Q}_i) систем.

3. Вычисляют интегралы Мора (по участкам в пределах всей системы). В соответствии с указанным, при расчете плоских балок, рам и арок исходят из формулы (13.46), при расчете ферм — из формулы (13.48).

4. Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичной силы. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичной силы.

Рассмотрим примеры применения метода Мора для определения перемещений в стержневых системах.

Пусть требуется определить прогиб посередине пролета и угол поворота на опоре шарнирно опертой балки ($EJ = \text{const}$), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 371, а), а также исследовать влияние поперечных сил на максимальный прогиб.

1. Для определения прогиба посередине пролета нагружаем в этом месте вспомогательную балку (рис. 371, б) единичной сосредото-

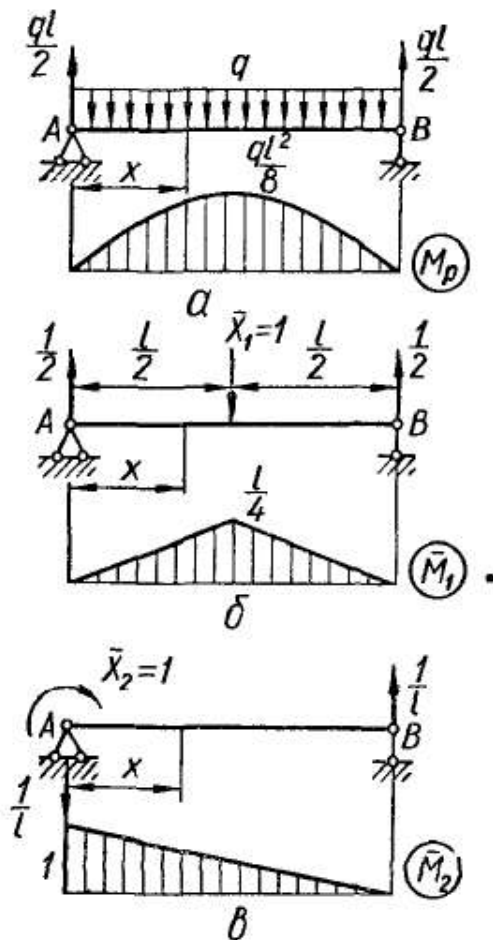


Рис. 371

точной силой. В произвольном сечении первого участка балки ($0 \leq x \leq \frac{l}{2}$)

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$\bar{M}_1(x) = \frac{1}{2}x.$$

Учитывая симметрию, получим

$$\Delta_{1P} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\bar{M}_1(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{2} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Учтем влияние касательных напряжений на искомый прогиб, предполагая, что балка имеет прямоугольное сечение. Очевидно при $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$Q_P(x) = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$\bar{Q}_1(x) = \frac{1}{2}.$$

На основании равенства (13.43) прогиб, вызванный действием поперечных сил,

$$\begin{aligned} \Delta_{1P}^Q &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} k \frac{\bar{Q}_1 Q_P dx}{GF} = \frac{2k}{GF} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx = k \frac{ql^2}{8GF} = \\ &= \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EF}. \end{aligned}$$

При этом учтено, что коэффициент формы для прямоугольного сечения

$$k = 1,2; \text{ а } G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{3}{8} E.$$

Суммируя выражения для перемещений, находим, что

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{2}{5} \frac{ql^2}{EF} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \left(1 + 2,6 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Второй член в скобках, отражающий влияние поперечной силы, при $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ равен 0,026. Следовательно, прогиб, вызванный поперечной силой, составляет менее 3% прогиба, вызванного изгибающими моментами.

2. Для определения угла поворота опорного сечения вспомогательную балку нагружаем единичным моментом (рис. 371, в). При

$0 \leq x \leq l$ имеем

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$\bar{M}_2(x) = 1 - \frac{x}{l};$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{ql^3}{24EJ} \cdot \quad (13.49)$$

Положительный знак указывает на то, что поворот совпадает с направлением единичного момента.

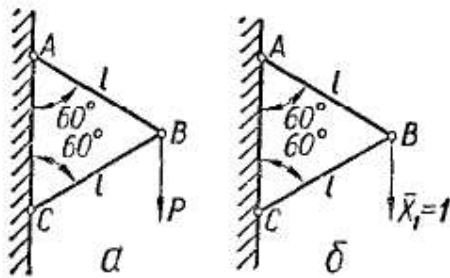


Рис. 372

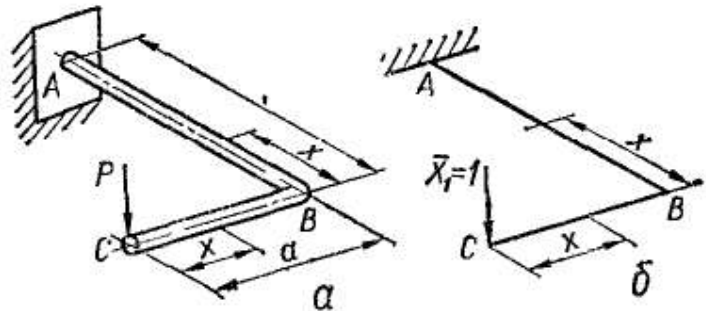


Рис. 373

Определим вертикальное перемещение узла B шарнирно-стержневой системы (рис. 372, a), состоящей из двух одинаковых стержней AB и BC постоянного поперечного сечения. Вспомогательная система показана на рис. 372, b .

Вырезая узел B и рассматривая его равновесие, легко находим усилия в стержнях для обоих состояний:

Стержень	N_P	\bar{N}_1
AB	P	1
BC	$-P$	-1

На основании формулы (13.48)

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_1 N_P l}{EF} = 2 \frac{Pl}{EF} \cdot \quad (13.50)$$

Пример 57. Расположенная в горизонтальной плоскости рама ABC (рис. 373, a) состоит из двух стержней одинакового круглого поперечного сечения. Определим вертикальное перемещение точки C . Вспомогательная система показана на рис. 373, b .

Перемещение Δ_{1P} определим исходя из формулы (13.45). Для произвольных сечений двух участков имеем:

для I участка ($0 \leq x \leq a$)

$$M_P = Px; \quad M_P^{KP} = 0;$$

$$\bar{M}_1 = x; \quad \bar{M}_1^{KP} = 0;$$

для II участка ($0 \leq x \leq l$)

$$M_P = Px; \quad M_P^{KP} = Pa;$$

$$\bar{M}_1 = x; \quad \bar{M}_1^{KP} = a;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_s \frac{\bar{M}_1^{KP} M_P^{KP} dx}{GJ_P} = \int_0^a \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Pa^2 dx}{GJ_P} = \\ &= \frac{P(\alpha^3 + l^3)}{3EJ} + \frac{Pa^2 l}{GJ_P}. \end{aligned} \quad (13.51)$$

§ 84. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Допустим, что произвольный элемент ds стержня нагрет внизу до температуры T_H , а сверху — до T_B (рис. 374, а, б). Обычно предполагается, что по высоте сечения температура изменяется по линейному закону, тогда сечения бруса перемещаются, оставаясь плоскими.

Удлинения нижнего и верхнего волокон (рис. 374, б) соответственно

$$\Delta ds_H = \alpha T_H ds; \quad (13.52)$$

$$\Delta ds_B = \alpha T_B ds,$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Удлинение по оси бруса (среднее удлинение)

$$\Delta ds_c = \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds. \quad (13.53)$$

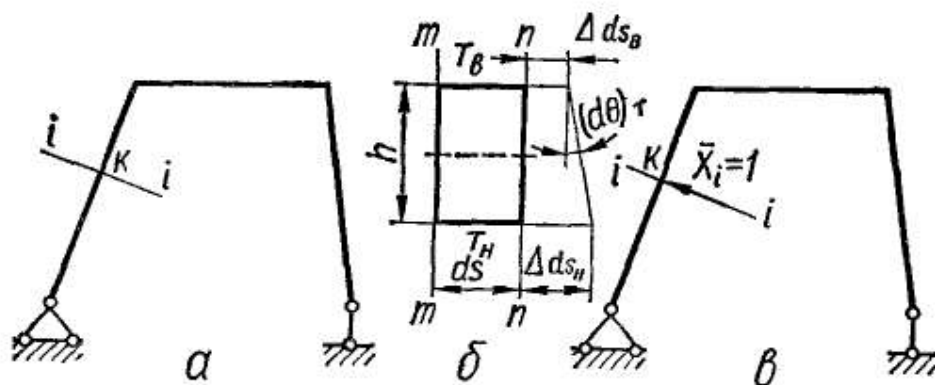


Рис. 374

Взаимный угол поворота сечений элемента ds , вызванный неравномерным нагревом элемента,

$$(d\theta)_T = \frac{\Delta ds_H - \Delta ds_B}{h} = \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds. \quad (13.54)$$

Пусть теперь требуется определить перемещение (обобщенное) произвольной точки k системы в любом направлении i — i , вызванное действием температуры. С этой целью нагружаем вспомога-

тельное состояние системы единичной силой (обобщенной) $\bar{X}_i = 1$ (рис. 374, в). Применяя начало возможных перемещений для вспомогательного состояния и считая возможными действительные перемещения, вызванные действием температуры, на основании формулы (13.44) находим

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \bar{M}_i (d\Theta)_T + \sum_s \int \bar{N}_i \Delta ds_c. \quad (13.55)$$

После подстановки формул (13.53) и (13.54) получим

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds. \quad (13.56)$$

Формула (13.56) применима и для брусьев малой кривизны. В фермах, где действуют только продольные усилия, температурные перемещения определяются по формуле

$$\Delta_{iT} = \sum \bar{N}_i \alpha T l, \quad (13.57)$$

где $T = \frac{T_H + T_B}{2}$ — температура на оси стержня, постоянная по его длине.

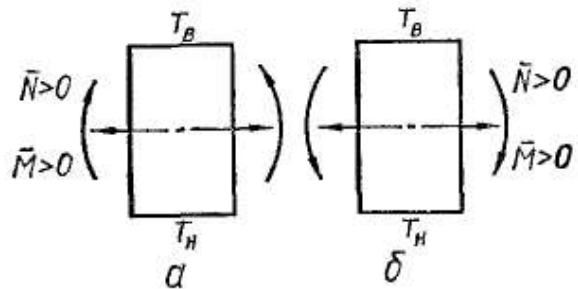


Рис. 375

Суммирование проводят по всем стержням фермы.

Знак перед вторым членом в формуле (13.56) зависит от выбора правила знаков для изгибающего момента. Если считать изгибающий момент положительным, когда он направлен так, как показано на рис. 375, а, то перед вторым членом в формуле (13.56) сохраняется знак «плюс». Иногда изгибающий момент считают положительным, если он направлен, как показано на рис. 375, б. Тогда перед вторым членом в формуле (13.56) берут знак «минус».

Напомним, что в статически определимых системах температурные перемещения не вызывают усилий N , Q и M в элементах системы.

В случае действия нагрузки и температуры на плоскую систему общая формула для перемещений представляет собой сумму членов формул (13.43) и (13.56):

$$\begin{aligned} \Delta_i = \Delta_{iP} + \Delta_{iT} = & \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds + \\ & + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds. \end{aligned} \quad (13.58)$$

Пример 58. Определить горизонтальное и вертикальное перемещение, а также угол поворота свободного конца стальной консоли (рис. 376, а), вызванные неравномерным нагревом. Длина балки $l = 2$ м, высота сечения $h = 10$ см,

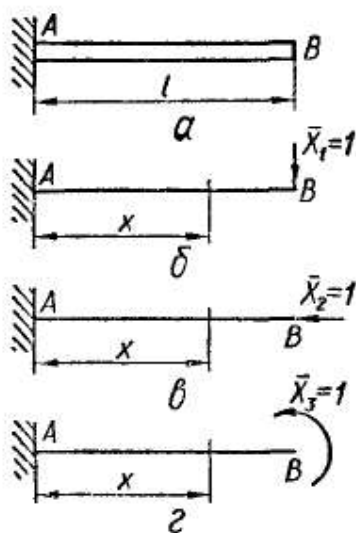


Рис. 376

$\alpha = 118 \cdot 10^{-7}$. Начальная температура балки $T_0 = 5^\circ\text{C}$; затем нижнее волокно нагрето до температуры 55°C , а верхнее охлаждено до температуры -5°C .

Очевидно расчетные температуры волокон следующие:

$$T_{\text{н}} = 55 - 5 = 50^\circ\text{C};$$

$$T_{\text{в}} = -5 - 5 = -10^\circ\text{C}.$$

Вспомогательные состояния для определения вертикального и горизонтального перемещений и угла поворота показаны на рис. 376, б — г. Имеем

$$\bar{M}_1 = -(l - x), \quad \bar{N}_1 = 0;$$

$$\bar{M}_2 = 0; \quad \bar{N}_2 = -1;$$

$$\bar{M}_3 = 1; \quad \bar{N}_3 = 0.$$

Следовательно, на основании формулы (13.56)

а) прогиб

$$\Delta_{1T} = \int_0^l \bar{M}_1 \alpha \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{в}}}{h} dx = -\alpha \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{в}}}{h} \int_0^l (l - x) dx = -\alpha \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{в}}}{2h} l^2,$$

или после подстановки значений,

$$\Delta_{1T} = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10} \text{ см} = -1,42 \text{ см};$$

б) горизонтальное перемещение

$$\Delta_{2T} = \int_0^l \bar{N}_2 \alpha \frac{T_{\text{н}} + T_{\text{в}}}{2} dx = -\alpha \frac{T_{\text{н}} + T_{\text{в}}}{2} l = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 200}{2} \text{ см} = -0,047 \text{ см};$$

в) угол поворота

$$\Delta_{3T} = \int_0^l \bar{M}_3 \alpha \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{в}}}{h} dx = \alpha \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{в}}}{h} \int_0^l dx = \frac{\alpha (T_{\text{н}} - T_{\text{в}})}{h} l;$$

$$\Delta_{3T} = \frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 200}{10} \text{ рад} = 0,0142 \text{ рад}.$$

§ 85. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МОРА ПО СПОСОБУ ВЕРЕЩАГИНА

Вычисление интегралов Мора существенно упрощается, если одна из эпюр (в действительном состоянии или единичном) прямолинейна. Такое условие всегда выполняется для систем, состоящих из прямых брусьев, так как при этом эпюры от единичной нагрузки (сосредоточенной силы или пары) всегда ограничены прямыми линиями.

Вычислим интеграл $\int_i \bar{M}_i M_p dx$ для случая, когда эпюра от заданной нагрузки имеет произвольное очертание, а от единичной —

прямолинейна (рис. 377). Обозначим через Ω площадь эпюры M_P ; c — ее центр тяжести, \bar{M}_c — ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры M_P . Очевидно, что $M_P dx = d\Omega$ представляет собой дифференциал площади эпюры M_P , а

$$\bar{M}_i = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда искомый интеграл

$$\int_i \bar{M}_i M_P dx = \operatorname{tg} \alpha \int_i x d\Omega. \quad (13.59)$$

Интеграл в правой части равенства (13.59) представляет собой статический момент площади эпюры M_P относительно оси $O-O$:

$$\int_i x d\Omega = x_c \Omega,$$

где x_c — абсцисса центра тяжести эпюры M_P .

В таком случае

$$\int_i \bar{M}_i M_P dx = \operatorname{tg} \alpha x_c \Omega = \Omega \bar{M}_c, \quad (13.60)$$

так как

$$x_c \operatorname{tg} \alpha = \bar{M}_c.$$

Следовательно, интеграл Мора равен произведению площади эпюры от внешней нагрузки на ординату прямолинейной эпюры от единичной нагрузки, расположенную под центром тяжести эпюры от заданной внешней нагрузки.

Общая формула (13.46) перемещений для систем из прямолинейных элементов принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_c}{EJ}. \quad (13.61)$$

Описанный графоаналитический способ вычисления интеграла Мора был предложен А. Н. Верещагиным и носит название *способа Верещагина*. Вычисления по этой формуле проводят по участкам, на каждом из которых эпюра от единичной нагрузки должна быть прямолинейной (рис. 378). В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножать площадь любой из них на ординату другой под центром тяжести первой.

Если эпюра M_P имеет сложный вид, то ее нужно разбить на простые фигуры (рис. 379), для которых легко определить площадь и положение центра тяжести. При этом каждую из площадей умножают на ординату единичной эпюры под центром тяжести соответствующей площади. Ординаты в этом случае удобно обозначать вместо \bar{M}_{ck} буквами $\bar{\eta}_k$, где $k = 1; 2; \dots$

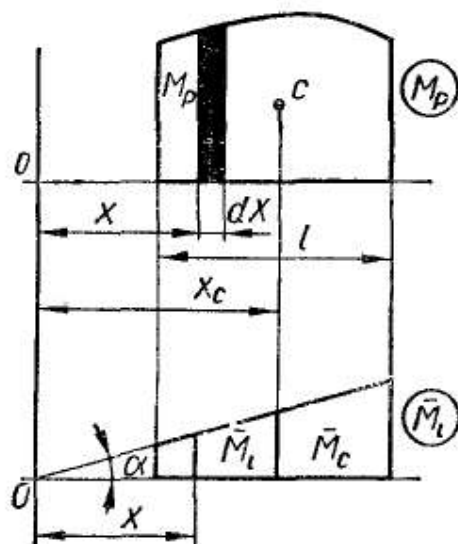


Рис. 377

Таким образом,

$$\Delta_{IP} = \sum_{k=1, \dots} \frac{\Omega_k \bar{\eta}_k}{EJ} \quad (13.62)$$

При учете крутящих моментов в общем случае нагружения знаменатель формулы (13.61) в соответствующем члене содержит жесткость на кручение GJ_k .

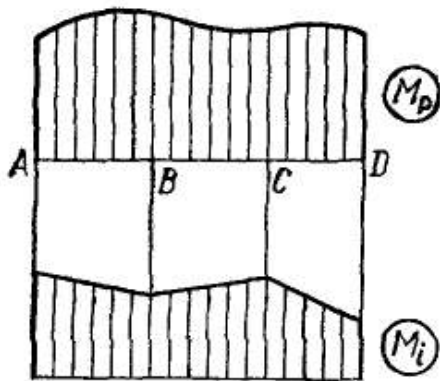


Рис. 378

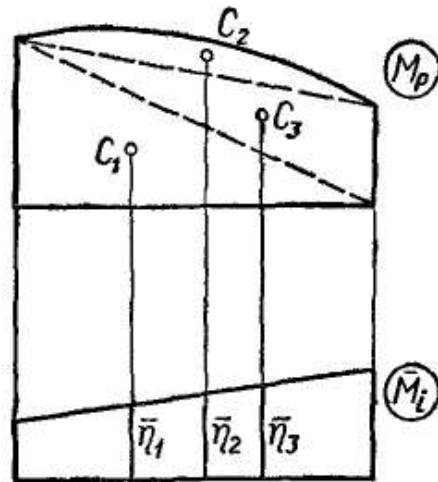


Рис. 379

Если эпюры M_P и \bar{M}_i противоположны по знаку, то результат умножения эпюр имеет знак «минус».

Способ перемножения эпюр по Верещагину широко применяют при расчете рамных конструкций (конструкций, у которых углы в месте сопряжения отдельных стержней, жесткие до деформации, остаются жесткими после нее).

Рассмотрим некоторые примеры применения способа Верещагина для определения перемещений в различных стержневых системах.

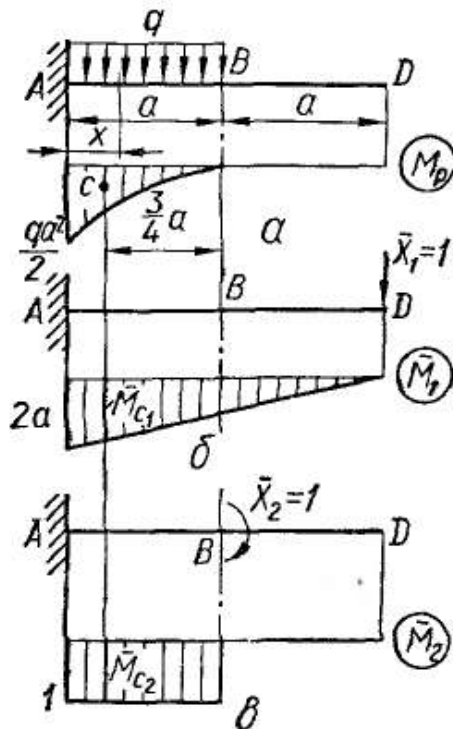


Рис. 380

Определим прогиб в точке D и угол поворота сечения B консоли (рис. 380, а). Соответствующие вспомогательные (единичные) состояния показаны на рис. 380, б, в.

Строим эпюры изгибающих моментов M_P и \bar{M}_i . Прогиб в точке D по Верещагину

$$\Delta_{IP} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_{C1}}{EJ}$$

На участке AB площадь $\Omega = \frac{1}{6} qa^3$. Центр тяжести этой площади, ограниченной квадратичной параболой вида $\frac{q(a-x)^2}{2}$ (рис. 380, а), находится на расстоянии $\frac{3}{4}a$ от точки B , в чем легко

убедиться, применив формулу (2.3). Ордината вспомогательной эпюры $\bar{M}_{c1} = \frac{7}{4} a$. На участке BD $\Omega = 0$. Итак,

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \frac{7}{4} a = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Для определения угла поворота вспомогательную систему нагружаем единичной парой. Очевидно $\bar{M}_{c2} = 1$. Следовательно, угол поворота сечения B

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_{c2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \cdot 1 = \frac{qa^3}{6EJ}.$$

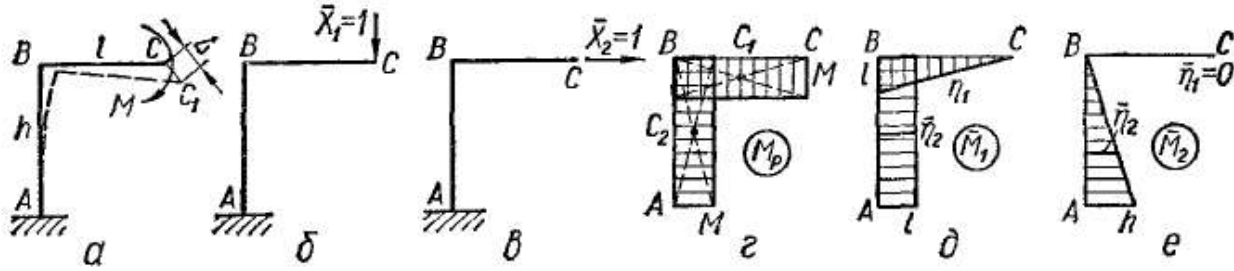


Рис. 381

Определим полное перемещение точки C рамы, изображенной на рис. 381, a , приняв, что $EJ = \text{const}$. Для определения полного перемещения $\Delta = CC_1$ вычислим предварительно перемещения указанной точки в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Чтобы определить вертикальное перемещение точки C , раму во вспомогательном состоянии нагружаем силой $\bar{X}_1 = 1$, направленной вертикально (рис. 381, b). Основная эпюра M_P показана на рис. 381, z , вспомогательная \bar{M}_1 — на рис. 381, d . Имеем

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega_k \bar{\eta}_k}{EJ}.$$

Вычисления проводим по участкам:

для участка CB

$$\Omega_1 = Mt; \quad \bar{\eta}_1 = \frac{l}{2};$$

для участка AB

$$\Omega_2 = Mh; \quad \bar{\eta}_2 = l.$$

Следовательно,

$$\Delta_{1P} = \frac{Ml \cdot \frac{l}{2}}{EJ} + \frac{Mh \cdot l}{EJ} = \frac{Ml}{EJ} \left(\frac{l}{2} + h \right).$$

Для определения горизонтального перемещения вспомогательную систему нагружаем в точке C горизонтальной силой $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 381, e). Эпюры \bar{M}_2 показаны на рис. 381, e .

Очевидно на участке CB ордината $\bar{\eta}_1 = 0$, а на участке AB ордината $\bar{\eta}_2 = \frac{h}{2}$. Следовательно,

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_2 \bar{\eta}_2}{EJ} = \frac{Mh^2}{2EJ}.$$

Полное перемещение точки C рамы

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{1P}^2 + \Delta_{2P}^2}.$$

Определим изменение расстояния между точками A и B для рамы, показанной на рис. 382, а. Эпюры изгибающих моментов от

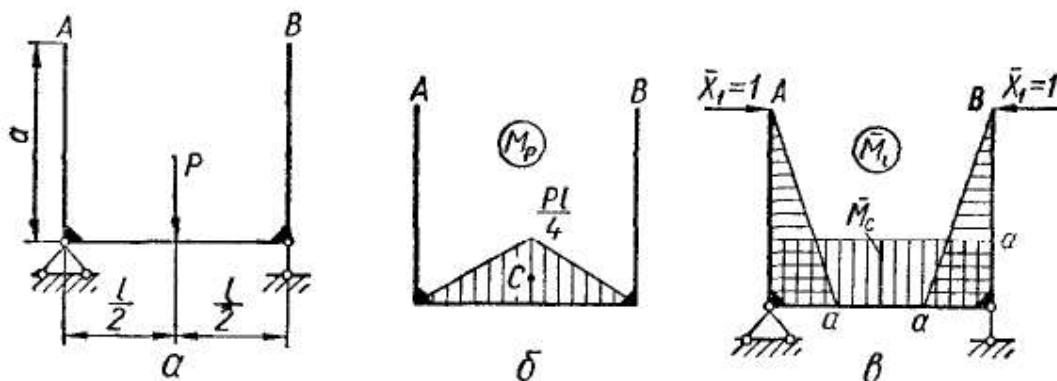


Рис. 382

заданной нагрузки M_P показана на рис. 382, б. Во вспомогательном состоянии нагружаем систему сближенной нагрузкой, соответствующей искомому перемещению (рис. 382, в)¹. Такой нагрузкой являют-

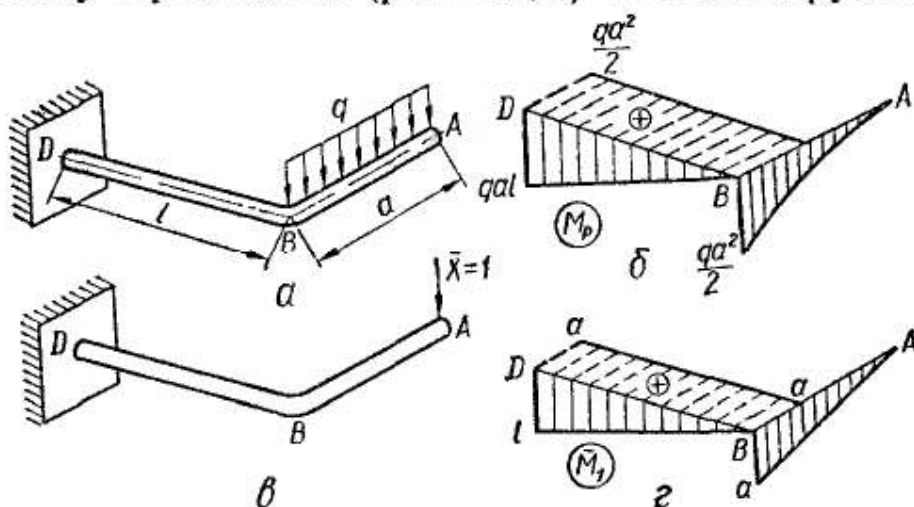


Рис. 383

ся единичные сосредоточенные силы, приложенные в указанных точках. Эпюры M_P и \bar{M}_1 построены на сжатых волокнах. Имеем

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} l = \frac{Pl^2}{8};$$

$$\bar{M}_c = a.$$

¹ Для сокращения количества рисунков здесь и в некоторых примерах в дальнейшем эпюры строим непосредственно на осях стержней, т. е. схемы нагруженных состояний и эпюры совмещаем на одном рисунке.

Следовательно,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega \bar{M}_c}{EJ} = \frac{Pl^2 a}{8EJ}.$$

Определим опускание свободного конца ломаной консоли круглого поперечного сечения, нагруженной на участке AB вертикальной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 383, а). Эпюры изгибающих и крутящих моментов для основного и вспомогательного состояний изображены на рис. 383, б, г. Эпюры крутящих моментов расположены в горизонтальной плоскости, а их ординаты изображены штриховыми линиями

Вычисления проводим по участкам:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \frac{3}{4} a + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} qal^2 \frac{2}{3} l + \frac{1}{GJ_p} \frac{qa^2}{2} la = \\ &= \frac{qa}{EJ} \left(\frac{a^3}{8} + \frac{l^3}{3} \right) + \frac{qa^2 l}{2GJ_p}. \end{aligned}$$

§ 86. ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ВЕРЕЩАГИНА К СТЕРЖНЯМ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Чтобы применить метод Мора для определения перемещений в стержнях переменного сечения, преобразуем формулу (13.46) следующим образом:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ(x)} = \sum \int_l \frac{M_P \frac{J_0}{J(x)}}{EJ_0} \bar{M}_i dx, \quad (13.63)$$

где $J(x)$ — момент инерции произвольного сечения;

J_0 — момент инерции определенного (характерного) сечения.

Обозначим $M_P \frac{J_0}{J(x)} = M_{пр}$ и назовем эту величину *приведенным изгибающим моментом в текущем сечении*. Тогда интеграл Мора можно записать в виде

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_{пр}}{EJ_0} dx. \quad (13.64)$$

Применяя к формуле (13.64) способ Верещагина, находим, что

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_{пр} \bar{M}_c}{EJ_0}, \quad (13.65)$$

где $\Omega_{пр}$ — площадь эпюры $M_{пр}$, т. е. площадь приведенной эпюры;

\bar{M}_c — ордината единичной эпюры под центром тяжести приведенной эпюры.

Определим прогиб свободного конца и угол поворота сечения B консоли переменного сечения (рис. 384), если

$$J(x) = J_0 \frac{l-x}{l},$$

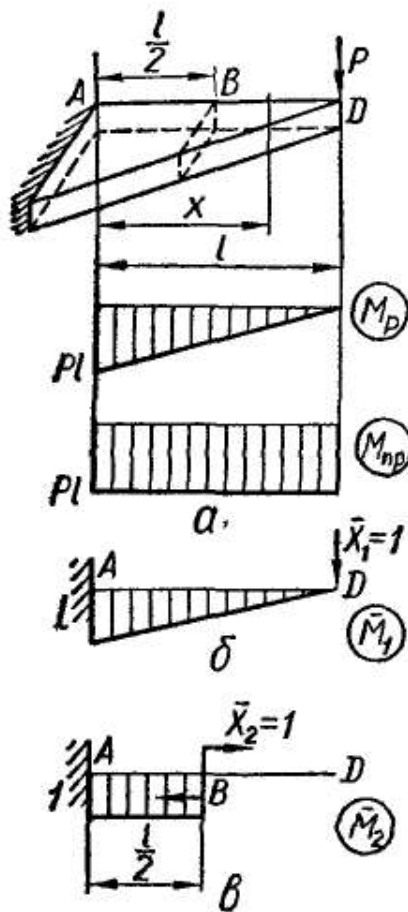


Рис. 384

где J_0 — момент инерции сечения в месте заземления.

Текущая ордината эпюры M_P равна $-P(l-x)$. Приведенные ординаты постоянны, так как

$$M_{пр} = M_P \frac{J_0}{J(x)} = -Pl.$$

Для определения прогиба строим вспомогательное состояние (рис. 384, б). Очевидно

$$\Omega_{пр} = Pl^2; \quad \bar{M}_1 = \frac{l}{2};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_{пр} \bar{M}_1}{EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}.$$

Чтобы определить угол поворота сечения B , нагружаем балку во вспомогательном состоянии сосредоточенным моментом $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 384, в). Учитывая, что эпюра \bar{M}_2 имеет два участка, получаем

$$\Omega_{пр} = Pl \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{2}; \quad \bar{M}_2 = 1;$$

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_{пр} \bar{M}_2}{EJ_0} = \frac{Pl^2}{2EJ_0}.$$

§ 87. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Согласно закону сохранения энергии, работа внешних сил не исчезает, а трансформируется в потенциальную энергию, накапливаемую в упругом теле. Следовательно, величина накопленной потенциальной энергии деформации определяется величиной работы внешних сил. Эта энергия проявляется в виде работы, совершаемой при разгрузке внутренними силами. Снимая, например, часть гирь, приложенных к балке (рис. 385), заметим, что балка несколько выпрямится и приподнимет оставшиеся гири. Таким образом, упругое тело способно аккумулировать механическую энергию, которую можно вернуть при разгрузке.



Рис. 385

Пренебрегая при статическом нагружении изменениями кинетической энергии системы, а также потерями энергии на внутреннее трение, изменение температуры, магнитные и электрические явления, которые имеют место при деформации, можно утверждать, что уменьшение потенциальной энергии грузов равно потенциальной энергии деформации, накопленной упругой конструкцией, т. е.

$$U = U_P, \quad (13.66)$$

где U — приращение потенциальной энергии деформации;

U_P — уменьшение потенциальной энергии грузов.

Уменьшение потенциальной энергии грузов численно равно работе внешних сил при нагружении тела. Следовательно, потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил при нагружении системы или работе внутренних сил, совершенной в процессе разгружения.

На основании формулы (13.22) потенциальная энергия деформации в общем случае нагружения бруса

$$\begin{aligned}
 U = A = & \frac{1}{2} \int_s \frac{M_y^2 ds}{EJ_y} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_z^2 ds}{EJ_z} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{GJ_k} + \\
 & + \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{GF} + \frac{1}{2} \int_s k_z \frac{Q_z^2 ds}{GF}.
 \end{aligned}
 \tag{13.67}$$

Как видно из формулы, потенциальная энергия деформации является квадратичной функцией обобщенных сил или обобщенных перемещений, так как последние линейно связаны с обобщенными силами. Следовательно, потенциальная энергия деформации всегда положительна. Ее величина не зависит от порядка нагружения и целиком определяется окончательными значениями усилий и перемещений. Отметим также, что потенциальная энергия как квадратичная функция обобщенных нагрузок не подчиняется принципу независимости действия сил. Это значит, что потенциальная энергия, накопленная в результате действия группы сил, не равна сумме потенциальных энергий, вызванных действием каждой нагрузки в отдельности. Закон независимости действия сил при вычислении потенциальной энергии применим лишь в тех случаях, когда перемещение по направлению одной обобщенной силы, вызванное действием другой силы, равно нулю.

Пример 59. Определить величину потенциальной энергии деформации, накопленную в шарнирно-стержневой системе (рис. 386), нагруженной в узле B вертикальной силой P . Стержни AB и BC имеют одинаковые размеры и изготовлены из одного материала.

Рассматривая равновесие узла B , легко находим, что стержни растягиваются одинаковыми силами:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}}.
 \tag{13.68}$$

Следовательно, потенциальная энергия деформации системы

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 l}{2EF} = \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{EF} = \frac{P^2 l}{3EF}.
 \tag{13.69}$$

С другой стороны, на основании формулы (13.10) потенциальную энергию деформации можно представить как половину произведения силы, приложенной

в узле, на вертикальное перемещение узла Δ_P , т. е.

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P. \quad (13.70)$$

Заметим, что, сравнивая формулы (13.69) и (13.70), можно найти перемещение точки B по направлению силы:

$$\Delta_P = \frac{2}{3} \frac{Pl}{EF}.$$

Пример 60. Определить потенциальную энергию, накопленную при деформации балки постоянного прямоугольного сечения $b \times h$, нагруженной, как показано на рис. 387.

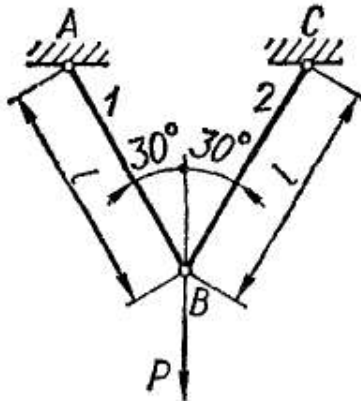


Рис. 386

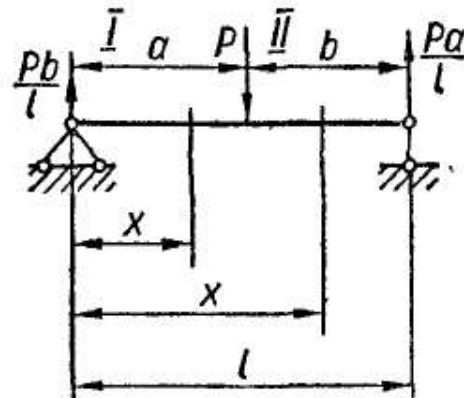


Рис. 387

Будем исходить из формулы (13.67), сохранив члены, соответствующие плоскому изгибу. Получим

$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EJ} + k \int_l \frac{Q^2(x) dx}{2GF}. \quad (13.71)$$

Вычисления проводим по участкам. Выражения для изгибающих моментов и поперечных сил в произвольных сечениях участков имеют следующий вид: для I участка ($0 \leq x \leq a$)

$$M(x) = \frac{Pb}{l} x; \quad Q(x) = \frac{Pb}{l};$$

для II участка ($a \leq x \leq l$)

$$M(x) = \frac{Pa}{l} (l - x); \quad Q(x) = -\frac{Pa}{l}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l} x\right)^2 dx}{2EJ} + k \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l}\right)^2 dx}{2GF} + \int_a^l \frac{\left[\frac{Pa}{l} (l - x)\right]^2 dx}{2EJ} + k \int_a^l \frac{\left(\frac{Pa}{l}\right)^2 dx}{2GF} = \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl} + k \frac{P^2 ab}{2GF} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl} + \frac{3}{5} \frac{P^2 ab}{GF}, \end{aligned} \quad (13.72)$$

так как для прямоугольного сечения $k = 1,2$. Подставив в формулу (13.72)

$$G = 0,4E; \quad J = \frac{bh^3}{12}; \quad F = bh,$$

найдем, что

$$U = \frac{2P^2 a^2 b^2}{Ebh^3 l} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{ab}\right).$$

Последний член в скобках, выражающий влияние поперечной силы, при обычных размерах балок не превышает 2—3%. В связи с этим при изгибе балки влиянием поперечной силы при вычислении потенциальной энергии обычно пренебрегают.

Желая вычислить прогиб балки в месте приложения нагрузки, представим потенциальную энергию деформации балки в виде

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P \quad (13.73)$$

и, сравнивая выражения (13.73) и (13.72), пренебрегая в последнем влиянием поперечной силы, найдем прогиб в сечении B :

$$\Delta_P = \frac{Pa^2b^2}{3EI} \cdot \quad (13.74)$$

§ 88. ТЕОРЕМА КАСТИЛЬЯНО. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Пусть упругая система статически нагружена произвольной нагрузкой Q и некоторой обобщенной силой P (рис. 388). Вычислим потенциальную энергию, накопленную при деформации системы. С этой целью для удобства примем следующий порядок нагружения. Вначале нагружаем систему силой P . Перемещение точки приложения силы по ее направлению и от ее действия обозначим Δ_{PP} . Затем прикладываем нагрузку Q . В результате дополнительной деформации сила P получит перемещение Δ_{PQ} . Полное (обобщенное) перемещение точки приложения силы

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}. \quad (13.75)$$

Очевидно накопленная потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил:

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}, \quad (13.76)$$

где U_{QQ} — энергия, накопленная в результате деформирования системы только силами Q , численно равная работе сил Q на вызванных ими перемещениях.

Второй член в формуле (13.76) не содержит $1/2$, так как на перемещении Δ_{PQ} сила P , выполняя работу, не изменяла своего значения. Так как $\Delta_{PP} = P \delta_{PP}$, то формулу (13.76) можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} P^2 \delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}. \quad (13.77)$$

Продифференцируем выражение (13.77) по силе P с учетом равенства (13.75):

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}} \quad (13.78)$$

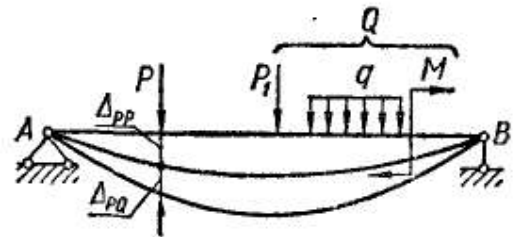


Рис. 388

Перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе (теорема Кастильяно).

Заметим, что, согласно формуле (13.77), вторая производная от потенциальной энергии по обобщенной силе

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP} \quad (13.79)$$

и имеет существенно положительную величину.

Для плоской стержневой системы, исходя из общей формулы (13.67), потенциальную энергию деформации запишем в виде

$$U = \int_s \frac{M^2(s) ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s) ds}{2EF} + \int_s k \frac{Q^2(s) ds}{2GF}, \quad (13.80)$$

где $M(s)$, $N(s)$, $Q(s)$ — усилия в сечении стержня.

Применяя правило дифференцирования по параметру, находим, что

$$\begin{aligned} \Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = & \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s) ds}{EF} \frac{\partial N(s)}{\partial P} + \\ & + \int_s k \frac{Q(s) ds}{GF} \frac{\partial Q(s)}{\partial P}, \end{aligned} \quad (13.81)$$

или, если пренебречь влиянием осевых и поперечных сил на величину перемещения,

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P}. \quad (13.82)$$

Чтобы определить линейное или угловое перемещение в точке, где по условию задачи сила отсутствует, в этой точке следует приложить соответствующую фиктивную обобщенную силу. Далее, написав выражение для потенциальной энергии от системы сил, включая указанную фиктивную силу, следует взять его производную по этой фиктивной силе и в полученном выражении для перемещения положить фиктивную нагрузку равной нулю.

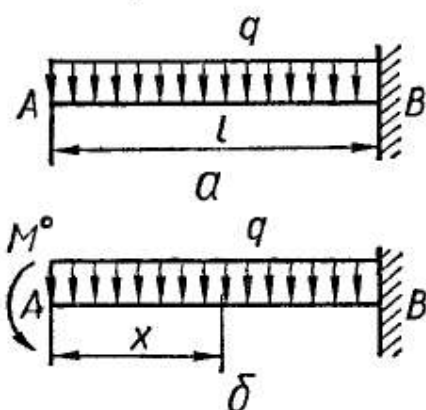


Рис. 389

Пример 61. Определить по способу Кастильяно угол поворота свободного конца консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 389, а).

В указанном сечении балки в качестве фиктивной нагрузки прикладываем момент M^0 (рис. 389, б). Угол поворота сечения А, согласно формуле (13.78),

$$\Theta_A = \Delta_{MP} = \frac{\partial U}{\partial M^0} = \int_l \frac{M(x) dx}{EJ} \frac{\partial M(x)}{\partial M^0}.$$

Имеем

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - M^0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M^0} = -1;$$

$$\Theta_A = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[-\frac{qx^2}{2} + M^0 \right] dx.$$

Принимая $M^0 = 0$, получаем

$$\Theta_A = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Отметим, что общая формула (13.45) для вычисления перемещений в стержневых системах, не требующая написания выражений потенциальной энергии и их дифференцирования, вытеснила из расчетной практики способ Кастильяно. Однако последний является общим способом определения перемещений в нестержневых системах (пластинках, оболочках и деталях, все три измерения которых имеют один порядок).

Выразив потенциальную энергию деформации в функции независимых перемещений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, можно показать, что частная производная от потенциальной энергии по любому перемещению равна силе, действующей по направлению перемещения, т. е.

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i.} \quad (13.83)$$

Эта теорема была установлена Лагранжем.

Пример 62. Симметричная шарнирно-стержневая система нагружена в узле В вертикальной силой P (рис. 390). Определить величину силы P , если опускание узла равно Δ_P .

Введем обозначения: α_i — угол наклона стержня к вертикали; l_i — длина стержня; $E_i F_i$ — жесткость поперечного сечения стержня. Стержни, равно наклоненные к вертикали, имеют одинаковые жесткости.

Легко видеть, что удлинение i -го стержня

$$\Delta_i = \Delta_P \cos \alpha_i,$$

а усилие в нем

$$P_i = \frac{\Delta_i E_i F_i}{l_i}.$$

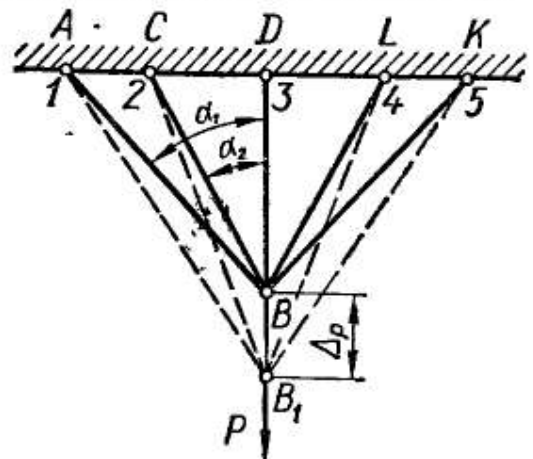


Рис. 390

Потенциальная энергия деформации системы

$$U = \sum \frac{P_i \Delta_i}{2} = \sum \frac{\Delta_i^2 E_i F_i}{2l_i} = \Delta_P^2 \sum \frac{\cos^2 \alpha_i E_i F_i}{2l_i}.$$

Дифференцируя по Δ_P , находим:

$$P = \frac{\partial U}{\partial \Delta_P} = \Delta_P \sum_i \frac{\cos^2 \alpha_i E_i F_i}{l_i}.$$

§ 89. ТЕОРЕМА О МИНИМУМЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим произвольную статически неопределимую систему (рис. 391, а), усилия в элементах которой только из уравнений равновесия определить нельзя. Так, опорные закрепления изображенной балки дают шесть реакций, а уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил можно составить только три. Превратим систему в статически определимую, удалив соответствующее число связей. В данном примере (рис. 391, б) отброшены три связи — шарнирно-подвижные опоры B, C и D . Действие отброшенных связей заменим соответствующими реакциями X_1, X_2, X_3 и т. д.,

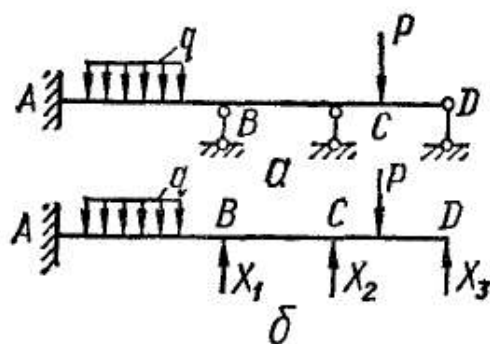


Рис. 391

которые будем рассматривать как независимые друг от друга внешние нагрузки.

Вычислим по способу Кастильяно перемещения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ точек приложения сил X_1, X_2, X_3, \dots по направлению их действия. Очевидно

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2};$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3}; \quad \dots,$$

где $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots, P)$ — потенциальная энергия деформации системы.

Так как эти перемещения равны нулю, то

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \quad \dots} \quad (13.84)$$

Уравнения (13.84) — необходимое условие экстремума функции U . Легко видеть, что этот экстремум является минимумом. В самом деле, согласно формуле (13.79), вторые производные функции U по X_1, X_2, X_3

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}; \quad \dots} \quad (13.85)$$

Перемещения $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ — существенно положительные величины, а положительный знак вторых производных свидетельствует о том, что условия (13.84) являются условиями минимума функции U .

Таким образом, приходим к теореме о минимуме потенциальной энергии: *в статически неопределимых системах лишние неизвестные усилия принимают такие значения, при которых потенциальная энергия деформации имеет наименьшее значение* (теорема Менабреа). Эта теорема известна также как теорема о наименьшей работе, так как вместо потенциальной энергии можно говорить о численно равной ей работе внешних сил.

На основании изложенной теоремы можно заключить, что при добавлении каких-либо связей потенциальная энергия всегда уменьшается.

Пример 63. Пользуясь теоремой о минимуме потенциальной энергии определить реакцию шарнирно-подвижной опоры бруса малой кривизны, изображенного на рис. 392. Брус нагружен сосредоточенным моментом в опорном сечении B .

Обозначим неизвестную реакцию через X . Тогда на основании теоремы о минимуме потенциальной энергии деформации

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (13.86)$$

Так как $U = \int_s \frac{M^2(\varphi) ds}{2EJ}$, то формула (13.86) принимает вид

$$\int_s \frac{M(\varphi) ds}{EJ} \cdot \frac{dM(\varphi)}{dX} = 0. \quad (13.87)$$

Имеем

$$M(\varphi) = M + XR \sin \varphi; \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial X} = R \sin \varphi; \quad ds = R d\varphi.$$

Внося эти значения в формулу (13.87), получим уравнения для определения реакции X :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(M + XR \sin \varphi) R \sin \varphi R d\varphi}{EJ} = 0;$$

$$M + XR \frac{\pi}{4} = 0; \quad X = - \frac{4M}{\pi R}.$$

Знак «минус» в выражении для X указывает, что первоначально выбранное направление для реакции следует изменить на противоположное.

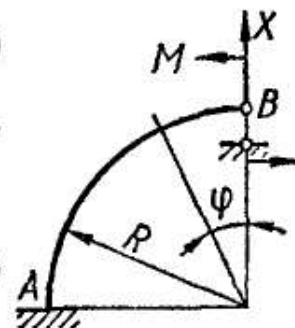


Рис. 392

Глава 14

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

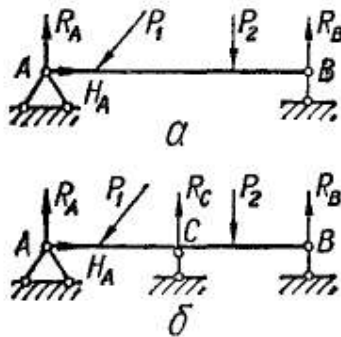
§ 90. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

ЭТАПЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Как уже указывалось, статически неопределимыми называются системы, силовые факторы в элементах которых только из уравнений равновесия твердого тела определить нельзя. В таких системах больше связей, чем необходимо для равновесия. Таким образом, некоторые связи оказываются в этом смысле как бы *лишними*, а усилия в них — *лишними неизвестными*. По числу лишних связей или лишних неизвестных усилий устанавливают степень статической неопределимости системы.

В § 37 были рассмотрены простейшие случаи статически неопределимых систем, элементы которых испытывали лишь осевое растяжение или сжатие. В настоящей главе рассмотрим более общие случаи, причем основное внимание уделим статически неопределимым балкам и рамам.

На рис. 393, а показана шарнирно опертая балка — система статически определяемая и геометрически неизменяемая. Все три



реакции (R_A , H_A , R_B) определяются из трех условий равновесия плоской системы сил. Используя метод сечений, легко найти силовые факторы Q , M в любом сечении балки.

Добавим еще одну связь, например шарнирно-подвижную опору в сечении C (рис. 393, б). Хотя в результате этого система стала более прочной и жесткой, однако с точки зрения геометрической неизменяемости эта связь лишняя. Теперь из трех уравнений равновесия четыре реакции (R_A , H_A , R_B , R_C) определить нельзя.

Рис. 393

Таким образом, балка, изображенная на рис. 393, б, один раз статически неопределима.

На рис. 394, а показана дважды статически неопределимая балка. Для определения пяти реакций есть лишь три уравнения равновесия. Следовательно, система содержит две лишние связи. Она может быть образована, например, из консоли (рис. 394, б) постановкой шарнирно-подвижных опор в сечениях B и C .

В конструкциях часто встречаются статически неопределимые балки с ломаной осью — рамы. В отличие от ферм, где стержни

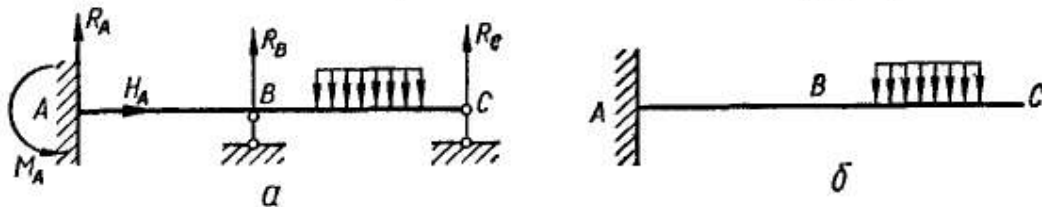


Рис. 394

соединены между собой шарнирами и нагружены силами, приложенными в узлах, рамы имеют один или несколько жестких узлов. В жестком узле торцы соединяемых стержней не имеют относительных поступательных перемещений, а также относительных поворотов.

Рамные конструкции могут состоять как из прямолинейных, так и из криволинейных элементов. На рис. 395 показана дважды статически неопределимая плоская рама. В этом случае, как и в предыдущем, для определения пяти реакций внешних связей имеем только три уравнения равновесия.

Рамы могут быть нагружены вполне произвольной нагрузкой, любым образом ориентированной.

Статическая неопределимость может быть результатом не только введения дополнительных внешних связей, но также и условий образования системы. Рассмотрим раму, показанную на рис. 396, а.

Очевидно реакции R_A , H_A , R_B внешних связей (опор) легко определить из уравнений равновесия. Однако после этого условия равновесия не позволяют определить все силовые факторы в ее элементах.

Разрежем раму на две части и рассмотрим равновесие одной из ее частей (рис. 396, б). Действие отброшенной части на оставленную заменено в каждом сечении разреза тремя силовыми факторами: осевой силой N , поперечной силой Q и изгибающим моментом M .

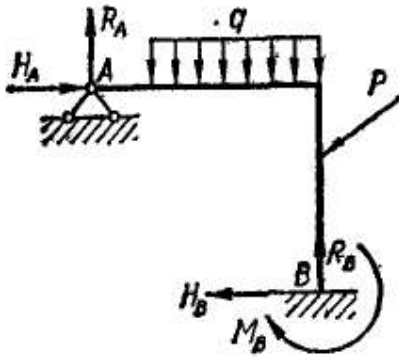


Рис. 395

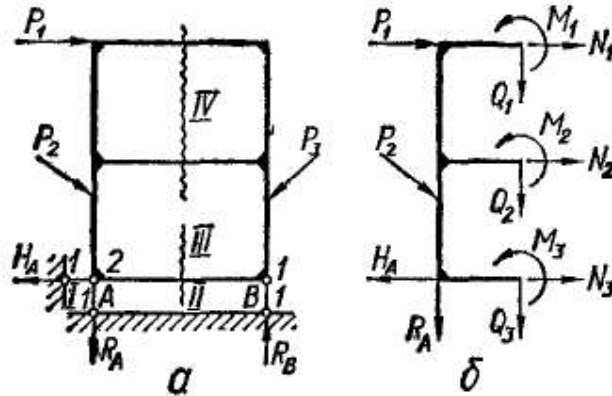


Рис. 396

Таким образом, из трех уравнений равновесия надлежит определить девять неизвестных усилий. Система, следовательно, шесть раз статически неопределима. Она состоит из двух замкнутых бесшарнирных контуров, каждый из которых трижды статически неопределим.

Отметим, что постановка шарнира на оси стержня (рис. 397, а) обращает в нуль изгибающий момент в данном сечении и, следовательно, снижает степень статической неопределимости на единицу. Такой шарнир называют *одиночным*. Очевидно рама, показанная на рис. 397, а, пять раз статически неопределима.

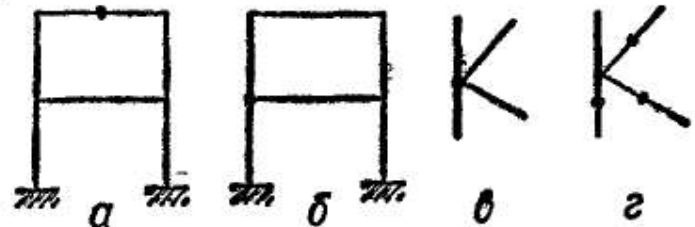


Рис. 397

Шарнир, включенный в узел, где сходятся n стержней (рис. 397, в), снижает степень статической неопределимости на $n - 1$, так как заменяет собой столько же одиночных шарниров (рис. 397, а). Такой шарнир называется *общим*. Рама, изображенная на рис. 397, б, четыре раза статически неопределима.

Для определения степени статической неопределимости плоских систем можно пользоваться формулой

$$s = 3k - m, \quad (14.1)$$

где s — степень статической неопределимости;

k — число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;

m — число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень. Так, например, рама, приведенная на рис. 396, имеет четыре замкнутых контура; у каждого шарнира указано соответствующее число одиночных шарниров, при этом группа стержней, жестко связанных между собой (не разделенных шарнирами), принимается за один стержень.

Итак, в рассматриваемом случае $k = 4$, $m = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$. Следовательно, $s = 3 \cdot 4 - 6 = 6$.

Как уже отмечалось в § 37, для определения усилий в статически неопределимых системах дополнительно к уравнениям статики составляют так называемые уравнения совместности деформаций. В самом деле, лишние связи накладывают определенные ограничения на перемещения тех сечений, к которым они приложены. Это обстоятельство и используют для составления дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями статики позволяют определить все силовые факторы в элементах системы.

Рассмотрим основные этапы расчета статически неопределимой системы:

1. Устанавливаем степень статической неопределимости, т. е. число лишних связей или лишних усилий.

2. Удаляя лишние связи, заменяем исходную систему статически определимой, которая называется основной системой. Выбор лишних связей зависит от желания расчетчика, так что для одной и той же статически неопределимой исходной системы возможны различные варианты основных систем. Однако нужно следить за тем, чтобы каждая из них была геометрически неизменяемой. Рациональный выбор системы упрощает расчет.

Таким образом, *основной системой* называется любой из статически определимых вариантов рассматриваемой системы, полученный освобождением ее от лишних связей.

3. Загружаем основную систему заданной нагрузкой и лишними неизвестными усилиями, заменяющими действие удаленных связей. Такая система называется *эквивалентной системой*.

4. Для эквивалентности основной системы с исходной неизвестные усилия должны быть подобраны так, чтобы деформация основной системы не отличалась от деформации исходной статически неопределимой. Для этого приравнивают к нулю перемещения точек приложения неизвестных усилий по направлению их действия. Из полученных таким образом уравнений определяют значения лишних неизвестных.

Определять перемещения соответствующих точек основной системы можно любым способом, однако лучше всего общими методами — методом Мора или способом Верещагина.

Найдя лишние неизвестные усилия, определение реакций и построение эпюр внутренних силовых факторов, а также подбор сечений и проверку прочности проводим обычными способами.

Указанная схема расчета носит название *метода сил*, поскольку в качестве основных неизвестных здесь выбирают усилия лишних связей.

§ 91. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

В качестве примера рассчитаем балку, один конец которой зашкелен, а другой оперт на шарнирно-подвижную опору (рис. 398, а).

Зашкеление левого конца, эквивалентное трем стержням, дает три реакции, шарнирно-подвижная опора — одну реакцию. Всего требуется определить четыре реакции. Следовательно, балка один раз статически неопределима. Для построения основной системы нужно устранить одну связь.

В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору. Основная система, полученная в результате удаления лишней связи, представляет собой консоль.

Нагружаем основную систему заданной распределенной нагрузкой, а вместо отброшенной опоры прикладываем неизвестную реакцию $R_B = X_1$ (рис. 398, б). В дальнейшем лишние усилия будем обозначать буквой X независимо от того, сила это или момент.

Полное перемещение точки B основной системы (от заданной нагрузки и лишнего неизвестного усилия) по направлению X_1 , т. е. по направлению удаленной связи (рис. 398, б), должно быть равно нулю, так как в точке B исходная балка не имеет прогиба. Таким образом, дополнительное уравнение перемещений имеет вид

$$\Delta_1 = 0. \quad (14.2)$$

Полный прогиб Δ_1 можно представить как сумму прогибов от внешней нагрузки $\Delta_{1P} =$

$= -\frac{ql^4}{8EJ}$ (рис. 398, в) и неизвестной реакции $\Delta_{11} = \frac{X_1 l^3}{3EJ}$ (рис. 398, г).

(Методы определения Δ_{1P} и Δ_{11} приведены в гл. 10 и 13). Тогда уравнение (14.2) запишется в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0,$$

или

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

Отсюда искомая реакция

$$X_1 = \frac{3}{8} ql.$$

Теперь из уравнений статики легко вычислить остальные реакции, а затем обычным способом построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. На рис. 399 приведены эпюры Q и M , а также значения реакций опор. Проверка прочности или подбор сечения проводятся обычным путем.

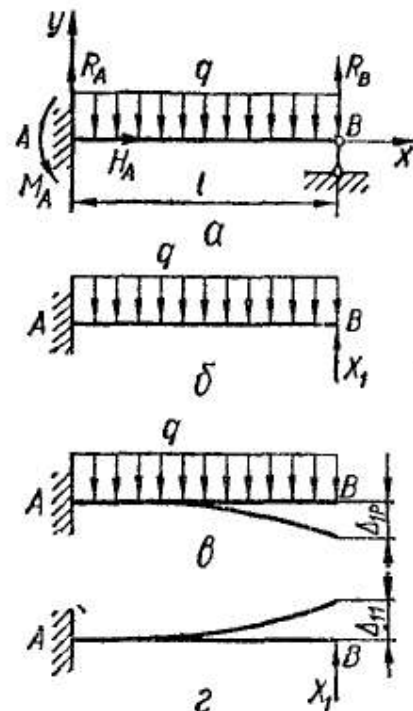


Рис. 398

Напомним, что вид основной системы зависит от того, какие связи (усилия) выбраны в качестве лишних. Так, выбрав в качестве лишнего усилия опорный момент M_A , получим основную систему, заменив защемление шарнирно-неподвижной опорой (рис. 400, а). Здесь основная система, кроме заданной нагрузки, загружается неизвестным моментом $M_A = X_1$, величина которого определится на основании уравнения перемещений (14.2). Под Δ_1 в этом случае следует понимать полный угол поворота сечения A .

На рис. 400, б показана основная система, полученная в предположении, что в качестве лишней неизвестной принята реакция R_A . Такое устройство опоры препятствует повороту и горизонтальному перемещению, но допускает вертикальное перемещение. В этом случае уравнение пере-

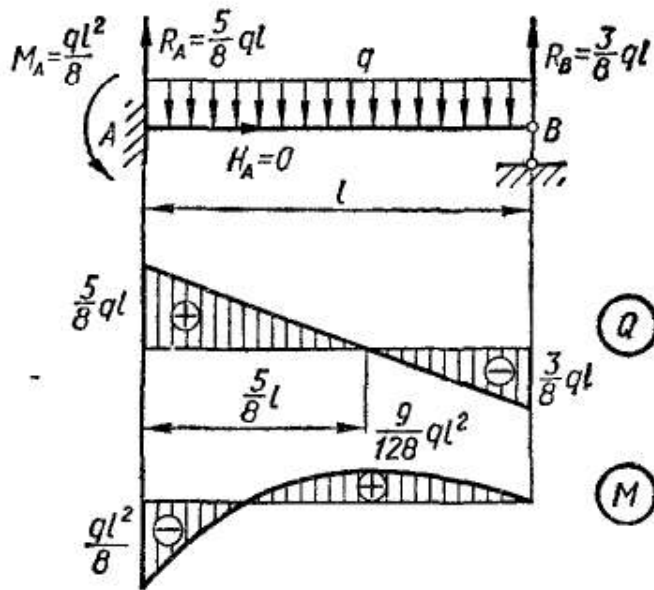


Рис. 399

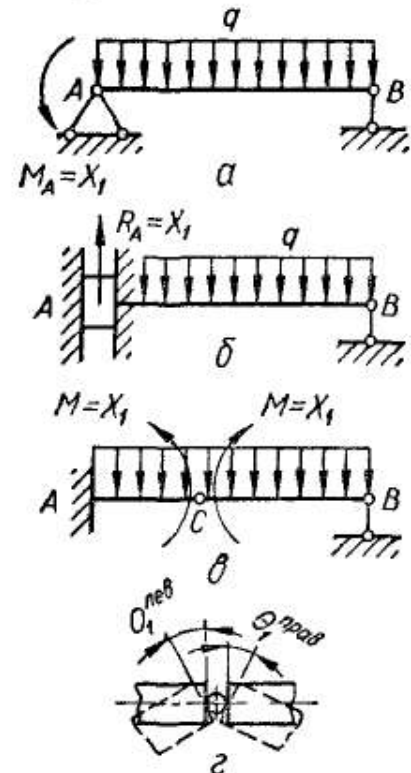


Рис. 400

мещений (14.2) выражает равенство нулю в основной системе вертикального перемещения (прогиба) точки A .

Наконец, основную систему можно получить и постановкой промежуточного шарнира в каком-либо сечении (рис. 400, в). Таким путем получаем статически определимую шарнирную балку. Здесь уже удалена не внешняя, а внутренняя связь. Так как постановкой шарнира ликвидируется изгибающий момент в данном сечении балки, то для восстановления утраченных связей прикладываем два равных и противоположно направленных момента $M = X_1$, представляющих собой действие друг на друга отделенных шарниром частей балки. Уравнение перемещений (14.2) в этом случае представляет собой равенство нулю взаимного угла поворота сечений правой и левой частей балки, примыкающих к шарниру (рис. 400, г):

$$\Delta_1 = \Theta_1^{\text{лев}} + \Theta_1^{\text{прав}} = 0, \quad (14.3)$$

поскольку в исходной балке эти сечения образуют одно сечение.

Отметим, что при построении основной системы в качестве лишних связей нельзя принимать элементы, реакции которых могут быть определены непосредственно из уравнений равновесия, например горизонтальную реакцию H_A опоры на рис. 399.

Пример 64. Балка AB , нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 401, а), опирается по концам на шарнирные опоры, а посередине пролета подпирается пружиной (упругой опорой). Определить усилие, сжимающее пружину; построить эпюру изгибающих моментов, если податливость пружины, т. е. ее осадка от единичной силы (см. § 58),

$$\alpha = \frac{64R^3n}{Gd^4}.$$

Рассматриваемая система один раз статически неопределима. В качестве лишнего неизвестного усилия примем реакцию пружины $R_c = X_1$. В соответствии с этим на рис. 401, б построена основная система. Чтобы она деформировалась как заданная балка, прогиб точки C балки должен быть равен осадке точки C' пружины. Другими словами, взаимное перемещение точек C и C' , т. е. Δ_1 , должно быть равно нулю.

Уравнение перемещения, следовательно, можно записать в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{1R} = 0,$$

где $\Delta_{1P} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$ — перемещение точки C основной системы от заданной нагрузки q ;

$\Delta_{1R} = \frac{X_1 l^3}{48EJ} + \lambda$ — взаимное перемещение точки C балки и точки C' пружины только от сил X_1 , причем перемещение точки C' пружины, $\lambda = \alpha X_1$.

Положительные направления перемещений соответствуют направлениям сил X_1 . Таким образом,

$$\frac{X_1 l^3}{48EJ} + \alpha X_1 - \frac{5ql^4}{384EJ} = 0.$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{\frac{5}{8} ql}{1 + \frac{48EJ\alpha}{l^3}}.$$

При абсолютно жесткой пружине $\alpha = 0$ и

$$X_1 = \frac{5}{8} ql.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на рис. 401, в построены для последнего случая,

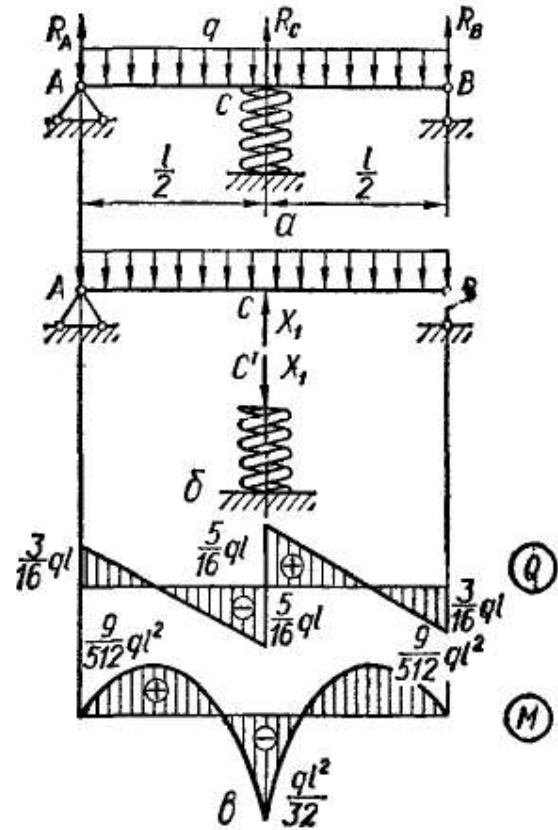


Рис. 401

§ 92. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Дополнительные уравнения перемещений, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных, удобно составлять в так называемой *канонической форме*, т. е. по определенной закономерности.

Вначале рассмотрим систему, один раз статически неопределимую (рис. 402, а). В качестве лишней связи выберем шарнирно-подвижную опору В. Тогда, нагрузив основную систему заданной нагрузкой и лишней неизвестной силой X_1 (рис. 402, б), мы должны приравнять нулю полное перемещение точки В основной системы по направлению X_1 :

$$\Delta_1 = \Delta_1(P, X_1) = 0. \quad (14.4)$$

Вычисляя Δ_1 , применим принцип независимости действия сил:

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11},$$

где Δ_{1P} — перемещение от заданной нагрузки (рис. 402, в);

Δ_{11} — перемещение от силы X_1 .

Если δ_{11} — перемещение по направлению X_1 от силы $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 402, д), то

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1$$

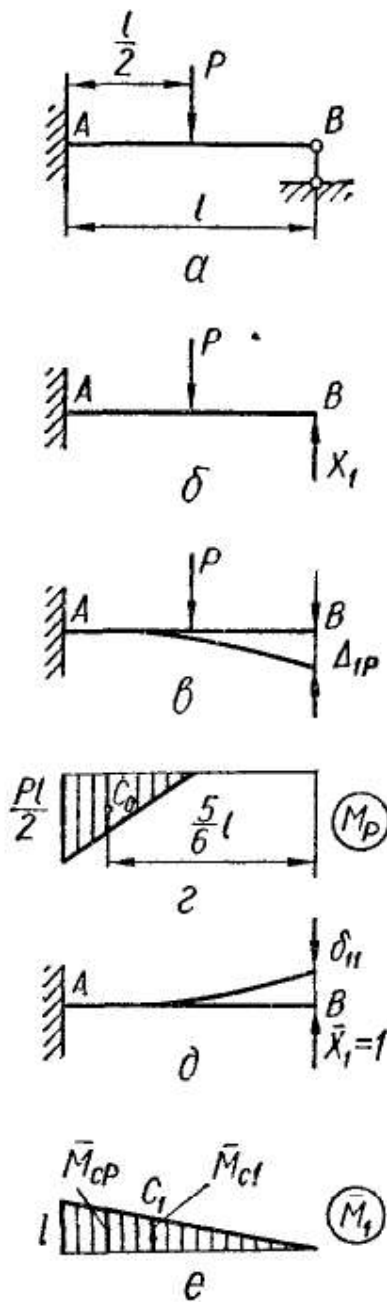


Рис. 402

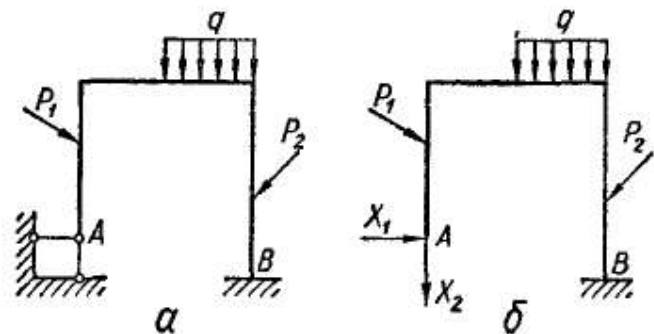


Рис. 403

и уравнение перемещений (14.4) примет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (14.5)$$

Это каноническая форма уравнения перемещений для один раз статически неопределимой системы. Из формулы (14.5)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (14.6)$$

Для системы с двумя лишними связями, как, например, на рис. 403, а, дополнительные уравнения перемещений сечения А ос-

особенно для высокой рамы. Следует иметь в виду, что в реальных балочных, рамных и арочных конструкциях отношение $\frac{h}{l}$ обычно меньше $\frac{1}{10}$. Поэтому при определении перемещений в общей формуле Мора вполне допустимо сохранять интеграл, учитывающий лишь изгибающие моменты.

Для определения перемещений строим эпюры изгибающих моментов (см., например, рис. 402) в основной системе отдельно от заданной нагрузки (состояние P) и от каждой единичной силы: $\bar{X}_1 = 1$ (состояние 1); $\bar{X}_2 = 1$ (состояние 2); ...; $\bar{X}_n = 1$ (состояние n). Ординаты соответствующих эпюр обозначим, как обычно, через $M_P, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$.

Тогда на основании формулы (13.46) находим

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \Delta_{nP} = \int_s \frac{\bar{M}_n M_P ds}{EJ}.$$

Удельные перемещения, имеющие одинаковые индексы и называемые *главными коэффициентами канонических уравнений*, определяют следующим образом:

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22} = \int_s \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{nn} = \int_s \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n ds}{EJ}.$$

Очевидно эти перемещения положительны.

Удельные перемещения, имеющие неодинаковые индексы и называемые *побочными коэффициентами*, определяют по формулам

$$\delta_{12} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{ik} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}.$$

Они могут быть положительными или отрицательными, а также равными нулю.

На основании теоремы о взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Для систем, состоящих из прямолинейных элементов, вычисления перемещений удобно проводить по способу Верещагина. Например, для статически неопределимой балки, показанной на рис. 402,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \bar{M}_{cP}}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{\Omega_1 \bar{M}_{c1}}{EJ};$$

$$\Omega_P = \frac{Pl^2}{8}; \quad \bar{M}_{cP} = \frac{5}{6} l;$$

$$\Omega_1 = \frac{l^2}{2}; \quad \bar{M}_{c1} = \frac{2}{3} l.$$

При выборе основной системы по первому варианту (рис. 404, б) уравнения (14.11) выражают требование равенства нулю перемещений сечения A по направлениям X_1 , X_2 и X_3 .

Второй вариант основной системы (рис. 404, в) образован разрезом ригеля. Так как в плоской системе в сечениях действуют, вообще говоря, три силовых фактора (осевая сила, поперечная сила и изгибающий момент), то к сторонам разреза следует приложить в качестве лишних неизвестных указанные силовые факторы X_1 , X_2 , X_3 , выражающие взаимное действие обеих частей системы друг на друга в данном сечении. При таком выборе основной системы уравнения (14.11) выражают равенство нулю полных взаимных перемещений сторон разреза по направлениям лишних неизвестных. Например, третье уравнение системы (14.11) означает равенство нулю перемещения по направлению X_3 , т. е. взаимного угла поворота сторон разреза под действием заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий.

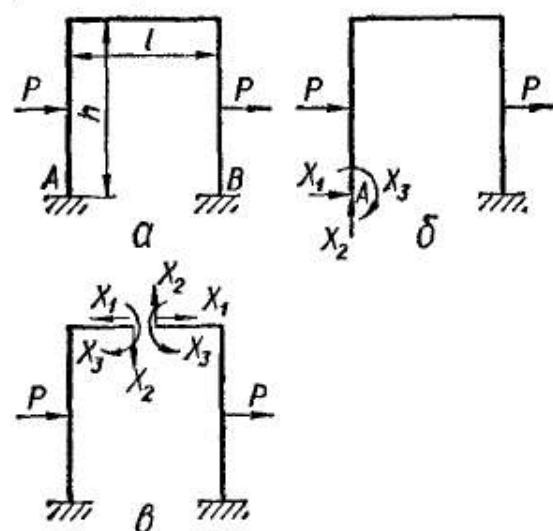


Рис. 404

Принимая в качестве лишних неизвестных внутренние усилия, во многих случаях можем значительно упростить расчет. Например,

если исходная система симметрична (по конфигурации и расположению жесткостей), то основную систему выгодно строить также симметричной, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю. Так, при расчете симметричной рамы, показанной на рис. 404, а, основную систему целесообразнее получить разрезом горизонтального стержня (ригеля) посередине (рис. 405, а). При этом основная система будет также симметричной. Тогда в числе лишних неизвестных будем иметь симметричные усилия X_1 , X_3 и кососимметричные X_2 . Эпюры изгибающих моментов от усилий $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ и $\bar{X}_3 = 1$ показаны на рис. 405, б—г. Заметим, что эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_3 симметричны, а

во многих случаях можем значительно упростить расчет. Например,

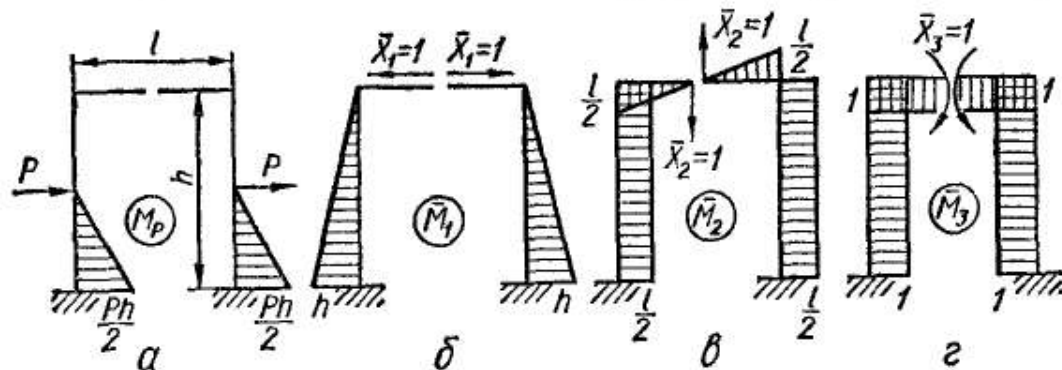


Рис. 405

если исходная система симметрична (по конфигурации и расположению жесткостей), то основную систему выгодно строить также симметричной, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю. Так, при расчете симметричной рамы, показанной на рис. 404, а, основную систему целесообразнее получить разрезом горизонтального стержня (ригеля) посередине (рис. 405, а). При этом основная система будет также симметричной. Тогда в числе лишних неизвестных будем иметь симметричные усилия X_1 , X_3 и кососимметричные X_2 . Эпюры изгибающих моментов от усилий $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ и $\bar{X}_3 = 1$ показаны на рис. 405, б—г. Заметим, что эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_3 симметричны, а

эпюра \bar{M}_2 кососимметрична. Перемножение симметричной эпюры на кососимметричную дает в результате нуль.

Определим перемещение $\delta_{12} = \delta_{21}$. Пользуясь способом Верещагина, получим

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{h^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = 0. \quad (14.12)$$

Аналогично

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Таким образом, система уравнений (14.11) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \Delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Если при этом заданная нагрузка P кососимметрична (рис. 404, а), то эпюра M_P также кососимметрична (рис. 405, а) и перемещение $\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$. Тогда из первого и третьего уравнений (14.13) следует, что симметричные усилия в месте разреза равны нулю:

$$X_1 = 0; \quad X_3 = 0.$$

Заметим, что когда нагрузка симметрична, то эпюра M_P также симметрична и $\Delta_{2P} = 0$. Тогда из второго уравнения (14.13) следует, что кососимметричное усилие $X_2 = 0$.

Пример 65. Построить эпюры силовых факторов в элементах рамы, показанной на рис. 406, а. Рама нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , приложенной к горизонтальному стержню (ригелю).

Легко видеть, что система дважды статически неопределима. На рис. 406, б—г показаны некоторые возможные варианты эквивалентной системы. Для рас-

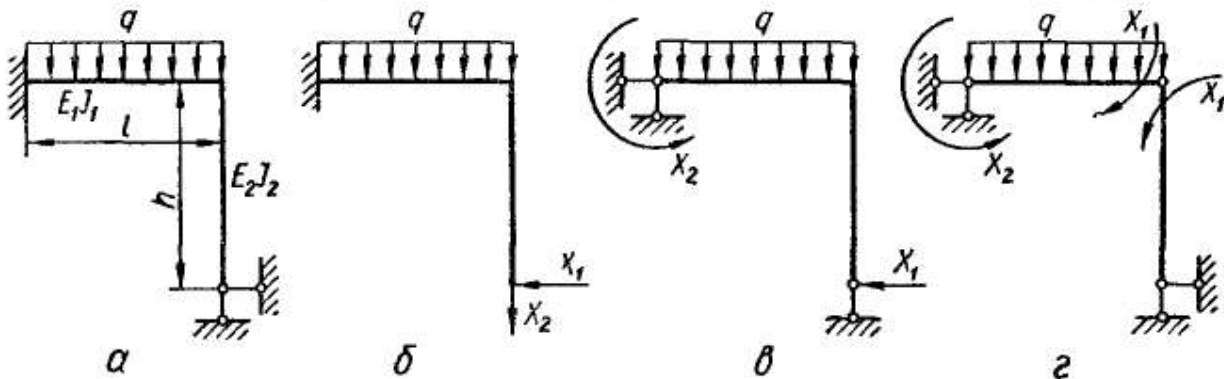


Рис. 406

чета примем вариант, показанный на рис. 406, б. Чтобы определить два лишних неизвестных усилия X_1 и X_2 , воспользуемся каноническими уравнениями (14.8):

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения перемещений δ_{ik} , Δ_{iP} рассматриваем основную систему, отдельно нагруженную заданной нагрузкой и каждой единичной силой $\bar{X}_1 = 1$,

$\bar{X}_2 = 1$ (рис. 407, а). Так как стержни прямолинейные, то удобно применить для определения перемещений способ Верещагина. Эпюры изгибающих моментов M_P , \bar{M}_1 , \bar{M}_2 показаны на рис. 407, б.

Для определения Δ_{1P} и Δ_{2P} площади эпюр M_P перемножаем на ординаты эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , соответствующие центрам тяжести эпюр M_P :

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E_1 J_1} \frac{ql^3}{6} h = \frac{ql^4}{6EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E_1 J_1} \frac{ql^3}{6} \frac{3}{4} l = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

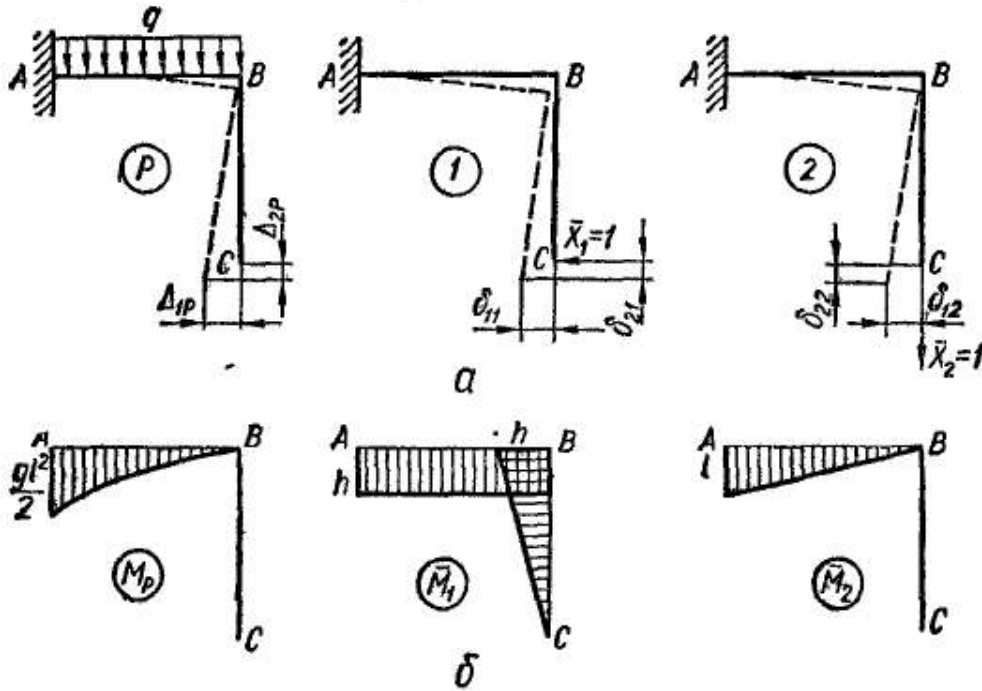


Рис. 407

Здесь и дальше для простоты принято $h = l$ и $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$.

Перемещения δ_{11} и δ_{22} получаем аналогичным умножением эпюр \bar{M}_1 на \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на \bar{M}_2 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_1 J_1} hl \cdot h + \frac{1}{E_2 J_2} \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E_1 J_1} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Наконец, δ_{12} определяем перемножением эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E_1 J_1} hl \frac{l}{2} = \frac{l^3}{2EJ}.$$

Подставляя значения перемещений в канонические уравнения, получаем

$$\frac{4}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = -\frac{ql}{6};$$

$$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 = -\frac{ql}{8}.$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{ql}{28}; \quad X_2 = -\frac{3}{7} ql.$$

Знак «минус» в выражении для X_2 показывает, что первоначально выбранное направление этой силы (рис. 406, б) следует изменить на противоположное.

Рассматривая теперь эквивалентную систему, т. е. статически определимую основную систему под действием заданной нагрузки и найденных сил X_1 и X_2 , легко построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов и составить условия прочности элементов рамы.

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и осевых сил приведены на рис. 408.

Подберем прямоугольное сечение для стержневой рамы, если $q = 1$ тс/м, $l = 2$ м. Материал стержневой Ст2, $[\sigma] = 1400$ кгс/см², $[\tau] = 900$ кгс/см². Отношение высоты a к ширине b сечения составляет 2 : 1.

Как видно из эпюр внутренних усилий (рис. 408), в опасном сечении

$$M_{\max} = \frac{3}{28} ql^2 = 43 \cdot 10^3 \text{ кгс} \cdot \text{см}; \quad Q_{\max} = \frac{4}{7} ql = 1143 \text{ кгс};$$

$$N = \frac{ql}{28} = 71,5 \text{ кгс}.$$

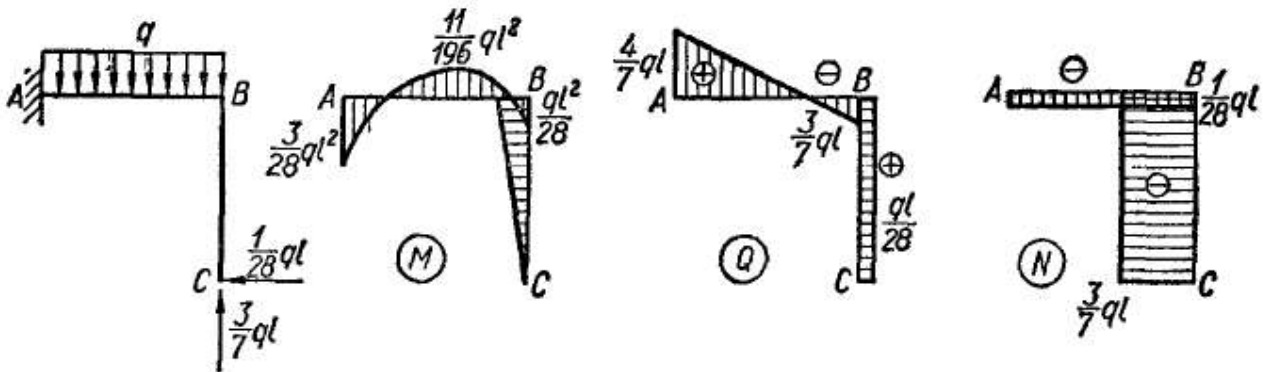


Рис. 408

Так как осевая сила незначительна, то размеры сечения подбираем только из условия прочности на изгиб:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{43 \cdot 10^3}{1400} \text{ см}^3 = 30,6 \text{ см}^3.$$

Поскольку

$$W = \frac{a^2 b}{6} = \frac{a^3}{12},$$

то, округляя, получаем

$$a \geq \sqrt[3]{12 \cdot 30,6} \text{ см} \approx 7,2 \text{ см}; \quad b = \frac{a}{2} = 3,6 \text{ см}; \quad W = 31,1 \text{ см}^3.$$

Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении определится как сумма напряжений от действия изгибающего момента и осевой силы:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{F} = \left(\frac{43 \cdot 1000}{31,1} + \frac{71,5}{7,2 \cdot 3,6} \right) \text{ кгс/см}^2 = (1380 + 2,76) \text{ кгс/см}^2 \approx 1383 \text{ кгс/см}^2 < 1400 \text{ кгс/см}^2.$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{F} = \frac{3 \cdot 1143}{2 \cdot 7,2 \cdot 3,6} \text{ кгс/см}^2 = 65,5 \text{ кгс/см}^2 < 900 \text{ кгс/см}^2.$$

Пример 66. Рассчитать однопролетную раму (рис. 409), нагруженную горизонтальной силой P посредине левой стойки. Для простоты вычислений принимаем, что $h = l$; $E_1 J_1 = E_2 J_2 = E_3 J_3 = EJ$.

Система, представляющая собой один замкнутый контур, трижды статически неопределима. Для образования основной системы следует удалить три связи. Различные варианты эквивалентной системы показаны на рис. 409 б—г. Принимая во внимание симметрию рамы, в качестве основной системы целесообразно

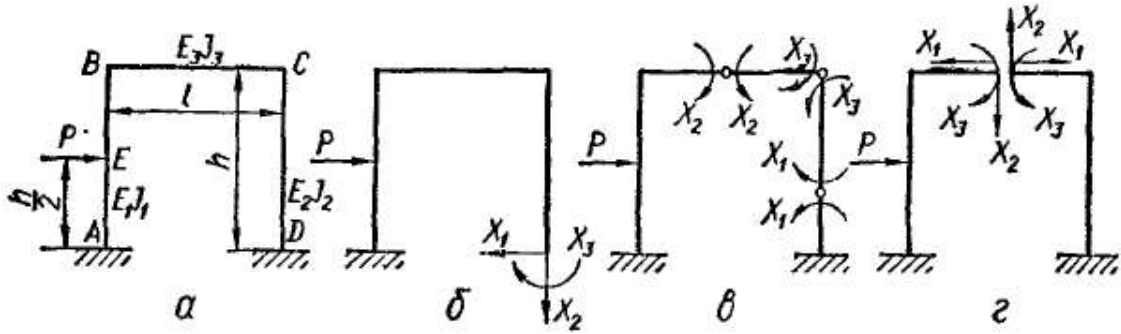


Рис. 409

принять симметричный вариант, показанный на рис. 409, г. В этом случае лишними неизвестными будут усилия в разрезе.

Для определения лишних неизвестных усилий воспользуемся каноническими уравнениями (14.11):

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

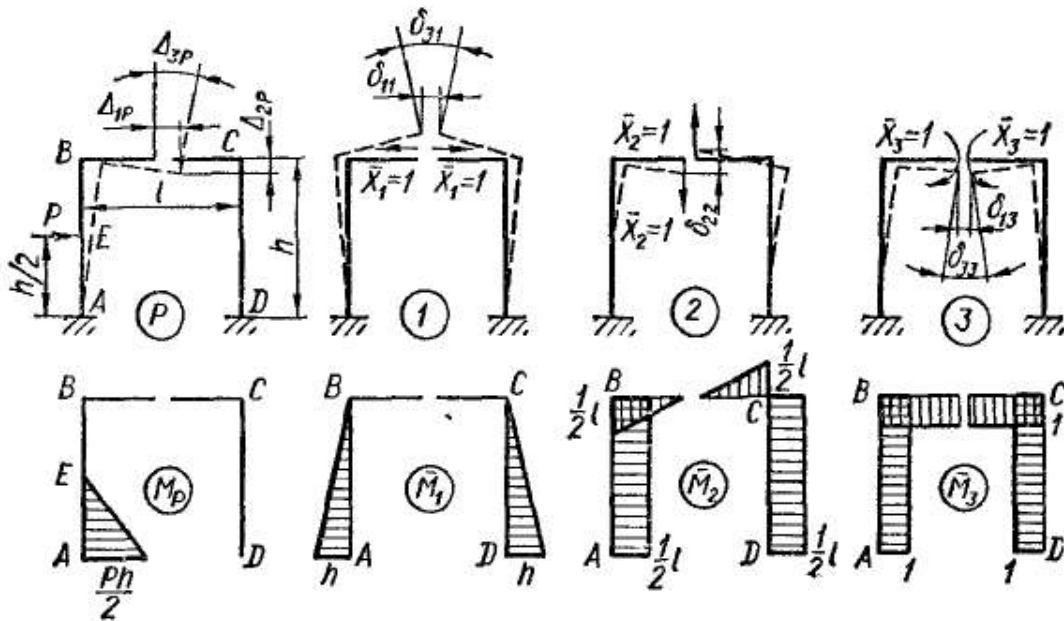


Рис. 410

В этих уравнениях перемещения δ и Δ представляют собой соответствующие взаимные перемещения сторон разреза.

Чтобы определить перемещения, применим способ Верещагина. На рис. 410 показаны эпюры изгибающих моментов для основной системы от заданной нагрузки и от единичных обобщенных сил $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{X}_3 = 1$. Отметим, что эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_3 симметричные, а эпюра \bar{M}_2 — кососимметричная. Как указывалось, побочные коэффициенты, определяющиеся перемножением симметричной эпюры на кососимметричную, равны нулю. В силу этого $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$; $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Канонические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0; \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \quad (14.15)$$

Перемножая соответствующие эпюры, находим, что

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{E_1J_1} \frac{Ph^2}{8} \frac{5}{6} h = -\frac{5}{48} \frac{Ph^3}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{E_1J_1} \frac{Ph^2}{8} \frac{l}{2} = \frac{Ph^3}{16EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \frac{1}{E_1J_1} \frac{Ph^2}{8} \cdot 1 = \frac{Ph^2}{8EJ};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_1J_1} \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h + \frac{1}{E_3J_3} \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h = \frac{2h^3}{3EJ};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{1}{E_1J_1} \frac{h^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{E_3J_3} \frac{h^2}{2} \cdot 1 = -\frac{h^2}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E_1J_1} h \frac{l}{2} \frac{l}{2} + \frac{1}{E_2J_2} h \frac{l}{2} \frac{l}{2} + \frac{1}{E_3J_3} 2 \frac{l^2}{8} \frac{l}{3} = \frac{7}{12} \frac{h^3}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \frac{h}{E_1J_1} + \frac{l}{E_2J_2} + \frac{h}{E_3J_3} = \frac{3h}{EJ}.$$

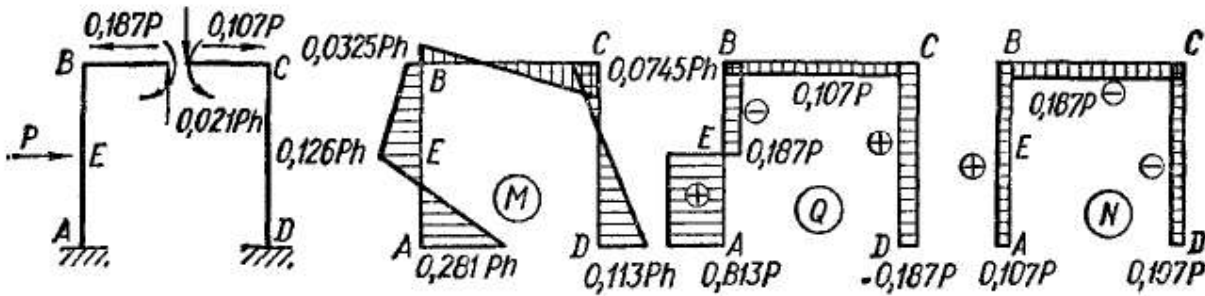


Рис. 411

Подставив в уравнения (14.15) и (14.14) найденные значения δ и Δ , получим

$$\frac{2}{3} hX_1 - X_3 = \frac{5}{48} Ph; \quad -\frac{1}{3} hX_1 + X_3 = -\frac{1}{24} Ph;$$

$$\frac{7}{12} \frac{h^3}{EJ} X_2 + \frac{Ph^3}{16EJ} = 0.$$

Отсюда $X_1 = 0,187P$; $X_2 = -0,107P$; $X_3 = 0,021Ph$.

На рис. 411 показана эквивалентная система и построены эпюры M , Q , N .

Рассчитаем прямоугольную раму (рис. 412, а), состоящую из двух одинаковых поперечин и двух стоек. Рама нагружена двумя равными и противоположно направленными силами, приложенными посередине поперечин. Внутри рамы температура T_1 , а снаружи — T_2 ; $T_1 > T_2$. Жесткость поперечин EJ_1 , стоек — EJ_2 .

Рама, образующая замкнутый контур без шарниров, трижды статически неопределима. Задачу можно существенно упростить,

используя симметрию системы и нагружения. Выберем симметричную основную систему, разрезав одну из стоек по оси симметрии (рис. 412, б). В месте разреза приложим систему усилий X_1, X_2, X_3 . Как указывалось, вследствие симметрии нагрузки поперечная сила $X_2 = 0$.

Рассечем теперь раму по оси $A-A$ (рис. 412, д). Учитывая симметрию системы относительно оси $B-B$, из условий равновесия сразу определяем силу X_3 :

$$2X_3 = P; \quad X_3 = \frac{P}{2}.$$

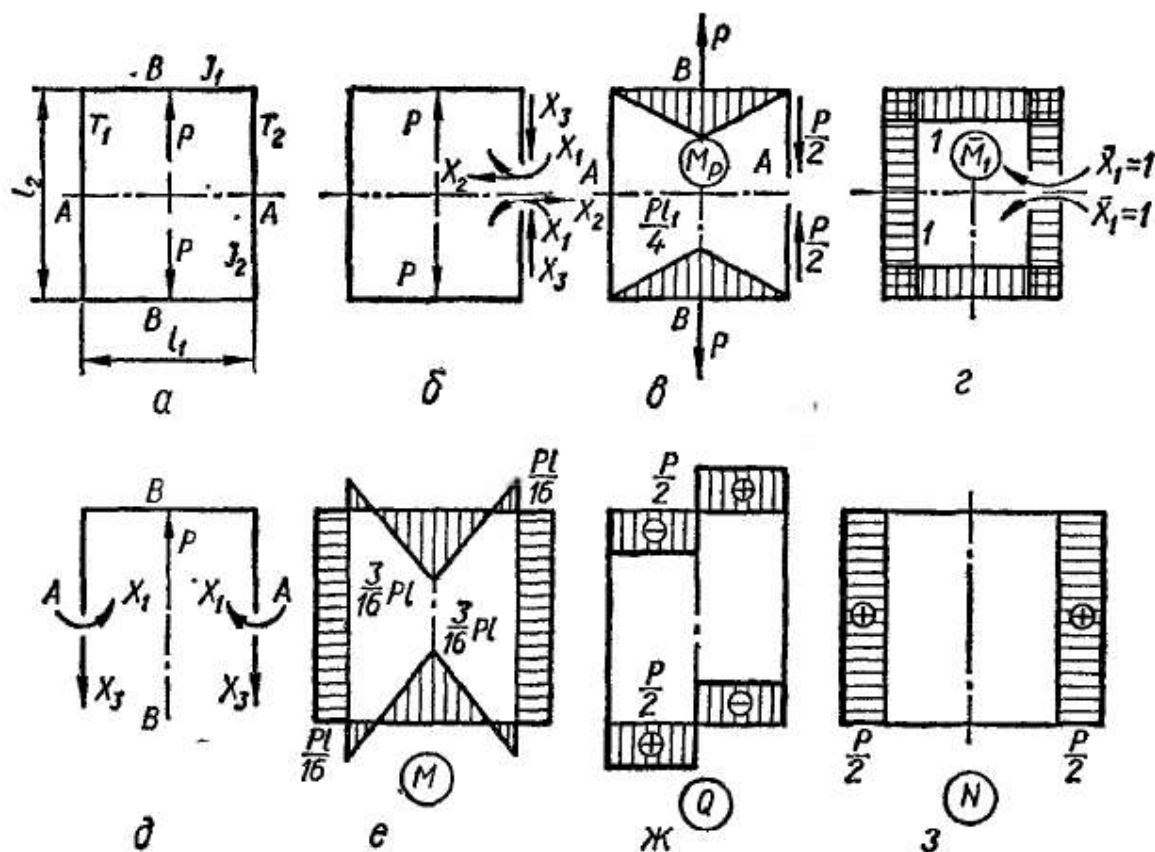


Рис. 412

Остается определить лишь один статически неопределимый фактор X_1 . Каноническое уравнение перемещений имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1T} = 0,$$

где $\Delta_{1P} + \Delta_{1T} = \Delta_{1P}$, T — взаимный угол поворота сторон разреза, вызванный действием нагрузки P и температуры T .

Температурные перемещения определяем по формуле (13.56):

$$\Delta_{kT} = \sum_i \int \bar{N}_k \alpha \frac{T_H + T_B}{2} dx + \sum_i \int \bar{M}_k \alpha \frac{T_H - T_B}{h} dx,$$

где $\frac{T_H + T_B}{2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$ — средняя температура нагрева элемента;

$T_H - T_B = T_1 - T_2$ — разность температур крайних волокон.

Если деформации элемента dx от действия температуры и единичных силовых факторов одного знака, то подынтегральные выраже-

ния положительны. Если в пределах участка температура постоянна, то

$$\Delta_{kT} = \sum \left(\bar{N}_k \alpha \frac{T_H + T_B}{2} l + \alpha \frac{T_H - T_B}{h} \int \bar{M}_k dx \right) = \\ = \alpha \sum \left(\bar{N}_k \frac{T_H + T_B}{2} l + \Omega_k \frac{T_H - T_B}{h} \right).$$

Здесь $\Omega_k = \int \bar{M}_k dx$ — площадь эпюры \bar{M}_k .

Для определения перемещений строим эпюры M_P, \bar{M}_1 (рис. 412, в, г). Эпюра \bar{N}_1 равна нулю. Пользуясь способом Верещагина, находим

$$\Delta_{1P} = \frac{2}{EJ_1} \frac{Pl_1^2}{8} = \frac{Pl_1^2}{4EJ_1}; \\ \Delta_{1T} = -2\alpha(l_1 + l_2) \frac{T_1 - T_2}{h}.$$

Здесь в правой части поставлен знак «минус», так как при $T_1 > T_2$ внутренние волокна элементов рамы удлинены, а в единичном состоянии (рис. 412, г) — сжаты. Далее,

$$\delta_{11} = \frac{2l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{EJ_2},$$

следовательно,

$$X_1 = \frac{-\frac{Pl_1^2}{4J_1} + 2\alpha E(l_1 + l_2) \frac{T_1 - T_2}{h}}{2 \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right)}.$$

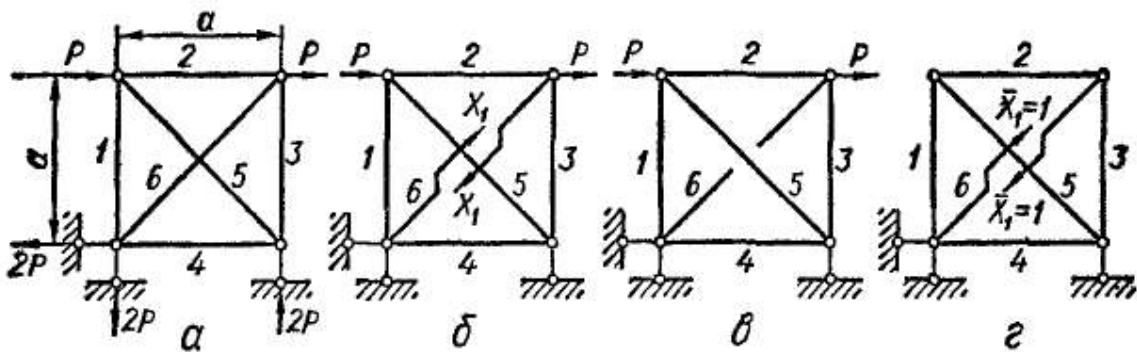


Рис. 413

В случае $l_1 = l_2 = l$ и $J_1 = J_2 = J$

$$X_1 = -\frac{Pl}{16} + \alpha EJ \frac{T_1 - T_2}{h}.$$

На рис. 412, в—г приведены эпюры внутренних силовых факторов для случая $T_1 - T_2 = 0, P \neq 0$.

Пример 67. Рассчитать ферму, изображенную на рис. 413, а, в предположении, что все стержни изготовлены из одного материала и имеют одинаковые сечения. Стержни 5 и 6 общего узла не имеют.

Легко видеть, что система один раз статически неопределима. Основная система, полученная разрезом стержня *b*, показана на рис. 413, б. Лишнее неизвестное усилие X_1 определяем из канонического уравнения, которое в этом случае выражает равенство нулю взаимного смещения сторон разреза:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Таблица 18

№ стержня	Длина стержня <i>l</i>	\bar{N}_l	N_P	$\bar{N}_l N_P l$	$\bar{N}_l^2 l$
1	<i>a</i>	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
2	<i>a</i>	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	P	$-Pa\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$
3	<i>a</i>	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	<i>a</i>	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-2P\sqrt{2}$	$-4Pa$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
Σ	—	—	—	$-Pa\frac{\sqrt{2}}{2}(5+4\sqrt{2})$	$2a(1+\sqrt{2})$

Так как в элементах фермы действуют только осевые усилия, то перемещения δ_{11} и Δ_{1P} определяем (см § 83) по формулам

$$\delta_{11} = \sum_1^6 \frac{\bar{N}_l^2 l}{EF}; \quad (14.1)$$

$$\Delta_{1P} = \sum_1^6 \frac{\bar{N}_l N_P l}{EF}, \quad (14.1)$$

где \bar{N}_l — усилия в стержнях от нагрузки $\bar{X}_1 = 1$;
 N_P — усилия в стержнях от заданной нагрузки.

Для определения усилий N_P и \bar{N}_l рассматриваем основную систему в состоянии *P* (рис. 413, в) и в состоянии *I* (рис. 413, г).

Вычисления удобно вести при помощи таблицы (табл. 18). Знак «минус» при \bar{N}_l и N_P показывает, что в соответствующем стержне усилие сжимающее. В таблице не приведены жесткости, так как для всех элементов они одинаковы.

Таким образом,

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pa}{\sqrt{2}EF} (5 + 4\sqrt{2});$$

$$\delta_{11} = \frac{2a(1 + \sqrt{2})}{EF}.$$

Подставив эти значения в каноническое уравнение, находим

$$X_1 = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{2(2 + \sqrt{2})} P \approx 1,56P.$$

§ 93. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Неразрезными называют балки, лежащие более чем на двух опорах и не имеющие промежуточных шарниров. Такие балки, широко применяемые в различных конструкциях, принадлежат к числу статически неопределимых.

На рис. 414 показана балка, опирающаяся на m шарнирных опор. Одна из опор делается шарнирно-неподвижной для восприятия осевой нагрузки, остальные — шарнирно-подвижными, что дает возможность балке свободно изменять свою длину с изменением температуры.

Опоры принято нумеровать слева направо, обозначая крайнюю левую номером 0; номер пролета определяется номером принадлежащей ему правой опоры.

При опирании на m шарнирных опор имеем столько же вертикальных реакций. Так как условий равновесия можно составить только два, то такая система $(m - 2)$ раза статически неопределима.

Как видно, число лишних связей, а следовательно, и лишних реакций, равно числу промежуточных опор. Иногда крайняя опора

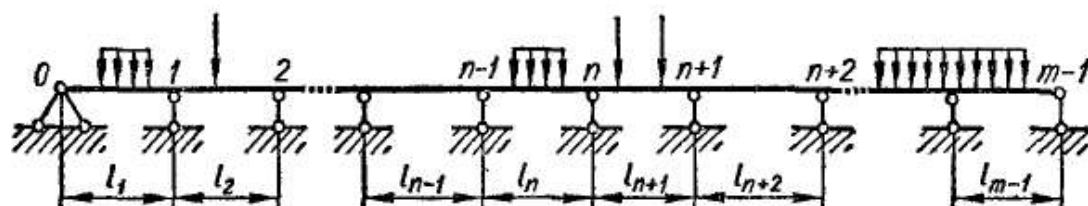


Рис. 414

выполняется в виде защемления. В этом случае степень статической неопределимости увеличивается на единицу по сравнению с шарнирной опорой.

Для получения основной системы можно освободиться от всех промежуточных опор, заменив их действие неизвестными реакциями X_1, X_2, \dots, X_{m-2} , приложенными к основной системе дополнительно к заданной нагрузке (рис. 415). Дополнительные уравнения перемещений

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \dots; \quad \Delta_{m-2} = 0$$

выражают условия равенства нулю прогибов в точках прикрепления промежуточных опор. Однако такой способ расчета громоздок,

поскольку в каждое уравнение перемещений входят все искомые неизвестные усилия. Значительно выгоднее строить основную систему постановкой шарниров в сечениях над всеми промежуточными опорами (рис. 416). Лишними неизвестными в этом случае будут изгибающие моменты в опорных сечениях балки.

Таким образом, эквивалентная система представляет собой ряд простых шарнирно опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами

$$M_1 = X_1; \quad M_2 = X_2; \quad \dots; \quad M_{n+1} = X_{n+1}; \quad \dots,$$

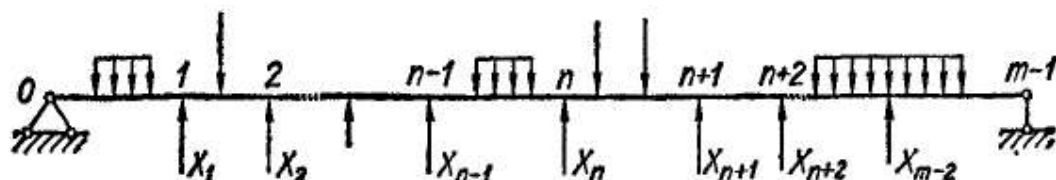


Рис. 415

приложенными в сечениях, где поставлены шарниры. Направления моментов для определенности приняты положительными.

При таком выборе основной системы действие заданной нагрузки распространяется только на пролет, где она приложена; влияние

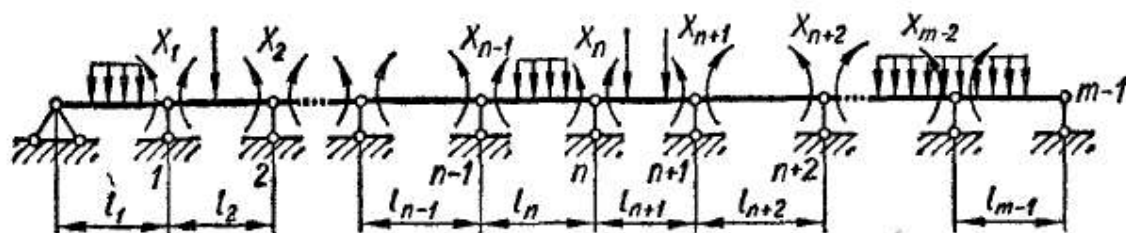


Рис. 416

ее на другие пролеты выражается опорными изгибающими моментами M_i .

Составим теперь дополнительные уравнения перемещений. Они выражают собой равенство нулю перемещений опорных сечений по направлениям действия неизвестных моментов M_i .

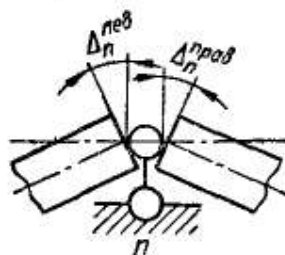


Рис. 417

В самом деле, каждая двухопорная балка основной системы под действием заданной нагрузки и опорных моментов деформируется независимо от других. Это значит, что торцы двух смежных балочек, примыкающих к одной опоре, например n -й (рис. 417), могут повернуться на некоторые углы $\Delta_n^{\text{лев}}$ и $\Delta_n^{\text{прав}}$. Так как в исходной статически неопределимой системе каждая пара таких сечений представляет собой одно сечение, то из условий сплошности их взаимный

угол поворота должен быть равен нулю. Отсюда для каждой промежуточной опоры

$$\Delta_n = \Delta_n^{\text{лев}} + \Delta_n^{\text{прав}} = 0. \quad (14.18)$$

Поскольку основная система состоит из отдельных, не связанных между собой двухопорных балочек, то для раскрытия условия (14.18)

следует рассмотреть только два пролета основной системы, примыкающих к n -й опоре (рис. 418).

Запишем условие (14.18) в каноническом виде:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (14.19)$$

Для определения перемещений δ и Δ , входящих в уравнение (14.19), строим эпюры изгибающих моментов в основной системе отдельно от заданной нагрузки (рис. 418, а) и от каждой из лишних неизвестных, равных единице (рис. 418, б—г). Площади эпюр от заданной нагрузки на n -м и $(n+1)$ -м пролетах обозначим соответственно через Ω_n и Ω_{n+1} , а расстояния центров тяжести этих площадей от левой и правой опор своего пролета — через a_n , b_n , a_{n+1} и b_{n+1} соответственно.

Применяя способ Верещагина и полагая, что на протяжении каждого пролета балка имеет постоянное сечение, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{nP} &= \frac{1}{EJ_n} \Omega_n \frac{a_n}{l_n} + \\ &= \frac{1}{EJ_{n+1}} \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \quad (14.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n-1} &= \frac{1}{EJ_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{l_n}{6EJ_n}; \quad (14.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{nn} &= \frac{1}{EJ_n} \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \\ &+ \frac{1}{EJ_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \\ &= \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \quad (14.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n+1} &= \frac{1}{EJ_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \quad (14.23) \end{aligned}$$

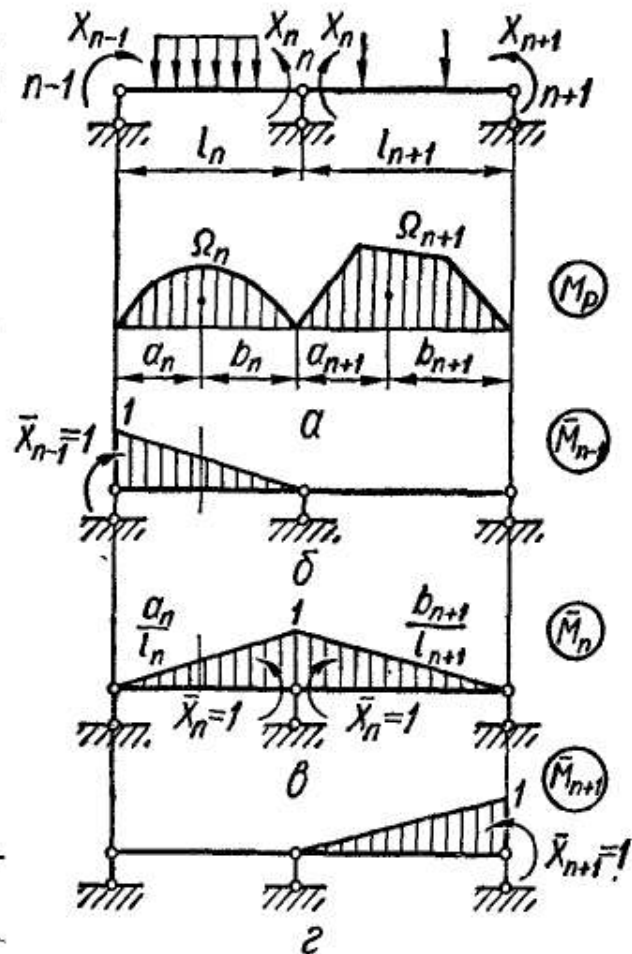


Рис. 418

Внося выражения (14.20) — (14.23) в формулу (14.19), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2X_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left(\frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.24)$$

Поскольку при таком выборе основной системы все лишние неизвестные представляют собой изгибающие моменты в опорных сечениях балки, то в уравнении (14.24) принято вместо X_i писать M_i . Таким образом,

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2M_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left(\frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.25)$$

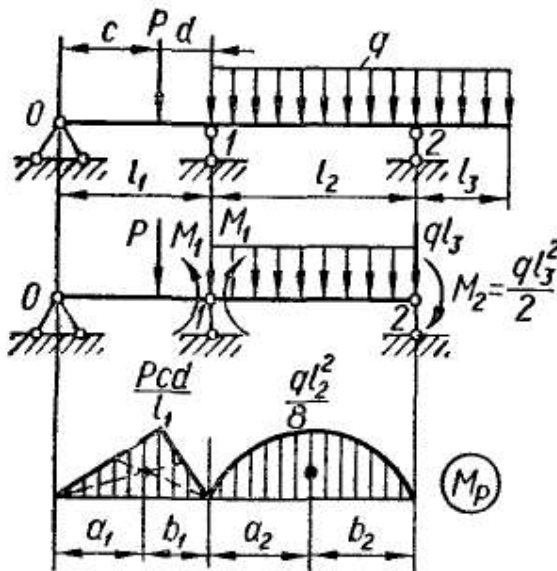


Рис. 419

Уравнение (14.25) называется *уравнением трех моментов*. Составляем их столько, сколько вводим шарниров, образуя основную систему. Чтобы написать эти уравнения, достаточно в формуле (14.25) дать индексу n последовательно значения 1, 2, 3 и т. д., соответствующие номерам промежуточных опор. В каждое из таких уравнений входит не более трех неизвестных опорных моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , а в первое и последнее уравнения — только по два неизвестных момента. Решение системы легко выполнить методом последо-

вательного исключения неизвестных.

Для балки постоянного поперечного сечения ($J = \text{const}$) уравнение трех моментов упрощается так:

$$\begin{aligned} M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = \\ = -6 \left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14.26)$$

Рассмотрим примеры составления уравнений трех моментов. На рис. 419 изображена двухпролетная балка. Система один раз статически неопределима. Уравнение трех моментов следует написать один раз для промежуточной опоры 1.

Полагая в уравнении (14.26) $n = 1$, имеем

$$M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{l_2} \right). \quad (14.27)$$

Поскольку крайняя левая опора шарнирная и не нагружена сосредоточенным моментом, то

$$M_0 = 0.$$

Момент на крайней правой опоре равен моменту от нагрузки, приложенной к консоли. Следовательно,

$$M_2 = -\frac{ql_3^2}{2}.$$

Очевидно

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} P \frac{cd}{l_1} l_1 = \frac{1}{2} Pcd;$$

$$a_1 = \frac{1}{3} (l_1 + c); \quad b_1 = \frac{1}{3} (l_1 + d);$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{3} \frac{ql_2^2}{8} l_2 = \frac{ql_2^3}{12};$$

$$a_2 = b_2 = \frac{l_2}{2}.$$

Таким образом, уравнение (14.27) принимает вид

$$2M_1 (l_1 + l_2) = -6 \left(\frac{Pcd}{6} \frac{l_1 + c}{l_1} + \frac{ql_2^3}{24} \right) + \frac{ql_3^2}{2} l_2.$$

Отсюда легко найти момент M_1 .

Если левый конец балки зашпемлен (рис. 420, а), то зашпемление можно заменить дополнительным пролетом бесконечно большой жесткости или бесконечно малой длины (рис. 420, б). Уравнения трех моментов для 1-й и 2-й опор следующие:

$$M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{l_2} \right);$$

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\Omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\Omega_3 b_3}{l_3} \right).$$

Очевидно

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0; \quad \Omega_3 = \frac{Pl_3^2}{8};$$

$$a_3 = b_3 = \frac{l_3}{2}; \quad M_3 = 0.$$

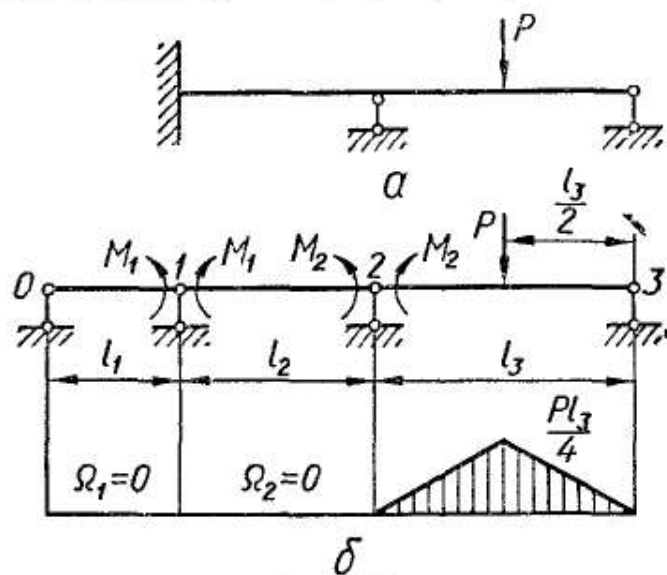


Рис. 420

Кроме того, в первом уравнении системы следует положить $l_1 = 0$. Тогда

$$2M_1 l_2 + M_2 l_2 = 0;$$

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) = -6 \frac{Pl_3^2}{16}.$$

Аналогично поступаем, если зашпемлен правый конец балки.

Определив опорные моменты, вычисление реакций, построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил проводят обычным способом.

Вначале определяют реакции опор каждой простой балочки от заданной нагрузки и опорных моментов. Обозначим эти реакции для n -го пролета через A_n и B_n (рис. 421, а). Очевидно, что

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}; \\ B_n &= B_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \end{aligned} \quad (14.28)$$

где A_n^0, B_n^0 — реакции только от заданной нагрузки на пролете. Полная реакция промежуточной опоры n (рис. 421, б)

$$R_n = B_n + A_{n+1} = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (14.29)$$

Здесь $R_n^0 = B_n^0 + A_{n+1}^0$ — реакция опоры n , вызванная действием заданной нагрузки, приложенной к пролетам l_n и l_{n+1} .

После определения реакций строят эпюры Q и M для каждой двухопорной балочки основной системы.

Окончательную эпюру изгибающих моментов легко построить также как сумму эпюр моментов от нагрузки и от опорных моментов,

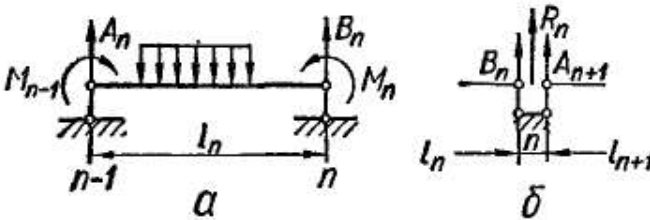


Рис. 421

причем последняя эпюра имеет вид ломаной линии, соединяющей отрезки, отложенные над опорами и равные опорным моментам (см. пример 68).

Можно рекомендовать следующий порядок расчета неразрезной балки. После ну-

мерации опор и пролетов (опор — с нуля, пролетов — с единицы) под исходной балкой изображают основную систему, нагруженную заданной нагрузкой и неизвестными опорными моментами. Далее строят эпюры M для отдельных балочек основной системы только от заданной нагрузки на пролетах. Вычисляют площади Ω_i этих эпюр и координаты a_i, b_i их центров тяжести. Для каждой промежуточной опоры выписывают уравнение трех моментов. Решая полученную таким образом систему уравнений, определяют неизвестные опорные моменты. Затем определяют реакции и строят эпюру поперечных сил и изгибающих моментов. Последнюю эпюру, как указывалось, можно построить как сумму эпюр моментов от нагрузки и от опорных моментов.

Пример 68. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 422, а.

Для простоты вычислений принято $q = \frac{2P}{l}$. Эквивалентная система показана на рис. 422, б, причем защемление левого конца балки заменено дополнительным

пролетом. Имеем

$$\Omega_1 = \Omega_3 = 0;$$

$$\Omega_2 = \frac{Pl^2}{8}; \quad a_2 = b_2 = \frac{l}{2};$$

$$\Omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{Pl^2}{6}; \quad a_4 = b_4 = \frac{l}{2}.$$

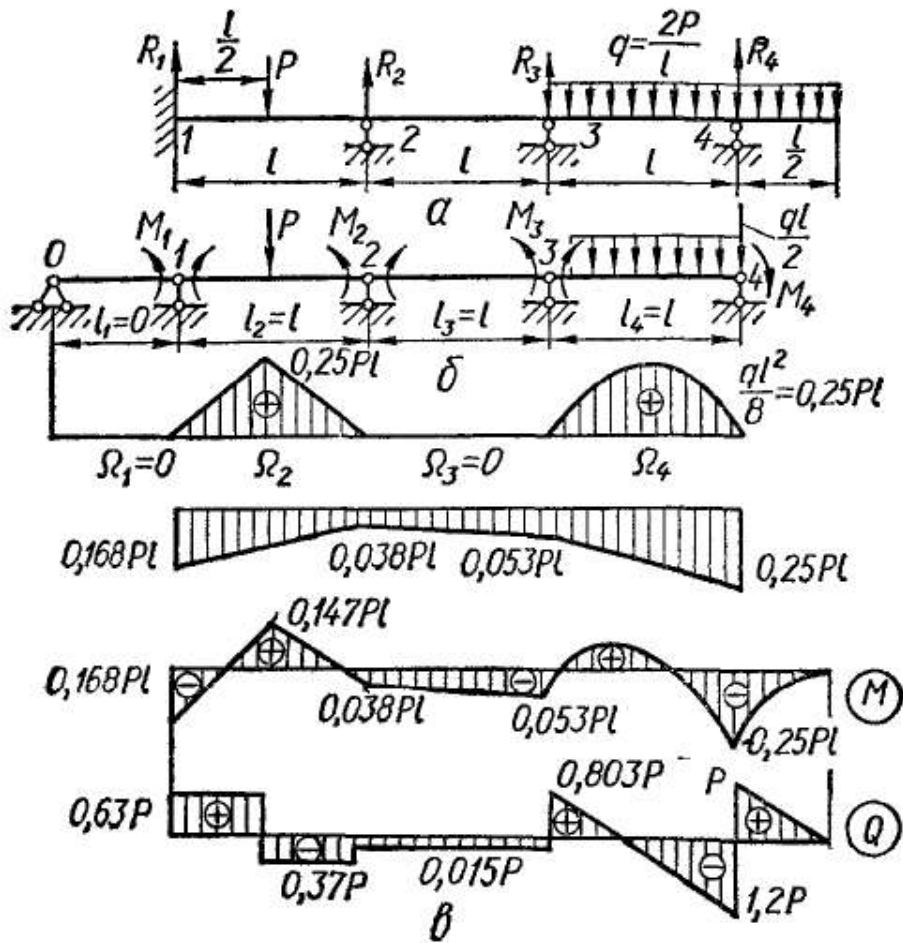


Рис. 422

Составляем уравнения трех моментов для трех промежуточных опор ($n = 1, 2, 3$):

$$2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}Pl, \quad (n = 1);$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}Pl, \quad (n = 2); \quad (14.30)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -\frac{Pl}{2}, \quad (n = 3).$$

Очевидно момент M_4 равен опорному моменту нагрузки, приложенной к консоли, т. е.

$$M_4 = -\frac{Pl}{4}. \quad (14.31)$$

Решая систему уравнений (14.30) с учетом выражения (14.31), получаем

$$M_1 = -0,168Pl; \quad M_2 = -0,038Pl; \quad M_3 = -0,053Pl.$$

Отрицательные значения моментов свидетельствуют о том, что в действительности они направлены противоположно указанным на рис. 422, б,

Реакции опор (рис. 423) определяем по формулам (14.28) и (14.29):

$$A_2 = 0,5P + 0,13P = 0,63P;$$

$$B_2 = 0,5P - 0,13P = 0,37P;$$

$$A_3 = \frac{M_3 - M_2}{l} = -0,015P;$$

$$B_3 = -\frac{M_3 - M_2}{l} = 0,015P;$$

$$A_4 = \frac{3}{8} ql - \frac{M_3}{l} = 0,803P;$$

$$B_4 = \frac{9}{8} ql + \frac{M_3}{l} = 2,20P.$$

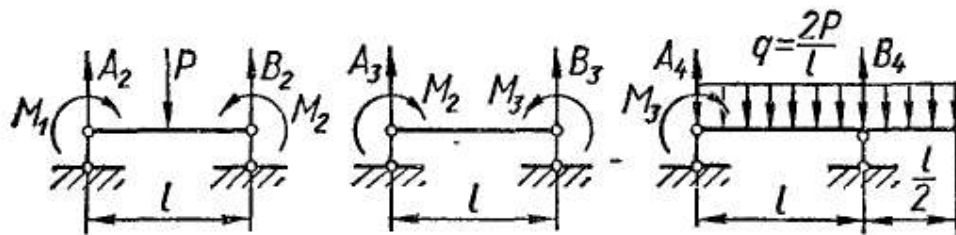


Рис. 423

Полные реакции опор

$$R_1 = A_2 = 0,63P;$$

$$R_2 = B_2 + A_3 = 0,36P;$$

$$R_3 = B_3 + A_4 = 0,82P;$$

$$R_4 = B_4 = 2,20P.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 422, в.

§ 94. ВЛИЯНИЕ НЕТОЧНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР ПО ВЫСОТЕ

В рассмотренных уже случаях предполагалось, что все опоры находятся на одном уровне. На практике, однако, нередки случаи смещения опор от проектного уровня.

В статически определимых системах смещения опор не вызывают дополнительных усилий в конструкции. В неразрезных же балках из-за их статической неопределимости эти смещения вызывают значительные начальные напряжения, которые, как показывают расчеты, зависят от величины смещения опор и жесткости балки, возрастая в прямой пропорциональности от величины указанных факторов.

Пусть $(n - 1)$, n и $(n + 1)$ -я опоры получат смещения по вертикали соответственно на y_{n-1} , y_n , y_{n+1} (рис. 424). В результате этого в основной системе участки l_n и l_{n+1} повернутся на углы

$$\Theta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \quad \text{и} \quad \Theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}, \quad (14.32)$$

которые будем считать положительными в случае поворота по часовой стрелке.

Легко видеть, что такое смещение вызывает взаимный угол поворота торцовых сечений у n -й опоры

$$\Delta_{nc}^1 = \Theta_{n+1} - \Theta_n. \quad (14.33)$$

Следовательно, каноническое уравнение (14.19) при расчете на смещение опор принимает вид

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nc} = 0 \quad (14.34)$$

и выражает требование равенства нулю взаимного угла поворота торцовых сечений у n -й опоры, вызванного действием всех лишних неизвестных и смещением опор.

Внося в уравнение (14.34) значения δ из уравнений (14.21) — (14.23) и Δ_{nc} из выражения (14.33), при $J_n = J_{n-1} = \dots = \text{const}$ получаем следующее уравнение трех моментов:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ(\Theta_{n+1} - \Theta_n). \quad (14.35)$$

Для определения опорных моментов, возникающих вследствие смещения опор, составляют и решают уравнения типа (14.35).

Заметим, что начальные напряжения, возникающие от смещения опор, могут быть использованы для выравнивания напряжений от заданной нагрузки.

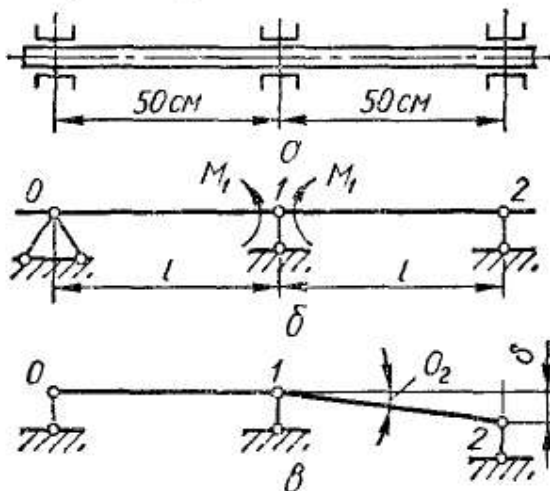


Рис. 425

Пример 69. Определить напряжения, возникающие в стальном валу, установленном в трех подшипниках (рис. 425, а), при смещении вниз на 2 мм крайнего правого подшипника. Диаметр вала $d = 4$ см. Расстояние между подшипниками $l = 50$ см. Подшипники рассматривать как шарнирные опоры

Эквивалентная система показана на рис. 425, б, в. Так как крайние опоры шарнирные, то

$$M_0 = M_2 = 0;$$

кроме того,

$$\Theta_1 = 0.$$

Следовательно, уравнение трех моментов, полагая в уравнении (14.35) $n = 1$, можно записать в виде

$$2M_1 \cdot 2l = -6EJ\Theta_2,$$

откуда

$$M_1 = -1,5 \frac{EJ}{l} \Theta_2.$$

¹ Индекс «с» при Δ указывает, что причиной обобщенного перемещения является смещение опоры.

Так как

$$\theta_2 = \frac{y_2}{l} = \frac{\delta}{l},$$

то

$$M_1 = -1,5 \frac{EJ\delta}{l^2}.$$

Наибольшее напряжение в сечении над опорой 1

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1}{W} = \frac{3EJ\delta}{2Wl^2} = 1200d\delta = 960 \text{ кгс/см}^2.$$

§ 95. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Статически неопределимые системы, содержащие криволинейные стержни, рассчитывают по методу сил в такой же последовательности, как и системы, рассмотренные в предыдущих параграфах. В этих случаях, однако, перемещения, входящие в канонические уравнения, нельзя вычислять по способу Верещагина. Для этой цели рекомендуется применять метод Мора.

В качестве примера рассмотрим круговое кольцо постоянного поперечного сечения, растягиваемое двумя равными и противоположно направленными силами (рис. 426, а).

Как замкнутая система, кольцо трижды статически неопределимо. Однако использование симметрии при выборе основной системы существенно упрощает решение.

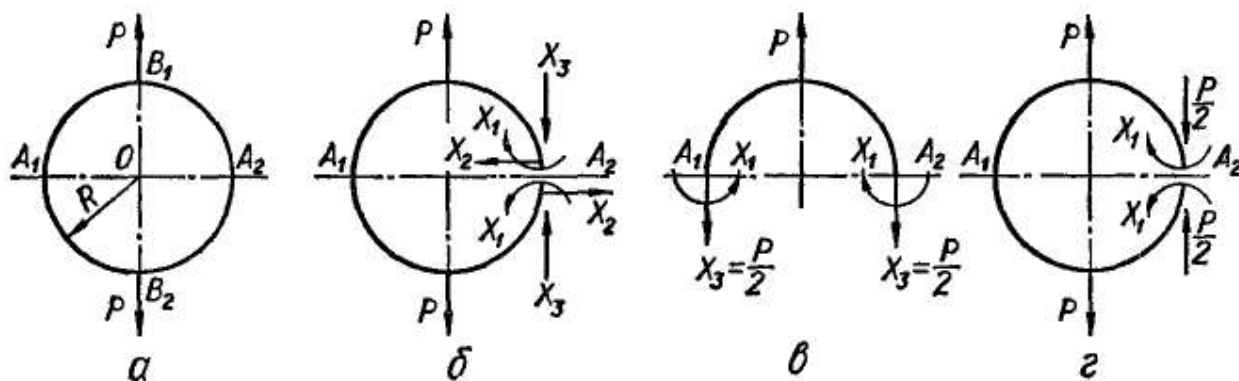


Рис. 426

Выберем основную систему, разрезав кольцо по сечению A_2 (рис. 426, б). Из условий симметрии следует, что поперечная сила в этом сечении

$$X_2 = 0.$$

Разрезав кольцо на две части по оси A_1A_2 (рис. 426, в), из условий равновесия отсеченной части находим, что осевая сила $X_3 = \frac{P}{2}$. Остается только определить неизвестный изгибающий момент в сечении A_2 . Окончательная эквивалентная система показана на рис. 426, г.

Каноническое уравнение перемещений, выражающее условие равенства нулю взаимного угла поворота граней разреза, имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения определим по способу Мора, сначала рассматривая основную систему под действием заданной нагрузки, а затем — под действием лишнего неизвестного единичного момента (рис. 427). Влиянием осевых и поперечных усилий пренебрегаем. Очевидно

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}.$$

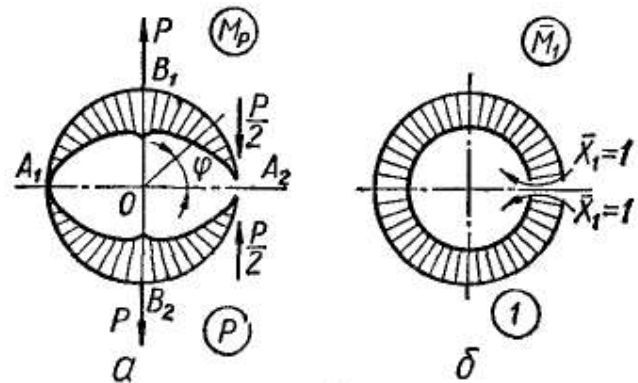


Рис. 427

Учитывая симметрию в состояниях P и 1 основной системы (рис. 427, а, б), при вычислении перемещений Δ_{1P} и δ_{11} можно ограничиться рассмотрением одной четверти кольца. Имеем

$$M_P = \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi), \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\bar{M}_1 = 1.$$

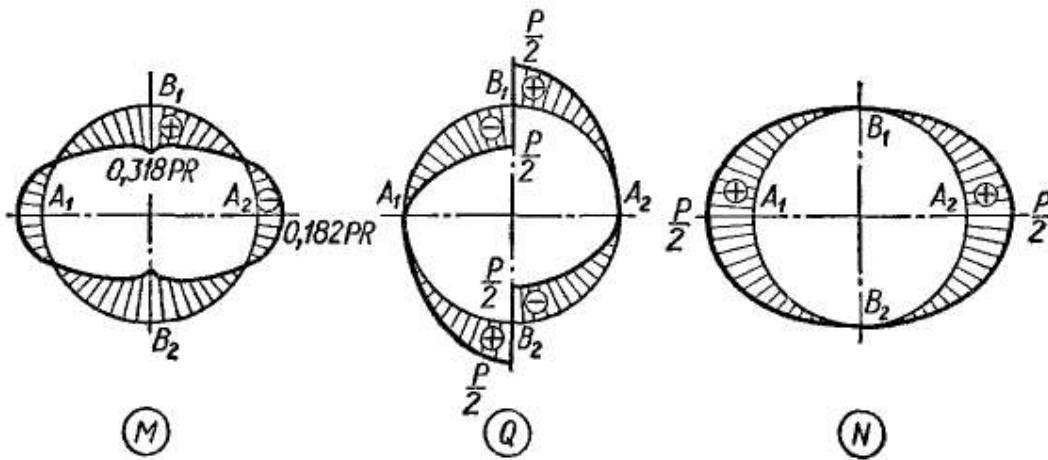


Рис. 428

Положительное направление для изгибающего момента принято такое, при котором наружные волокна растянуты. Таким образом,

$$\Delta_{1P} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right); \quad \delta_{11} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Rd\varphi}{EJ} = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) PR = -0,182PR.$$

Итак, изгибающий момент в сечениях A

$$M_A = -0,182PR$$

и направлен в сторону, противоположную ранее принятой. В произвольном сечении кольца изгибающий момент

$$M(\varphi) = \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) - M_A = 0,5PR(1 - \cos \varphi) - 0,182PR.$$

Наибольший изгибающий момент действует в сечениях B , при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и составляет величину

$$M_B = 0,318PR.$$

Поперечная сила $Q(\varphi) = 0,5P \sin \varphi$, осевая сила $N(\varphi) = 0,5P \cos \varphi$. На рис. 428 показаны эпюры внутренних силовых факторов в сечениях кольца.

§ 96. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

После определения лишних неизвестных усилий перемещения в статически неопределимых системах можно найти обычными способами. При этом следует пользоваться методами, которые в каждом частном случае наиболее просто приводят к результату. Например, прогибы и углы поворота сечений статически неопределимых балок, несущих сложную нагрузку, удобно определять по методу начальных параметров. Способ Мора, являющийся универсальным, применим, конечно, во всех случаях. Им широко пользуются при определении перемещений в балках, рамах и фермах.

Вычисляя перемещения по формуле Мора

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum \int_s \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \sum \int_s \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}, \quad (14.36)$$

следует рассмотреть заданную систему под действием нагрузки (окончательные эпюры силовых факторов M , N и Q статически неопределимой системы), а также под действием единичного силового фактора, соответствующего искомому перемещению (единичные эпюры \bar{M}_i , \bar{N}_i , \bar{Q}_i). Если при этом единичную нагрузку прикладывать непосредственно к заданной статически неопределимой системе, то каждый раз для построения единичных эпюр \bar{M}_i , \bar{N}_i , \bar{Q}_i вновь придется решать статически неопределимую задачу. Однако этого можно избежать, если учесть, что исходная статически неопределимая система и основная статически определимая, нагруженная заданными силами и найденными лишними неизвестными, полностью тождественны по условиям работы. Поэтому, определяя какие-либо перемещения, мы вправе прикладывать единичную нагрузку к основной

статически определимой системе. Последняя может быть выбрана по любому возможному варианту.

В качестве примера вычислим взаимные перемещения точек A_1 , A_2 и B_1 , B_2 соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях для рамы (см. рис. 412) без учета действия температур. Определим только перемещения, вызванные изгибом, так как перемещениями от продольных деформаций и сдвига можно пренебречь. На рис. 429, б показаны составляющие суммарной эпюры изгибающих моментов в виде, удобном для применения способа Верещагина.

Для определения взаимного перемещения в горизонтальном направлении точек A_1 , A_2 прикладываем к основной системе в этих точ-

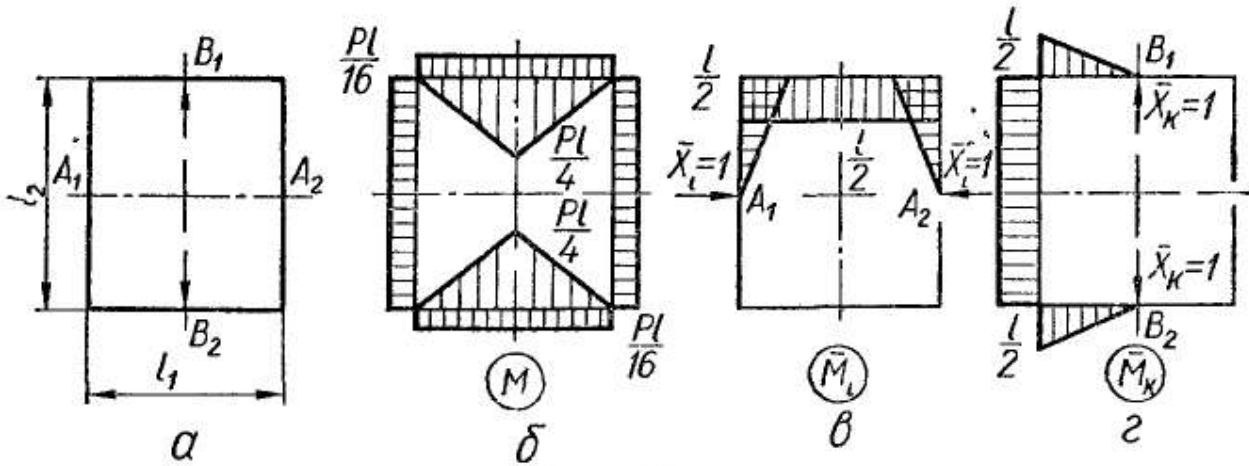


Рис. 429

ках (рис. 429, в) единичные силы $\bar{X}_l = 1$. Перемножая эпюру M на \bar{M}_l и принимая, что $l_1 = l_2 = l$, находим

$$\Delta_{A_1-A_2} = \Delta_l = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{Pl^2}{16} \frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{8} \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^2}{32} \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}.$$

Чтобы определить взаимное вертикальное перемещение точек B_1 и B_2 , прикладываем к основной системе в этих точках две единичные силы (рис. 429, г) $\bar{X}_k = 1$. Перемножая эпюру M на \bar{M}_k , находим, что

$$\begin{aligned} \Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl^2}{16} \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{l^2}{8} \frac{Pl}{16} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{5}{192} \frac{Pl^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Отметим, что в случаях действия на статически неопределимую систему температуры к перемещениям основной системы, нагруженной найденными лишними неизвестными, следует добавить чисто температурные перемещения. При этом формула (14.36) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_T ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_T ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_T ds}{GF} + \\ &+ \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{T_H + T_B}{2} ds + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{T_H - T_B}{h} ds, \quad (14.37) \end{aligned}$$

где M_T , N_T , Q_T — внутренние силовые факторы от лишних неизвестных, обусловленных действием температуры.

§ 97. КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Окончательные эпюры N , Q и M подлежат обязательной проверке. Проверяют при этом условия равновесия и деформаций.

Для проверки условий равновесия следует вырезать узел или какую-либо часть системы и удостовериться в ее равновесии, т. е. в выполнении условий равенства нулю суммы проекций или моментов

всех внешних и внутренних сил, приложенных к этой части:

$$\sum P_x = 0; \sum P_y = 0; \sum M = 0.$$

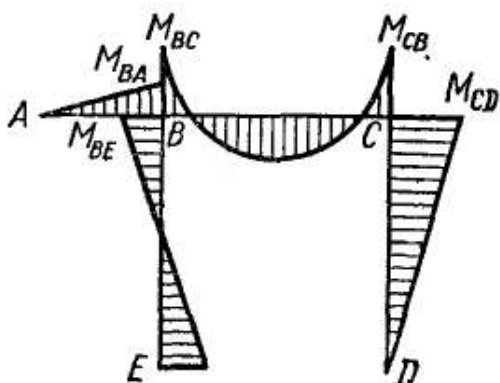


Рис. 430

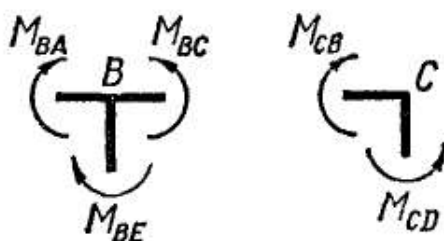


Рис. 431

При этом нужные величины следует брать непосредственно из окончательных эпюр.

Рассмотрим, например, как должны быть проверены условия равновесия для эпюры изгибающих моментов, показанной на рис. 430. Вырежем узлы B и C (рис. 431). Действие отброшенных частей рамы на узлы заменим соответственно изгибающими моментами M_{BA} , M_{BC} , M_{BE} и M_{CB} , M_{CD} . Направления моментов соответствуют расположению эпюр на сжатых волокнах.

Из условия равновесия узла B следует, что

$$M_{BA} + M_{BE} - M_{BC} = 0.$$

Из условия равновесия узла C вытекает, что моменты M_{CB} и M_{CD} должны быть равны по величине и обратны по направлению. Аналогично можно проверить эпюры N и Q .

Отметим, что проверка условий равновесия не является достаточной, так как проверка правильности построения эпюр по найденным значениям лишних неизвестных усилий не дает оснований для суждения о правильности самих величин.

Общим контролем является проверка выполнения условий неразрывности деформаций. При этом следует убедиться, что окончательные эпюры согласуются с условиями опорных закреплений и неразрывности контура.

Так как в заданной статически неопределимой системе перемещение по направлению любой лишней связи равно нулю, то произ-

ведение окончательной эпюры изгибающих моментов на эпюру моментов любого i -го состояния основной системы должно равняться нулю, т. е.

$$\sum_s \int \frac{\bar{M}_i M ds}{EJ} = 0. \quad (14.38)$$

В качестве основной системы i -го состояния лучше всего выбрать систему, отличную от принятой при расчете. Количество проверок условий деформаций должно равняться числу лишних связей.

Проведем в качестве примера проверку условий деформаций для рамы, рассмотренной в § 92 (пример 66). Окончательная эпюра M приведена также на рис. 432, а.

Вычислим взаимные перемещения граней разреза ригеля в горизонтальном направлении. Для этого следует перемножить эпюру M на единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 432, б). При умножении часто удобно заменить эпюру M ее составляющими:

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots$$

Получим

$$\begin{aligned} EJ\Delta_1 &= \sum_s \int \bar{M}_1 M ds = -\frac{Ph^2}{8} \frac{5}{6} h + \\ &+ \frac{2 \cdot 0,187Ph^2}{2} \frac{2}{3} h - 0,021Ph \cdot 2h \frac{h}{2} = \\ &= Ph^3 (-0,104 + 0,125 - 0,021) = \\ &= Ph^3 (-0,125 + 0,125) = 0. \end{aligned}$$

Теперь проверим, равен ли нулю угол поворота сечения D исходной системы. С этой целью, умножая эпюру M на единичную эпюру \bar{M}_3 основной системы (рис. 432, в), находим умноженный на EJ_0 угол поворота:

$$EJ_0\Delta_3 = \sum_s \int \frac{\bar{M}_3 M ds J_0}{J}.$$

Здесь EJ_0 — жесткость поперечного сечения какого-либо элемента рамы.

Так как в бесшарнирной системе $\bar{M}_3 = 1$, то

$$EJ_0\Delta_3 = \sum_s \int M \frac{J_0}{J} ds.$$

Интеграл в правой части представляет собой площадь эпюры M , умноженную на отношение $\frac{J_0}{J}$. Он называется приведенной площадью эпюры M .

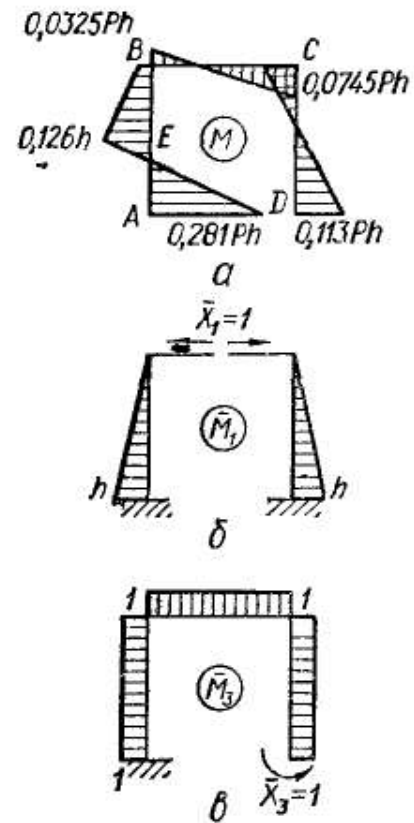


Рис. 432

Таким образом, для замкнутых бесшарнирных контуров приведенная площадь эпюры моментов равна нулю, т. е.

$$\sum_s \int \frac{MJ_0}{J} ds = 0. \quad (14.39)$$

В нашем случае, учитывая, что $J = \text{const}$, получим

$$EJ\Delta_3 = \left(-\frac{Ph^2}{8} + 2 \frac{0,187Ph^2}{2} - 0,021Ph \cdot 3h \right) = Ph^2 (-0,125 + 0,187 - 0,063) = Ph^2 (-0,188 + 0,187) = -0,001Ph^2.$$

Так как при расчете системы лишние неизвестные вычисляются с определенной точностью, то и результаты проверки, естественно, имеют некоторую погрешность — искомые перемещения отличаются от нуля. Поэтому при проверке рекомендуется отдельно вычислять сумму положительных и отрицательных членов. Если разница между обеими суммами, выраженная в процентах к меньшей из них, невелика (до 5%), то результат расчета можно считать удовлетворительным. В нашем случае

$$\frac{-0,188 + 0,187}{0,187} = -0,535 \%$$

Аналогично осуществляется контроль правильности расчета неразрезной балки.

§ 98. О РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ

В общем случае действия сил на брус (см. гл. 12) в поперечных сечениях имеем шесть внутренних силовых факторов (рис. 433) — N , Q_y , Q_z , M_x , M_y и M_z . Для неподвижного прикрепления сечения

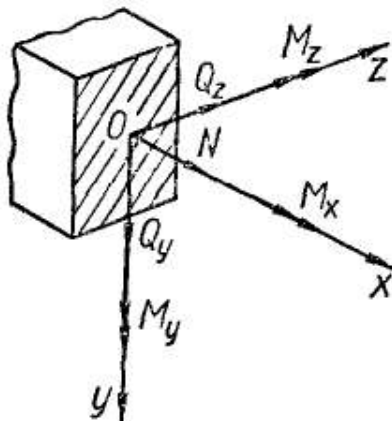


Рис. 433

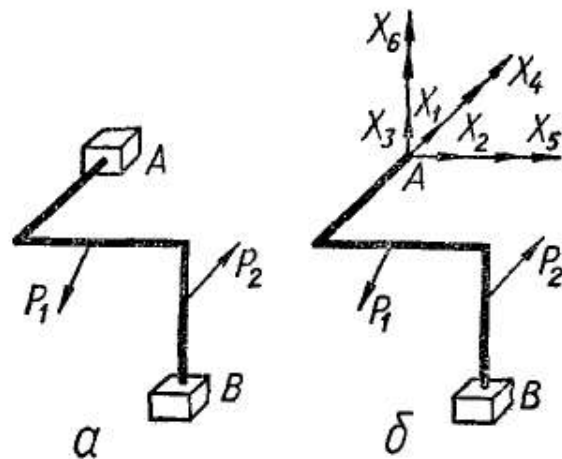


Рис. 434

нужно наложить шесть связей, усилия в которых могут быть найдены из шести уравнений равновесия твердого тела. Количество связей в пространственных системах, превышающее указанное число, дает степень статической неопределимости. Так, пространственная рама, изображенная на рис. 434, а, шесть раз статически неопреде-

лима, так как для определения двенадцати неизвестных реакций можно составить только шесть условий равновесия. Один из вариантов основной статически определимой системы показан на рис. 434, б. Для определения шести неизвестных усилий решаем шесть канонических уравнений обычного вида (см. § 92).

Показанная на рис. 435, а пространственная рама 24 раза статически неопределима.

Это легко обнаружить по числу разрезов, которые необходимо сделать, чтобы получить основную систему (рис. 435, б), причем каждый разрез освобождает шесть связей.

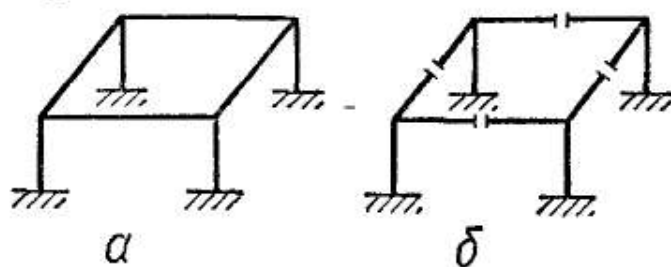


Рис. 435

В машиностроительных конструкциях встречаются плоские рамы, работающие на пространственную нагрузку. На рис. 436, а показана плоская рама с заземленными концами, нагруженная перпендикулярно к плоскости рамы.

На основании принципа взаимности можно показать, что в плоских системах, нагруженных перпендикулярно к плоскости системы,

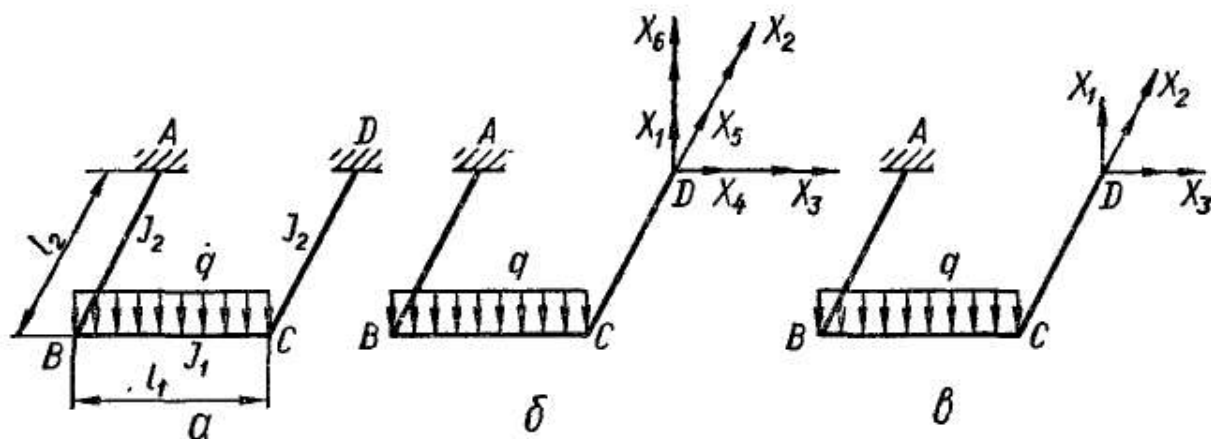


Рис. 436

силовые факторы, характеризующие работу рамы в ее плоскости, равны нулю. Следовательно, из шести неизвестных усилий (рис. 436, б) три равны нулю, т. е. $X_4 = X_5 = X_6 = 0$.

Это обстоятельство существенно упрощает расчет плоских рам, нагруженных пространственной нагрузкой. Любую нагрузку можно разложить на составляющие в плоскости рамы и перпендикулярные к ней. Используя принцип независимости действия сил, можно рассчитать систему отдельно от нагрузок в плоскости рамы и от перпендикулярных к ней.

В качестве примера рассчитаем раму, показанную на рис. 436. Чтобы использовать ее симметрию, образуем основную систему разрезом стержня BC посередине (рис. 437). Такой вариант выгоднее изображенного на рис. 436, в.

Из соображений симметрии основной системы следует, что кососимметричные силовые факторы в сечениях разреза (крутящий момент X_2 и поперечная сила X_3) равны нулю. Незвестный изгибающий момент X_1 легко определить из канонического уравнения перемещений

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Для определения перемещений строим в основной системе эпюры изгибающих и крутящих моментов для P -го (рис. 438, а) и единичного $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 438, б) состояний. Эпюры крутящих моментов заштрихованы штриховыми линиями.

Перемещения определяем по формулам Мора для пространственного случая действия сил, причем пренебрегаем влиянием осевых и поперечных сил. Получаем

Перемещения определяем по формулам Мора для пространственного случая действия сил, причем пренебрегаем влиянием осевых и поперечных сил. Получаем

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} M_{zP} ds}{EJ_z} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP} ds}{GJ_K}; \quad (14.40)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{z1} ds}{EJ_z} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1} ds}{GJ_K}. \quad (14.41)$$

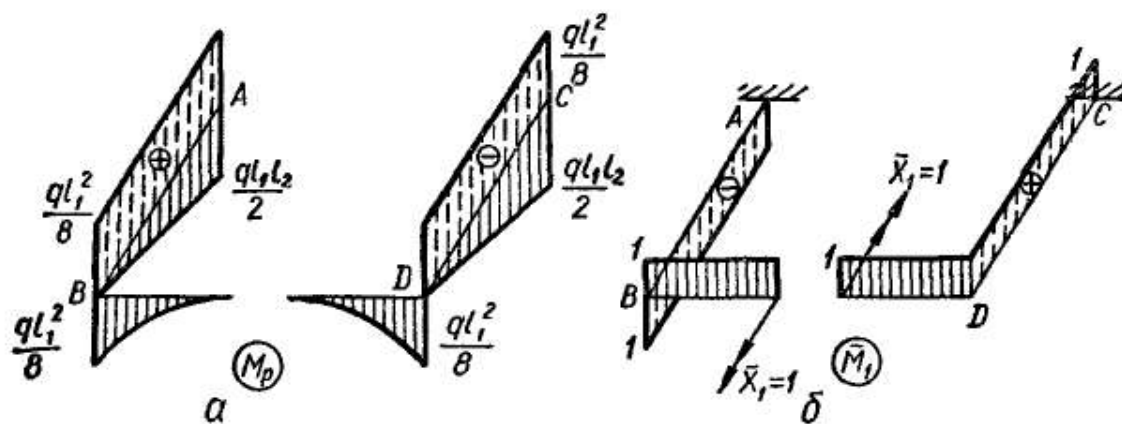


Рис. 438

Учитывая, что единичные эпюры ограничены прямыми линиями, перемещения Δ_{1P} , δ_{11} можем определить и по способу Верещагина. Получим

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EJ_1} \frac{ql_1^2}{8} \frac{1}{3} \frac{l_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{GJ_K} \frac{ql_1^2}{8} l_2 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -\frac{ql_1^3}{24EJ_1} \left(1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1} \right); \\ \delta_{11} &= \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_K} = \frac{l_1}{EJ_1} \left(1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24} \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}} = \beta \frac{ql_1^2}{24},$$

где

$$\beta = \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_K} \frac{l_2}{l_1}}.$$

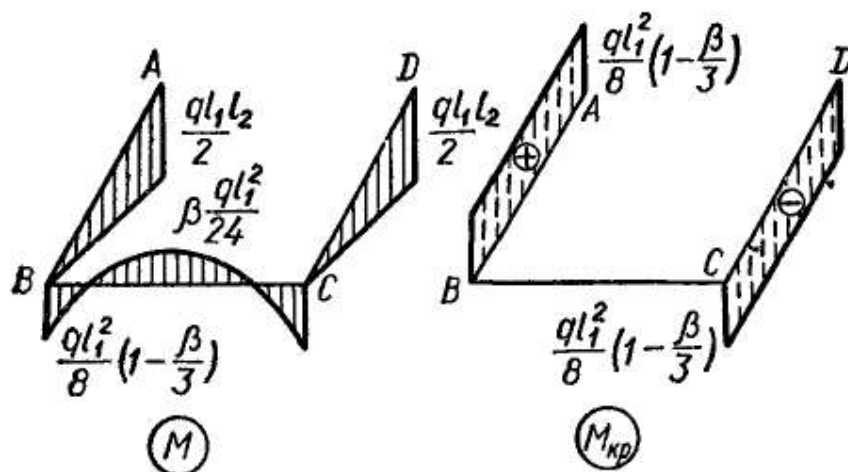


Рис. 439

Окончательные эпюры изгибающих и крутящих моментов показаны на рис. 439.

Глава 15

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

§ 99. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИВЫХ БРУСЬЯХ

В различных конструкциях часто встречаются брусья с криволинейной осью. К ним относятся грузоподъемные крюки, проушины, звенья цепей, ободы шкивов и колес, арки и т.п. Оси этих брусьев — плоские кривые. Брусья же с пространственной кривой осью встречаются редко и здесь не рассматриваются.

В поперечных сечениях плоского кривого бруса в общем случае имеются три внутренних силовых фактора — N , Q и M . Правила их определения и построения их эпюр для кривых брусьев рассмотрены в § 23. В § 24 выведены дифференциальные зависимости (3.13)—(3.15) между внутренними силовыми факторами и нагрузкой.

В настоящей главе рассмотрим определение напряжений и перемещений в кривых брусьях, а также расчет их на прочность. При

этом ограничимся рассмотрением брусьев, имеющих продольную плоскость симметрии (рис. 440), в которой и действуют внешние нагрузки. В силу симметрии перемещения точек оси бруса также будут происходить в этой плоскости.

Исследования показывают, что при изгибе распределение нормальных напряжений в поперечном сечении, а также величина максимальных напряжений в кривом бруске иные, нежели в балке с прямой осью. При прочих равных условиях это различие тем больше, чем больше отношение высоты h поперечного сечения к радиусу R кривизны его оси (рис. 440)

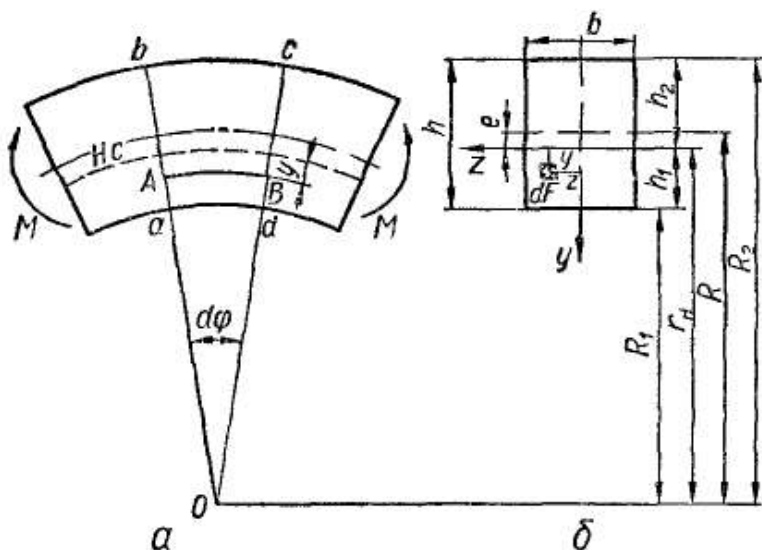


Рис. 440

В связи с указанным обстоятельством принято различать брусья малой кривизны, у которых $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$, и брусья большой кривизны, у которых $\frac{h}{R} \geq \frac{1}{5}$. При изгибе брусьев малой кривизны нормальные напряжения с достаточной для инженерных расчетов точностью можно определять по формулам (10.10), (10.13), выведенным для

балок с прямой осью. Подсчеты максимальных напряжений по этим формулам для бруса прямоугольного сечения при $\frac{h}{R} = \frac{1}{15}$ дают разницу в 2% по сравнению с напряжениями, вычисленными по более точным формулам, которые будут получены ниже. При $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$ разница возрастает до 3,5%, а при $\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$ она достигает 7%.

Вывод формулы для нормальных напряжений при изгибе бруса большой кривизны. Рассмотрим случай чистого изгиба кривого бруса (рис. 440). Для прямого стержня мы сначала предположили неизвестным положение нейтрального слоя, а затем выяснили, что он находится на уровне оси стержня. Здесь также предположим, что нейтральный слой имеет неизвестный пока радиус кривизны r_n , вообще говоря, отличный от радиуса R оси стержня.

Вывод формулы для напряжений σ при изгибе проведем по той же схеме, которая применялась для бруса с прямой осью, и в основу его положим те же гипотезы: гипотезу плоских сечений и гипотезу о том, что продольные волокна не давят друг на друга.

Проведем в сечении оси y и z , как показано на рис. 440. Ось z совпадает с нейтральной линией сечения, положение ее пока не определено. Положительным принимаем направление оси y к центру кривизны бруса.

Для получения уравнений статической стороны задачи рассечем кривой брус на две части каким-либо поперечным сечением, например ab (рис. 440), и выделим в сечении элемент площади dF , находящийся на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 440 и 441, а). На элемент действует усилие σdF . Из условий (10.2) и (10.3) при $N = 0$, $M_z = M$ получим

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \quad (15.1)$$

Условие $M_y = \int_F \sigma z dF = 0$ удовлетворяется автоматически в силу симметрии сечения относительно оси y .

Рассматривая геометрическую сторону задачи, выделим из кривого бруса (рис. 440) двумя бесконечно близкими сечениями ab и cd элементарный участок, которому соответствует до деформации угол $d\varphi$. После деформации угол между этими сечениями изменится на некоторую величину $\Delta(d\varphi)$ (рис. 441, б). Наблюдая деформацию произвольного волокна AB , расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя и имеющего до деформации длину $(r_n - y) d\varphi$, легко заметить, что вследствие деформации под нагрузкой за счет взаимного поворота сечений ab и cd рассматриваемое волокно удлинится на величину $y\Delta(d\varphi)$. Тогда относительное удлинение выбранного произвольного волокна, очевидно,

$$\varepsilon = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_n - y) d\varphi}. \quad (15.2)$$

Физическую сторону, как и для балки, если пренебречь давлением продольных волокон друг на друга, можно выразить формулой Гука:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Подставляя в эту формулу выражение ε , согласно формуле (15.2), будем иметь

$$\sigma = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \frac{y}{r_n - y}. \quad (15.3)$$

Эту формулу, очевидно, нельзя непосредственно использовать для определения нормальных напряжений при чистом изгибе кривого бруса, поскольку в ней пока неизвестны радиус r_n нейтрального слоя и изменение угла $\Delta(d\varphi)$. Для определения r_n и $\Delta(d\varphi)$

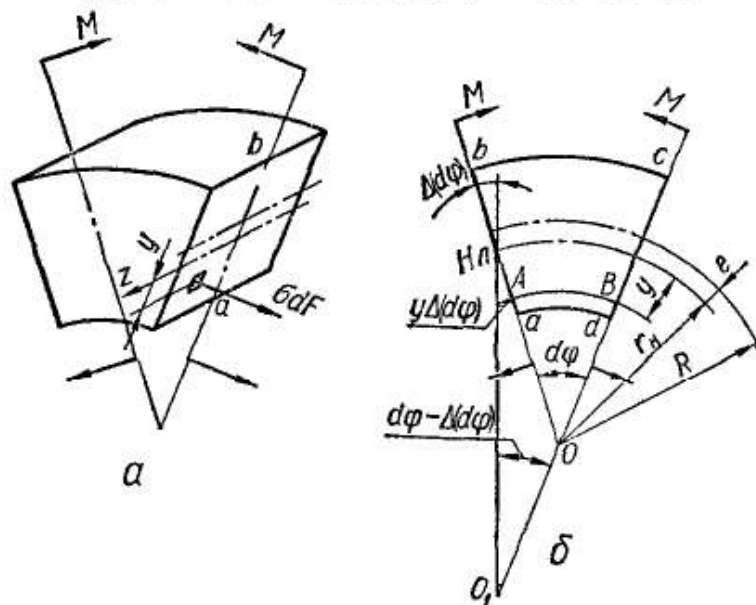


Рис. 441

воспользуемся двумя условиями (15.1). Из первого условия имеем

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Так как в этом выражении $\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0$, то

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0. \quad (15.4)$$

Второе условие соответственно запишется в виде

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = M. \quad (15.5)$$

Интеграл в последнем уравнении можно записать так:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} &= \int_F \frac{y^2 + r_n y - r_n y}{r_n - y} dF = - \int_F \left(y - \frac{r_n y}{r_n - y} \right) dF = \\ &= - \int_F y dF + r_n \int_F \frac{y dF}{r_n - y}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (15.6) представляет собой статический момент S_z площади поперечного сечения относительно нейтральной оси z , т. е. $F(-e)$ (рис. 440, б), а второй интеграл, согласно выражению (15.4), равен нулю. Учитывая это, выражение (15.6) можно записать так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = -S_z = -(-e)F, \quad (15.7)$$

где e — расстояние от центра тяжести сечения кривого бруса до нейтральной оси;

F — площадь сечения бруса.

Очевидно интеграл в левой части выражения (15.7) всегда величина положительная, а это означает, что статический момент S_z — величина отрицательная. Так как статический момент равен произведению положительной величины F на координату e центра тяжести площади F относительно нейтральной оси z , то из этого следует, что e — всегда координата отрицательная. Поэтому можно утверждать, что при изгибе кривого бруса нейтральная ось всегда смещена от центра тяжести сечения к центру кривизны бруса.

В дальнейшем в формулах, содержащих e и S_z , имеем в виду их абсолютные величины.

Подставляя выражение (15.7) в условие (15.5), получим

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} eF = M,$$

откуда

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eF}. \quad (15.8)$$

Учитывая выражение (15.8), формулу (15.3) для определения напряжений теперь можно представить в виде

$$\sigma = \frac{My}{eF(r_H - y)}, \quad (15.9)$$

или

$$\sigma = \frac{My}{S_z(r_H - y)},$$

где M — изгибающий момент в сечении;

S_z — статический момент площади сечения кривого бруса относительно нейтральной линии.

Из анализа формулы (15.9) видно, что, как и в балке с прямой осью, нормальное напряжение по ширине сечения одинаковое (не зависит от z) и изменяется только с изменением расстояния точки от нейтральной линии. По высоте сечения напряжения в кривом бруске изменяются по гиперболическому закону (рис. 442, б). Наибольшие по абсолютной величине напряжения будут в крайних точках сечения, находящихся у вогнутой поверхности бруса.

Абсолютные величины напряжений в крайних точках сечения кривого бруса согласно выражению (15.9), определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \quad (15.10)$$

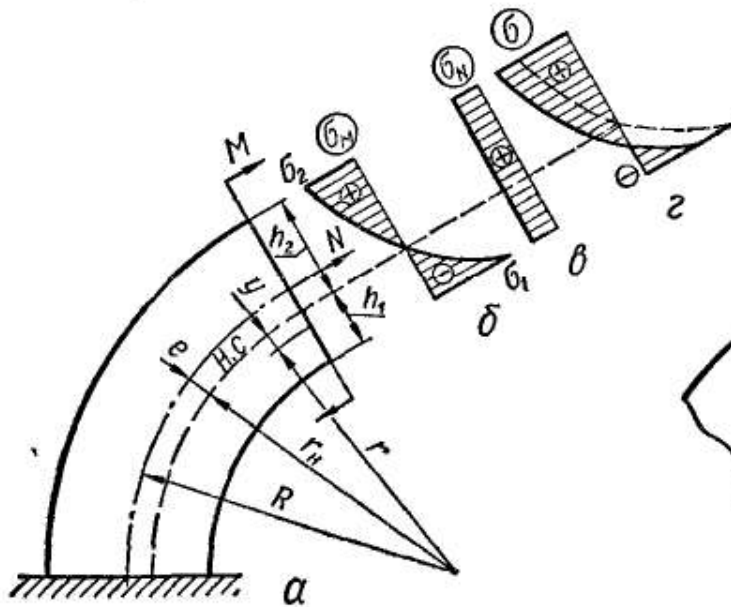


Рис. 442

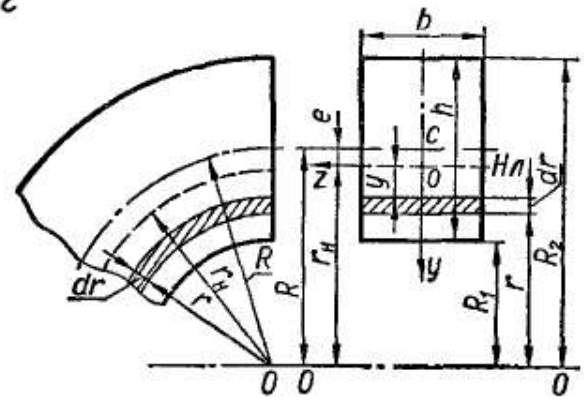


Рис. 443

где R_1 и R_2 — соответственно радиусы кривизны внутреннего и внешнего волокон кривого бруса;

h_1 и h_2 — расстояния от нейтральной линии до этих волокон (рис. 440).

Знаки напряжений легко установить по направлению изгибающего момента в сечении.

Определение положения нейтральной оси в кривом бруске при чистом изгибе. Для определения по формулам (15.9) и (15.10) напряжений в кривом бруске при изгибе нужно прежде всего определить величину e (расстояние от нейтрального слоя до центра тяжести)

или радиус r_n нейтрального слоя, поскольку

$$e = R - r_n, \quad (15.11)$$

где R — радиус слоя, содержащего центры тяжести сечений кривого бруса.

Покажем, как определяется положение нейтрального слоя, на примере бруса прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b (рис. 443). Для этого будем исходить из уравнения (15.4):

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Введем в этом уравнении следующую замену переменных (рис. 443):

$$r = r_n - y, \text{ или } y = r_n - r.$$

Тогда уравнение (15.4) может быть переписано так:

$$\int_F \frac{r_n - r}{r} dF = 0, \text{ или } r_n \int_F \frac{dF}{r} - F = 0,$$

откуда

$$\boxed{r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}}. \quad (15.12)$$

Учитывая, что

$$F = bh, \quad dF = bdr,$$

будем иметь

$$r_n = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (15.13)$$

Здесь 2,303 — модуль перехода к десятичным логарифмам.

Воспользовавшись рядом

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} = \frac{h}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right],$$

получим

$$e = R - r_n = R - \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots}.$$

В первом приближении

$$e = R \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \right) \approx \frac{h^2}{12R}.$$

Второе приближение дает

$$e = \frac{h^2}{12R} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 \right].$$

Пользуясь формулой (15.12), аналогичным путем можно найти выражение для e в случае иных форм поперечного сечения кривого бруса.

Пример 70 Определим положение нейтрального слоя для двутаврового сечения (рис 444)

Учитывая обозначения на рис. 444, величину e для двутаврового сечения можно определить по формуле

$$e = R - \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} = R - \frac{\sum F_n}{\sum \int \frac{dF}{r}} =$$

$$= R - \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_1 + h_1}{R_1} + b_3 \ln \frac{R_2 - h_2}{R_1 + h_1} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_2 - h_2}}. \quad (15.14)$$

Положив здесь $b_2 = h_2 = 0$ или $b_1 = h_1 = 0$, получим эксцентриситет e для таврового сечения

Положение центра тяжести сечения найдем по формуле

$$R - R_1 = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{\frac{b_1 h_1^2}{2} + b_3 h_3 \left(h_1 + \frac{h_3}{2} \right) + b_2 h_2 \left(h - \frac{h_2}{2} \right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}. \quad (15.15)$$

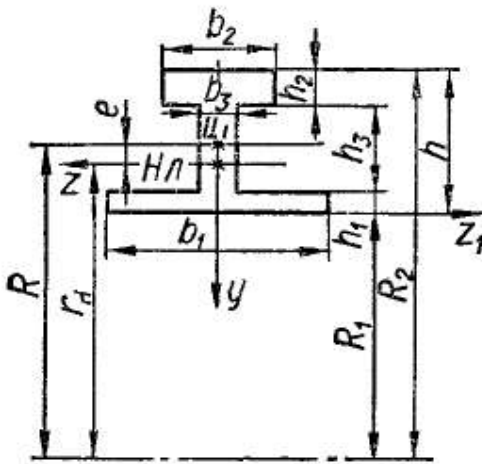


Рис. 444

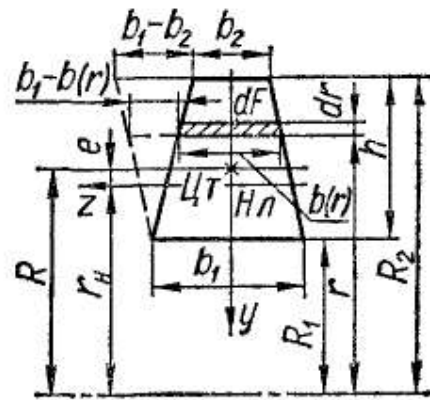


Рис. 445

Пример 71 Определим эксцентриситет нейтральной линии для трапециевидного сечения (рис 445).

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h; \quad dF = b(r) dr.$$

Ширину сечения $b(r)$ на произвольном расстоянии r находим из подобия треугольников.

$$\frac{b_1 - b(r)}{b_1 - b_2} = \frac{r - R_1}{n},$$

откуда

$$b(r) = b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 - \frac{b_1 - b_2}{h} r.$$

Тогда

$$\int_F \frac{dF}{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{b(r) dr}{r} = \left(b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 \right) \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} - \frac{b_1 - b_2}{h} \int_{R_1}^{R_2} dr;$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \ln r \Big|_{R_1}^{R_2} = \ln \frac{R_2}{R_1}; \quad \int_{R_1}^{R_2} dr = R_2 - R_1 = h.$$

Пользуясь формулами (15.11) и (15.12), находим, что

$$e = R - r_n =$$

$$= R - \frac{\frac{b_1 + b_2}{2} h}{\left(b_1 + \frac{b_1 - b_2}{h} R_1 \right) \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)}.$$

(15.16)

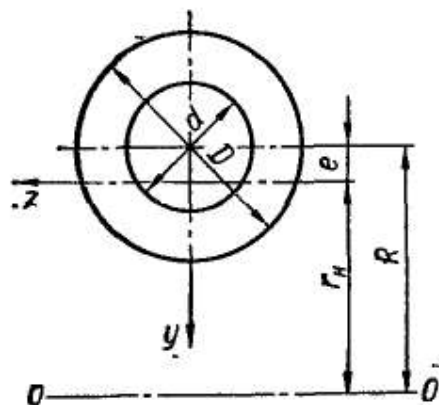


Рис. 446

Положение центра тяжести сечения определяется по формуле

$$R - R_1 = \frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2},$$

которую нетрудно получить, разделив статический момент сечения относительно основания на площадь.

Из общей формулы (15.16), положив $b_1 = 0$ или $b_2 = 0$, находим величину эксцентриситета соответственно расположенных треугольных сечений.

Для круглого полого сечения (рис. 446) аналогично можно получить

$$e = R - \frac{\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R^2 - D^2}}{4}.$$

(15.17)

§ 100. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

Если при изгибе кривого бруса кроме изгибающего момента в поперечном сечении действует и продольная сила, то расчет на прочность ведут, учитывая напряжения от обоих этих силовых факторов. Касательные напряжения за крайне редкими исключениями (тонкостенные сечения) не оказывают заметного влияния на прочность, и их обычно не определяют, хотя в случае необходимости можно найти их приближенно по формуле Журавского.

Для стержней малой кривизны условие прочности имеет тот же вид, что и для балок:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

(15.18)

Для стержней большой кривизны на основании формулы (15.9) условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{S_z r} + \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

(15.19)

При этом нужно рассматривать сечения, в которых суммарные напряжения от изгибающего момента и от продольной силы имеют

наибольшие значения. В этих сечениях опасной будет одна из крайних точек. Для этих точек в формулу (15.19) нужно подставлять $y = h_1$ или $y = h_2$ и соответственно $r = R_1$ или $r = R_2$.

В проектировочном расчете бруса большой кривизны для определения размеров поперечного сечения можно воспользоваться условием прочности при изгибе балки с соответствующей формой поперечного сечения, а затем, несколько увеличив полученные размеры, проверить прочность бруса по условию (15.19). Если брус большой кривизны изготовлен из материала, имеющего различные допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие (некоторые чугуны, пластмассы и т. п.), то условие прочности должно выполняться для крайних точек сечения как в растянутой, так и в сжатой областях.

Пример 72. Пластмассовое кольцо прямоугольного сечения ($b \times h$) подвергается действию равномерного внешнего давления p кгс/см² (рис. 447). Требуется определить допустимую величину давления для двух вариантов материала:

а) винипласт с пределом прочности на растяжение $\sigma_B^p = 540$ кгс/см² и пределом прочности на сжатие $\sigma_B^{сж} = 900$ кгс/см²;

б) волокнит с пределом прочности на растяжение $\sigma_B^p = 300$ кгс/см²; на сжатие $\sigma_B^{сж} = 1200$ кгс/см².

Дано: $b = 8$ мм; $R_1 = 10$ мм; $R_2 = 30$ мм; $\delta = 2$ мм.

Вычислим допускаемые напряжения. Принимая коэффициент запаса прочности $n = 3$ (для хрупкого материала), получим для винипласта

$$[\sigma_+] = \frac{540}{3} \text{ кгс/см}^2 = 180 \text{ кгс/см}^2;$$

$$[\sigma_-] = \frac{900}{3} \text{ кгс/см}^2 = 300 \text{ кгс/см}^2;$$

для волокнита

$$[\sigma_+] = \frac{300}{3} \text{ кгс/см}^2 = 100 \text{ кгс/см}^2; \quad [\sigma_-] = \frac{1200}{3} \text{ кгс/см}^2 = 400 \text{ кгс/см}^2.$$

— Перейдем к определению усилий и моментов. Рассмотрим произвольное сечение, проведенное под углом φ к горизонтали. Точка O — центр тяжести этого сечения — лежит на осевой дуге кольца, радиус которой

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{1 + 3}{2} \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Равнодействующая нагрузки, расположенной по правую сторону от сечения,

$$P = pb \cdot 2R_2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

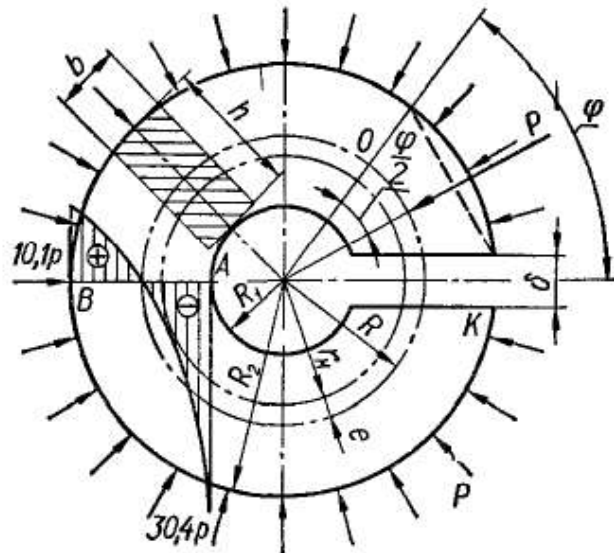


Рис. 447

Вычисляя момент силы относительно точки O и проектируя силу на касательную к дуге в этой точке, получаем

$$M(\varphi) = PR \sin \frac{\varphi}{2} = pbR_2R(1 - \cos \varphi); \quad N(\varphi) = -P \sin \frac{\varphi}{2} = -pbR_2(1 - \cos \varphi).$$

Изгибающий момент и осевая сила достигают наибольшей величины в сечении AB , где $\varphi = \pi$, причем

$$M_{\max} = 2pbR_2R = 2p \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 2 = 9,6p \text{ кгс} \cdot \text{см};$$

$$N_{\max} = -p \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot 2 = -4,8p \text{ кгс}.$$

Высота сечения $h = R_2 - R_1 = 3 - 1 \text{ см} = 2 \text{ см}$ и $\frac{h}{R} = 1 > \frac{1}{5}$, поэтому необходимо пользоваться условием прочности для кривого бруса. Поскольку осевая сила в опасном сечении AB сжимающая, а материал кольца хрупкий, применяем условия прочности (15.19) к двум вероятным опасным точкам — A и B .

Радиус r_n нейтрального слоя при чистом изгибе находим по формуле (15.13):

$$r_n = \frac{h}{2,303 \lg \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}} = \frac{2}{2,303 \lg \frac{1,5}{0,5}} = \frac{2}{2,303 \cdot 0,477} \text{ см} = 1,82 \text{ см}.$$

Эксцентриситет нейтральной линии при чистом изгибе

$$e = R - r_n = (2 - 1,82) \text{ см} = 0,18 \text{ см}.$$

Площадь сечения

$$F = bh = 0,8 \cdot 2 \text{ см}^2 = 1,6 \text{ см}^2.$$

Статический момент сечения относительно нейтральной линии

$$S = Fe = 1,6 \cdot 0,18 \text{ см}^3 = 0,288 \text{ см}^3.$$

Расстояния от нейтральной линии и от центра кривизны для точки A

$$y_A = r_n - R_1 = (1,82 - 1) \text{ см} = 0,82 \text{ см}; \quad r_A = R_1 = 1 \text{ см};$$

для точки B

$$y_B = R_2 - r_n = (3 - 1,82) \text{ см} = 1,18 \text{ см}; \quad r_B = R_2 = 3 \text{ см}.$$

Тогда

$$\sigma_A = \frac{M_{\max} y_A}{SR_1} + \frac{N_{\max}}{F} = -\frac{9,6p \cdot 0,82}{0,288 \cdot 1} - \frac{4,8p}{1,6} = -27,4p - 3p = -30,4p \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max} y_B}{SR_2} - \frac{N_{\max}}{F} = \frac{9,6p \cdot 1,18}{0,288 \cdot 3} - \frac{4,8p}{1,6} = 13,1p - 3p = 10,1p \text{ кгс/см}^2.$$

Кроме того, при $r = r_n$

$$y = 0 \text{ и } \sigma = \frac{N_{\max}}{F} = -3p.$$

По этим данным для наглядности на рис. 447 построена эпюра σ .

Теперь запишем условия прочности и определим допустимую величину p в случае винипласта для точки A

$$30,4p \leq 300 \text{ и } p \leq 9,9 \text{ кгс/см}^2;$$

для точки *B*

$$10,1p \leq 180 \text{ и } p \leq 17,8 \text{ кгс/см}^2;$$

в случае волокнита для точки *A*

$$30,4p \leq 400 \text{ и } p \leq 13,2 \text{ кгс/см}^2;$$

для точки *B*

$$10,1p \leq 100 \text{ и } p \leq 9,9 \text{ кгс/см}^2.$$

Таким образом, если кольцо изготовлено из винипласта, то $p_{\text{доп}} = 9,9 \text{ кгс/см}^2$ и опасной является точка *A*, если же оно волокнитовое, то $p_{\text{доп}} = 9,9 \text{ кгс/см}^2$ и опасной является точка *B*. Следовательно, несмотря на заметное различие в механических характеристиках винипласта и волокнита, величина $p_{\text{доп}}$ получается в обоих случаях одинаковой и равной примерно 10 кгс/см^2 .

§ 101. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ

Определять перемещения в кривых стержнях необходимо для проверки их жесткости, а также при решении статически неопределимых задач. Как в случае стержней малой, так и большой кривизны, для определения перемещений удобно воспользоваться методом Мора. В стержнях малой кривизны можно пренебречь продольными деформациями и деформациями сдвига. Тогда в случае плоского изгиба формула Мора будет иметь тот же вид, что и для балок:

$$\Delta_{tP} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_t M_P ds}{EJ}. \quad (15.20)$$

В случае плоского изгиба бруса большой кривизны деформация элемента от действия усилий M_P и N_P (рис. 448, а, б) также состоит из удлинения

$\Delta(ds)$ отрезка ds оси и относительного поворота $d\theta$ сечений, ограничивающих элемент. Взаимный угол поворота сечений, вызванный изгибающими моментами, как следует из выражения (15.8),

$$d\theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

Угол поворота сечений, вызванный осевыми силами N_P , возникающий вследствие неодинаковой длины волокон элемента (рис. 448, б),

$$d\theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

Полный угол поворота сечения

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \quad (15.21)$$

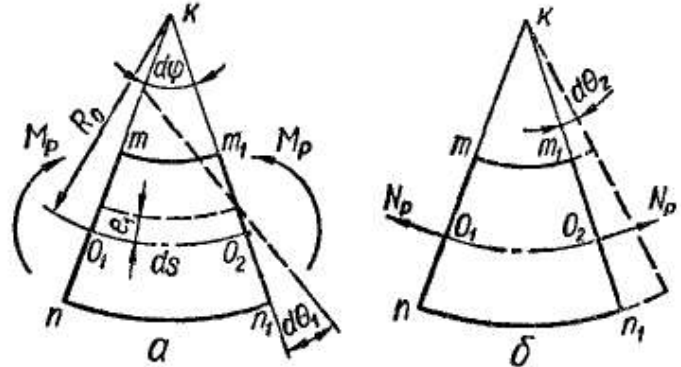


Рис. 448

Удлинение осевого элемента, вызванное поворотом сечений на угол $d\Theta_1$,

$$\Delta(ds)_1 = e_1 d\Theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e_1 = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

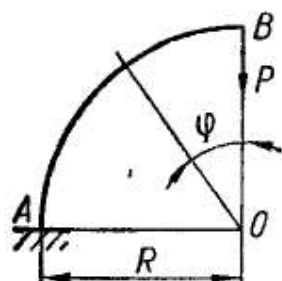
Удлинение осевого элемента в результате действия осевых сил

$$\Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF}.$$

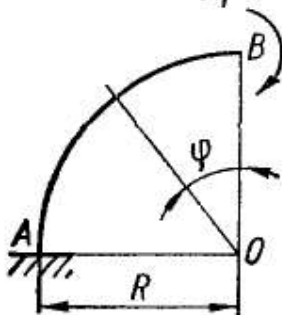
Полное удлинение осевого волокна

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{M_P ds}{EFR_0} + \frac{N_P ds}{EF}. \quad (15.22)$$

Подставляя формулы (15.21) и (15.22) в выражение (13.44), находим общую формулу для определения перемещений бруса большой кривизны:



а $\bar{x}_1 = 1$



б

Рис. 449

$$\Delta_{1P} = \sum \int \left[\frac{\bar{M}_1 M_P}{ESR_0} ds + \frac{\bar{N}_1 M_P + \bar{M}_1 N_P}{EFR_0} ds + \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF} ds + \frac{k\bar{Q}_1 Q_P}{GF} ds \right]. \quad (15.23)$$

Обычно влиянием поперечной силы пренебрегают. Тогда последнее слагаемое в формуле (15.23) исключается.

В качестве примера вычислим угол поворота свободного конца бруса большой кривизны, выполненного в виде четверти кольца постоянного сечения (рис. 449, а). Вспомогательное состояние показано на рис. 449, б.

В произвольном сечении, определяемом полярным углом φ , внутренние силовые факторы для действительного и вспомогательного состояний следующие:

$$M_P = PR \sin \varphi; \quad N_P = -P \sin \varphi; \quad Q_P = P \cos \varphi; \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{M}_1 = 1; \quad \bar{N}_1 = 0; \quad \bar{Q}_1 = 0.$$

Согласно формуле (15.23), искомое перемещение

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{M}_1 M_P d\varphi}{ES} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{M}_1 N_P R d\varphi}{EF} = \frac{1}{ES} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR \sin \varphi d\varphi -$$

$$- \frac{1}{EF} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \sin \varphi d\varphi = \frac{PR}{ES} - \frac{P}{EF} = \frac{PR}{ES} \left(1 - \frac{S}{FR} \right). \quad (15.24)$$

Как было уже показано (см. § 99), для кривого бруса прямоугольного поперечного сечения в первом приближении можно принять $e \approx \frac{h^2}{12R}$. Тогда

$$S = Fe \approx \frac{bh^3}{12R} = \frac{J}{R}$$

и формула (15.24) принимает вид

$$\Delta_{1P} = \frac{PR^2}{EJ} \left(1 - \frac{e}{R}\right).$$

Для бруса малой кривизны, согласно формуле (13.46), искомое перемещение

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{PR^2}{EJ}. \quad (15.25)$$

Глава 16

РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ И ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

§ 102. ТОЛСТОСТЕННЫЙ ЦИЛИНДР, ПОДВЕРЖЕННЫЙ ВНУТРЕННЕМУ И НАРУЖНОМУ ДАВЛЕНИЯМ

Цилиндр следует считать толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра.

При расчете тонкостенных цилиндров предполагается, что в окружном направлении напряжения постоянны по толщине стенки, а в радиальном вообще отсутствуют. Эти допущения неприемлемы для толстостенных цилиндров.

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 , находящийся под действием внутреннего давления p_1 и наружного p_2 (рис. 450). Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации также симметричны относительно его оси.

Двумя сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра и находящимися друг от друга на расстоянии, равном единице, вырежем кольцо (рис. 450). В этом кольце выделим элемент $abcd$ двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол $d\theta$ (рис. 451, а), и двумя соосными цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$

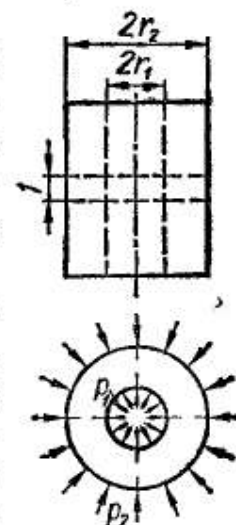


Рис. 450

(рис. 451, б). Нормальные напряжения на цилиндрической поверхности элемента, имеющей радиус r (радиальные напряжения), обозначим через σ_r ; на радиусе $r + dr$ напряжения получают приращение и будут равны $\sigma_r + d\sigma_r$. Нормальные напряжения на плоских гранях (тангенциальные, или окружные, напряжения) обозначим через σ_θ .

Указанные на рис. 451, б направления напряжений считаются положительными и соответствуют растяжению элемента по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок перекашиваться элемент не будет и касательных напряжений по его граням

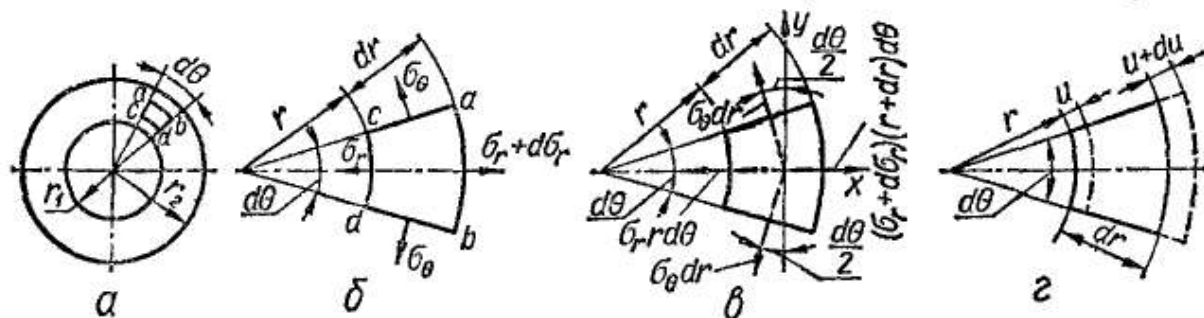


Рис. 451

нет. Поэтому нормальные напряжения σ_r и σ_θ будут главными напряжениями.

Статическая сторона задачи. Умножая напряжения на площади граней, получим действующие на элемент усилия (рис. 451, в): $\sigma_r r d\theta$ — на внутренней цилиндрической грани; $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta$ — на наружной цилиндрической грани; $\sigma_\theta dr$ — на боковых гранях.

Так как все силы лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, то для равновесия элемента суммы их проекций на две взаимно перпендикулярные оси должны равняться нулю. Ось x направим по биссектрисе угла $d\theta$, ось y — перпендикулярно к ней. Условиями равновесия будут

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Благодаря симметрии элемента второе условие удовлетворяется тождественно, а первое после подстановки выражений для усилий имеет следующий вид:

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta - 2\left(\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2}\right) = 0.$$

После раскрытия скобок получим

$$-\sigma_r r d\theta + \sigma_r r d\theta + d\sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + d\sigma_r dr d\theta - 2\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

В последнем уравнении взаимно уничтожаются члены $\pm \sigma_r r d\theta$. Вследствие малости угла $\frac{d\theta}{2}$ принимаем, что $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$; отбрасываем член высшего порядка малости $d\sigma_r dr d\theta$ и делим оставшиеся

члены на $drd\Theta$. После этого получим

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta = 0. \quad (16.1)$$

Уравнение (16.1) содержит два неизвестных напряжения σ_r и σ_Θ . Для их определения, придерживаясь общего плана решения статически неопределимых задач, рассмотрим еще геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи. Деформация элемента симметрична относительно оси и поэтому вызовет радиальные перемещения всех точек цилиндра (рис. 451, z). Обозначим радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиуса r через u , тогда перемещение цилиндрической поверхности радиуса $r + dr$ будет $u + du$. Абсолютное радиальное удлинение элемента dr будет равно du , а относительное удлинение

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (16.2)$$

Относительное удлинение в тангенциальном (окружном) направлении на радиусе r найдем следующим образом. Длина элемента по окружности цилиндрической поверхности радиуса r после его приращения на величину u равна $(r + u) d\Theta$. Вычтя из последней начальную длину $rd\Theta$, получим абсолютное приращение длины элемента на радиусе r в окружном направлении:

$$(r + u) d\Theta - rd\Theta = ud\Theta.$$

Разделив абсолютное удлинение на первоначальную длину $rd\Theta$, получим окружное относительное удлинение:

$$\epsilon_\Theta = \frac{u}{r}. \quad (16.3)$$

Физическая сторона задачи. В случае двухстороннего растяжения, которому подвергается рассматриваемый элемент, согласно закону Гука, напряжения и деформации связаны между собой следующими зависимостями:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu\epsilon_\Theta); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\Theta + \mu\epsilon_r).$$

Учитывая формулы (16.2) и (16.3), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\Theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \quad (16.4)$$

Подставляя выражения (16.4) в уравнение (16.1), для определения перемещения u получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (уравнение

Эйлера):

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.} \quad (16.5)$$

Записав это уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0$$

и интегрируя его по r последовательно два раза, найдем общее решение уравнения:

$$u = Ar + B \frac{1}{r}. \quad (16.6)$$

Подставляя решение (16.6) в формулы (16.4), получим выражения для напряжений в точках на расстоянии r от оси цилиндра:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2}B \right]; \quad (16.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2}B \right]. \quad (16.8)$$

Постоянные интегрирования A и B находим из условий для σ_r на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. На внутренней поверхности ($r = r_1$) эти напряжения равны внутреннему давлению, т. е. $\sigma_r = -p_1$, а на наружной поверхности ($r = r_2$) — наружному давлению: $\sigma_r = -p_2$.

Для определения постоянных A и B , согласно уравнению (16.7), получим следующих два уравнения:

$$-p_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_1^2}B \right];$$

$$-p_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_2^2}B \right].$$

Решая эти уравнения относительно A и B , найдем, что

$$A = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$B = \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Подставляя значения постоянных в выражения (16.6), (16.7) и (16.8), получим формулы для определения радиального перемещения и напряжений (формулы Ламе):

$$\boxed{u = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r};} \quad (16.9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}; \quad (16.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}. \quad (16.11)$$

Сложив левые и правые части выражений для σ_r и σ_θ , убедимся в том, что сумма радиального и окружного напряжений — величина постоянная:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const.}$$

Относительная деформация рассматриваемого кольца в направлении, параллельном оси цилиндра, также постоянна на любом радиусе, т. е.

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const.}$$

На основании этого цилиндр можно рассматривать как составленный из отдельных колец, нанизанных на ось. Поперечные сечения цилиндра при деформации остаются плоскими.

В случае, когда цилиндр кроме радиальных давлений воспринимает еще и продольную силу N (например, при наличии днищ), в его поперечных сечениях возникает напряжение

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}, \quad (16.12)$$

а к выражению (16.9) для радиальных перемещений добавляется слагаемое

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r. \quad (16.13)$$

Напряжения σ_r и σ_θ при этом не изменяются.

Отметим, что все приведенные формулы для деформаций и напряжений σ_r , σ_θ и σ_z справедливы для сечений, достаточно удаленных от днищ. Вблизи закрытых торцов цилиндра деформации и напряжения несколько искажены вследствие влияния днищ.

Рассмотрим два частных случая нагружения цилиндра.

1. Цилиндр нагружен только внутренним давлением, а наружное давление отсутствует или мало и им можно пренебречь, т. е. $p_1 = p$; $p_2 = 0$. Формулы (16.9) — (16.11) для напряжений и радиального перемещения принимают следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (16.14)$$

$$\sigma_{\Theta} = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (16.15)$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (16.16)$$

Напряжение σ_r всюду сжимающее, а σ_{Θ} — растягивающее. Наибольшие значения σ_r и σ_{Θ} будут у внутренней поверхности цилиндра (при $r = r_1$):

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p; \\ (\sigma_{\Theta})_{r=r_1} &= \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p, \end{aligned} \quad (16.17)$$

где

$$k = \frac{r_1}{r_2}.$$

Радиальное перемещение у внутренней поверхности (увеличение внутреннего радиуса)

$$u_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \mu \right) p. \quad (16.18)$$

Напряжения и перемещение у наружной поверхности цилиндра следующие:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_{\Theta})_{r=r_2} = \frac{2k^2}{1 - k^2} p; \quad (16.19)$$

$$u_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \frac{2k^2}{1 - k^2} p. \quad (16.20)$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_{Θ} для рассматриваемого случая при отношении $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ приведены на рис. 452, а. Напряжения изменяются по гиперболическому закону. Наиболее опасной с точки зрения прочности является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра.

Определим допускаемое внутреннее давление в цилиндре при безграничном увеличении толщины стенки. Полагая $r_2 \rightarrow \infty$ и принимая в формулах (16.17) $k = 0$, получим $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p$; $(\sigma_{\Theta})_{r=r_1} = p$.

Используем, например, третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

В рассматриваемом случае

$$\sigma_1 = (\sigma_{\Theta})_{r=r_1} = p \text{ и } \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

и это условие прочности принимает вид

$$2p \leq [\sigma],$$

откуда

$$p \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Цилиндр с весьма толстой стенкой не допускает внутреннего давления, большего определенной величины. Таким образом, увеличение толщины стенки цилиндра не всегда является эффективным способом увеличения прочности.

2. Цилиндр нагружен только внешним давлением: $p_2 = p$; $p_1 = 0$. В этом случае формулы (16.10) и (16.11) для напряжений и формула (16.9) для перемещений принимают следующий вид:

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) p; \quad (16.21)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) p; \quad (16.22)$$

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (16.23)$$

Оба напряжения сжимающие, причем по абсолютной величине $\sigma_\theta > \sigma_r$, а радиальное перемещение направлено к оси цилиндра (радиусы уменьшаются).

У внутренней поверхности цилиндра ($r = r_1$)

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2} p; \quad (16.24)$$

$$u_{r=r_1} = -\frac{r_1}{E} \frac{2}{1-k^2} p. \quad (16.25)$$

У наружной поверхности цилиндра ($r = r_2$)

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = -\frac{1+k^2}{1-k^2} p; \quad (16.26)$$

$$u_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right) p. \quad (16.27)$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ при $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ приведены на рис. 452, б. Наибольшего по абсолютной величине значения напряжение σ_θ достигает у внутренней поверхности цилиндра. Как и в случае внутреннего давления, наиболее опасной является точка у внутренней поверхности цилиндра.

Уменьшение наружного радиуса сплошного цилиндра (без внутреннего отверстия) получим, положив в формуле (16.23) $r_1 = 0$ и $r = r_2$. Тогда

$$u_{r=r_2} = -\frac{p r_2}{E} (1 - \mu). \quad (16.28)$$

Прочность цилиндра, работающего при внутреннем давлении, с увеличением толщины стенки возрастает только до определенного предела. Выше было показано, что даже при бесконечно большом наружном радиусе внутреннее давление в цилиндре не может превышать определенной величины. Исходя из расчета на прочность по допускаемым напряжениям и воспользовавшись третьей теорией прочности, мы пришли к выводу, что ни при каком увеличении толщины стенки цилиндра его нельзя изготовить на давление, большее, чем $p = \frac{[\sigma]}{2}$. Объясняется это тем, что с увеличением радиуса напряжения σ_r и σ_θ быстро убывают и материал наружных слоев цилиндра

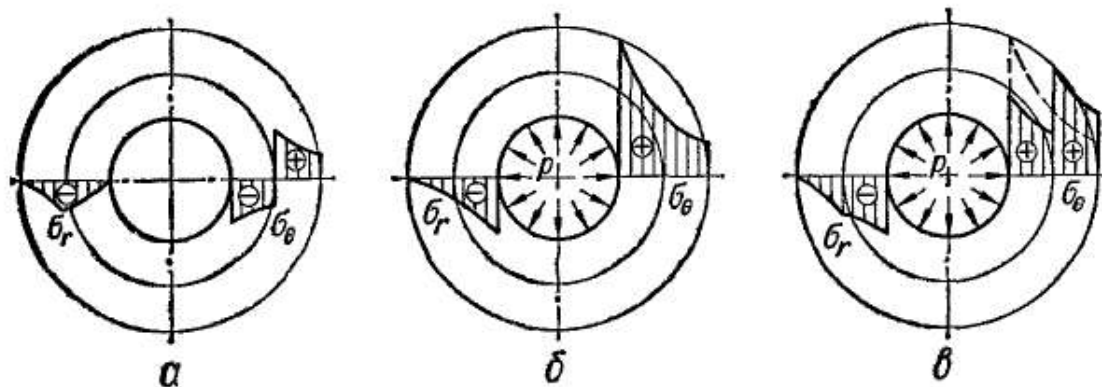


Рис. 453

работает малоэффективно. Распределение напряжений можно улучшить, разгрузив внутренние слои за счет более интенсивного использования наружных. Для этого нужно сделать цилиндр составным, надев один цилиндр на другой с натягом (обычно с помощью горячей посадки). В таких цилиндрах величина допускаемого внутреннего давления может быть значительно больше, чем в цельном цилиндре. Подобным образом изготавливают орудийные стволы.

При посадке одного цилиндра на другой с натягом окружные напряжения σ_θ во внутреннем цилиндре становятся сжимающими, а в наружном — растягивающими (рис. 453, а). Если такой составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные растягивающие окружные и сжимающие радиальные напряжения (рис. 453, б). Эти напряжения определяются по формулам (16.14) и (16.15) как для цельного цилиндра. Окружные напряжения от внутреннего давления будут складываться с напряжениями от посадки в наружном цилиндре и вычитаться из них во внутреннем цилиндре. Радиальные напряжения от внутреннего давления и от давления посадки складываются в обоих цилиндрах. Суммарные эпюры напряжений после приложения давления будут иметь вид, представленный на рис. 453, в. Характерным для них является скачок на эпюре σ_θ и перелом в эпюре σ_r на радиусе контакта цилиндров.

Рассмотрим расчет составных цилиндров. Прежде всего найдем зависимость давления p_c по контактной поверхности от величины

имевшейся до посадки разности δ между наружным диаметром внутреннего цилиндра I и внутренним диаметром наружного цилиндра II (рис. 454). Эта разность представляет собой величину натяга.

Поскольку после посадки одного цилиндра на другой наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного становятся одинаковыми, то очевидно, что сумма абсолютных величин радиальных перемещений обоих цилиндров на радиусе поверхности контакта, вызванных контактным давлением, должна быть равна половине натяга, т. е.

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \quad (16.29)$$

Так как величина натяга δ весьма мала по сравнению с размерами радиуса поверхности контакта, то при вычислении перемещений будем считать, что $r_{2I} = r_{1II} = r_c$ (рис. 454).

Обозначим через $k_1 = \frac{r_1}{r_c}$ отношение внутреннего радиуса цилиндра к радиусу поверхности контакта, а через $k_2 = \frac{r_c}{r_2}$ — отношение радиуса поверхности контакта к наружному радиусу цилиндра.

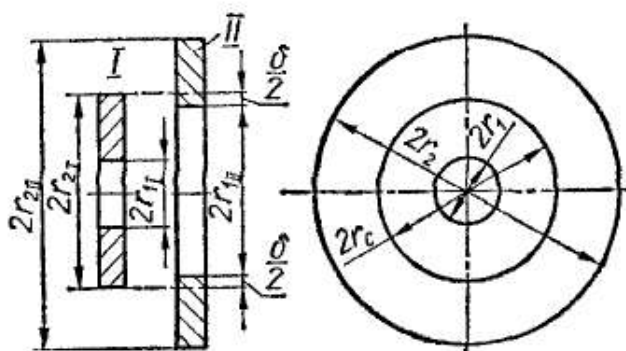


Рис. 454

Хотя в большинстве случаев части составных цилиндров изготовляют из одного материала, будем для общности при решении задачи вначале полагать эти материалы различными.

Контактное давление p_c будет наружным для внутреннего цилиндра и внутренним для наружного цилиндра. Абсолютную величину радиального перемещения внутреннего цилиндра на контактной поверхности найдем по формуле (16.27):

$$|u_I| = \frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c, \quad (16.30)$$

а наружного — по формуле (16.18):

$$|u_{II}| = \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c. \quad (16.31)$$

Подставляя значения этих перемещений в уравнение (16.29), будем иметь

$$\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c = \frac{\delta}{2}.$$

Решая уравнение относительно p_c , получаем

$$p_c = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (16.32)$$

В случае одинаковых материалов сопрягаемых цилиндров последняя формула упрощается и принимает вид

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c} \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1-k_2^2) + (1+k_2^2)(1-k_1^2)}. \quad (16.33)$$

Напряжения, вызванные давлением p_c , определяются по формулам (16.21), (16.22) для внутреннего цилиндра и по формулам (16.14), (16.15) для наружного.

Отметим следующее обстоятельство. Величину натяга определяют, измеряя диаметры сопрягаемых деталей микрометрическими инструментами или другими точными приборами. Поверхности ж деталей никогда не бывают абсолютно гладкими: на них всегда есть следы обработки — так называемые гребешки, которые сминаются при запрессовке. Вследствие этого действительная величина натяга несколько меньше измеренной, а действительное контактное давление меньше определяемого по формуле (16.32) или (16.33).

Кроме этого следует иметь в виду, что формулы (16.32) и (16.33) справедливы лишь в том случае, когда ни в одной из сопрягаемых деталей напряжения не превышают предела пропорциональности. При появлении же пластических деформаций контактное давление будет меньше, чем определяемое по этим формулам. Найти его можно методами теории пластичности.

§ 104. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ

Если толстостенный цилиндр нагревается неравномерно, то в нем появляются температурные напряжения, которые суммируются с напряжениями, вызванными давлением.

Часто температурное поле симметрично относительно оси цилиндра и постоянно по его длине. При этом условии также можно считать, что поперечные сечения, лежащие на достаточном расстоянии от концов цилиндра, остаются плоскими и деформация ϵ_z постоянна.

Для решения температурной задачи можно воспользоваться тем же методом, который был применен при расчете цилиндра на действие внутреннего и внешнего давлений. При этом уравнение равновесия (16.1) не изменится. Геометрические соотношения (16.2) и (16.3) также сохраняются. Несколько иными будут физические зависимости.

Обозначим через T повышение температуры, зависящее от радиуса r , а через α — коэффициент линейного расширения.

Воспользуемся обобщенным законом Гука, добавив к деформациям, обусловленным напряжениями, температурные расширения. Тогда для ε_z , ε_r , ε_θ получим следующие формулы¹:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T = \text{const}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\theta) + \alpha T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \alpha T.\end{aligned}\quad (16.34)$$

Решая эти уравнения относительно напряжений, найдем, что

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T]; \\ \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T].\end{aligned}\quad (16.35)$$

Выражая в этих формулах деформации через перемещения:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{и} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

и затем подставляя полученные значения для σ_r и σ_θ в уравнение равновесия (16.1)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0,$$

получим следующее дифференциальное уравнение для перемещения u :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr}} \quad (16.36)$$

Из этого уравнения может быть определено перемещение, если известен закон изменения температуры $T(r)$ по толщине стенки цилиндра.

Последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение два раза по r , найдем общее решение:

$$u = \frac{1}{r} \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + Ar + \frac{B}{r}. \quad (16.37)$$

¹ Модуль упругости E зависит от температуры. Здесь это не учитывается, что вполне допустимо, если разность температур внутренней и наружной поверхностей цилиндра невелика. В таком случае модуль E следует брать равным его значению при средней температуре стенки цилиндра.

Постоянные A и B определяются из условий для σ_r на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Так как эти поверхности свободны от нагрузки, то

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \text{ и } (\sigma_r)_{r=r_2} = 0.$$

Подставив в выражение (16.35) для σ_r деформации $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ и $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$, а затем полученное решение (16.37) для u , будем иметь

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[-\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{A}{1-2\mu} - \frac{B}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_z \right]. \quad (16.38)$$

Приравнивая это выражение к нулю при $r = r_1$ и $r = r_2$, получим два уравнения для определения A и B , решая которые, найдем, что

$$A = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \mu \varepsilon_z;$$

$$B = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr.$$

После подстановки этих значений в формулы (16.35) получим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr \right]; \quad (16.39)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha T r dr + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \alpha T \right]; \quad (16.40)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr + (1-\mu) \varepsilon_z - \alpha T \right]. \quad (16.41)$$

В последнем выражении неизвестна величина ε_z . Если цилиндр имеет возможность свободно расширяться, то ε_z можно найти из условия, что продольная сила в поперечном сечении равняется нулю, т. е.

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\varphi = 0, \quad (16.42)$$

или

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0. \quad (16.43)$$

Подставляя сюда значение σ_z из выражения (16.41), найдем:

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr. \quad (16.44)$$

Окончательное выражение для σ_z следующей:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left(\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha T r dr - \alpha T \right). \quad (16.45)$$

Вычислить $\int \alpha T r dr$ и определить напряжения можно, если известен закон изменения температуры $T(r)$ по толщине стенки цилиндра.

Наиболее простым и часто применяемым в технических расчетах законом изменения температуры является линейный закон. Пусть $T^* = T_1 - T_2$ обозначает превышение температуры внутренней поверхности цилиндра над температурой наружной поверхности. Тогда линейный закон изменения температуры по радиусу цилиндра выразится формулой

$$T(r) = T^* \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \quad (16.46)$$

Подставив это выражение в формулы (16.39), (16.40), (16.45) для напряжений и выполнив интегрирование, получим

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (16.47)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (16.48)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16.49)$$

У внутренней поверхности цилиндра (при $r = r_1$)

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16.50)$$

У наружной поверхности цилиндра (при $r = r_2$)

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16.51)$$

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ при $\mu = 0,3$ представлены на рис. 455, а.

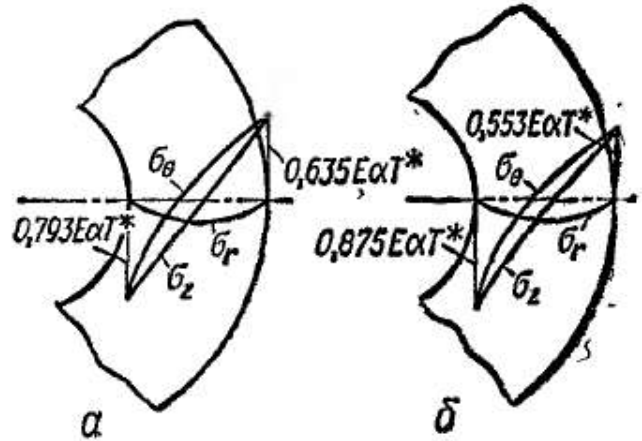


Рис. 455

Иногда принимают, что в толстостенных цилиндрах температура изменяется по логарифмическому закону, устанавливаемому теорией теплопередачи:

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}. \quad (16.52)$$

Подставив это выражение в формулы (16.39), (16.40), (16.45) и выполнив интегрирование, получим

$$\sigma_r = - \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[\ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (16.53)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \\ = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (16.54) \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - 2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.55)$$

У внутренней поверхности цилиндра

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.56) \end{aligned}$$

У наружной поверхности

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (16.57) \end{aligned}$$

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра с отношением $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ при $\mu = 0,3$ в случае изменения температуры по логарифмическому закону представлены на рис. 455, б.

Отметим, что вблизи торцов цилиндра напряжения, определяемые полученными формулами, могут иметь место лишь в том случае, если торцы будут нагружены поверхностной нагрузкой, изменяющейся в соответствии с формулой для σ_z .

§ 105. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

1. Толстостенный цилиндр подвергается внутреннему давлению $p_1 = 1000$ кгс/см² и наружному $p_2 = 600$ кгс/см². Исследуем, как будут изменяться напряжения σ_r и σ_θ с изменением тол-

щины стенки цилиндра, характеризуемым величиной отношения внутреннего радиуса к наружному $k = \frac{r_1}{r_2}$.

Напряжения определяются по формулам (16.10) и (16.11), которые в данном случае удобнее записать, введя отношение $k = \frac{r_1}{r_2}$:

$$\sigma_r = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_1^2}{r^2}; \quad (16.58)$$

$$\sigma_\theta = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2} \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (16.59)$$

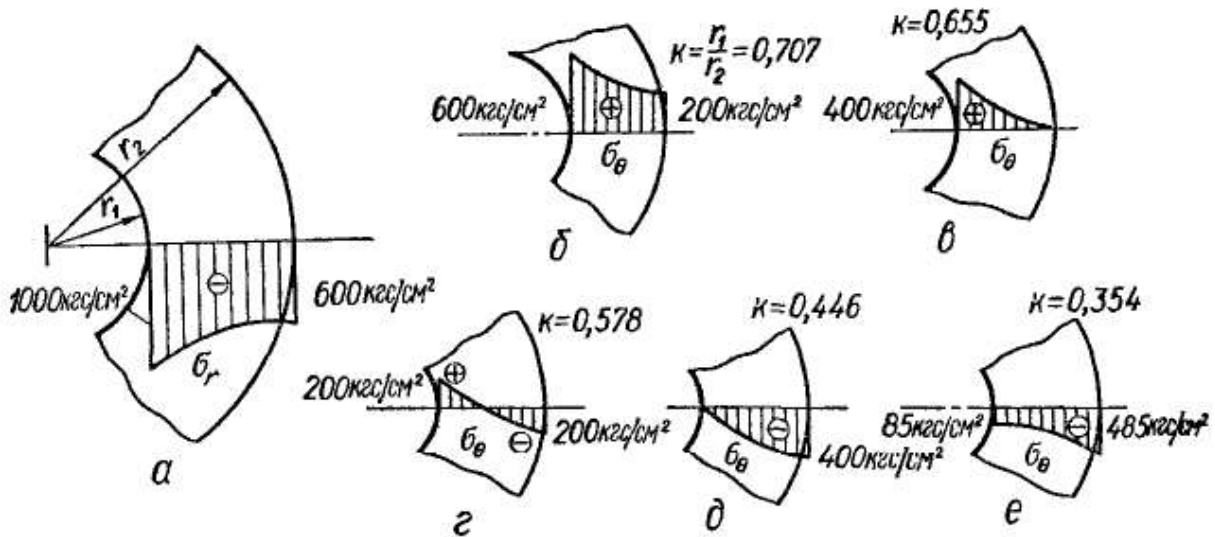


Рис. 456

При изменении толщины стенки цилиндра напряжение σ_r остается сжимающим и плавно изменяется по гиперболическому закону от значения $-p_1$ у внутренней поверхности до значения $-p_2$ у наружной (рис. 456, а).

Для вычисления напряжений σ_θ у внутренней поверхности цилиндра ($r = r_1$) и у наружной ($r = r_2$) формулу (16.59) можно записать соответственно так:

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1}{1 - k^2} [(1 + k^2) p_1 - 2p_2];$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{1}{1 - k^2} [2k^2 p_1 - (1 + k^2) p_2].$$

Подставляя сюда различные значения k , можем вычислить напряжения σ_θ у внутренней и наружной поверхностей цилиндра при заданных значениях p_1 и p_2 .

На рис. 456, б—е показаны эпюры σ_θ при значениях $k = 0,707$; $k = 0,655$; $k = 0,578$; $k = 0,446$; $k = 0,354$.

2. Стальная труба с внутренним диаметром $2r_1 = 40$ мм подвергается внутреннему давлению $p = 2500$ кгс/см². Определим толщину S стенки трубы по четвертой теории прочности, если допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 5000$ кгс/см².

Опасными являются точки трубы у внутренней поверхности, где главные напряжения имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p; \quad (16.60)$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p.$$

Условие прочности по четвертой теории

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma]$$

после подстановки напряжений из формул (16.60) принимает вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta \sigma_r + \sigma_r^2} \leq [\sigma], \quad (16.61)$$

или

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} p\right)^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} p^2 + p^2} \leq [\sigma], \quad (16.62)$$

откуда

$$([\sigma]^2 - p^2) k^4 - 2[\sigma]^2 k^2 + ([\sigma]^2 - 3p^2) = 0.$$

Решая относительно k^2 , получаем

$$k^2 = \frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1}.$$

Так как $k^2 < 1$, то перед корнем следует взять знак «минус». Тогда

$$\begin{aligned} r_2 = \frac{r_1}{k} &= \frac{r_1}{\sqrt{\frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2 - 1}}} = \\ &= \frac{20}{\sqrt{\frac{\left(\frac{5000}{2500}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 5000}{2500}\right)^2 - 3}}{\left(\frac{5000}{2500}\right)^2 - 1}}} \text{ мм} = 55 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Толщина стенки трубы $S = (55 - 20) \text{ мм} = 35 \text{ мм}$.

3. Найдем оптимальную величину давления p_c натяга составного цилиндра из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров и величину допускаемого внутреннего давления p_i . Дано: $r_1 = 40 \text{ мм}$; $r_2 = 110 \text{ мм}$; $r_c = 80 \text{ мм}$; $[\sigma] = 6000 \text{ кгс/см}^2$. Расчет выполним по четвертой теории.

Напряжения во внутреннем цилиндре будут наибольшими при $r = r_1$ и такими согласно формулам (16.14), (16.15) и (16.24):

$$(\sigma_{r_I})_{r=r_1} = -p_1;$$

$$(\sigma_{\theta_I})_{r=r_1} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p_1 - \frac{2r_c^2}{r_c^2 - r_1^2} p_c = 1,31p_1 - 2,67p_c. \quad (16.63)$$

В наружном цилиндре напряжения будут наибольшими при $r = r_c$ и такими согласно формулам (16.14), (16.15) и (16.17):

$$(\sigma_{r_{II}})_{r=r_c} = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_c^2}\right) p_1 - p_c = -0,136p_1 - p_c;$$

$$(\sigma_{\theta_{II}})_{r=r_c} = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_c^2}\right) p_1 + \frac{r_2^2 + r_c^2}{r_2^2 - r_c^2} p_c = 0,44p_1 + 3,25p_c.$$

Условие равнопрочности по четвертой теории имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_{\theta_I})^2 - (\sigma_{\theta_I})(\sigma_{r_I}) + (\sigma_{r_I})^2} = \sqrt{(\sigma_{\theta_{II}})^2 - (\sigma_{\theta_{II}})(\sigma_{r_{II}}) + (\sigma_{r_{II}})^2}.$$

Подставив выражение напряжений через давления, освободившись от радикалов и приведя подобные члены, получим

$$3,74p_1^2 - 13,62p_1p_c - 7,68p_c^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно p_1 , найдем, что

$$p_1 = 4,12p_c. \quad (16.64)$$

Оптимальная величина давления p_c определяется условием прочности

$$\sqrt{(\sigma_{\theta_I})^2 - (\sigma_{\theta_I})(\sigma_{r_I}) + (\sigma_{r_I})^2} = [\sigma].$$

Используя формулы (16.63) для σ_{r_I} и σ_{θ_I} и зависимость (16.64), получим

$$(1,31 \cdot 4,12 - 2,67)^2 p_c^2 + (1,31 \cdot 4,12 - 2,67) p_c^2 + 4,12^2 p_c^2 = [\sigma]^2,$$

откуда находим, что $p_c = 1145$ кгс/см².

Допускаемое внутреннее давление

$$p_1 = 4,12p_c = 4,12 \cdot 1145 \text{ кгс/см}^2 = 4720 \text{ кгс/см}^2.$$

4. С т а л ь н а я т р у б а с внутренним диаметром $2r_1 = 4$ см и наружным $2r_2 = 8$ см нагревается так, что температура внутренней поверхности $T_1 = 300^\circ\text{C}$, а наружной $T_2 = 200^\circ\text{C}$. Определим температурные напряжения в трубе, считая, что по толщине стенки температура изменяется по линейному закону. При расчете примем $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см²; $\mu = 0,3$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$. Превышение температуры внутренней поверхности над наружной $T^* = T_1 - T_2 = 100^\circ\text{C}$.

По формуле (16.50) находим окружное и осевое напряжения у внутренней поверхности трубы:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\theta})_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} &= \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2} \right] = \\
 &= \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{3(1-0,3)(4-2)} \left[3 \cdot 2 - \frac{2(4^3-2^3)}{4^2-2^2} \right] \text{ кгс/см}^2 = \\
 &= -1990 \text{ кгс/см}^2.
 \end{aligned}$$

По формуле (16.51) находим напряжения σ_{θ} и σ_z у наружной поверхности:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\theta})_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} &= \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_2 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2} \right] = \\
 &= \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 100}{3(1-0,3)(4-2)} \left[3 \cdot 4 - \frac{2(4^3-2^3)}{4^2-2^2} \right] \text{ кгс/см}^2 = \\
 &= 1580 \text{ кгс/см}^2.
 \end{aligned}$$

В других точках поперечного сечения трубы напряжения можно вычислить по формулам (16.47) — (16.49).

§ 106. РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Вращающиеся диски широко применяют в паровых и газовых турбинах, в компрессорах, вентиляторах и машинах химической промышленности. Диски подвергаются нагрузкам, вызывающим их растяжение и изгиб, а также действию высоких температур. Существенное значение имеют центробежные силы. Обычно нагрузки и температурное поле симметричны относительно оси диска, вследствие чего и напряжения являются функциями только расстояния от оси вращения.

Ограничимся рассмотрением диска постоянной толщины, нагруженного силами, параллельными его срединной плоскости и равномерно распределенными по его толщине. Рассмотрим также нагрев диска при линейном законе изменения температуры вдоль радиуса.

Будем считать, что диск тонкий и вследствие этого напряжения по его толщине не изменяются, а в направлениях, параллельных оси, вообще отсутствуют ($\sigma_z = 0$). В такой постановке задача об определении напряжений в диске относится к так называемой плоской задаче теории упругости, а именно — к задаче о плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим вращающийся диск постоянной толщины h , имеющий центральное отверстие (рис. 457, а). Дополнительно к обозначениям рисунка примем следующие:

- $\frac{\gamma}{g}$ — удельная масса материала диска;
- ω — угловая скорость вращения.

Как и в рассмотренном уже случае расчета толстостенного цилиндра, вырежем мысленно элемент диска двумя меридиональными плоскостями, угол между которыми в срединной плоскости равен $d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$ (рис. 458).

Кроме сил, приложенных по граням элемента (рис. 458, б), на элемент действуют силы инерции в виде центробежной силы, распределенной по всему объему и приводящейся к равнодействующей

$$dm \omega^2 r = \frac{\gamma}{g} h r d\theta dr \omega^2 r.$$

Эта сила также лежит в срединной плоскости диска и направлена вдоль радиуса от оси вращения.

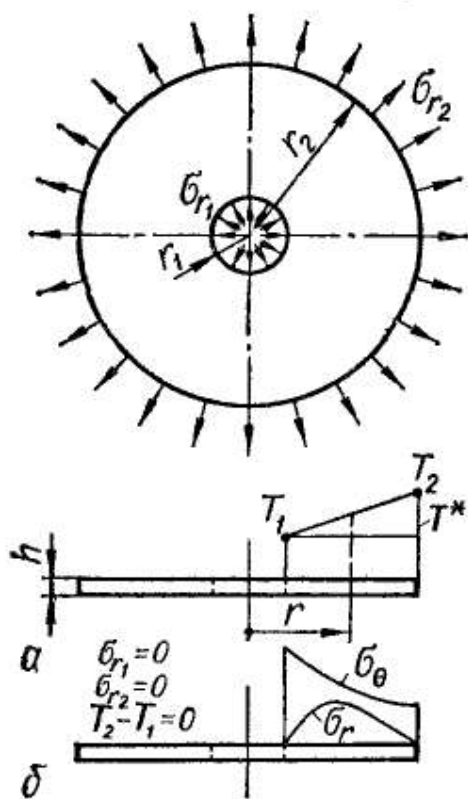


Рис. 457

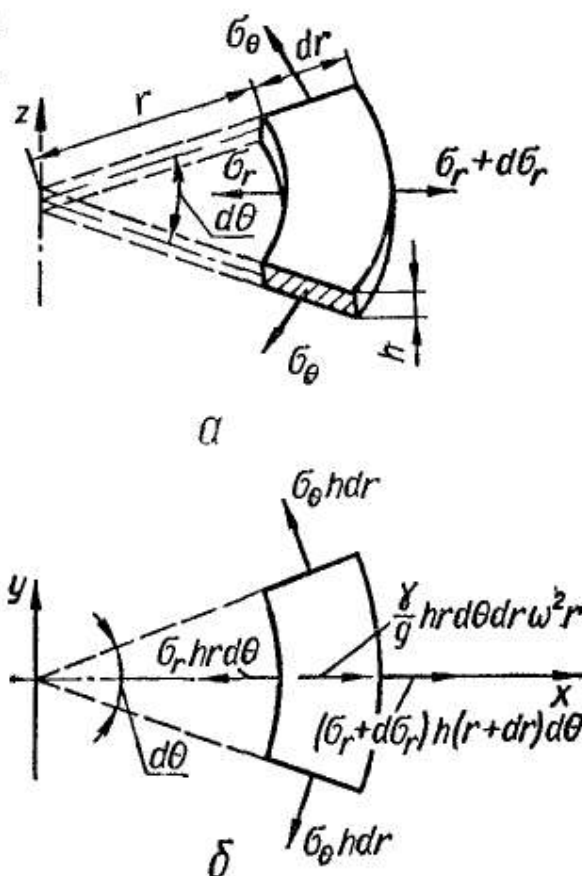


Рис. 458

Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на ось x , совпадающую с биссектрисой угла $d\theta$, получаем уравнение равновесия в следующем виде:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (16.65)$$

Это уравнение отличается от уравнения равновесия (16.1), полученного при расчете толстостенного цилиндра, только слагаемым $\frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2$, обусловленным действием центробежных сил. Геометрические и физические уравнения не отличаются от уравнений (16.2) — (16.4), полученных для толстостенного цилиндра.

Дифференциальное уравнение для радиальных перемещений точек диска в этом случае примет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (16.66)$$

Это дифференциальное уравнение отличается от уравнения (16.5) лишь правой частью. Записав его в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad (16.67)$$

и проинтегрировав последовательно два раза, найдем, что

$$u = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \quad (16.68)$$

Внеся это решение в выражения (16.4) для напряжений, получим

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (16.69)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (16.70)$$

где

$$A = \frac{E}{1-\mu} A_1, \quad \text{а} \quad B = - \frac{E}{1+\mu} B_1.$$

Постоянные A и B (а следовательно, A_1 и B_1) определяются из граничных условий. Чаще всего известны радиальные напряжения на наружном и внутреннем контурах диска. Тогда при $r = r_1$ $\sigma_r = \sigma_{r_1}$, а при $r = r_2$ $\sigma_r = \sigma_{r_2}$. В соответствии с выражением (16.69) эти условия дают два уравнения:

$$\sigma_{r_1} = A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2;$$

$$\sigma_{r_2} = A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2,$$

решая которые относительно A и B , найдем:

$$A = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (16.71)$$

$$B = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (16.72)$$

Если на наружном и внутреннем контурах диска напряжения отсутствуют, т. е. $\sigma_{r_2} = 0$ и $\sigma_{r_1} = 0$, то

$$A = \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (16.73)$$

$$B = - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (16.74)$$

Подставляя последние значения A и B в формулы (16.69) и (16.70), получаем

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (16.75)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[(3+\mu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu) r^2 \right]. \quad (16.76)$$

Полагая для краткости

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \quad \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2 = c; \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m, \quad (16.77)$$

формулы (16.75) и (16.76) можно написать так:

$$\sigma_r = c \left[1 + k^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right]; \quad (16.78)$$

$$\sigma_\theta = c \left[1 + k^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m\rho^2 \right]. \quad (16.79)$$

Напряжение σ_r положительно и, как нетрудно убедиться, достигает наибольшей величины при $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$. Тогда

$$(\sigma_r)_{\text{макс}} = c(1-k)^2. \quad (16.80)$$

Напряжение σ_θ при всех значениях ρ также положительно и достигает наибольшей величины у внутреннего края диска (при $\rho = k$):

$$(\sigma_\theta)_{\text{макс}} = c[2 + (1-m)k^2]. \quad (16.81)$$

Сравнивая формулы (16.80) и (16.81), убеждаемся, что $(\sigma_\theta)_{\text{макс}}$ всегда больше $(\sigma_r)_{\text{макс}}$. Поэтому при проверке прочности диска по энергетической теории формоизменения условие прочности должно быть записано в виде

$$\sigma_{\text{эквIV}} = (\sigma_\theta)_{\text{макс}} = c[2 + (1-m)k^2] \leq [\sigma]. \quad (16.82)$$

В случае хрупких материалов проверку следует проводить по теории Мора, которая при $\sigma_3 = \sigma_r = 0$ приводит к той же формуле (16.82).

Характер распределения напряжений σ_r и σ_θ вдоль радиуса диска с отверстием при $k = 0,2$ и $\mu = 0,3$ показан на рис. 457, б.

Формулы для напряжений в сплошном диске (без отверстия) можно получить из формул (16.69) и (16.70), если принять во внимание, что на оси диска (при $r = 0$) напряжения должны иметь конечные значения. Для выполнения этого условия постоянную B следует положить равной нулю, и тогда формулы примут следующий вид:

$$\sigma_r = A - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (16.83)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{1+3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2. \quad (16.84)$$

Постоянную A найдем из граничных условий на наружном контуре (при $r = r_2$). Если диск подвергается действию только инерционных сил собственной массы, вызванных его вращением, а внешняя нагрузка на наружном контуре отсутствует, т. е. $\sigma_{r_2} = 0$, то, согласно формуле (16.83),

$$A = \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \quad (16.85)$$

Подставляя это значение A в формулы (16.83) и (16.84), имеем

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2); \quad (16.86)$$

$$\sigma_\theta = c(1 - \mu\rho^2). \quad (16.87)$$

Оба напряжения положительны при всех значениях ρ и увеличиваются по мере приближения к оси диска. На оси диска, при $\rho = 0$

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = c = \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \quad (16.88)$$

По найденным напряжениям легко определить перемещения и деформации в диске.

Наибольший интерес представляет радиальное перемещение и равное ему увеличение радиуса. Согласно выражению (16.3),

$$u = \varepsilon_\theta r. \quad (16.89)$$

Так как

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r),$$

то

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \quad (16.90)$$

Для определения перемещения на наружном контуре и равного ему увеличения радиуса в формулу (16.90) нужно подставить $r = r_2$, $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_2}$ и $\sigma_r = \sigma_{r_2}$.

В случае неравномерного нагрева диска к напряжениям, вызванным центробежными силами его собственной массы и контурными нагрузками, прибавляются температурные напряжения.

Определим отдельно температурные напряжения. Ход решения этой задачи аналогичен ходу только что рассмотренной. Уравнение равновесия получим из уравнения (16.65), положив $\omega = 0$. Оно будет таким же, как в случае расчета толстостенного цилиндра [формула (16.1)]:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (16.91)$$

Относительные деформации с учетом температурного расширения определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T; \quad (16.92)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha T.$$

Решая совместно эти уравнения относительно напряжений, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1 + \mu)\alpha T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r - (1 + \mu)\alpha T]. \end{aligned} \quad (16.93)$$

Учитывая выражения (16.2) и (16.3), будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1+\mu) \alpha T \right].\end{aligned}\quad (16.94)$$

Обозначим $T^* = T_2 - T_1$ (см. рис. 457, а). При линейном изменении температуры вдоль радиуса диска $T = T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1}$ и последние выражения принимают вид

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1+\mu) \alpha T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right]; \quad (16.95)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1-\mu) \alpha T^* \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \right]. \quad (16.96)$$

Модуль упругости и коэффициент Пуассона полагаем постоянными, не зависящими от температуры и равными их значениям при средней температуре диска.

Подставляя формулы (16.95) и (16.96) в уравнение равновесия (16.91), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения перемещений в температурной задаче:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{r_2-r_1} \alpha T^*. \quad (16.97)$$

Записав уравнение в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1+\mu}{r_2-r_1} \alpha T^* \quad (16.98)$$

и проинтегрировав его последовательно дважды, получим решение для перемещения:

$$u = C_1 r + \frac{D_1}{r} + \frac{1+\mu}{3(r_2-r_1)} \alpha T^* r^3. \quad (16.99)$$

Подставив это решение в формулы (16.95) и (16.96) для напряжений, будем иметь

$$\sigma_r = C + \frac{D}{r^2} - \frac{T^*}{3(r_2-r_1)} \alpha E r; \quad (16.100)$$

$$\sigma_\theta = C - \frac{D}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{T^*}{r_2-r_1} \alpha E r, \quad (16.101)$$

где

$$C = \frac{E}{1-\mu} \left(C_1 + \frac{\alpha T^* r_1}{r_2-r_1} \right); \quad D = \frac{E}{1+\mu} D_1.$$

Постоянные C и D могут быть определены из граничных условий: при $r = r_1$ напряжение $\sigma_{r_1} = 0$ при $r = r_2$ напряжение $\sigma_{r_2} = 0$.

Если вращающийся диск нагревается неравномерно, то напряжения от центробежных сил и температурные напряжения следует суммировать. В случае линейного изменения температуры вдоль

радиуса, сложив правые части выражений (16.69) и (16.100), а также выражений (16.70) и (16.101), будем иметь

$$\sigma_r = K + \frac{L}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{T^*}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r; \quad (16.102)$$

$$\sigma_\theta = K - \frac{L}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{2}{3} \frac{T^*}{r_2 - r_1} \alpha E r, \quad (16.103)$$

где $K = A + C$, $L = B + D$ — новые постоянные, которые также определяются из граничных условий.

Пример 73. Найдем напряжения во вращающемся и неравномерно нагретом диске постоянной толщины с центральным отверстием. Наружный диаметр диска $d_2 = 500$ мм, диаметр отверстия $d_1 = 100$ мм, толщина диска $h = 10$ мм и число оборотов $n = 3000$ об/мин. На единицу длины наружного контура диска при этом числе оборотов действуют центробежные силы обода и лопаток $p_{r_2} = 100$ кгс/см, внутренний контур диска считать свободным. Температура у внутреннего контура $T_1 = 200^\circ\text{C}$, а у наружного $T_2 = 300^\circ\text{C}$ и изменяется вдоль радиуса по линейному закону. Материал диска — сталь с $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см²; $\mu = 0,3$; $\gamma = 7,85 \cdot 10^{-3}$ кгс/см³; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

Вычислим суммарные напряжения от центробежных сил и от неравномерного нагрева. Для этого воспользуемся формулами (16.102) и (16.103). Подсчитаем входящие в эти формулы величины:

$$\begin{aligned} \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 &= \frac{3,3}{8} \frac{0,00785}{981} \left(\frac{3,14 \cdot 3000}{30} \right)^2 = 0,325; \\ \frac{1 + 3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 &= \frac{1,9}{8} \frac{0,00785}{981} \left(\frac{3,14 \cdot 3000}{30} \right)^2 = 0,187; \\ \frac{T^*}{3(r_2 - r_1)} \alpha E &= \frac{100}{3(25 - 5)} 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 = 41,6; \\ \frac{2}{3} \frac{T^*}{r_2 - r_1} \alpha E &= \frac{2}{3} \frac{100}{25 - 5} 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^6 = 83,3. \end{aligned}$$

Подставив эти величины в формулы (16.102) и (16.103), получим

$$\sigma_r = K + \frac{L}{r^2} - 0,325r^2 - 41,6r;$$

$$\sigma_\theta = K - \frac{L}{r^2} - 0,187r^2 - 83,3r.$$

Постоянные K и L найдем из граничных условий:

при $r = r_1 = 5$ см

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} = 0;$$

при $r = r_2 = 25$ см

$$\sigma_r = \sigma_{r_2} = \frac{p_{r_2}}{h} = \frac{100}{1} \text{ кгс/см}^2 = 100 \text{ кгс/см}^2.$$

Эти условия дают следующих два уравнения:

$$100 = K + \frac{L}{25^2} - 0,325 \cdot 25^2 - 41,6 \cdot 25;$$

$$0 = K + \frac{L}{5^2} - 0,325 \cdot 5^2 - 41,6 \cdot 5,$$

или

$$625K + L = 839\,450;$$

$$25K + L = 5400.$$

Решив уравнения, найдем, что $K = 1390$, а $L = -29\,350$.

Уравнения для определения напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_r = 1390 - \frac{29\,350}{r^2} -$$

$$- 0,325r^2 - 41,6r;$$

$$\sigma_\theta = 1390 + \frac{29\,350}{r^2} -$$

$$- 0,187r^2 - 83,3r.$$

Вычислим напряжение σ_r при среднем значении радиуса

$$r_{\text{ср}} =$$

$$= \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{5 + 25}{2} \text{ см} = 15 \text{ см}.$$

Получим

$$(\sigma_r)_{r=15} = \left(1390 - \frac{29\,350}{15^2} - 0,325 \cdot 15^2 - 41,6 \cdot 15 \right) \text{ кгс/см}^2 = 560 \text{ кгс/см}^2.$$

Напряжения σ_θ вычислим при $r = r_1 = 5$ см, $r = r_{\text{ср}} = 15$ см и $r = r_2 = 25$ см:

$$(\sigma_\theta)_{r=5} = \left(1390 + \frac{29\,350}{5^2} - 0,187 \cdot 5^2 - 83,3 \cdot 5 \right) \text{ кгс/см}^2 = 2140 \text{ кгс/см}^2;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=15} = \left(1390 + \frac{29\,350}{15^2} - 0,187 \cdot 15^2 - 83,3 \cdot 15 \right) \text{ кгс/см}^2 = 230 \text{ кгс/см}^2;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=25} = \left(1390 + \frac{29\,350}{25^2} - 0,187 \cdot 25^2 - 83,3 \cdot 25 \right) \text{ кгс/см}^2 = -800 \text{ кгс/см}^2.$$

Эпюры напряжений показаны на рис. 459.

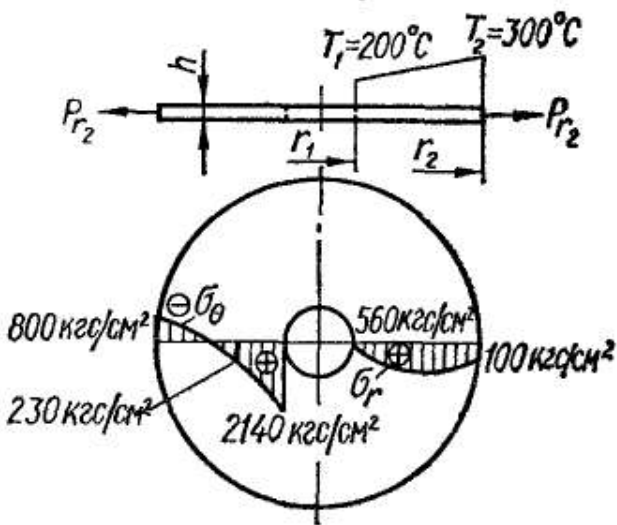


Рис. 459

Глава 17

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

§ 107. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях техники широко применяются такие детали и элементы конструкций, которые с точки зрения расчета их на прочность и жесткость могут быть отнесены к тонким оболочкам. Это цистерны, водонапорные резервуары, воздушные и газовые баллоны, купола зданий, герметические перегородки в самолетах и подводных лодках, аппараты химического машиностроения, части корпусов турбин и реактивных двигателей и т. д.

Рассмотрим элемент оболочки (рис. 460). В общем случае в сечениях, которыми выделен элемент, действуют погонные (отнесенные к единице длины сечения) усилия (рис. 460, а) и моменты (рис. 460, б): нормальные усилия N_1 и N_2 ; касательные (сдвигающие) усилия S_1 и S_2 ; поперечные силы Q_1 и Q_2 ; изгибающие моменты M_1 и M_2 ; крутящие моменты $M_{1кр}$ и $M_{2кр}$. Исходные дифференциальные уравнения для расчета оболочек, полученные с учетом всех этих усилий и моментов, оказываются настолько сложными, что интегрирование их даже для простейших задач связано с большими математическими затруднениями.

Во многих же частных случаях исходные дифференциальные уравнения и решения задачи существенно упрощаются. Этого мож-

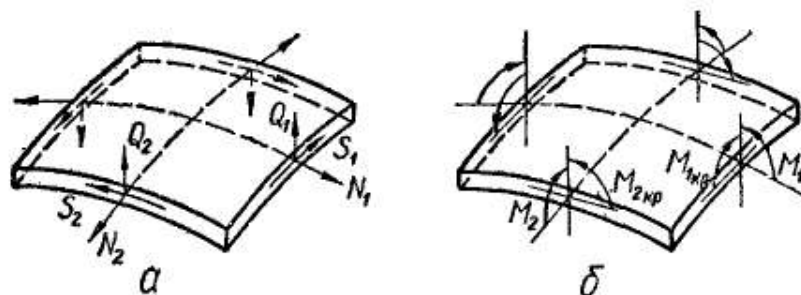


Рис. 460

но достичь, во-первых, учитывая характер самой задачи. Если оболочка представляет собой тело вращения и нагрузка симметрична относительно оси оболочки, то задача называется *осесимметричной* и в этом случае во всех сечениях, образованных плоскостями, проходящими через ось симметрии, и в ортогональных к ним сечениях

$$M_{1кр} = M_{2кр} = S_1 = S_2 = 0; \quad Q_1 = 0 \text{ (или } Q_2 = 0). \quad (17.1)$$

Во-вторых, если вид оболочки, характер нагрузки и закреплений по тем или иным соображениям позволяет прийти к выводу, что какие-либо усилия или моменты всюду малы по сравнению с остальными усилиями и моментами, то принимают допущение, что эти усилия и моменты равны нулю. Например, часто полагают, что

$$M_1 = M_2 = M_{1кр} = M_{2кр} = 0; \quad Q_1 = Q_2 = 0, \quad (17.2)$$

и в результате приходят к так называемой *безмоментной теории оболочек*.

Еще более упрощаются уравнения и их решения, если сочетаются оба указанных обстоятельства — рассматривается *осесимметричная задача в безмоментной теории оболочек*. Тогда выполняются все равенства (17.1) и (17.2).

§ 108. НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим резервуар (рис. 461), представляющий собой осесимметричную оболочку. В ней меридиональные сечения срединной поверхности образуют плавные кривые, не имеющие изломов. Толщина h оболочки предполагается малой по сравнению с радиусами кри-

визны. Свободный край резервуара закреплен так, что на него могут действовать только усилия, касательные к меридиональным кривым. Тогда можно считать, что оболочка находится в безмоментном напряженном состоянии, для которого справедливы равенства (17.2).

Пусть резервуар заполнен (частично или полностью) газом, жидкостью или сыпучим веществом. Давление p кгс/см² в этом случае может меняться по высоте (т. е. вдоль оси резервуара), но, очевидно, будет одинаковым во всех точках плоскости, перпендикулярной к оси резервуара. Тогда оболочка будет находиться не только в безмоментном, но и в осесимметричном напряженном состоянии.

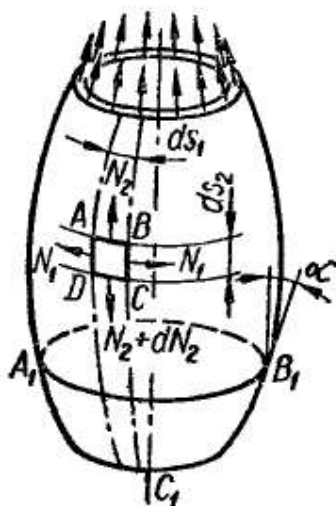


Рис. 461

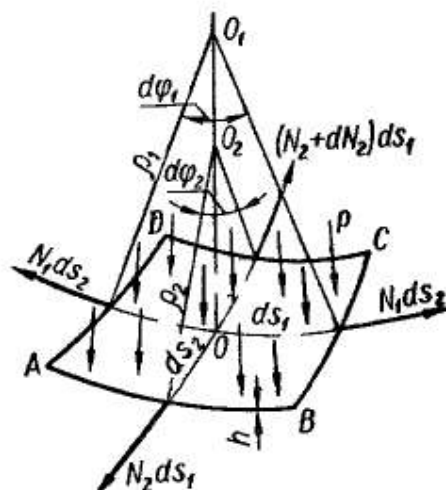


Рис. 462

Выделим прямоугольный криволинейный элемент $ABCD$ оболочки (рис. 461), проведя два близких осевых сечения и два ортогональных к ним и к поверхности оболочки сечения (последние сечения представляют собой две конические поверхности с вершинами на оси резервуара). Длины граней элемента обозначим через ds_1 и ds_2 .

Согласно равенствам (17.1) и (17.2), в гранях элемента действуют только нормальные погонные усилия N_1 и N_2 и соответствующие им напряжения σ_1 и σ_2 (растягивающие в случае внутреннего давления и сжимающие — в случае внешнего). Следовательно, грани элемента — главные площадки.

В гранях AB и CD усилия N_2 могут отличаться на величину dN_2 ; усилия же N_1 в гранях BC и AD в силу осевой симметрии одинаковы. Поскольку N_1 — это усилие, приходящееся на единицу длины, то на все сечение BC приходится полное усилие $N_1 ds_2$. Это же относится и к другим граням элемента.

Элемент $ABCD$ срединной поверхности оболочки вместе с приложенными к нему усилиями и давлением изображен на рис. 462. Точка O — центр элемента, точки O_1 и O_2 — центры главных кривизн срединной поверхности, OO_1 — нормаль к поверхности элемента. Главные радиусы кривизны срединной поверхности обозначены через ρ_1 и ρ_2 , причем ρ_1 — радиус широтной кривизны, а ρ_2 — радиус меридиональной кривизны. Очевидно

$$ds_1 = \rho_1 d\varphi_1; \quad ds_2 = \rho_2 d\varphi_2. \quad (17.3)$$

Запишем условие равновесия элемента, приравняв к нулю сумму проекций всех сил на нормаль к элементу. Рассматривая рис. 462 и 463, получаем

$$2N_1 ds_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Слагаемое $dN_2 ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2}$ имеет более высокий порядок малости, и им можно пренебречь. Далее, учитывая малость углов $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ и соотношения (17.3), находим, что

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} = \frac{d\varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{ds_1}{\rho_1}; \quad \sin \frac{d\varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{ds_2}{\rho_2}.$$

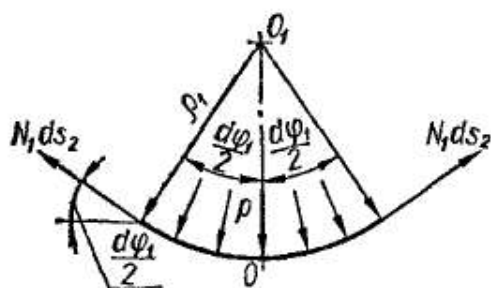


Рис. 463

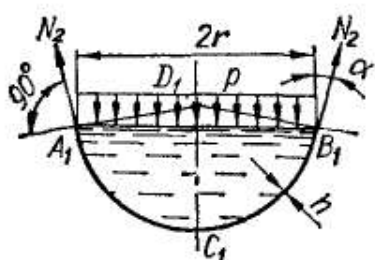


Рис. 464

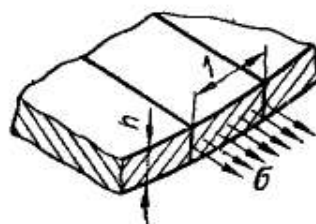


Рис. 465

Подставив эти выражения в уравнение равновесия и разделив его на $ds_1 ds_2$, получим

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (17.4)$$

Выражение (17.4) устанавливает зависимость между двумя усилиями — N_1 и N_2 . Поскольку, однако, неизвестных усилий два, то для определения их одного уравнения недостаточно. Дополнительных уравнений равновесия для элемента составить больше нельзя. Поэтому запишем уравнение равновесия (сумму проекций на ось оболочки) произвольной конечной части $A_1 C_1 B_1$ оболочки (рис. 461 и 464). Эта часть отсекается конической поверхностью $A_1 D_1 B_1$, нормальной к срединной поверхности оболочки, по контуру $A_1 B_1$.

По контуру сечения $A_1 B_1$ (по окружности радиуса r) действуют погонные усилия N_2 . На единице длины контура получается вертикальная проекция $N_2 \cos \alpha$, где α — угол наклона меридиональной кривой к оси резервуара. Поэтому результирующее вертикальное усилие от действия N_2 направлено вверх и равно

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r.$$

Вертикально вниз действуют сила давления $p\pi r^2$, вес $Q_{ж}$ жидкости (или сыпучего вещества), заключенной в объеме $A_1 C_1 B_1$, и вес Q_p части резервуара $A_1 C_1 B_1$. Тогда из условия равновесия

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - Q_{ж} - Q_p = 0$$

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (17.5)$$

Уравнения (17.4) и (17.5) дают возможность найти все усилия в осесимметричной безмоментной оболочке. В сопротивлении материалов принято эти уравнения записывать в напряжениях.

Приняв предположение о том, что изгибающие и крутящие моменты в оболочке отсутствуют, допускаем тем самым, что по толщине ее напряжения распределяются равномерно (как при простом растяжении — сжатии). Поэтому (рис. 465)

$$N = \sigma \cdot h \cdot 1 = \sigma h. \quad (17.6)$$

Кроме того, в сопротивлении материалов для меридиональных напряжений и радиусов кривизны приняты обозначения σ_m и ρ_m , а не σ_2 и ρ_2 ; для широтных величин — σ_t и ρ_t вместо σ_1 и ρ_1 . В соответствии с этим

$$N_1 = \sigma_t h; \quad N_2 = \sigma_m h. \quad (17.7)$$

Подставив эти выражения в уравнения (17.4) и (17.5) и учтя замечания в отношении индексов, получим

$$\boxed{\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}} \quad (17.8)$$

и

$$\boxed{\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_{ж} + Q_p}{2\pi r h \cos \alpha}} \quad (17.9)$$

Формула (17.8) носит название *формулы Лапласа*; формула (17.9) иногда именуется *уравнением равновесия зоны* или просто *уравнением зоны*. Напряжение σ_m называется *меридиональным нормальным напряжением*, σ_t — *окружным (широтным, кольцевым) нормальным напряжением*.

Поскольку оболочка тонкая, то вместо радиусов ρ_t , ρ_m и r средней поверхности оболочки в формулы (17.8) и (17.9) можно подставлять соответствующие радиусы наружной или внутренней поверхностей.

Следует обратить еще внимание и на то, что в задаче о расчете резервуара удалось получить формулы для напряжений, не рассматривая геометрической и физической сторон задачи, т. е. задача оказалась статически определимой. Это — результат того, что мы сразу постулировали закон изменения напряжений по толщине оболочки — считали их постоянными.

Как уже отмечалось, напряжения σ_m и σ_t являются главными напряжениями. Что касается третьего главного напряжения, направление которого нормально к поверхности оболочки, то на одной из поверхностей резервуара (наружной или внутренней — в зависимости от того, с какой стороны действует давление на резервуар) оно равно p , а на противоположной — нулю. В тонкостенных оболочках всегда σ_m и σ_t значительно больше p и, значит, величиной третьего главного напряжения по сравнению с σ_m и σ_t можно пренебречь, т. е. считать его равным нулю.

Таким образом, будем полагать, что материал оболочки находится в плоском напряженном состоянии. Тогда для расчета на прочность в зависимости от состояния материала следует пользоваться соответствующей теорией прочности. Например, применив IV теорию прочности, условие прочности запишем так:

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2} = \sigma_m \sigma_t \leq [\sigma]. \quad (17.10)$$

Рассмотрим примеры расчета безмоментных оболочек.

Сферический баллон заполнен газом, давление которого равно p (рис. 466).

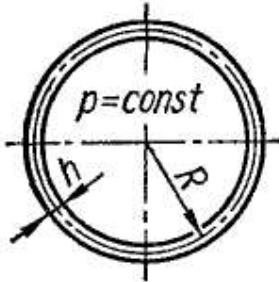


Рис. 466

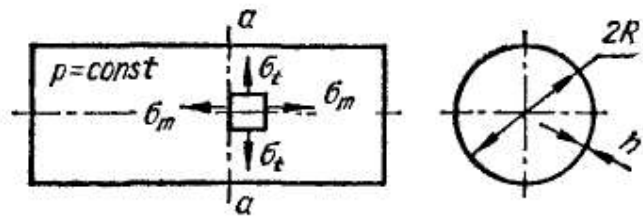


Рис. 467

В этом случае вследствие центральной симметрии

$$\rho_m = \rho_t = R;$$

$$\sigma_m = \sigma_t = \sigma.$$

Поэтому на основании формулы (17.8)

$$2 \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}, \text{ или } \sigma = \frac{pR}{2h}.$$

Таким образом, главные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \quad (17.11)$$

Условия прочности по первой, третьей и четвертой теориям прочности приводятся к виду

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{pR}{2h} \leq [\sigma]. \quad (17.12)$$

Цилиндрический баллон заполнен газом, давление которого равно p (рис. 467).

Здесь

$$\rho_t = R; \quad \rho_m = \infty.$$

Тогда из формулы (17.8)

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h},$$

т. е.

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (17.13)$$

Чтобы найти σ_m , проведем сечение $a - a$ и рассмотрим равновесие любой из частей цилиндра. В результате, пользуясь формулой (17.9) и полагая в ней $Q_{ж} = Q_p = 0$ и $\alpha = 0$, получим

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (17.14)$$

Следовательно, кольцевые напряжения σ_t вдвое больше меридиональных σ_m . Поэтому, например, у клепаного резервуара продольный шов должен быть в два раза прочнее поперечного.

Заметим, что полученные результаты верны только для центральной части цилиндра, так как те его части, которые примыкают к

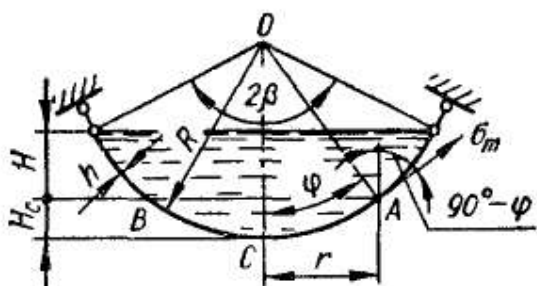


Рис. 468

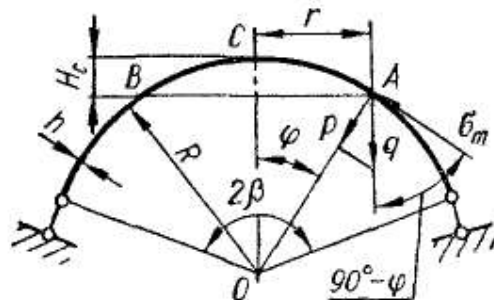


Рис. 469

днищам, не могут быть рассчитаны по безмоментной теории (подробнее об этом сказано ниже).

Резервуар в виде шарового сегмента (рис. 468) наполнен жидкостью (или сыпучим веществом) с плотностью γ .

Вводим полярный угол φ , определяющий положение произвольной точки A . Тогда

$$\alpha = 90^\circ - \varphi; \quad \rho_t = \rho_m = R; \quad r = R \sin \varphi; \quad H = R (\cos \varphi - \cos \beta);$$

$$p = \gamma H = \gamma R (\cos \varphi - \cos \beta).$$

Из уравнения Лапласа следует, что

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = \frac{\gamma R^2}{h} (\cos \varphi - \cos \beta).$$

Теперь воспользуемся уравнением (17.9). Величина $Q_{ж}$ равна весу жидкости в объеме шарового сегмента ACB :

$$Q_{ж} = \gamma V_{ACB} = \gamma \frac{1}{3} \pi H_c^2 (3R - H_c).$$

Высота шарового сегмента

$$H_c = R (1 - \cos \varphi).$$

Поэтому

$$Q_{ж} = \frac{\pi \gamma}{3} R^3 (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi).$$

Подставляя в уравнение (17.9) выражения для p , r , $Q_{ж}$, α и пренебрегая весом резервуара Q_p , получаем

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right] \quad (17.15)$$

И

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (17.16)$$

Максимальная величина напряжений получается в точке C , где $\varphi = 0$:

$$\sigma_{t\text{макс}} = \sigma_{t\text{макс}} = \frac{\gamma R^2 (1 - \cos \beta)}{2h}. \quad (17.17)$$

На краю оболочки ($\varphi = \beta$)

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h} \frac{2 - \cos \beta - \cos^2 \beta}{1 + \cos \beta}, \quad (17.18)$$

причем кольцевые напряжения становятся сжимающими.

Купол в виде шарового сегмента радиусом R и толщиной стенки h (рис. 469) изготовлен из материала плотности γ .

Вес материала, соответствующего единице площади поверхности купола, $q = \gamma h$. Его составляющая, нормальная к поверхности,

$$q_n = q \cos \varphi = \gamma h \cos \varphi$$

играет роль давления, приложенного к поверхности. Внутри же купола давление равно нулю, так что в уравнении Лапласа следует полагать $p = -q_n$, а в уравнении зоны $p = 0$.

Учитывая, что $\rho_t = \rho_m = R$, из уравнения Лапласа находим

$$\sigma_m + \sigma_t = -\frac{pR}{h} = -\gamma R \cos \varphi. \quad (17.19)$$

Чтобы получить дополнительное уравнение, вычислим вес части ACB резервуара:

$$Q_p = qS_{ACB} = \gamma h S_{ACB},$$

где площадь боковой поверхности шарового сегмента ACB

$$S_{ACB} = 2\pi R H_C = 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi).$$

Значит,

$$Q_p = 2\pi \gamma h R^2 (1 - \cos \varphi).$$

Подставив теперь в формулу (17.9) выражение для Q_p и

$$r = R \sin \varphi; \quad \alpha = 90^\circ - \varphi; \quad p = 0,$$

а также учтя (знаком «минус»), что в сечении AB вес части ACB вызывает сжатие, получим

$$\sigma_m = -\frac{\gamma R}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.20)$$

Тогда из уравнения (17.19)

$$\sigma_t = \gamma R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (17.21)$$

Меридиональные напряжения всюду сжимающие и возрастают по мере удаления от вершины купола к краю. Кольцевые напряжения

в верхней части купола отрицательны (сжимающие); при $\varphi = 51^\circ 50'$ они обращаются в нуль, а при $\varphi > 51^\circ 50'$ становятся растягивающими. Полученные результаты верны, если опорное устройство купола такое, что в нем могут возникать только реакции, направленные по касательной к меридиональной кривой.

§ 109. РАСПОРНЫЕ КОЛЬЦА В ОБОЛОЧКАХ

До сих пор мы рассматривали оболочки, меридиональные сечения которых представляли собой плавные кривые с непрерывно изменяющейся кривизной. Расчет такой оболочки по безмоментной теории (если толщина оболочки мала) дает вполне приемлемые для практики результаты.

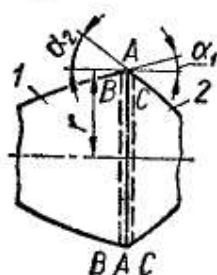


Рис. 470

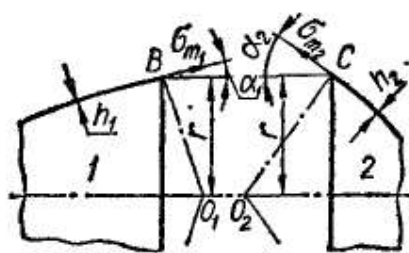


Рис. 471

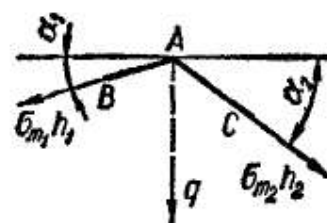


Рис. 472

Теперь исследуем влияние переломов меридиональной кривой на напряженное состояние оболочки. Пусть в некотором сечении $A - A$ (рис. 470) оболочка имеет перелом, так что касательные к меридиональной кривой слева и справа от точки A образуют между собой угол не 180° , а $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Рассмотрим меридиональные напряжения σ_{m_1} и σ_{m_2} (рис. 471) в сечениях $B - B$ и $C - C$, бесконечно близких к $A - A$ (эти сечения образованы коническими поверхностями O_1BB и O_2CC , нормальными к срединной поверхности оболочки). Погонные усилия в этих сечениях равны $\sigma_{m_1}h_1$ и $\sigma_{m_2}h_2$ (рис. 472), где h_1 и h_2 — толщины частей 1 и 2 оболочки.

Из условия равновесия кольца $BBCC$ следует, что

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos \alpha_1 2\pi r = \sigma_{m_2}h_2 \cos \alpha_2 2\pi r,$$

т. е.

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos \alpha_1 = \sigma_{m_2}h_2 \cos \alpha_2. \quad (17.22)$$

Таким образом, проекции усилий $\sigma_{m_1}h_1$ и $\sigma_{m_2}h_2$ на ось оболочки взаимно уравновешиваются. Иная картина будет с проекциями этих усилий на плоскость $A - A$ (рис. 472). Складываясь, они дадут погонное радиальное усилие

$$q = \sigma_{m_1}h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m_2}h_2 \sin \alpha_2. \quad (17.23)$$

Усилие q можно рассматривать как местную нагрузку, сжимающую оболочку. Эта нагрузка может вызвать в оболочке значительные изгибные напряжения. Чтобы уменьшить изгиб, в резервуарах часто устанавливают кольца жесткости, или распорные кольца (рис. 473), которые и принимают на себя радиальные усилия q .

Распорное кольцо нагружено по схеме, показанной на рис. 474. В нем возникают только сжимающие напряжения, и условие прочности для кольца имеет вид

$$\frac{qR_k}{F_k} \leq [\sigma], \quad (17.24)$$

где R_k — радиус оси кольца; F_k — площадь поперечного сечения кольца, а q определяется по формуле (17.23).

Иногда вместо распорного кольца создают местное утолщение оболочки (рис. 475), загибая края днища резервуара внутрь обечайки.

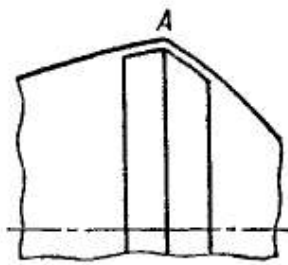


Рис. 473

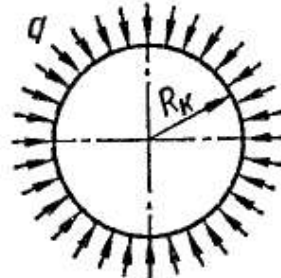


Рис. 474

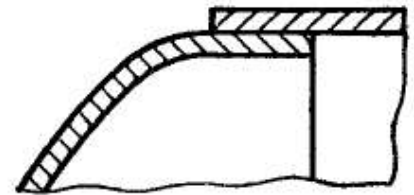


Рис. 475

Если оболочка испытывает внешнее давление, то меридиональные напряжения будут отрицательными (сжимающими) и, согласно формуле (17.24), радиальное усилие q получится также отрицательным, т. е. направленным наружу. Тогда кольцо жесткости будет работать не на сжатие, а на растяжение. При этом, очевидно, условие прочности (17.24) останется тем же.

Заметим, что распорное кольцо не уничтожает совсем, а лишь уменьшает изгибные напряжения. При наличии кольца причиной

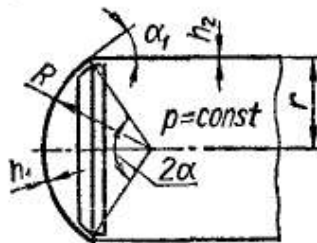


Рис. 476

появления изгиба в оболочке является различие радиальных перемещений в сечении по кольцу и в соседних с кольцом поперечных сечениях оболочки (от сжатия диаметр кольца и прикрепленной к нему оболочки должен уменьшаться, а в соседних с кольцом сечениях от действия растягивающих широтных напряжений диаметр оболочки должен увеличиваться).

Рассмотрим цилиндрический резервуар со сферическими днищами (рис. 476), наполненный газом, давление которого равно p кгс/см². Требуется определить толщины стенок и площадь сечения кольца, считая допускаемые напряжения известными.

Толщину h_1 стенки днища находим из формулы (17.12):

$$h_1 \geq \frac{pR}{2[\sigma]}.$$

Принимая четвертую теорию прочности и пользуясь формулами (17.10), (17.13) и (17.14), записываем условие прочности для обечайки:

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{p^2 r^2}{4h_2^2} + \frac{p^2 r^2}{h_2^2} - \frac{p^2 r^2}{2h_2^2}} \leq [\sigma],$$

откуда

$$h_2 \geq \frac{pr\sqrt{3}}{2[\sigma]}.$$

Тогда меридиональное напряжение в днище

$$\sigma_{m_1} = \frac{pR}{2h_1},$$

а в обечайке

$$\sigma_{m_2} = \frac{pr}{2h_2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (17.23) и учитывая, что в данном случае $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$, $\alpha_2 = 0$, находим погонное радиальное усилие, приложенное к распорному кольцу:

$$q = \frac{pR}{2} \cos \alpha.$$

Наконец, считая, что радиус кольца $R_k \approx r$, из формулы (17.24) определяем необходимую площадь поперечного сечения кольца:

$$F_k = \frac{qR_k}{[\sigma]} = \frac{pRr \cos \alpha}{2[\sigma]}.$$

§ 110. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим одну из простейших задач моментной теории оболочек: по краю тонкой полубесконечной цилиндрической оболочки (рис. 477) равномерно распределены погонные поперечные силы Q_0 и изгибающие моменты M_0 ; кроме того, на оболочку действует постоянное внутреннее давление p ; требуется найти перемещения точек оболочки и напряжения в ней.

Эта задача имеет некоторое самостоятельное значение, и, кроме того, полученные в ней результаты в следующем параграфе будут использованы для нахождения местных изгибных напряжений.

Выделим из оболочки полубесконечную полоску единичной ширины (рис. 477 и 478, а), которой соответствует малый центральный угол

$$\varphi = \frac{1}{R}. \quad (17.25)$$

В концевом сечении на полоску действуют усилие Q_0 и момент M_0 , по поверхности — давление p , по продольным краям — погонные широтные усилия N_1 , переменные вдоль края.

Введем оси координат ω и x : ось ω направим от оси оболочки по радиусу, ось x — по образующей (рис. 478, а). Распределенную по поверхности и по продольным краям нагрузку можно привести к погонной нагрузке $q(x)$, действующей в плоскости ωx параллельно оси ω .

Выделив в окрестности произвольной точки A (рис. 478, а) элемент полоски, длина которого равна единице, и считая, что $q(x) > 0$,

если нагрузка действует от оси оболочки наружу, получим

$$q(x) = -q_1(x) + q_2.$$

Учитывая малость угла φ и формулу (17.25), будем иметь

$$q_1(x) = 2N_1 \cdot l \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = N_1 \varphi = \frac{N_1}{R};$$

$$q_2 = p \cdot l \cdot l = p;$$

итак,

$$q(x) = p - \frac{N_1}{R}. \quad (17.26)$$

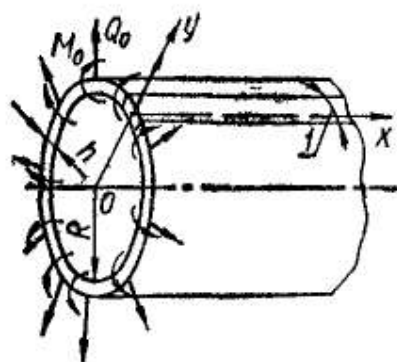


Рис. 477

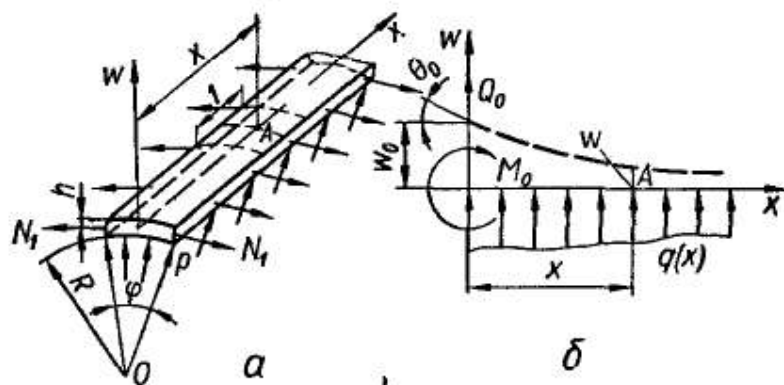


Рис. 478

Распределенная нагрузка $q(x)$, а также Q_0 и M_0 вызывают плоский изгиб полоски в плоскости wx . Эту полоску можно назвать балкой-полоской и в дальнейшем обращаться с ней как с полубесконечной балкой (рис. 478, а) прямоугольного сечения $l \times h$.

Рассматривая изгиб балки-полоски, необходимо учесть, что прогибаясь, она взаимодействует с соседними полосками. Одна сторона этого взаимодействия учитывается слагаемым $-\frac{N_1}{R}$ в выражении (17.26) для погонной нагрузки $q(x)$. Но оказывается еще, что в результате этого балка-полоска становится более жесткой на изгиб в плоскости по сравнению с обычной балкой. Выясним, почему это происходит и каким образом должно быть учтено.

При изгибе обычной балки форма ее поперечных сечений изменяется, так как размеры их по ширине, т. е. в направлении, параллельном оси z , в сжатой части балки увеличиваются, а в растянутой — уменьшаются (штриховые линии на рис. 479, б). Не изменяется только ширина нейтрального слоя. В балке-полоске из-за взаимодействия ее с соседними полосками такого изменения поперечного сечения произойти не может. Это взаимодействие приводит к возникновению напряжений σ_z , препятствующих изменению размеров в направлении, параллельном оси z , вследствие чего $\epsilon_z = 0$. Таким образом, в балке-полоске, в отличие от обычной балки, кроме напряжений σ_x в поперечном сечении (рис. 479, а), будут еще и напряжения σ_z в продольных сечениях, перпендикулярных к нейтральному слою (рис. 479, б). Наличием напряжений σ_z и объясняется увеличение жесткости на изгиб балки-полоски.

Каждый бесконечно тонкий слой материала балки, параллельный нейтральному, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 479, в). Это обстоятельство и необходимо учесть при выводе дифференциального уравнения упругой линии балки-полоски.

Дифференциальное уравнение изгиба для балки-полоски можно получить таким же способом, как и для обычной балки (см. § 66).

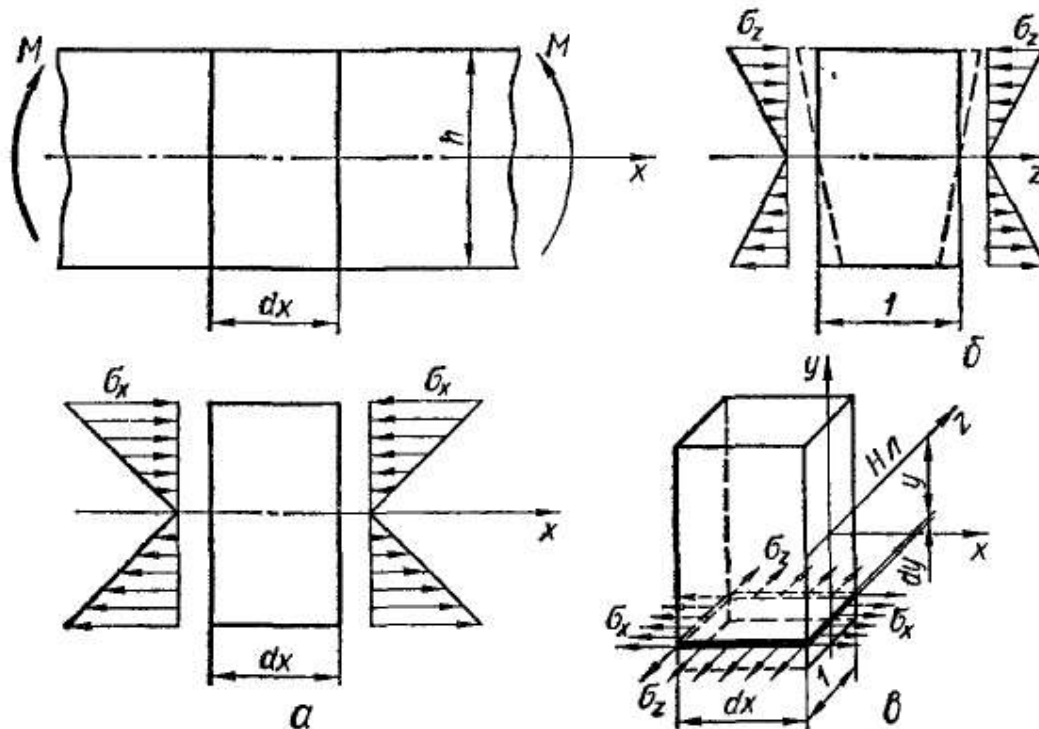


Рис. 479

При этом статическая и геометрическая стороны задачи выражаются теми же зависимостями (10.3) и (10.6), что и в случае обычной балки, а именно:

а) статическое уравнение —

$$\int_F \sigma_x y dF = M(x); \quad (17.27)$$

б) геометрическая зависимость —

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho}, \text{ или } \epsilon_x = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} y. \quad (17.28)$$

Физическая сторона задачи (связь между напряжением σ_x в поперечном сечении и относительной деформацией ϵ_x) для балки-полоски выражается на основании формул обобщенного закона Гука с учетом того, что $\epsilon_z = 0$:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E};$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = 0, \text{ или } \sigma_z = \mu \sigma_x.$$

Из этих формул находим нужную нам зависимость

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \epsilon_x. \quad (17.29)$$

Подставив выражения (17.28) и (17.29) в уравнение (17.27), получим

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \int_F dF y^2 = M(x).$$

Для балки-полоски с размерами сечения $1 \times h$ элемент площади $dF = 1 dy$. Тогда

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = M(x),$$

или после вычисления интеграла —

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^3}{12} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x).$$

Величина

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{EJ}{1-\mu^2} = D \quad (17.30)$$

называется *цилиндрической жесткостью*. Она больше обычной жесткости поперечного сечения балки EJ .

Дифференциальное уравнение изгиба с введением общепринятого обозначения цилиндрической жесткости через D записывается так:

$$D \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x).$$

Дважды дифференцируя по x обе части этого уравнения и учитывая, что $\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$, получаем уравнение в следующем виде:

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x). \quad (17.31)$$

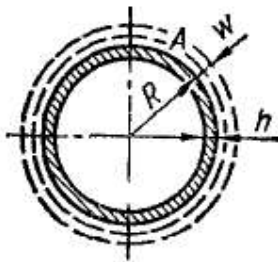


Рис. 480

Таким образом, для балки-полоски дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p - \frac{N_1}{R}. \quad (17.32)$$

Теперь выразим кольцевое усилие N_1 оболочки через прогиб балки $w(x)$ (рис. 478, б). Одновременно $w(x)$ является и радиальным перемещением точек оболочки (рис. 480) вследствие действия Q_0 , M_0 и p . Это перемещение вызывает в широтном направлении относительное удлинение

$$\epsilon_t = \frac{2\pi[R + w(x)] - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{w(x)}{R}. \quad (17.33)$$

Считая, что меридиональных напряжений растяжения в оболочке нет, получим кольцевое напряжение

$$\sigma_t = E\epsilon_t = \frac{E}{R} w(x) \quad (17.34)$$

и, наконец, кольцевое усилие

$$N_1 = \sigma_t \cdot h \cdot 1 = \frac{Eh}{R} w(x). \quad (17.35)$$

Внеся это выражение в уравнение (17.32), получим

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w(x) = p. \quad (17.36)$$

Уравнение (17.36) идентично уравнению (11.12) (см. § 73), описывающему изгиб балки на упругом основании, если принять

$$\alpha = \frac{Eh}{R^2}. \quad (17.37)$$

Поэтому преобразуем уравнение (17.36) так, как это делалось в § 73.

Разделив уравнение (17.36) на D , учтя выражение (17.30) и введя обозначение

$$a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}, \quad (17.38)$$

получим

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4a^4 w(x) = \frac{p}{D}. \quad (17.39)$$

Очевидно величина a измеряется в см^{-1} , поэтому переменная

$$\xi = ax \quad (17.40)$$

будет безразмерной. Примем ее за новую независимую переменную.

Поскольку

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = a^4 \frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4},$$

то уравнение (17.39) окончательно запишется в виде

$$\frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} + 4w(\xi) = \frac{4pR^2}{Eh}. \quad (17.41)$$

Легко проверить, что частным решением этого уравнения будет

$$w_{\text{част}} = \frac{pR^2}{Eh}. \quad (17.42)$$

Однородное же уравнение, соответствующее уравнению (17.41), в точности совпадает с уравнением (11.16), и его общий интеграл записывается в виде (11.17). Поэтому общий интеграл уравнения (17.41) будет иметь вид

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi} (A \cos \xi + B \sin \xi) + e^{\xi} (C \cos \xi + D_1 \sin \xi). \quad (17.43)$$

Здесь четвертая постоянная обозначена D_1 , а не D , чтобы не путать ее с цилиндрической жесткостью.

С физической точки зрения очевидно, что в сечениях, бесконечно удаленных от рассматриваемого края оболочки, влияние Q_0 и M_0

должно исчезать и $w(\infty)$ должно быть конечной величиной. Этому противоречит последнее слагаемое в выражении (17.43), которое из-за множителя e^{ξ} неограниченно возрастает на бесконечности. Поэтому следует положить

$$C = D_1 = 0.$$

Тогда

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi} (A \cos \xi + B \sin \xi). \quad (17.44)$$

Воспользовавшись известными дифференциальными зависимостями для балок (где жесткость EJ заменена цилиндрической жесткостью D):

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{d\omega}{dx} = a \frac{d\omega}{d\xi}; \\ M &= D \frac{d^2\omega}{dx^2} = Da^2 \frac{d^2\omega}{d\xi^2}; \\ Q &= D \frac{d^3\omega}{dx^3} = Da^3 \frac{d^3\omega}{d\xi^3}, \end{aligned}$$

из формулы (17.44) получим следующие выражения для углов наклона упругой линии, изгибающих моментов и поперечных сил:

$$\begin{aligned} \Theta &= ae^{-\xi} [A (\cos \xi + \sin \xi) + B (\cos \xi - \sin \xi)]; \\ M &= Da^2 e^{-\xi} (2A \sin \xi - 2B \cos \xi); \\ Q &= Da^3 e^{-\xi} [2A (\cos \xi - \sin \xi) + 2B (\cos \xi + \sin \xi)]. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Выразим теперь постоянные A и B через Q_0 и M_0 . Поскольку (см. рис. 478, б)

$$M_0 = M|_{\xi=0}; \quad Q_0 = Q|_{\xi=0},$$

то, положив в последних двух формулах (17.45) $\xi = 0$, получим, что

$$-2BDa^2 = M_0;$$

$$Da^3 (2A + 2B) = Q_0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2a^3D} (Q_0 + aM_0); \quad B = -\frac{1}{2a^2D} M_0.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в выражения (17.44) и (17.45), найдем окончательно:

$$w = \frac{pR^2}{Eh} + \frac{1}{2a^3D} e^{-\xi} [Q_0 \cos \xi + aM_0 (\cos \xi - \sin \xi)];$$

$$\Theta = \frac{1}{2a^2D} e^{-\xi} [Q_0 (\cos \xi + \sin \xi) + 2aM_0 \cos \xi];$$

$$M = \frac{1}{a} e^{-\xi} [Q_0 \sin \xi + aM_0 (\cos \xi + \sin \xi)]; \quad (17.46)$$

$$Q = e^{-\xi} [Q_0 (\cos \xi - \sin \xi) - 2aM_0 \sin \xi],$$

причем a дается формулой (17.38), а ξ — формулой (17.40).

Полученные формулы представляют решение поставленной задачи, так как дают возможность вычислить в любом поперечном сечении оболочки радиальное перемещение w , угол наклона Θ деформированной образующей к оси оболочки, погонный изгибающий момент M и погонную поперечную силу Q . Положительные направления этих величин совпадают с положительными направлениями w_0 , Θ_0 , M_0 и Q_0 (на рис. 478, б $w_0 > 0$, $M_0 > 0$, $Q_0 > 0$, а $\Theta_0 < 0$).

Исследовав изгибные напряжения в балке-полоске, выделенной в тонкостенной цилиндрической оболочке, мы получили решение и для всей оболочки. Напряжения σ_x в балке-полоске являются изгибными напряжениями σ_m в меридиональном направлении оболочки (в поперечных ее сечениях), а напряжения σ_z — изгибными напряжениями σ_t в широтном направлении (в продольных сечениях). Эпюры σ_m и σ_t показаны на рис. 481. Напряжениям σ_m соответствует изгибающий момент M , а напряжениям σ_t — момент M_1 .

Ранее было показано, что $\sigma_t = \mu \sigma_m$. Тогда, очевидно,

$$M_1 = \mu M. \quad (17.47)$$

В продольных сечениях оболочка также подвергается растяжению или сжатию (в зависимости от того, изнутри или извне действует давление).

Максимальные напряжения определяют по формулам

$$\sigma_{t\max} = \frac{M}{W}; \quad \sigma_{l\max} = \pm \frac{M_1}{W} + \frac{N_1}{F},$$

где

$$W = \frac{1 \cdot h^2}{6}; \quad F = 1 \cdot h,$$

так что

$$\sigma_{t\max} = \frac{6M}{h^2}; \quad \sigma_{l\max} = \pm \frac{6M_1}{h^2} + \frac{N_1}{h}. \quad (17.48)$$

Входящие сюда величины M_1 и N_1 можно найти по формулам (17.47) и (17.35) после того, как по формулам (17.46) вычислены w и M . Имея же максимальные напряжения и выбрав ту или иную теорию прочности, можно провести расчет на прочность. При этом нужно обращать внимание на выбор правильного знака в формуле для $\sigma_{l\max}$.

Выясним теперь, насколько далеко от края оболочки распространяется влияние краевых моментов M_0 . Сделаем это на следующем числовом примере.

Пример 74. Стальная труба ($E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², $\mu = 0,3$) радиусом $R = 40$ мм с толщиной стенки $h = 2$ мм находится под действием равномерного внутреннего давления $p = 25$ кгс/см² и краевых моментов $M_0 = 3,33$ кгс \times см/см (рис. 482).

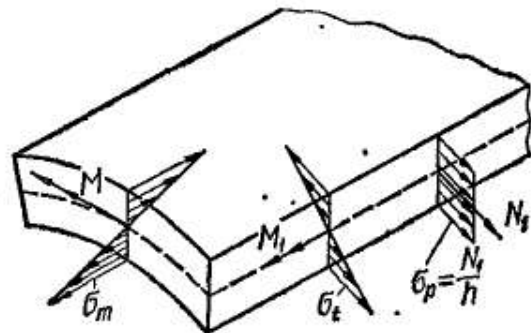


Рис. 481

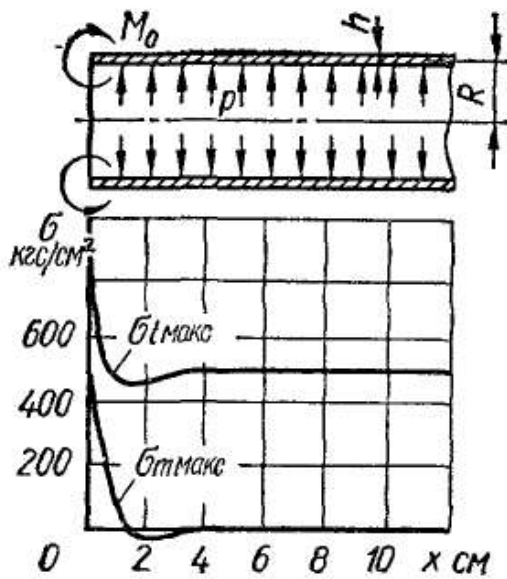


Рис. 482

Построим эпюры изменения максимальных меридиональных и кольцевых напряжений вдоль оси трубы.

При отсутствии краевых моментов всюду было бы

$$\sigma_m = 0;$$

$$\sigma_t = \frac{\rho R}{h} = \frac{25 \cdot 4}{0,2} \text{ кгс/см}^2 = 500 \text{ кгс/см}^2.$$

(17.49)

Полагая в формулах (17.46) $Q_0 = 0$, получаем

$$\omega = \frac{\rho R^2}{Eh} + \frac{M_0}{2a^2 D} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi);$$

$$M = M_0 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \quad (17.50)$$

и, согласно формулам (17.48), (17.35), (17.38), (17.30) и (17.47), у внутренней поверхности

$$\sigma_{t\text{макс}} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6M_0}{h^2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi);$$

$$\sigma_{t\text{макс}} = \frac{6\mu M}{h^2} + \frac{E}{R} \omega = \frac{\rho R}{h} + \mu \sigma_{t\text{макс}} + \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi). \quad (17.51)$$

Подставив числовые значения ρ , R , M_0 , h и μ , получим

$$\sigma_{t\text{макс}} = 500 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi);$$

$$\sigma_{t\text{макс}} = 500 + 425 e^{-\xi} \cos \xi - 125 e^{-\xi} \sin \xi = 20 + 17 e^{-\xi} \cos \xi - 5 e^{-\xi} \sin \xi.$$

(17.52)

Наконец, согласно формулам (17.40) и (17.38),

$$x \text{ (см)} = \frac{\xi}{a} = \xi \sqrt[4]{\frac{R^2 h^2}{3(1-\mu^2)}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 0,2}}{\sqrt[4]{3 \cdot 0,91}} \xi = 0,695 \xi.$$

Пользуясь таблицами функций $e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)$; $e^{-\xi} \cos \xi$ и $e^{-\xi} \sin \xi$ (табл. 19 и приложение 13), вычисляем значения $\sigma_{t\text{макс}}$ и $\sigma_{t\text{макс}}$ для ряда значений ξ (табл. 19) и по этим данным строим эпюры, показывающие изменение по длине оболочки максимальных меридиональных и кольцевых напряжений в точках у внутренней поверхности в поперечных и продольных сечениях оболочки (рис. 482).

Эти эпюры показывают, что приложенные к краю оболочки изгибающие моменты M_0 оказывают влияние на напряженное состояние оболочки только в непосредственной близости от места их приложения. На достаточном же удалении от края напряжения практически совпадают с теми, которые получаются в результате расчета оболочки по безмоментной теории. Наличие в оболочке местных быстро зату-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x см	μ	$e^{-\frac{x}{r}} \cos \frac{x}{r}$	$e^{-\frac{x}{r}} \sin \frac{x}{r}$	$[3] + [4]$	$\sigma_{\text{макс}} = 500 \cdot [5]$	$17 \cdot [3]$	$5 \cdot [4]$	$20 + [7] - [8]$	$\sigma_{\text{макс}} = 25 \cdot [9]$
0	0	1,000	0	1,000	500	17,00	0	37,00	925
0,21	0,3	0,708	0,219	0,927	464	12,04	1,10	30,94	774
0,49	0,7	0,371	0,329	0,700	350	6,31	1,65	24,76	619
0,76	1,1	0,151	0,297	0,448	224	2,57	1,48	21,09	527
1,04	1,5	0,016	0,222	0,238	119	0,27	1,11	19,16	479
1,32	1,9	-0,048	0,141	0,093	47	-0,82	0,71	18,47	462
1,60	2,3	-0,067	0,075	0,008	4	-1,14	0,38	18,48	462
1,88	2,7	-0,061	0,029	-0,032	-16	-1,04	0,14	18,82	470
2,15	3,1	-0,045	0,002	-0,043	-22	-0,76	0,01	19,23	481
2,43	3,5	-0,028	-0,011	-0,039	-20	-0,48	0,06	19,58	490
2,71	3,9	-0,015	-0,014	-0,029	-15	-0,26	-0,07	19,81	495
2,99	4,3	-0,005	-0,013	-0,018	-9	-0,08	-0,07	19,99	500
3,27	4,7	0,000	-0,009	-0,009	-4	0,00	-0,04	20,04	501
3,54	5,1	0,002	-0,005	-0,003	-2	0,03	-0,03	20,00	500
3,82	5,5	0,003	-0,003	0,000	0	0,05	-0,02	20,08	502
4,10	5,9	0,003	-0,001	0,002	1	0,05	-0,01	20,06	502

хающих изгибных напряжений обычно называется *краевым эффектом*. Все сказанное относится и к действию поперечных сил Q_0 , распределенных по краю оболочки (см. рис. 477).

§ 111. ПРИМЕРЫ УЧЕТА ИЗГИБНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБОЛОЧКАХ

В предыдущем параграфе было введено понятие краевого эффекта в оболочках, что во многих случаях упрощает расчет конструкций, которые по своей расчетной схеме могут быть отнесены к цилиндрическим оболочкам. При этом большое значение имеет то обстоятельство, что, хотя формулы (17.46) и другие были получены в предположении, что цилиндрическая оболочка полубесконечна, их, очевидно, с успехом можно применять и для конечных оболочек, если только длина последних заметно превышает размеры зоны, занятой краевым эффектом.

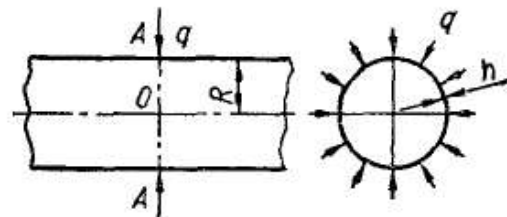


Рис. 483

Допустим, что к тонкостенному длинному цилиндру (рис. 483) в сечении $A-A$ приложена равномерно распределенная по периметру сечения нагрузка интенсивностью q кгс/см. В данном случае краевой эффект симметричен относительно линии AA . Поэтому:

а) нагрузка q распределяется поровну на левую и правую части цилиндра, т. е. (см. рис. 477)

$$Q_0 = -\frac{q}{2},$$

причем начало координат считаем помещенным в точке O (рис. 483);

б) касательная к упругой линии балки-полоски в сечении $A-A$ параллельна оси цилиндра, т. е. (см. рис. 478)

$$\Theta_0 = \Theta|_{\xi=0} = 0.$$

Тогда из второго уравнения (17.46) находим, что

$$M_0 = \frac{q}{4a},$$

где

$$a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}.$$

Подставляя значения Q_0 и M_0 в формулы (17.46), получаем (здесь $p = 0$)

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{q}{8a^3 D} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \\ \Theta &= -\frac{q}{4a^2 D} e^{-\xi} \sin \xi; \\ M &= \frac{q}{4a} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \\ Q &= -\frac{q}{2} e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \quad (17.53)$$

Отсюда, в частности для сечения $A-A$ ($\xi = 0$),

$$\omega_{\max} = \omega_0 = -\frac{q}{8a^3 D} = -\frac{q}{2E} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2}; \quad (17.54)$$

$$M_{\max} = M_0 = \frac{q}{4a} = \frac{q \sqrt{Rh}}{4 \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}. \quad (17.55)$$

Максимальные напряжения вычисляются по формулам (17.48).

Пусть на тонкостенную трубу (рис. 484) посажено тонкое кольцо, площадь поперечного сечения которого равна F_k , материал его имеет модуль упругости E_k .

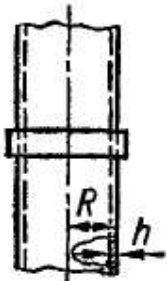


Рис. 484

Если обозначить через q радиальное усилие, возникающее между кольцом и трубой, а через δ — натяг (разность между наружным радиусом трубы и внутренним радиусом кольца до посадки), то из условия совместности деформаций должно быть

$$|\omega_k| + |\omega_{\max}| = \delta,$$

где $\omega_k = \frac{qR^2}{E_k F_k}$ — увеличение радиуса кольца после запрессовки;
 ω_{\max} — максимальный прогиб трубы.

Труба находится в условиях, близких к условиям предыдущего примера, поэтому ω_{\max} определяется формулой (17.54). Подставив выражения для ω_k и ω_{\max} в условие совместности деформаций, получим

$$q \left[\frac{R^2}{E_k F_k} + \frac{1}{2E} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R}{h} \right)^{3/2} \right] = \delta,$$

откуда определяем q . После этого по формулам (17.55) и (17.47) находим изгибающие моменты, а затем по формулам (17.48) определяем напряжения. Перемещения найдем по формуле (17.54).

Глава 18

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

§ 112. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ

Расчеты на прочность отдельных стержней, балок и конструкций, рассмотренные в предыдущих разделах курса, основаны на оценке прочности материала в опасной точке. При таких расчетах наибольшие нормальные, касательные или эквивалентные напряжения (в зависимости от вида напряженного состояния и принятой теории прочности) в опасном сечении и в опасной точке сравниваются с допускаемым напряжением. Если наибольшие расчетные напряжения не превышают допускаемых, то считается, что надлежащий запас прочности конструкции этим обеспечивается. Такой способ расчета на прочность называют *расчетом по допускаемым напряжениям*.

Метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям, бесспорно, обеспечивает прочность конструкции, однако во многих случаях не позволяет рационально использовать все ее возможности и часто приводит к завышенному весу.

При расчете по допускаемым напряжениям опасным, или предельным, состоянием конструкции считается такое ее состояние, при котором наибольшее напряжение хотя бы в одной точке материала конструкции достигает опасной величины — предела текучести (для пластичного материала) или временного сопротивления (для хрупкого материала). Состояние всей остальной массы материала во внимание не принимается.

Между тем при неравномерном распределении напряжений (например, при изгибе, кручении) в статически неопределимых конструкциях, изготовленных из пластичных материалов, появление местных напряжений, равных пределу текучести, в большинстве случаев не является опасным для всей конструкции. Практика показывает, что при появлении местных пластических деформаций конструкция еще может удовлетворять предъявляемым к ней требованиям

и для перехода ее в предельное состояние требуется дальнейшее возрастание нагрузки. Таким образом, в действительности конструкция обладает запасом прочности, большим, чем при расчете по допускаемым напряжениям.

В связи с этим недостатком метода расчета на прочность по допускаемым напряжениям возникла необходимость в новом подходе к оценке прочности конструкций. Был предложен метод расчета конструкций *по предельному состоянию*.

Под предельным состоянием конструкции понимают такое ее состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внешним воздействиям или перестает удовлетворять предъявляемым эксплуатационным требованиям.

Приведем некоторые примеры, характеризующие предельные состояния.

Испытания слабоармированных железобетонных балок показывают, что, как только напряжения в арматуре достигают предела текучести, балка сильно и необратимо провисает (т. е. получает большие остаточные деформации), а также покрывается большим количеством трещин. Ясно, что дальнейшая эксплуатация такой балки невозможна, хотя для ее разрушения и требуется еще некоторое увеличение нагрузки. Таким образом, железобетонная балка переходит в предельное состояние, как только напряжения в арматуре достигают предела текучести.

Стальные стержневые конструкции могут превратиться в кинематически изменяемые после образования достаточного числа так называемых пластических шарниров, т. е. появления в стержнях таких сечений, во всех точках которых напряжения равны пределу текучести. Однако в некоторых типах конструкций этот процесс может протекать таким образом, что после образования первых пластических шарниров (задолго до превращения этих конструкций в кинематически изменяемые) дальнейшая эксплуатация их делается невозможной из-за возникших значительных остаточных деформаций. В этих случаях имеют место предельные состояния конструкций.

Различают три вида предельных состояний:

а) первое предельное состояние — по несущей способности (прочности, устойчивости и выносливости при переменных напряжениях);

б) второе предельное состояние — по развитию чрезмерных деформаций (прогибов, перекосов и др.);

в) третье предельное состояние — по образованию или раскрытию трещин.

Расчеты по предельным состояниям широко применяются при проектировании строительных конструкций и сооружений. Все большее распространение методы этих расчетов получают и в машиностроении, причем и здесь сказывается их прогрессивная роль: они позволяют вскрыть резервы прочности, не используемые при расчетах по допускаемым напряжениям. Расчет по предельным состояниям дает возможность уменьшить вес конструкций.

Здесь будут рассмотрены некоторые примеры расчетов по несущей способности конструкций из пластичных материалов, которые имеют площадку текучести на диаграммах растяжения, сжатия и чистого сдвига.

Площадку текучести имеют диаграммы напряжений малоуглеродистых сталей и некоторых других материалов (рис. 485). Например, кривая на диаграмме напряжений алюминия (рис. 486) за пределами действия закона Гука имеет очень слабый наклон и при расчетах ее можно принять за горизонтальную прямую.

Чтобы упростить расчеты, диаграммы растяжения, сжатия и чистого сдвига для пластичных материалов схематизируют так, что прямая закона Гука непосредственно сопрягается с горизонтальной пря-

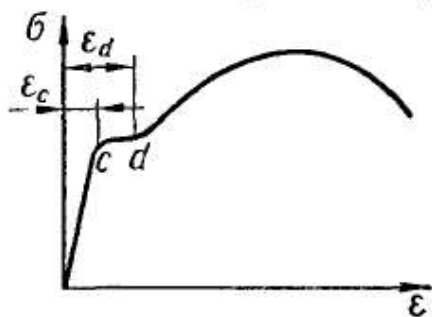


Рис. 485

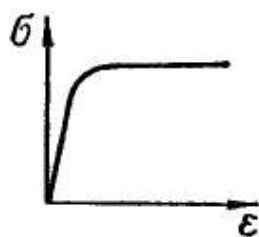


Рис. 486

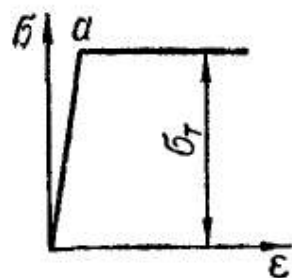


Рис. 487

мой без плавного перехода (рис. 487). Этим самым принимается равенство между пределами пропорциональности и текучести. Длина горизонтального участка диаграммы не ограничивается, т. е. материал считается не упрочняющимся, идеально пластичным. Такая диаграмма носит название диаграммы Прандтля.

Указанная схематизация достаточно точна для материалов типа алюминия и вполне допустима для материалов, имеющих диаграммы с ограниченной длиной площадки текучести (рис. 485). Это вытекает из следующих соображений. При наличии такой площадки текучести, как, например, у мягких углеродистых сталей, величина относительного удлинения в начале упрочнения ϵ_d в несколько раз превышает величину относительного удлинения ϵ_c в начале появления пластической деформации. Поэтому даже при неравномерном начальном распределении напряжений (изгиб, кручение, наличие концентраторов), но дальнейшем последовательном распространении пластической зоны с выравниванием напряжений, предела текучести они достигнут одновременно по всему сечению раньше, чем начнется упрочнение материала в точках с наибольшей пластической деформацией. Таким образом, предельное состояние, определяемое значительной пластической деформацией, наступит до начала упрочнения материала и предельная нагрузка может быть вычислена по пределу текучести.

Для сложного напряженного состояния, как указывалось в гл. 6, предложены различные теории перехода материала в пластическое состояние. Наиболее просто расчеты выполняются при использовании теории пластичности Сен-Венана. Согласно этой теории,

пластическое состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения — предела текучести при сдвиге:

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (18.1)$$

Приведенными выше положениями и будем пользоваться в дальнейшем.

§ 113. РАСЧЕТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

При растяжении и сжатии напряжения по площади поперечного сечения стержня распределяются равномерно. Вследствие этого расчет на прочность статически определимых систем по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию дает один и тот же результат. В случае статически неопределимых систем результаты расчета различны.

Покажем это на примерах.

Определим запас прочности трехстержневой подвески (рис. 488, а), нагруженной силой P . Площади поперечных сечений стержней одинаковы. Материал пластичный с пределом текучести σ_T .

Расчет по допускаемому напряжению. Задача один раз статически неопределимая. Ее решение рассмотрено в § 37. При $F_1 = F_2$ коэффициент $k = 1$ и тогда из формул (5.50) и (5.51) получим

$$N_1 = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P; \quad (18.2)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P. \quad (18.3)$$

Очевидно всегда $N_1 > N_2 = N_3$, т. е. большее усилие возникает в среднем стержне. Следовательно, в среднем стержне будет и наибольшее напряжение:

$$\sigma = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \frac{P}{F}. \quad (18.4)$$

Запас прочности при расчете по допускаемому напряжению

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F \sigma_T}{P}. \quad (18.5)$$

Расчет по предельному состоянию. Предельное состояние конструкции будет характеризоваться исчерпанием несущей способности, которое наступит тогда, когда во всех стержнях напряжения достигнут предела текучести. Найдем предельную нагрузку для конструкции.

Так как напряжения в стержнях при упругой работе их неодинаковы (в среднем стержне больше, чем в крайних), то предела текучести напряжения достигнут не одновременно во всех стержнях. Вначале при нагрузке P_{1T} наступит пластическая деформация в среднем стержне. Усилие в нем

$$N_{1T} = \sigma_T F. \quad (18.6)$$

При этом, согласно выражению (18.2),

$$P_{1r} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) \sigma_T F. \quad (18.7)$$

После появления пластического течения в среднем стержне конструкция еще сохраняет способность воспринимать возрастающую нагрузку. При этом усилие в среднем стержне остается постоянным и равно N_{1r} . Конструкция превращается в статически определимую, и усилия в крайних стержнях определяются из условия равновесия узла (рис. 489):

$$N_2 = N_3 = \frac{P - \sigma_T F}{2 \cos \alpha}. \quad (18.8)$$

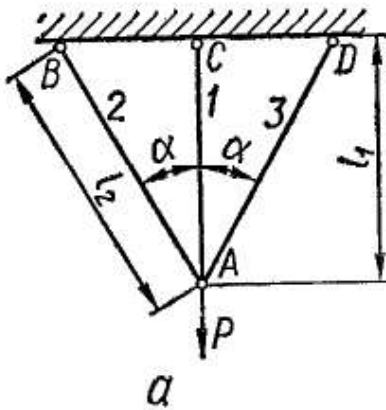


Рис. 488

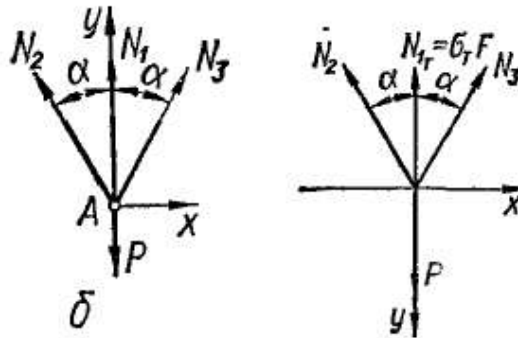


Рис. 489

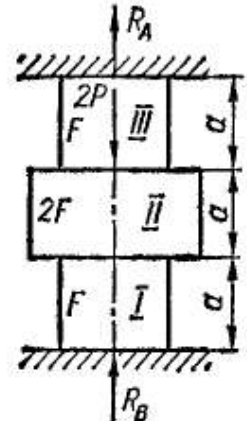


Рис. 490

Исчерпание несущей способности конструкции наступит, когда и в крайних стержнях напряжения достигнут предела текучести. Соответствующая этому моменту нагрузка

$$P_{пр} = \sigma_T F + 2F \sigma_T \cos \alpha = (1 + 2 \cos \alpha) \sigma_T F. \quad (18.9)$$

Запас прочности при расчете по предельному состоянию

$$n_{пр} = \frac{P_{пр}}{P} = \frac{(1 + 2 \cos \alpha) \sigma_T F}{P}. \quad (18.10)$$

Очевидно, что $n_{пр} > n_T$. Например, при $\alpha = 30^\circ$ $\frac{n_{пр}}{n_T} = 1,19$. Таким образом, расчет по предельному состоянию позволил обнаружить скрытый запас работоспособности конструкции.

Определим запас прочности трехступенчатого бруса (рис. 490), изготовленного из пластичного материала.

Расчет по допускаемому напряжению. Задача один раз статически неопределимая. Условие равновесия имеет следующий вид:

$$R_A + R_B - 2P = 0. \quad (8.11)$$

Деформации участков бруса должны удовлетворять условию

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,$$

или

$$-\frac{R_B a}{EF} - \frac{R_B a}{2EF} + \frac{R_A a}{EF} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$R_A = \frac{3}{2} R_B. \quad (18.12)$$

Подставляя значения R_A в выражение (18.11), найдем, что

$$R_B = \frac{4}{5} P. \quad (18.13)$$

Реакция верхнего закрепления

$$R_A = \frac{6}{5} P. \quad (18.14)$$

Участки I и II бруса сжаты усилием $N_I = N_{II} = \frac{4}{5} P$, а участок III растянут усилием $N_{III} = \frac{6}{5} P$.

Наибольшие напряжения возникают в поперечных сечениях верхнего участка. Эти напряжения

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{F} = \frac{6P}{5F}. \quad (18.15)$$

Запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{III}} = \frac{5}{6} \frac{\sigma_T F}{P}. \quad (18.16)$$

Расчет по предельному состоянию. Прежде всего выясним, какое состояние для рассматриваемой системы предельное. Из выполненного выше расчета следует, что в пределах упругости $\sigma_{III} > \sigma_I > \sigma_{II}$. Поэтому при возрастании нагрузки предела текучести сначала достигнут напряжения в верхнем участке. Это состояние не приведет к исчерпанию несущей способности системы, так как нижние участки, находящиеся еще в упругом состоянии, будут сопротивляться возрастающей нагрузке. Усилие, воспринимаемое верхним участком, при этом постоянно:

$$N_{III,пр} = R_A = \sigma_T F. \quad (18.17)$$

Участки I и II сжаты силой

$$N_I = N_{II} = R_B = 2P - R_A = 2P - \sigma_T F. \quad (18.18)$$

При дальнейшем возрастании нагрузок P пластическое состояние наступит в нижнем участке I , где напряжения больше, чем в участке II . Этот момент и соответствует исчерпанию несущей способности системы, так как средний участок, находясь между пластически деформированными областями, не встретит возрастающего сопротивления перемещению.

Таким образом, предельное состояние системы характеризуется появлением текучести одновременно в верхнем и нижнем участках.

Предельную нагрузку найдем из условия

$$\sigma_{I,пр} = \frac{N_{I,пр}}{F} = \frac{2P_{пр} - \sigma_T F}{F} = \sigma_T. \quad (18.19)$$

Отсюда

$$P_{\text{пр}} = \sigma_T F. \quad (18.20)$$

Запас прочности системы, нагруженной силами P ,

$$n_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пр}}}{P} = \frac{\sigma_T F}{P}. \quad (18.21)$$

Сопоставляя формулы (18.16) и (18.21), видим, что запас прочности оказался большим, чем в случае расчета по допускаемому напряжению.

§ 114. РАСЧЕТЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении стержней с круглым поперечным сечением касательные напряжения в упругой области пропорциональны расстояниям точек сечения от оси стержня (рис. 491) и определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\rho}} \rho, \quad (18.22)$$

а

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}. \quad (18.23)$$

Когда крутящий момент увеличивается, то пластические деформации появляются не сразу по всему поперечному сечению, а постепенно, по мере роста момента распространяются от наиболее удаленных точек к оси стержня. Вследствие этого расчеты на прочность по напряжениям в наиболее опасных точках и по предельному состоянию дают различные результаты даже в статически определимых системах. Расчет по предельному состоянию и в этом случае позволяет обнаружить дополнительные резервы прочности.

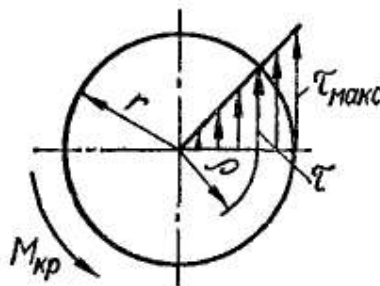


Рис. 491

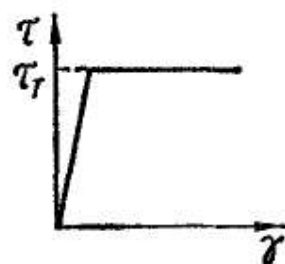


Рис. 492

Рассматривая кручение в пластической области, будем предполагать, что зависимость между касательными напряжениями и относительным сдвигом для материала соответствует идеализированной диаграмме с неограниченным горизонтальным участком (рис. 492).

При некотором значении крутящего момента $M_T = \tau_T W_{\rho}$ напряжения $\tau_{\text{макс}}$ в наиболее удаленных точках сечения достигнут предела текучести. Вследствие роста напряжений во всех точках, лежащих ближе к оси, стержень сохранит способность воспринимать возрастающий крутящий момент. С дальнейшим увеличением последнего рост напряжений приостанавливается в тех точках, где они достигли предела текучести, в остальных же точках, образующих так называемое упругое ядро, напряжения возрастают. Эпюра

напряжений, соответствующая этому состоянию стержня, приведена на рис. 493, а. Упругое ядро имеет радиус r_1

Когда пластическая зона охватит все сечение, несущая способность стержня будет исчерпана, так как в дальнейшем он будет закручиваться без увеличения крутящего момента. Эпюра напряжений при этом состоянии стержня изображена на рис. 493, б.

Вычислим величину предельного крутящего момента $M_{пр}$, соответствующего исчерпанию несущей способности стержня.

Выделим в поперечном сечении элементарную площадку в виде кольца шириной $d\rho$ (рис. 493, в). Величина площадки, на которой

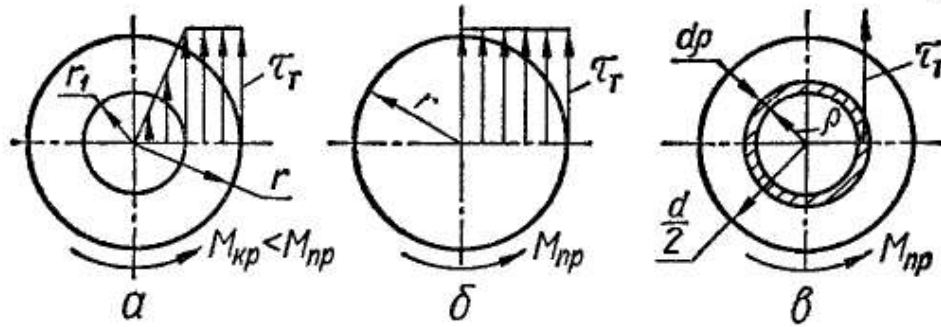


Рис. 493

действуют касательные напряжения τ_r , составит $dF = 2\pi\rho d\rho$, а величина момента от этих напряжений относительно оси стержня будет $\tau_r 2\pi\rho^2 d\rho$.

Крутящий момент в сечении равен сумме всех элементарных моментов внутренних сил. Поэтому

$$M_{пр} = \tau_r 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 d\rho,$$

или

$$M_{пр} = \tau_r \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.24)$$

Величина

$$\boxed{\frac{\pi d^3}{12} = W_{p(пл)}} \quad (18.25)$$

называется *пластическим моментом сопротивления при кручении*. Тогда

$$M_{пр} = \tau_r W_{p(пл)}. \quad (18.26)$$

Найдем отношение предельного момента $M_{пр}$ и момента M_T , при котором в сечении впервые возникнут напряжения текучести:

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{W_{p(пл)}}{W_p}. \quad (18.27)$$

Подставив значения $W_{p(пл)} = \frac{\pi d^3}{12}$ и $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, получим

$$\frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{4}{3}, \quad (18.28)$$

или

$$M_{\text{пр}} = \frac{4}{3} M_T = 1,33M_T. \quad (18.29)$$

Таков скрытый запас работоспособности круглого стержня, обнаруживаемый при переходе от расчета по допускаемым напряжениям к расчету по предельному состоянию.

У скручиваемых стержней кольцевого поперечного сечения распределение напряжений в упругой стадии ближе к равномерному, поэтому разница в запасах прочности, обнаруживаемая при расчете по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям, будет меньшей.

В качестве примера рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, концы которого жестко зашпелены (рис. 494, а). В промежуточном сечении стержня приложен закручивающий момент M_K . Определим запас прочности при расчете по допускаемому напряжению и по предельному состоянию.

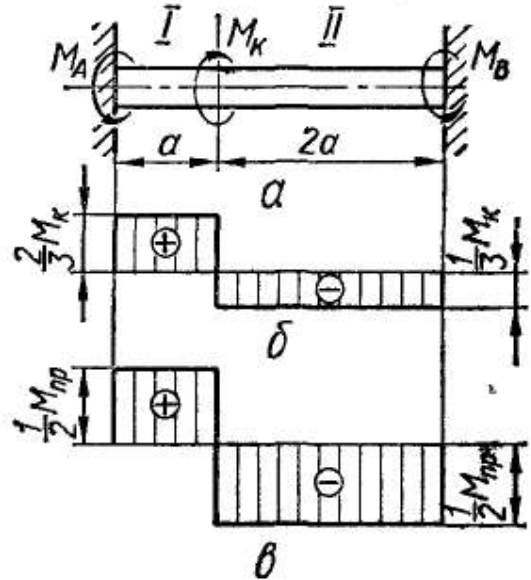


Рис. 494

Расчет по допускаемому напряжению. Раскрываем статическую неопределенность задачи при упругом состоянии материала.

Обозначив реактивные моменты через M_A и M_B , получим уравнение равновесия в таком виде:

$$M_A + M_B = M_K. \quad (18.30)$$

Деформации должны удовлетворять следующему условию:

$$\varphi = \varphi_I - \varphi_{II} = 0,$$

или

$$\frac{M_A a}{GJ_p} = \frac{M_B 2a}{GJ_p}. \quad (18.31)$$

Отсюда

$$M_A = 2M_B. \quad (18.32)$$

Решая совместно уравнения (18.30) и (18.32), найдем, что

$$M_A = M_{Iкр} = \frac{2}{3} M_K; \quad M_B = M_{IIкр} = \frac{1}{3} M_K.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 494, б.

Наибольшие касательные напряжения будут на участке I

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M_{Iкр}}{W_p} = \frac{M_A}{W_p} = \frac{2M_K}{3 \frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32M_K}{3\pi d^3}.$$

Ведя расчет по допускаемым напряжениям, имеем

$$\tau_{\max} = \frac{32M_k}{3\pi d^3} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}. \quad (18.33)$$

Отсюда запас прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{3\pi d^3 \tau_T}{32M_k}. \quad (18.34)$$

Расчет по предельному состоянию. При увеличении скручивающего момента наибольшие напряжения на первом участке достигнут предела текучести и затем зона текучести будет распространяться к оси стержня. Когда текучесть охватит все сечение, реактивный момент M_A достигнет своего предельного значения. Его величина

$$M_{Aпр} = \tau_T W_{p(пл)}, \quad (18.35)$$

или

$$M_{Aпр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.36)$$

Это состояние не будет предельным для всего стержня, так как второй участок, находящийся в упругом или в упруго-пластическом состоянии (с упругим ядром), сохранит способность оказывать сопротивление возрастающему моменту M_k . Несущая способность стержня исчерпается, когда и на втором участке зона пластичности распространится по всему сечению. Реактивный момент M_B при этом достигнет своего предельного значения

$$M_{Bпр} = \tau_T W_{p(пл)}, \quad (18.37)$$

или

$$M_{Bпр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}. \quad (18.38)$$

Эпюра крутящих моментов в предельном состоянии стержня изображена на рис. 494, в.

Предельное значение скручивающего момента для всего стержня найдем из условия равновесия (18.30):

$$M_{k.пр} = M_{Aпр} + M_{Bпр},$$

или с учетом выражений (18.36) и (18.38):

$$M_{k.пр} = \tau_T \frac{\pi d^3}{6}. \quad (18.39)$$

Запас прочности

$$n_{пр} = \frac{M_{k.пр}}{M_k} = \frac{\tau_T \pi d^3}{6M_k}. \quad (18.40)$$

Таким образом, расчет по предельному состоянию показал, что запас прочности стержня значительно выше, чем тот, который дает расчет по допускаемому напряжению [формула (18.34)]. Отношение этих запасов прочности $\frac{n_{пр}}{n_T} = 1,78$.

Следует отметить, что расчеты по несущей способности вполне приемлемы при действии постоянных крутящих моментов.

В поперечных сечениях балки при изгибе нормальные напряжения в упругом состоянии материала распределяются неравномерно, линейно изменяясь по высоте балки (рис. 495, а). Наибольшие нормальные напряжения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках поперечного сечения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{M}{W}.$$

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям запас прочности определяется как отношение предела текучести материала к наибольшему напряжению. Этим самым за опасное принимается

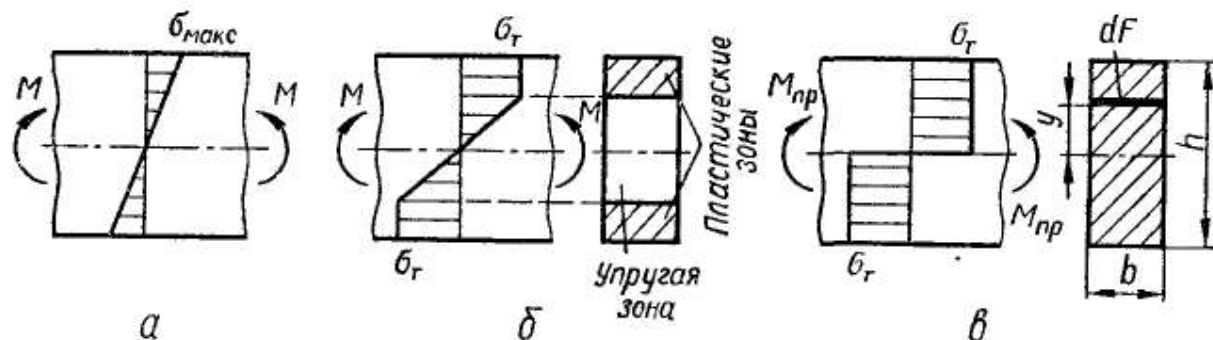


Рис. 495

состояние балки, соответствующее достижению наибольшими нормальными напряжениями в опасных сечениях предела текучести. Такое состояние лишь условно можно считать опасным. Балка еще сохраняет способность воспринимать увеличивающийся изгибающий момент.

Определим величину предельного изгибающего момента в случае чистого изгиба. Рассмотрим вначале балку, поперечные сечения которой имеют две оси симметрии. Пределы текучести при растяжении и сжатии будем считать одинаковыми.

После появления текучести в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения при дальнейшем увеличении изгибающего момента пластическое состояние материала распространяется в направлении к нейтральной оси. До полного исчерпания несущей способности балки в ее поперечных сечениях будут две зоны — пластическая и упругая (рис. 495, б). Предельное состояние наступит, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению, так как после этого дальнейшая деформация балки происходит без увеличения изгибающего момента. Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении для предельного состояния изображена на рис. 495, в. В рассматриваемом поперечном сечении образуется так называемый *пластический шарнир*, который передает постоянный момент, равный предельному изгибающему моменту.

Предельный момент можно вычислить как сумму моментов относительно нейтральной оси сил $\sigma_r dF$ в поперечном сечении

(рис. 495, в):

$$M_{np} = \int_F \sigma_T y dF = \sigma_T 2 \int_{\frac{F}{2}} y dF = \sigma_T 2S_{\max}, \quad (18.41)$$

где S_{\max} — статический момент площади половины поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Величину $2S_{\max}$ принято называть *пластическим моментом сопротивления* и обозначать $W_{пл}$. Тогда

$$M_{np} = \sigma_T W_{пл}. \quad (18.42)$$

Для прямоугольного поперечного сечения, имеющего ширину b и высоту h ,

$$W_{пл} = \frac{bh^2}{4}. \quad (18.43)$$

Опасная величина изгибающего момента при расчете по допускаемым напряжениям

$$M_T = \sigma_T W.$$

Отношение

$$\frac{M_{пл}}{M_T} = \frac{W_{пл}}{W} \quad (18.44)$$

характеризует степень увеличения запаса прочности балки при переходе к расчету по предельному состоянию. В случае балки прямоугольного сечения

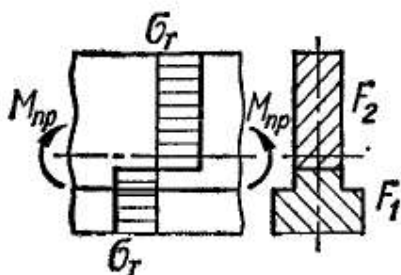


Рис. 496

$$\frac{W_{пл}}{W} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1,5.$$

Для двутавровых прокатных балок в среднем $\frac{W_{пл}}{W} = 1,18$.

Если сечение балки имеет только одну ось симметрии в плоскости нагрузки (рис. 496), то в предельном состоянии нейтральная ось не пройдет через центр тяжести поперечного сечения. Положение нейтральной оси определяется из равенства нулю суммы проекций на ось балки всех сил $\sigma_T dF$, распределенных по ее сечению:

$$\int_F \sigma_T dF = \int_{F_1} \sigma_T dF + \int_{F_2} (-\sigma_T) dF = 0, \quad (18.45)$$

где F_1 — площадь растянутой зоны сечения;

F_2 — площадь сжатой зоны.

Отсюда получаем

$$F_1 - F_2 = 0, \text{ или } F_1 = F_2,$$

т. е. в предельном состоянии нейтральная ось сечения должна делить его площадь пополам.

Предельный изгибающий момент

$$M_{\text{пр}} = \int_F \sigma_T y dF = \int_{F_1} \sigma_T dy F + \int_{F_2} (-\sigma_T)(-y) dF = \sigma_T (S_p + S_{\text{сж}}), \quad (18.46)$$

где S_p — статический момент растянутой зоны сечения относительно нейтральной оси;

$S_{\text{сж}}$ — абсолютная величина статического момента сжатой зоны сечения относительно той же оси.

В этом случае пластический момент сопротивления

$$W_{\text{пл}} = S_p + S_{\text{сж}}. \quad (18.47)$$

Приведенные рассуждения относительно определения предельного состояния, эквивалентного образованию пластического шарнира в поперечном сечении балки, строго говоря, справедливы только для чистого изгиба, когда нет касательных напряжений. Определение предельного состояния с учетом поперечной силы более сложно. Этот вопрос здесь не выясняется.

Рассмотрим пример расчета балки на изгиб по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию без учета влияния поперечной силы.

Балка прямоугольного поперечного сечения, защемленная по концам, несет равномерно распределенную по длине нагрузку интенсивности q (рис. 497, а). Определить наибольшую интенсивность этой нагрузки, допустимую согласно расчету по допускаемым напряжениям и по предельному состоянию при одном и том же запасе прочности n .

Расчет по допускаемым напряжениям. Балка статически неопределима. Ее расчет существенно упрощается благодаря симметрии. Используя методы гл. 14, легко находим лишние неизвестные и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 497, а). Наибольшее значение изгибающий момент имеет в опорных защемленных сечениях:

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{12}. \quad (18.48)$$

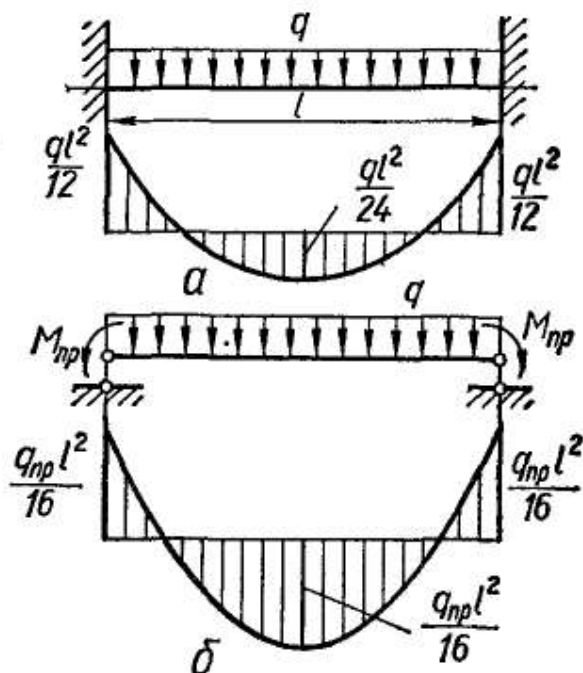


Рис. 497

При увеличении нагрузки q максимальные напряжения в этих же сечениях прежде всего достигнут предела текучести. Принимая запас прочности по пределу текучести равным n , найдем наибольшую допустимую интенсивность нагрузки из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (18.49)$$

Учитывая, что $W = \frac{bh^2}{6}$, а $M_{\text{макс}} = \frac{q_1 l^2}{12}$, получаем

$$q_1 = 2 \frac{\sigma_T}{n} \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.50)$$

Расчет по предельному состоянию. После появления пластических деформаций в наиболее удаленных от нейтральной оси точках опорных сечений дальнейший рост нагрузки приведет к образованию в этих сечениях пластических шарниров, а изгибающий момент при этом достигнет предельного значения $M_{\text{пр}}$. Теперь уже балка работает как шарнирно опертая, к которой на опорах приложены постоянные моменты (рис. 497, б)

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T W_{\text{пл}} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \quad (18.51)$$

При дальнейшем росте нагрузки эти моменты сохраняют свое значение и задача становится статически определимой. В пролетных сечениях величины изгибающих моментов будут возрастать, пока посредине пролета момент не станет равным той же величине $M_{\text{пр}}$, т. е. пока не образуется пластический шарнир. При этом три пластических шарнира расположатся на одной прямой, поэтому дальнейший рост нагрузки невозможен. Несущая способность балки исчерпается.

Условие равенства изгибающих моментов в опорных сечениях и посредине пролета имеет вид

$$\frac{q_{\text{пр}} l^2}{8} - M_{\text{пр}} = M_{\text{пр}}, \quad (18.52)$$

откуда находим, что

$$M_{\text{пр}} = \frac{q_{\text{пр}} l^2}{16}. \quad (18.53)$$

Приравнивая правые части формул (18.51) и (18.53), найдем:

$$q_{\text{пр}} = 4\sigma_T \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.54)$$

Принимая запас прочности равным n , получим наибольшую допустимую интенсивность нагрузки:

$$q_2 = \frac{q_{\text{пр}}}{n} = 4 \frac{\sigma_T}{n} \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.55)$$

Отношение наибольших допустимых нагрузок при расчетах по предельному состоянию и по допускаемым напряжениям

$$\frac{q_2}{q_1} = 2.$$

Расчет по предельным состояниям часто позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности. Как указывалось выше, он получил широкое распространение при расчете строительных конструкций и находит все большее применение в машиностроении. Однако этот метод не следует считать универсальным, полностью заменяющим расчет по допускаемым напряжениям.

Расчет по предельному состоянию с определенным запасом прочности не гарантирует от появления местных пластических деформаций. Последнее еще допустимо при постоянных нагрузках, которые имеют место преимущественно в строительных конструкциях. При переменных нагрузках, на которые чаще всего приходится рассчитывать машиностроительные конструкции, появление пластических деформаций во многих случаях недопустимо. Поэтому в таких случаях следует вести расчет по допускаемым напряжениям.

Глава 19

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 116. УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ

Проводя расчеты на прочность и жесткость при различных деформациях, мы полагали, что во время деформации любой системы имеет место единственная заранее известная форма равновесия. В действительности же в деформированном состоянии равновесие между внешними и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть не только устойчивым, но и неустойчивым.

Упругое равновесие будет *устойчивым*, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после удаления внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние. Упругое равновесие *неустойчиво*, если деформированное тело, будучи выведено из него каким-либо воздействием, приобретает стремление продолжать деформироваться в направлении данного ему отклонения и после удаления воздействия в исходное состояние не возвращается. Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое *критическим*, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначально приданную ему форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

Устойчивость формы равновесия деформированного тела зависит от величины приложенных к нему нагрузок. Например, если силы, сжимающие стержень, невелики, то первоначальная форма равновесия остается устойчивой (рис. 498, а). При возрастании величин приложенных сил достигается состояние безразличного равновесия, при котором наряду с прямолинейной формой стержня возможны смежные с ней слегка искривленные формы равновесия (штриховые линии на рис. 498, б). При дальнейшем самом незначительном увеличении нагрузки характер деформации стержня резко меняется—

стержень выпучивается (рис. 498, в), прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой. Это означает, что нагрузки превысили критическое значение.

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется критической и обозначается через $P_{кр}$.

Можно утверждать, что достижение нагрузками критических значений равносильно разрушению конструкции, так как неустойчивая форма равновесия неминуемо будет утрачена, что связано с практически неограниченным ростом деформаций и напряжений.

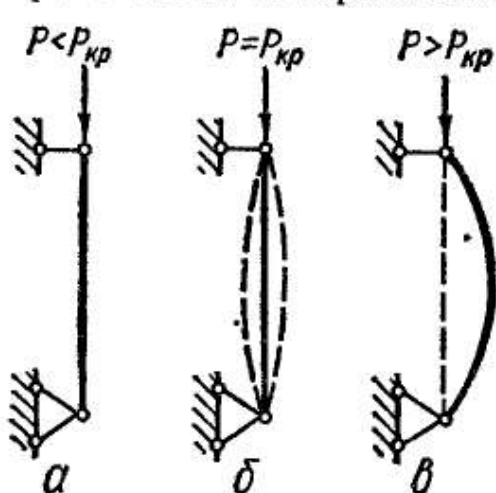


Рис. 498

Особая опасность разрушения вследствие потери устойчивости заключается в том, что обычно она происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность элемента еще далеко не исчерпана.

До момента наступления критического состояния упругие деформации по величине весьма незначительны и нарастание их происходит почти незаметно для глаза. Но с момента наступления критического состояния до момента разрушения остаточные деформации нарастают край-

не быстро, и практически нет времени принять меры по предотвращению грозящей катастрофы. Таким образом, при расчете на устойчивость критическая нагрузка подобна разрушающей при расчете на прочность. Для обеспечения определенного запаса устойчивости необходимо, чтобы удовлетворялось условие

$$P \leq [P]. \quad (19.1)$$

Здесь

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_y}, \quad (19.2)$$

где P — действующая нагрузка;

n_y — коэффициент запаса устойчивости.

Следовательно, чтобы рассчитывать сжатые стержни на устойчивость, необходимо изучить способы определения критических нагрузок $P_{кр}$.

Из всего многообразия расчетов на устойчивость упругих систем подробно рассмотрим лишь случай потери устойчивости при сжатии длинного тонкого стержня, или так называемый *продольный изгиб*.

§ 117. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Предположим, что под действием силы P , величина которой несколько превышает критическую силу $P_{кр}$, стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 499, а) слегка изогнулся (рис. 499, б).

Отнесем искривленную ось стержня к прямоугольной системе координат, выбрав начало координат в точке O .

Предположим, что критическая сила $P_{кр}$ не вызывает в стержне напряжений, превышающих предел пропорциональности, и что рассматриваются только малые отклонения от прямолинейной формы. Тогда для определения критической силы можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением (10.44) упругой линии:

$$EJ_{\text{мин}} \frac{d^2\omega(x)}{dx^2} = \pm M(x). \quad (19.3)$$

Здесь $J_{\text{мин}}$ — наименьший момент инерции сечения стержня.

В расчет принимается наименьшая жесткость стержня $EJ_{\text{мин}}$, так как очевидно, что прогиб произойдет перпендикулярно к оси наименьшей жесткости, если остальные условия для изгиба во всех плоскостях одинаковы, как в рассматриваемом случае.

В отличие от поперечного изгиба при продольном в правой части этого уравнения следует ставить знак «минус», так как абсолютная величина изгибающего момента

$$|M(x)| = |P\omega|, \quad (19.4)$$

а знак прогиба всегда противоположен знаку второй производной, т. е. знаки момента $M(x)$ и второй производной $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ противоположны при любом направлении ω .

Подставив в уравнение (19.3) выражение (19.4) для изгибающего момента, получим

$$EJ_{\text{мин}} \frac{d^2\omega}{dx^2} = -P\omega, \quad (19.5)$$

или

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{P}{EJ_{\text{мин}}} \omega = 0. \quad (19.6)$$

Введя обозначение

$$\frac{P}{EJ_{\text{мин}}} = k^2, \quad (19.7)$$

перепишем уравнение (19.6) так:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + k^2\omega = 0. \quad (19.8)$$

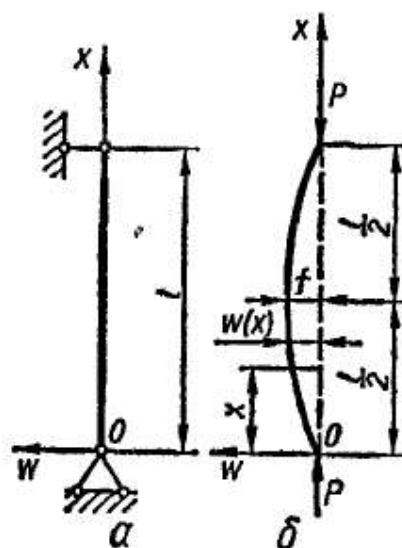


Рис. 499

Мы получили однородное линейное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого, как известно, представляется гармонической функцией

$$\omega = A \sin kx + B \cos kx. \quad (19.9)$$

Постоянные интегрирования A и B должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$\omega(x)|_{x=0} = 0; \quad \omega(x)|_{x=l} = 0.$$

Из первого граничного условия следует, что $B = 0$, т. е.

$$w(x) = A \sin kx. \quad (19.10)$$

Из второго условия получаем

$$A \sin kl = 0. \quad (19.11)$$

Если допустить, что $A = 0$, то прогиб будет тождественно равен нулю, т. е.

$$w(x) \equiv 0.$$

Это решение соответствует одной из возможных форм равновесия сжатого стержня, а именно — прямолинейной форме. Нас же интересует значение силы P , при которой становится возможной другая форма равновесия — криволинейная. Так как $A \neq 0$, то при искривленной форме стержня должно выполняться равенство

$$\sin kl = 0.$$

Корень этого уравнения kl может иметь бесконечное множество значений: $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, т. е.

$$kl = n\pi,$$

где n — произвольное целое число.

Однако первый корень $kl = 0$ отпадает, так как он не соответствует исходным данным задачи. Таким образом,

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \quad (19.12)$$

Тогда из уравнения (19.7) получим выражение для сжимающей силы:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\text{мин}}}{l^2}. \quad (19.13)$$

Уравнение (19.13) представляет собой формулу, впервые полученную Эйлером.

Практически нас интересует наименьшее значение продольной сжимающей силы, при котором становится возможным продольный изгиб. Наименьшее значение критической силы $P_{\text{кр}}$ получим при $n = 1$ и $kl = \pi$:

$$\boxed{P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{l^2}}. \quad (19.14)$$

Возвращаясь к уравнениям (19.10) и (19.12), получим уравнение изогнутой оси стержня при малых деформациях:

$$w(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Наибольший прогиб стержня $w_{\text{макс}} = f$ при $\sin \frac{n\pi x}{l} = 1$. Тогда $w(x) = w_{\text{макс}} = f = A$. Следовательно, уравнение упругой линии сжатого стержня имеет вид

$$w = f \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (19.15)$$

График этой зависимости показан на рис. 500.

Максимум w имеет место при таком значении x , для которого

$$\frac{dw}{dx} = 0,$$

т. е.
$$\frac{dw}{dx} = f \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = 0,$$

или
$$\cos \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Наименьшее значение аргумента, при котором косинус равен нулю, будет $\frac{\pi}{2}$, значит, $\frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$x = \frac{l}{2n}. \quad (19.16) \quad \text{Рис. 500}$$

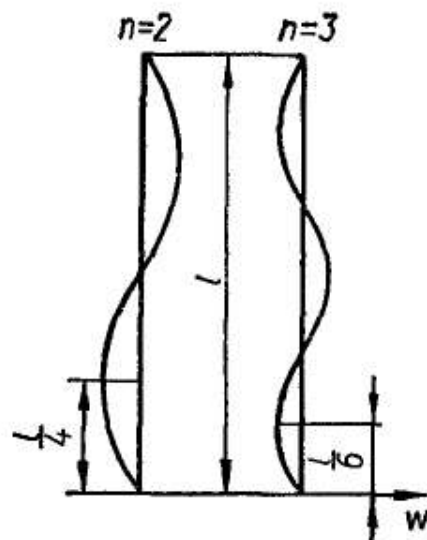


Рис. 501

Если $n = 1$, то $x = \frac{l}{2}$, а максимум w имеет место посередине стержня, что соответствует так называемому основному случаю, показанному на рис. 499.

Из соотношения (19.16) или из уравнения (19.15) и рис. 501 следует, что n представляет собой число полуволи синусоиды, располагающихся на длине изогнутого стержня.

§ 118. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

В § 117 рассмотрен так называемый основной случай нагружения и закрепления концов сжатого стержня — стержня с шарнирно опертыми концами. Как было показано, после потери устойчивости на длине стержня укладывается только одна полуволна ($n = 1$).

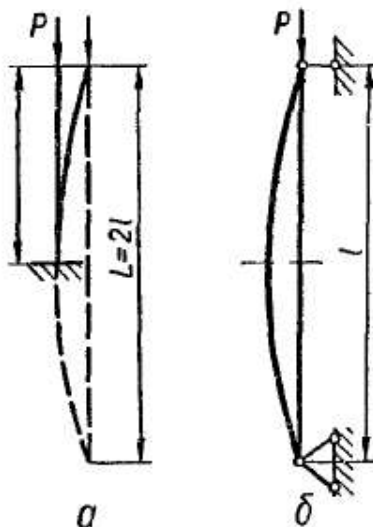


Рис. 502

Рассмотрим другие случаи закрепления концов стержня:

1. Стержень длиной l заделан одним концом и сжат продольной силой, приложенной к свободному концу (рис. 502, а). Сравнивая рис. 502, а и б, видим, что изогнутая ось стержня, заделанного одним концом, находится в таких же условиях, как и верхняя половина стержня длиной $2l$ с шарнирно закрепленными концами. Таким образом, критическая сила для стержня с одним заделанным, а другим свободным концом такая же, как и для стержня с шарнирно опертыми концами

при длине $L = 2l$, т. е.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{4l^2}. \quad (19.17)$$

При этом изогнутая ось стержня (рис. 502, а) имеет вид половины полуволны синусоиды.

2. Стержень длиной l , у которого оба конца жестко заделаны (рис. 503). После потери устойчивости стержня вследствие симметрии средняя его часть длиной $\frac{l}{2}$ работает в тех же условиях, что и стержень при шарнирно опертых концах. При этом образуются две полуволны: средняя длиной $L = \frac{l}{2}$ и две крайние половинки полуволны длиной $\frac{l}{2}$.

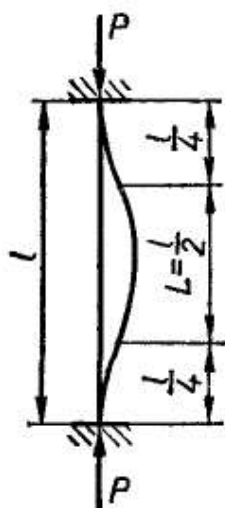


Рис. 503

Критическую силу в этом случае находим из уравнения (19.14) при $L = \frac{l}{2}$:

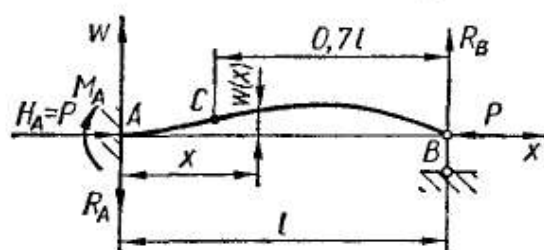


Рис. 504

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ_{мин}}{l^2}. \quad (19.18)$$

3. Стержень длиной l заделан одним концом и шарнирно оперт на другом (рис. 504). После поте-

ри устойчивости правая часть CB стержня имеет вид полуволны синусоиды. Из сравнения рис. 504 и 502, б находим, что участок CB длиной $L = 0,7l$ находится в таких же условиях, как и стержень с шарнирно закрепленными концами. Значит,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(0,7l)^2}. \quad (19.19)$$

Соотношения (19.14), (19.17) — (19.19) можно объединить в одну формулу

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(\nu l)^2}, \quad (19.20)$$

где $\nu l = l_{пр}$ — приведенная длина стержня;

l — фактическая длина стержня;

ν — коэффициент приведения длины.

Таким образом, различные случаи опирания и нагружения стержня приводятся к основному случаю введением в формулу для $P_{кр}$ так называемой приведенной длины $l_{пр} = \nu l$. Это понятие впервые было введено Ф. С. Ясинским,

Из формулы Эйлера (19.20) видно, что критическая нагрузка зависит от наименьшей жесткости $EJ_{\text{мин}}$, длины стержня l и коэффициента ν .

На рис. 505 приведены значения ν для рассмотренных стержней. Однако такие расчетные схемы на практике редко встречаются в чистом виде. Чаще закрепления концов бывают упругими. Наиболее распространены следующие случаи упругого закрепления концов:

- а) один конец стержня жестко заделан, а другой упруго оперт;
- б) оба конца упруго заделаны.

Рассмотрим первый случай (рис. 506). После потери устойчивости упруго опертый конец стойки перемещается в вертикальном направлении на величину f_B , при этом возникает упругая реакция R_B .

Эта реакция пропорциональна отклонению f_B :

$$R_B = cf_B,$$

где c — коэффициент упругости опоры B .

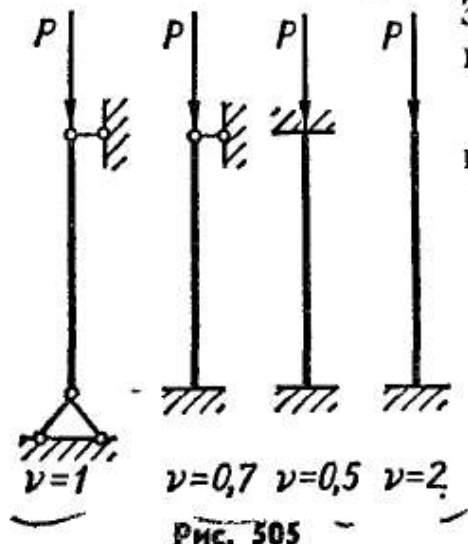


Рис. 505

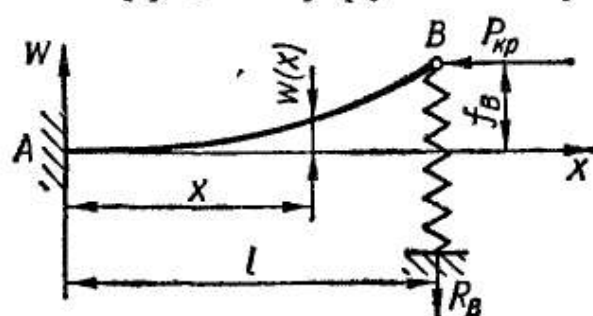


Рис. 506

Составим дифференциальное уравнение упругой линии сжатого стержня после потери устойчивости:

$$EJ_{\text{мин}} \frac{d^2 w}{dx^2} = P_{\text{кр}} (f_B - w) - cf_B (l - x). \quad (19.21)$$

Разделив почленно на $EJ_{\text{мин}}$ и обозначив, как обычно,

$$\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\text{мин}}} = k^2,$$

получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = k^2 (f_B - w) - \frac{cf_B}{EJ_{\text{мин}}} (l - x),$$

или

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{\text{кр}}}\right) + k^2 \frac{cf_B}{P_{\text{кр}}} x. \quad (19.22)$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения

$$w = C \sin kx + D \cos kx + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{кр}}} l\right) + \frac{c}{P_{\text{кр}}} f_B x. \quad (19.23)$$

Для определения постоянных интегрирования и критической нагрузки имеем такие граничные условия:

при $x = 0$

$$w(0) = w_A = 0; \quad (19.24)$$

$$\frac{dw}{dx} = \Theta(0) = \Theta_A = 0; \quad (19.25)$$

при $x = l$

$$w(l) = w_B = f_B. \quad (19.26)$$

Используя граничное условие (19.24), из уравнения (19.23) находим

$$D = -f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right).$$

Чтобы применить граничное условие (19.25), вычислим производную от перемещения w :

$$\frac{dw}{dx} = kC \cos kx - kD \sin kx + \frac{c}{P_{кр}} f_B,$$

откуда при $x = 0$ находим

$$kC + \frac{c}{P_{кр}} f_B = 0,$$

или

$$C = -\frac{c}{kP_{кр}} f_B.$$

Подставив полученные выражения для произвольных постоянных в формулу (19.23), получим окончательное уравнение изогнутой оси сжатого стержня:

$$\begin{aligned} w(x) = & -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kx - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kx + \\ & + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) + \frac{cf_B}{P_{кр}} x. \end{aligned} \quad (19.27)$$

Граничное условие (19.26) используем, чтобы получить определяющее уравнение для нахождения критической нагрузки. Положив в уравнении (19.27) $x = l$, находим, что

$$\begin{aligned} w(l) = & -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kl - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kl + \\ & + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) + \frac{c}{P_{кр}} f_B l = f_B, \end{aligned}$$

или

$$-\frac{c}{kP_{кр}} \sin kl - \left(1 - \frac{c}{P_{кр}} l\right) \cos kl = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 - \frac{P_{кр}}{cl}\right). \quad (19.28)$$

Если это уравнение решить, т. е. определить наименьший корень k , то тем самым можно найти значение критической нагрузки,

так как

$$P_{кр} = k^2 EJ_{мин}$$

Рассмотрим два предельных случая. Положив $c = 0$, получим

$$\operatorname{tg} kl = \infty; \text{ т. е. } kl = \frac{\pi}{2},$$

и приходим к такой расчетной схеме стержня, когда один конец (левый) жестко заделан, а другой (правый) свободен. Величина критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{4l^2}.$$

Положив $c = \infty$ (очень жесткая опора), получим определяющее уравнение

$$\operatorname{tg} kl = kl; \text{ т. е. } kl = 4,493 = \frac{\pi}{0,7}.$$

Величина критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{(0,7l)^2},$$

что дает формулу для стержня, один конец которого заделан, а другой шарнирно оперт.

Таким образом, если коэффициент упругости опоры c меняется от нуля до бесконечности, то это можно учесть коэффициентом приведения ν , который при этом соответственно изменяется от 2 до 0,7.

§ 119. ПОНЯТИЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПРЕВЫШАЮЩИХ ПРЕДЕЛ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому воспользоваться этой формулой можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, т. е. пока критическое напряжение (напряжение сжатия, соответствующее критической силе) не превышает предела пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}. \quad (19.29)$$

Действительно, если прямолинейная форма стержня остается устойчивой и при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, то дифференциальное уравнение (19.3), предполагающее справедливость закона Гука, уже непригодно.

Выведем формулу для критического напряжения $\sigma_{кр}$. В соответствии с выражениями (19.29) и (19.20)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{мин}}{F(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2}. \quad (19.30)$$

Здесь $i^2 = i_{\text{мин}}^2 = \frac{J_{\text{мин}}}{F}$ — квадрат наименьшего из главных радиусов инерции стержня;

$F = F_{\text{бр}}$ — площадь брутто поперечного сечения стержня.

Введя безразмерную величину

$$\lambda = \frac{\nu l}{i}, \quad (19.31)$$

называемую *гибкостью стержня*, окончательно получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (19.32)$$

т. е. критическое напряжение стержня зависит только от упругих свойств материала (модуля упругости E) и гибкости стержня (λ).

Функциональная зависимость (19.32) представляет собой видоизменение формулы Эйлера. В системе координат $\sigma_{\text{кр}} - \lambda$ эта зависимость может быть представлена гиперболической кривой, называемой *гиперболой Эйлера*. В качестве примера приведем такой график (рис. 507) для стержня из стали марки Ст3, для которой модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^6$ кгс/см², предел текучести $\sigma_{\text{T}} = 2400$ кгс/см², а предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}} = 2000$ кгс/см².

График показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжение стремится к нулю, и наоборот, по мере приближения гибкости стержня к нулю критическое напряжение стремится к бесконечности.

Однако из условия (19.29) применимости формулы Эйлера в соответствии с формулой (19.32) имеем

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}},$$

и, следовательно,

$$\lambda_{\text{пред}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (19.33)$$

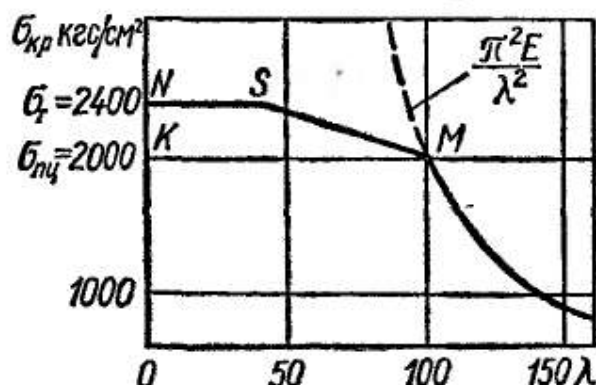


Рис. 507

Значит, формула Эйлера становится непригодной при гибкости стержня, меньшей предельного значения $\lambda_{\text{пред}}$, зависящего только от свойств материала, т. е. в рассматриваемом случае при

$$\lambda < \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100.$$

То же можно получить и графически. Если на оси ординат ($\sigma_{\text{кр}}$) отложить величину предела пропорциональности ($\sigma_{\text{пц}} = 2000$ кгс/см²) и провести из полученной точки K прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку M , абсцисса которой и есть $\lambda_{\text{пред}}$. Слева от точки M гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает

значения напряжений, бóльшие предела пропорциональности, т. е. не соответствующие условиям ее применимости.

Однако явление продольного изгиба продолжает существовать и за пределом упругости. Опытным путем установлено, что действительные критические напряжения для стержней средней и малой гибкости ($\lambda < \lambda_{\text{пред}}$) ниже значений, определенных по формуле Эйлера. Таким образом, в этом случае формула Эйлера дает завышенные значения критической силы, т. е. всегда переоценивает действительную устойчивость стержня. Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости, не только

Таблица 20

Материал	$\lambda_{\text{пред}}$	a	b
Ст2, Ст3	100	3100	11,4
Ст5	100	4640	32,6
Сталь 40	90	3210	11,6
Кремнистая сталь	100	5890	38,2
Дерево (сосна)	110	293	1,94
Чугун	80	7760	120

принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого количества опытных данных.

Ф. С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней, в результате чего составил таблицу критических напряжений в зависимости от гибкости для ряда материалов и предложил простую эмпирическую формулу для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda. \quad (19.34)$$

Значения коэффициентов a и b для некоторых материалов даны в табл. 20.

Для чугуна пользуются параболической зависимостью

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (19.35)$$

где $c = 0,53$.

По этим данным для каждого материала при $0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ можно построить график зависимости критических напряжений от гибкости стержня.

При некотором значении гибкости (обозначим его λ_0) величина $\sigma_{\text{кр}}$, вычисленная по формуле (19.34) или (19.35), становится равной

предельному напряжению при сжатии, а именно: для пластичных материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_T,$$

а для хрупких материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_B. \quad (19.36)$$

Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называют *стержнями малой гибкости*. Их рассчитывают только на прочность.

В рассматриваемом примере (рис. 507) часть графика критических напряжений за пределом пропорциональности (при $40 < \lambda < 100$) представит собой слегка наклоненную прямую SM , а часть (при $0 < \lambda < 40$) — горизонтальную линию NS . Следовательно, график $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для стали Ст3 состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda > 100$, наклонной прямой при $40 < \lambda < 100$ и почти горизонтальной прямой при $\lambda < 40 = \lambda_0$. Наклонная прямая SM соответствует напряжениям между пределом пропорциональности и пределом текучести. Горизонтальная прямая SN соответствует напряжению, равному пределу текучести.

§ 120. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОМОЩИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УМЕНЬШЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Можно считать, что центрально сжатые стержни теряют свою несущую способность от потери устойчивости раньше, чем от потери прочности, так как критическое напряжение всегда меньше предела текучести или предела прочности:

$$\sigma_{кр} < \sigma^0,$$

где $\sigma^0 = \sigma_T$ — для пластичных материалов;

$\sigma^0 = \sigma_B$ — для хрупких материалов.

Необходимо напомнить, что для стержней малой гибкости ($\lambda < \lambda_0$) трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы стержня, как это имеет место для стержней средней и большой гибкости. Несущая способность стержней малой гибкости определяется прочностью материала.

Критическое напряжение для центрально сжатых стержней средней и большой гибкости представляет, пожалуй, большую опасность, чем предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких материалов при простом растяжении. Очевидно, что при практическом решении вопроса об устойчивости стержня нельзя допустить возникновения в нем критического напряжения, а следует принять соответствующий запас устойчивости.

Чтобы получить допускаемое напряжение на устойчивость, нужно выбрать коэффициент запаса n_y . Тогда

$$\boxed{[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}.} \quad (19.37)$$

Коэффициент запаса на устойчивость всегда принимают несколько больше основного коэффициента запаса на прочность ($n_y > n$). Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств, неизбежных на практике (эксцентриситет приложения сжимающих сил, начальная кривизна и неоднородность стержня), способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах деформации эти обстоятельства почти не сказываются. Коэффициент запаса устойчивости для сталей выбирают в пределах 1,8—3,0; для чугуна — в пределах 5,0—5,5; для дерева — 2,8 ... 3,2. Заметим, что меньшие значения n_y принимают при большей гибкости.

Допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}$ и допускаемое напряжение на прочность при сжатии $[\sigma_-] = \frac{\sigma^o}{n}$ взаимно связаны. Составим их отношение:

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y} \frac{n}{\sigma^o}, \quad \text{или} \quad [\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma^o} \frac{n}{n_y} [\sigma_-]. \quad (19.38)$$

Обозначив

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma^o} \frac{n}{n_y} = \varphi,$$

получим

$$\boxed{[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-]}. \quad (19.39)$$

Здесь φ — коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость. Этот коэффициент для каждого материала можно вычислить при всех значениях гибкости λ и представить в виде таблицы или графика зависимости φ от λ . Значения коэффициента φ для сталей, чугуна и дерева приведены в табл. 21. Пользуясь аналогичными таблицами, можно достаточно просто рассчитывать стержни на устойчивость.

Составим условие устойчивости сжатых стержней:

$$\sigma \leq [\sigma]_y. \quad (19.40)$$

Так как

$$\sigma = \frac{N}{F_{бр}}, \quad \text{а} \quad [\sigma]_y = \varphi [\sigma_-],$$

то условие устойчивости принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{F_{бр}} \leq \varphi [\sigma_-]. \quad (19.41)$$

При расчете на устойчивость местные ослабления сечения практически не изменяют величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь $F_{бр}$ поперечного сечения.

Рассмотрим два вида расчета на устойчивость сжатых стержней — проверочный и проектировочный.

Гибкость λ	Коэффициент φ для			
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

Проверочный расчет сжатых стержней. Порядок проверочного расчета на устойчивость при использовании таблицы коэффициентов φ следующий:



1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения, определяем наименьший осевой момент инерции $J_{\text{мин}}$, площадь $F_{\text{бр}}$, вычисляем минимальный радиус инерции

$$i_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{J_{\text{мин}}}{F_{\text{бр}}}}$$

и гибкость

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\text{мин}}};$$

2) по таблице находим коэффициент φ и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость по формуле

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-];$$

3) сравниваем действительное напряжение $\sigma = \frac{P}{F_{\text{бр}}}$ с допускаемым напряжением $[\sigma]_y$ на устойчивость:

$$\sigma \leq [\sigma]_y.$$

Пример 75. Проверить на устойчивость сжатую деревянную колонну (рис. 508) квадратного поперечного сечения ($a = 15$ см) длиной $l = 5$ м, если основное допускаемое напряжение $[\sigma_-] = 100$ кгс/см², а сжимающая сила $P = 10$ тс,

Определяем следующие величины:

площадь

$$F = a^2 = 225 \text{ см}^2;$$

момент инерции

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} \text{ см}^4 = 4210 \text{ см}^4;$$

радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 4,34 \text{ см};$$

приведенную длину

$$l_{\text{пр}} = \nu l = 0,7l = 0,7 \cdot 5 \text{ м} = 3,5 \text{ м} = 350 \text{ см};$$

гибкость

$$\lambda = \frac{\nu l}{i} = \frac{350}{4,34} = 80,6.$$

По табл. 21 интерполяцией находим, что

$$\varphi = 0,48 - \frac{0,48 - 0,38}{10} 0,6 = 0,474.$$

Тогда

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma_-] = 0,474 \cdot 100 \text{ кгс/см}^2 = 47,4 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10\,000}{225} \text{ кгс/см}^2 = 44,4 \text{ кгс/см}^2.$$

Так как $\sigma = 44,4 \text{ кгс/см}^2 < 47,4 \text{ кгс/см}^2$, то устойчивость колонны обеспечена.

Проектировочный расчет. В расчетной формуле на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{\text{бр}}} \leq [\sigma_-], \text{ или } F_{\text{бр}} \geq \frac{P}{\varphi [\sigma_-]}, \quad (19.42)$$

имеются две неизвестные величины — коэффициент φ и искомая площадь брутто $F_{\text{бр}}$ поперечного сечения. Поэтому при подборе сечений приходится пользоваться методом последовательных приближений, варьируя величину коэффициента φ . Обычно в первой попытке берут $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$. Принимая какое-либо из этих значений φ_1 , определяют требуемую площадь $F_{\text{бр}}$ и подбирают сечение. Подбранное сечение проверяют и устанавливают фактическое значение φ_1' . Если φ_1' значительно отличается от φ_1 , то и напряжение отличается от допускаемого. Тогда следует повторить расчет, т. е. сделать вторую попытку, приняв среднее по величине значение между φ_1 и φ_1' :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}. \quad (19.43)$$

В результате второй попытки устанавливают φ_2' . Если требуется третья попытка, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$$

и т. д. Обычно при подборе сечений требуется не более двух-трех попыток.

Пример 76. Подобрать по сортаменту двутавровое поперечное сечение стержня длиной 5 м, находящегося под действием центральной сжимающей нагрузки 32 тс. Оба конца стержня заделаны. Материал — Ст3. Основное допустимое напряжение $[\sigma] = 1600 \text{ кгс/см}^2$.

Определяем расчетную длину стержня:

$$l_{\text{пр}} = \nu l = 0,5 \cdot 500 \text{ см} = 250 \text{ см}$$

Подбираем поперечное сечение путем последовательных приближений.

Первая попытка: принимаем $\varphi_1 = 0,5$; требуемая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{32\,000}{0,5 \cdot 1600} \text{ см}^2 = 40 \text{ см}^2$$

По сортаменту подбираем двутавр № 27 с площадью $F = 40,2 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\text{мин}} = i_y = 2,54 \text{ см}$. Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,54} = 98,5$$

По табл. 21 при линейной интерполяции

$$\varphi'_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 8,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Перейдем ко второму приближению, приняв $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557$.

Необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$F = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{32\,000}{0,557 \cdot 1600} \text{ см}^2 = 36 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 24а с площадью $F = 37,5 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\text{мин}} = i_y = 2,63 \text{ см}$. Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,63} = 95$$

По табл. 21 находим коэффициент φ'_2 :

$$\varphi'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Переходим к третьему приближению, приняв

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Вычисляем необходимую площадь.

$$F = \frac{32\,000}{0,60 \cdot 1600} \text{ см}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 24 с площадью $F = 34,8 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\text{мин}} = i_y = 2,37 \text{ см}$. Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\text{мин}}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

Для $\lambda = 105$ коэффициент

$$\varphi = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 5 = 0,56.$$

Вычисляем напряжение:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{32\,000}{0,56 \cdot 34,8} \text{ кгс/см}^2 = 1640 \text{ кгс/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{1640 - 1600}{1600} 100\% \approx 2,5\%.$$

Окончательно принимаем для стержня двутавр № 24

§ 121. О ВЫБОРЕ МАТЕРИАЛА И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для стержней большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$), когда критические напряжения не превышают предела пропорциональности материала, модуль упругости E является единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости. В этом случае нецелесообразно применять сталь повышенной прочности, так как модули E для различных сталей практически одинаковы.

Для стержней малой гибкости применение специальных высокопрочных сталей целесообразно, так как в этом случае повышение предела текучести стали увеличивает критические напряжения, а следовательно, и запас устойчивости.

С экономической точки зрения наиболее рациональна такая форма поперечного сечения стержня, при которой величина наименьшего радиуса инерции $i_{\text{мин}}$ при определенной площади является наибольшей. Для удобства сравнения различных сечений введем безразмерную характеристику

$$\frac{i_{\text{мин}}}{\sqrt{F}} = \xi,$$

которую можно назвать удельным радиусом инерции. Ниже приведены значения ξ для некоторых сечений:

	ξ
Трубчатое сечение ($\alpha^1 = 0,95 - 0,8$) . . .	2,25—1,64
Трубчатое сечение ($\alpha = 0,7 - 0,8$) . . .	1,2—1,00
Уголок	0,5—0,3
Двутавр	0,41—0,27
Швеллер	0,41—0,29
Квадрат	0,289
Круг	0,283
Прямоугольник ($h = b$)	0,204

$$^1 \alpha = \frac{d_{\text{ин}}}{d_{\text{нар}}}$$

Анализ данных показывает, что наиболее рациональны трубчатые тонкостенные сечения. Столь же рациональны и коробчатые тонкостенные сечения. Однако следует заметить, что при проектировании тонкостенных трубчатых и коробчатых сечений необходимо предусматривать постановку диафрагм (ребер жесткости) на определенных расстояниях по длине стержня. Эти диафрагмы препятствуют появлению местных деформаций (короблений стенок). Наименее рациональны сплошные прямоугольные сечения.

При расчете сжатых стержней на устойчивость следует стремиться к тому, чтобы они были равноустойчивыми во всех направлениях. Для этого проектировать сечения надо так, чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми. Трубчатые сечения рациональны и с этой точки зрения. Этому критерию удовлетворяют также квадратные и круглые сечения. Нерационально применять двутавровые сечения и сечения в виде прямоугольника.

Однако если приведенные длины в главных плоскостях различны, то и главные моменты инерции также следует проектировать разными, с тем чтобы величины гибкостей стержня в обеих главных плоскостях были одинаковыми или хотя бы близкими между собой. Если не удастся сделать гибкости одинаковыми, то расчет следует вести по максимальной гибкости.

§ 122. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Изгиб прямого бруса называется продольно-поперечным, если в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты как от продольных, так и от поперечных нагрузок (рис. 509). При расчете

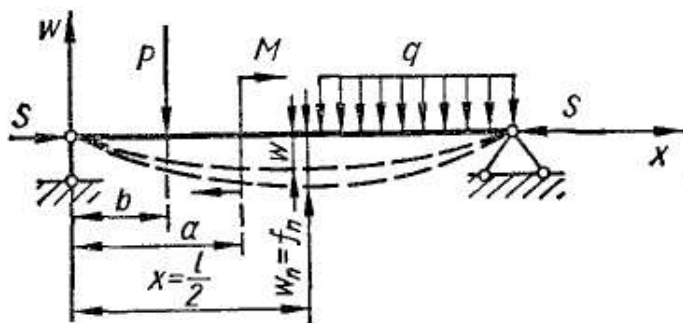


Рис. 509

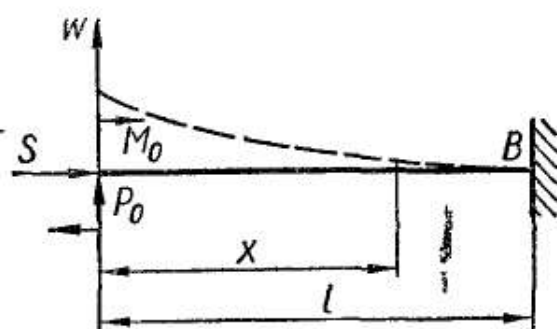


Рис. 510

на продольно-поперечный изгиб изгибающие моменты в поперечных сечениях вычисляют с учетом прогибов оси бруса:

$$|M_{\Pi}| = |M| + |S\omega_{\Pi}|, \quad (19.44)$$

где M_{Π} — полный изгибающий момент;

M — момент от поперечной нагрузки;

$S\omega_{\Pi}$ — дополнительный изгибающий момент от действия осевой силы S .

Вычисление полного изгибающего момента M_{Π} осложняется тем, что в данном случае принцип независимости действия сил неприменим. Действительно, полный прогиб ω_{Π} можно рассматривать состоящим из прогиба ω , возникающего от действия одной только поперечной нагрузки, и дополнительного прогиба $\omega_{\Pi} - \omega$, вызванного силой S . Совершенно очевидно, что, если осевые силы сжимающие, полный прогиб больше прогиба от одной только поперечной нагрузки.

Точный способ расчета. Рассмотрим точный метод определения величины изгибающего момента M_{Π} . Пусть на консольную балку

(рис. 510) действуют сжимающая сила S и поперечные нагрузки: момент M_0 и сила P_0 , приложенные на свободном конце, совпадающем с началом координат.

В этом случае дифференциальное уравнение (10.44) упругой линии запишется так:

$$\frac{d^2 w_{\Pi}(x)}{dx^2} = \frac{M_{\Pi}(x)}{EJ}, \quad (19.45)$$

где $M_{\Pi}(x)$ — полный изгибающий момент в произвольном поперечном сечении балки.

При составлении выражения $M_{\Pi}(x)$, подставляемого в правую часть уравнения (19.45), для изгибающих моментов, вызванных поперечными нагрузками, сохраняется обычное правило знаков, а момент от сжимающей силы S записывается со знаком «минус», так как $\frac{d^2 w}{dx^2}$ и w всегда имеют противоположные знаки. Для нашего случая выражение (19.44) нужно представить так:

$$M_{\Pi}(x) = M(x) - Sw_{\Pi} = M_0 + P_0x - Sw_{\Pi}. \quad (19.46)$$

Продифференцировав выражение (19.46) по x дважды, получим

$$\frac{d^2 M_{\Pi}(x)}{dx^2} = -S \frac{d^2 w_{\Pi}(x)}{dx^2}. \quad (19.47)$$

Подставив сюда выражение для $\frac{d^2 w_{\Pi}}{dx^2}$ из уравнения (19.45), запишем

$$\frac{d^2 M_{\Pi}(x)}{dx^2} = -S \frac{M_{\Pi}(x)}{EJ}. \quad (19.48)$$

Введя обозначение

$$\frac{S}{EJ} = k^2, \quad (19.49)$$

получим дифференциальное уравнение для изгибающих моментов:

$$\frac{d^2 M_{\Pi}(x)}{dx^2} + k^2 M_{\Pi}(x) = 0. \quad (19.50)$$

Общий интеграл уравнения (19.50) будет следующим:

$$M_{\Pi}(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (19.51)$$

Продифференцировав уравнение (19.51) по x , получим уравнение для поперечных сил:

$$Q_{\Pi}(x) = -Ak \sin kx + Bk \cos kx. \quad (19.52)$$

Физический смысл постоянных интегрирования установим, рассматривая начальные условия:

при $x = 0$

$$M_{\Pi}(0) = A; \quad (19.53)$$

$$Q_{\Pi}(0) = Bk. \quad (19.54)$$

Эти начальные значения M_{Π} и Q_{Π} назовем начальными параметрами и обозначим через $M_{\Pi 0}$ и $Q_{\Pi 0}$ соответственно. Тогда уравнение

изгибающих моментов при продольно-поперечном изгибе примет вид

$$M_{II}(x) = M_{II} \cos kx + \frac{Q_{II}}{k} \sin kx. \quad (19.55)$$

Чтобы получить общее уравнение для изгибающих моментов при действии сжимающей силы и различных сосредоточенных или распределенных внешних нагрузок, можно применить метод начальных параметров. Действительно, уравнение (19.55) составлено с учетом одновременного действия продольной силы и поперечных нагрузок,

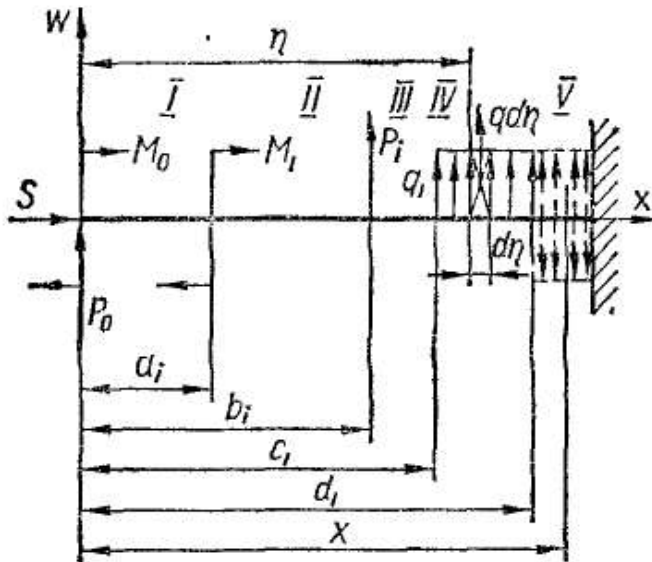


Рис. 511

и значит, здесь может быть применен принцип независимости и сложения действия сил.

Рассмотрим балку, нагруженную следующими поперечными нагрузками (рис. 511): силами P_0 и P_i , моментами M_0 и M_i , распределенной нагрузкой q_i . Приложим также сжимающую осевую силу S .

Чтобы найти выражение для изгибающих моментов $M_{II}(x)$ на крайнем правом (т. е. V) участке балки, будем рассуждать следующим образом. Сначала допустим, что все нагрузки (P_i , M_i и q_i), за

исключением начальных, отсутствуют. Тогда момент $M_{II}(x)$ выразится в функции от начальных параметров M_{II} , Q_{II} и абсциссы x по формуле (19.55). Пусть теперь начальные параметры равны нулю, но действуют сосредоточенные нагрузки P_i и M_i . Вдумываясь в геометрический и статический смысл этих силовых факторов, приходим к выводу, что их можно принять за новые начальные параметры, если переместить начало координат соответственно расположению этих силовых факторов — в точки с абсциссами a_i или b_i соответственно. Тогда аргументами тригонометрических функций в формуле (19.55) будут отрезки

$$(x - a_i); \quad (x - b_i)$$

и уравнение для изгибающих моментов примет вид

$$M_{II}(x) = M_i \cos k(x - a_i) + \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i). \quad (19.56)$$

Если сил и моментов на участке x несколько (m), то нужно ввести суммы. Тогда получим

$$M_{II}(x) = \sum_{i=1}^m M_i \cos k(x - a_i) + \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i). \quad (19.57)$$

При действии распределенных нагрузок $q(x)$ второе слагаемое пре-

вращается в интеграл от элементарных силовых факторов $q d\eta$ (рис. 511):

$$\int_0^d \frac{q}{k} \sin k(x - \eta) d\eta = \frac{q}{k^2} [\cos k(x - d) - \cos k(x - c)]. \quad (19.58)$$

Учитывая одновременное действие всех перечисленных силовых факторов, в том числе и начальных параметров M_n и Q_n , получим универсальное уравнение для моментов при продольно-поперечном изгибе:

$$M_n(x) = M_n \cos kx + \frac{Q_n}{k} \sin kx + \sum M_i \cos k(x - a_i) + \\ + \sum \frac{P_i}{k} \sin k(x - b_i) + \sum \frac{q_i}{k^2} [\cos k(x - d_i) - \cos k(x - c_i)]. \quad (19.59)$$

Продифференцировав это уравнение по x , получим уравнение для поперечных сил:

$$Q_n(x) = -M_n k \sin kx + Q_n \cos kx - \sum M_i k \sin k(x - a_i) + \\ + \sum P_i \cos k(x - b_i) - \sum \frac{q_i}{k} [\sin k(x - d_i) - \sin k(x - c_i)]. \quad (19.60)$$

Порядок применения этих уравнений к решению задач принципиально тот же, что и в рассмотренных случаях применения метода начальных параметров (см. гл. 10).

Начальные параметры определяются из краевых условий балки. В общем виде эти условия можно представить так:

а) для шарнирно опертой балки

$$M_n(0) = M_n(0); \quad (19.61)$$

$$M_n(l) = M_n(l); \quad (19.62)$$

при отсутствии внешних моментов на концах балки $M(0) = M(l) = 0$;

б) для консольной балки с левым защемленным концом

$$M_n(l) = M_n(l); \quad (19.63)$$

$$Q_n(0) = Q_n(0); \quad (19.64)$$

в) для консольной балки с защемлением справа

$$M_n(0) = M_n(0); \quad (19.65)$$

$$Q_n(l) = Q_n(l). \quad (19.66)$$

Напоминаем, что здесь $M(0)$, $M(l)$ и $Q(l)$ — моменты и поперечные силы в концевых сечениях балки только от поперечной нагрузки.

Условия (19.64) и (19.66) вытекают из того, что в заделке продольная сила S не дает поперечной составляющей, так как касательная к оси балки здесь горизонтальна.

После того как найдены начальные параметры M_n и Q_n , легко определить полный изгибающий момент M_n в любом сечении балки. Зная величины изгибающих моментов, можем вычислить наибольшее нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{\max}}{W}. \quad (19.67)$$

Для определения прогибов воспользуемся уравнением (19.44), откуда получим

$$w_n(x) = \frac{M_n(x) - M(x)}{S}. \quad (19.68)$$

Пример 77. Приняв для балки (рис. 510) следующие нагрузки: $S = 100 P_0$; $M_0 = 2P_0l$; $P_0 = 250$ кгс, определить наибольшие нормальные напряжения в сечении B , если $l = 200$ см. Поперечное сечение квадратное площадью

$$F = 10 \times 10 \text{ см}^2; \quad J = \frac{a^4}{12} = 835 \text{ см}^4; \quad W = \frac{a^3}{6} = 167 \text{ см}^3; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2.$$

Составляем уравнения моментов и поперечных сил:

$$M_n(x) = M_n \cos kx + \frac{1}{k} Q_n \sin kx;$$

$$Q_n(x) = -M_n k \sin kx + Q_n \cos kx.$$

Граничные условия рассматриваемой балки следующие:

$$M_n(0) = M_0 = 2P_0l; \quad Q_n(l) = Q(l) = P_0.$$

Из первого граничного условия находим

$$M_n(0) = M_n = 2P_0l.$$

Второе граничное условие дает

$$Q_n(l) = -2P_0lk \sin kl + Q_n \cos kl = P_0,$$

откуда

$$Q_n = \frac{P_0 + 2P_0lk \sin kl}{\cos kl}.$$

Теперь запишем окончательное выражение для $M_n(x)$:

$$M_n(x) = 2P_0l \cos kx + \frac{\frac{P_0}{k} + 2P_0l \sin kl}{\cos kl} \sin kx.$$

Так как нас интересует изгибающий момент M_n в сечении B , то при

$$k = \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 250}{2 \cdot 10^6 \cdot 835}} \text{ см}^{-1} = 3,873 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1};$$

$$\sin kl = \sin 200k = \sin 0,775 = 0,700;$$

$$\cos kl = \cos 200k = \cos 0,775 = 0,713;$$

$$\text{tg } kl = \text{tg } 200k = \text{tg } 0,775 = 0,983$$

найдем, что

$$M_n(l) = M_B = 2P_0l \left[\cos kl + \left(\frac{1}{2kl} + \sin kl \right) \text{tg } kl \right] = 20,35 \cdot 10^4 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Наибольшие напряжения вычисляем по формуле (19.67):

$$\sigma_{\text{макс}} = 250 + 1219 \text{ кгс/см}^2 = 1469 \text{ кгс/см}^2.$$

Приближенный расчет. В практических расчетах широко распространены приближенные способы решения, основанные на допущении, что изогнутая ось балки при поперечной нагрузке принимает форму синусоиды, т. е.

$$w(x) \approx f \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.69)$$

При наличии продольной силы также приближенно принимают, что

$$w_{\Pi}(x) \approx f_{\Pi} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.70)$$

Это предположение позволяет получить практически достаточно точные результаты для шарнирно опертых балок при действии поперечных нагрузок, направленных в одну сторону, особенно если деформация балки оказывается симметричной относительно ее середины, где $w_{\Pi}\left(\frac{l}{2}\right) \approx f_{\Pi}$.

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_{\text{мин}}} \quad (19.71)$$

при продольно-поперечном изгибе балки с учетом выражения (19.46) запишется так:

$$\frac{d^2 w_{\Pi}(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} - \frac{S w_{\Pi}}{EJ}. \quad (19.72)$$

Исключив из уравнений (19.71) и (19.72) $M(x)$ и учтя допущения (19.69) и (19.70), находим, что

$$(f_{\Pi} - f) \frac{d^2}{dx^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right) = - \frac{S}{EJ} f_{\Pi} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19.73)$$

Тогда после дифференцирования

$$\frac{\pi^2}{l^2} (f_{\Pi} - f) = \frac{S}{EJ} f_{\Pi}. \quad (19.74)$$

Введем обозначение

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_{\text{э}} \quad (19.75)$$

и назовем $P_{\text{э}}$ эйлеровой силой. Эта сила численно равна $P_{\text{кр}}$, определяемому по формуле (19.14). Из уравнения (19.74) найдем выражение для прогиба посередине пролета балки при совместном действии продольной и поперечной нагрузок:

$$f_{\Pi} = \frac{f}{1 - \frac{S}{P_{\text{э}}}}. \quad (19.76)$$

Применяя эту формулу, следует иметь в виду, что эйлерова сила $P_{\text{э}}$ введена выражением (19.75) чисто формально. Поэтому в отличие

от критической нагрузки $P_{кр}$ сила P , должна вычисляться по формуле (19.14) при любой гибкости балки (даже меньшей предельной). Вычисляя эйлерову силу, момент инерции следует брать относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна к плоскости действия поперечной нагрузки.

Выражение (19.76) обычно применяют и при других типах опорных закреплений сжато-изогнутых балок. В этом случае эйлерова сила должна вычисляться по формуле (19.20):

$$P_э = \frac{\pi^2 EJ}{(vl)^2}.$$

Выражение (19.76) дает удовлетворительные результаты, когда сжимающая сила S не превышает $0,8P_{кр}$.

Предполагая, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам, получим простую формулу для приближенного определения величины наибольшего момента при продольно-поперечном изгибе:

$$M_{п макс} = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_э}}. \quad (19.77)$$

Тогда для вычисления наибольших напряжений, согласно выражениям (19.67) и (19.77), получим формулу

$$\sigma_{п макс} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W \left(1 - \frac{S}{P_э}\right)}. \quad (19.78)$$

Пример 78. Вычислить максимальный момент и наибольшее нормальное напряжение в балке, показанной на рис. 512. Поперечное сечение балки — двутавр № 10, для него $F = 12 \text{ см}^2$; $W_z = 39,7 \text{ см}^3$; $J_z = 198 \text{ см}^4$.

Вычисляем $P_э$ по формуле (19.75):

$$P_э = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 198}{600^2} \text{ кгс} = 10\,846 \text{ кгс}.$$

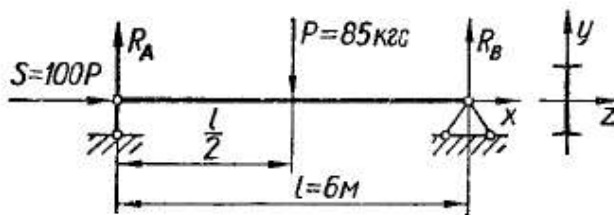


Рис. 512

Вычисляем момент посредине пролета для случая поперечного изгиба:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{Pl}{4} = \\ &= \frac{85 \cdot 600}{4} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 12\,750 \text{ кгс} \cdot \text{см}, \end{aligned}$$

а затем по формуле (19.77) находим наибольший момент при продольно-поперечном изгибе:

$$\begin{aligned} M_{п}\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{M}{1 - \frac{S}{P_э}} = \frac{12\,750}{1 - \frac{100 \cdot 85}{10\,846}} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \frac{12\,750}{1 - 0,784} \text{ кгс} \cdot \text{см} = \\ &= 58\,946 \text{ кгс} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Наибольшие напряжения вычисляем по формуле (19.67):

$$\sigma_{макс} = \frac{8500}{12} + \frac{58\,946}{39,7} \text{ кгс/см}^2 = 2193 \text{ кгс/см}^2.$$

Определение допускаемой нагрузки при продольно-поперечном изгибе. Расчет на продольно-поперечный изгиб обладает той особенностью, что напряжения при увеличении нагрузки возрастают значительно быстрее последней (рис. 513) (График на рисунке построен по формуле (19.78) в соответствии с данными примера 78). Такая же нелинейная зависимость напряжений от нагрузки имеет место в любой задаче продольно-поперечного изгиба.

Из графика следует, что если для пластичного материала напряжения σ_{\max} в стержне равны допускаемым напряжениям $[\sigma]$, то обеспечен запас прочности по напряжениям:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{[\sigma]} = n. \quad (19.79)$$

Казалось бы, что при этом прочность сжато-изогнутой балки обеспечена. Однако из графика также следует,

что в этом случае коэффициент запаса по нагрузкам значительно меньше n , т. е.

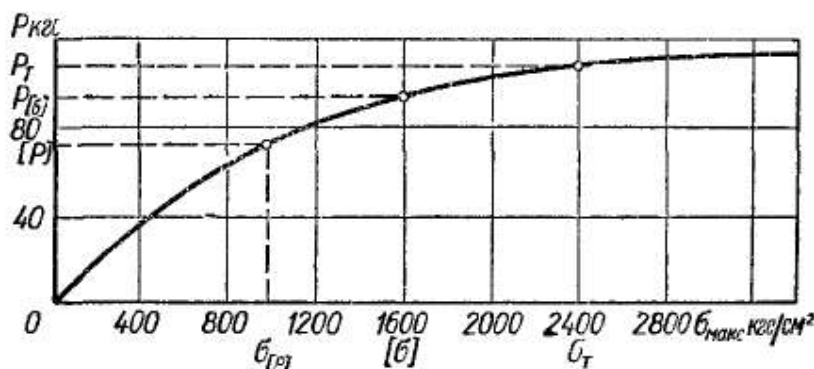


Рис. 513

$$n_P = \frac{P_T}{P_{[\sigma]}} < n. \quad (19.80)$$

Это означает, что достаточно незначительного увеличения нагрузки (на величину $P_T - P_{[\sigma]}$), чтобы напряжения достигли предела текучести, а это практически соответствует разрушению балки. Отсюда необходимо сделать вывод, что расчет сжато-изогнутых балок следует вести не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке

$$[P] = \frac{P_T}{n}. \quad (19.81)$$

Понятно, что при этом напряжения σ_{\max} будут значительно меньше допускаемых напряжений $[\sigma]$.

Таким образом, для определения допускаемой нагрузки необходимо сначала найти величину опасной (разрушающей) нагрузки P_T . Это можно сделать, воспользовавшись формулой (19.67) или (19.78), если предположить, что предел пропорциональности и предел текучести совпадают. При применении формулы (19.67) с вычислением M_{II} по точному способу задача решается методом последовательных приближений, при этом целесообразно воспользоваться построением графика, подобного изображенному на рис. 513. Применяя формулу (19.78), результат можно найти скорее. Для этого достаточно решить квадратное уравнение относительно P_T .

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 123. ВВЕДЕНИЕ.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Изучение колебательных процессов имеет важное значение для различных разделов механики, физики и техники. Вибрация сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, звуковые и ультразвуковые колебания — все эти не похожие друг на друга процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Рассмотрим механические колебания, с которыми приходится иметь дело в машиностроении и строительном деле. Изучение этих колебаний очень важно для решения задач прочности при переменных напряжениях.

Кратко остановимся на основных понятиях и зависимостях, которыми придется оперировать в настоящей главе.

Чтобы то или иное тело способно было совершать колебания, ему необходимо иметь определенную массу и упругость. Если упругое тело (нагруженная балка, скрученный вал или деформированная рессора) будет выведено из положения равновесия какой-либо посторонней причиной (ударом, внезапно приложенной силой), то сила упругости этого тела в новом положении уже не уравновесится нагрузкой и возникнут колебания.

Все колебательные процессы, с которыми приходится встречаться в технике, можно классифицировать по внешним признакам, форме того закона, по которому некоторая величина, участвующая в процессе, изменяется со временем. Такую классификацию можно назвать *кинематической*.

Различают два класса колебательных процессов: периодические и непериодические. В теории существенное значение имеет промежуточный класс — почти периодические колебания.

Периодическим называется такой процесс, при котором колеблющаяся величина, взятая в любой момент времени, через определенный отрезок времени T (период) имеет то же значение. Математическое определение периодической функции следующее: функция $f(t)$ называется периодической с периодом T , если существует такая постоянная величина T , для которой

$$f(t + T) = f(t)$$

при любом значении переменной t .

Непериодическими функциями называются все остальные функции, не удовлетворяющие указанному условию.

Почти периодическая функция определяется условием

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \epsilon$$

при любом t , где τ и ε — определенные постоянные величины. Величина τ , которая, вообще говоря, есть функцией ε , называется *почти периодом*. Очевидно, что если ε очень мало по сравнению со средним значением модуля функции $f_1(t)$ за время t , то почти периодическая функция близка к периодической.

Среди класса периодических колебаний огромную роль играют *гармонические*, или *синусоидальные*, колебания, при которых изменение физической величины со временем происходит по синусоиде (или косинусоиде).

Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических. Наиболее часто из непериодических колебаний встречаются *затухающие* (или *нарастающие*) синусоидальные движения. Колебания, происходящие по закону затухающей синусоиды, или, как иногда их называют, *затухающие гармонические* колебания, показаны на рис. 514, а и математически представляются выражением

$$x = A^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где A , φ , δ , и ω — постоянные величины;
 t — время.

Нарастающие гармонические колебания показаны на рис. 514, б. Математически они описываются последним выражением с той разницей, что должен быть изменен знак на обратный у величины δ . Строго говоря, о таких колебаниях следовало бы сказать: затухающие (или нарастающие) колебания близки к гармоническим при достаточно малом значении δ . Поэтому название «затухающие синусоиды» или «затухающие периодические колебания» не совсем логично, так как гармонические колебания не могут затухать. Но название это обычно принято и мы также будем им пользоваться.

Перечисленные внешние признаки колебательных процессов, конечно, недостаточны для их систематизации и анализа. Поэтому целесообразно классифицировать колебания по основным физическим признакам рассматриваемых колебательных систем.

Вообще упругая система может давать колебания разных типов. Например, струна или балка во время колебаний могут принимать различные формы, зависящие от числа точек перегиба, разделяющих длину элемента. При исследовании колебательных движений упругих систем важно знать, какое число независимых параметров определяет положение системы в каждый данный момент времени. Число таких параметров называется *числом степеней свободы*.

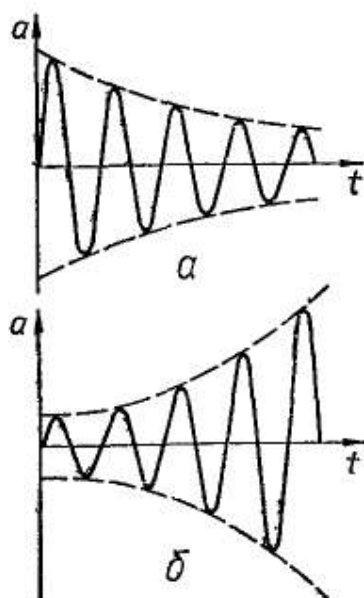


Рис. 514

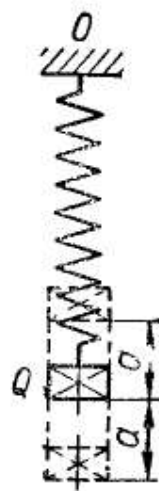


Рис. 515

В простейших случаях положение системы может быть определено только одной величиной. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*.

Рассмотрим простейший случай, изображенный на рис. 515. Если устройство таково, что возможны только вертикальные перемещения груза Q , и если масса пружины мала по сравнению с величиной массы груза Q , то систему можно рассматривать как имеющую одну степень свободы. Положение такой колебательной системы может быть определено одним параметром — вертикальным перемещением груза.

Системой с двумя или несколькими степенями свободы назовем такую систему, положение которой в произвольный момент времени может быть охарактеризовано двумя или несколькими независимыми

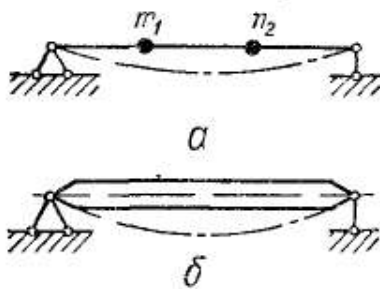


Рис. 516

параметрами. Двумя степенями свободы, например, обладает невесомая балка, несущая две массы (рис. 516, а). В качестве независимых параметров могут быть приняты перемещения масс m_1 и m_2 по отношению к положению равновесия.

Рассматривая поперечные колебания балки, можно постепенно увеличивать число степеней свободы, присоединяя к балке сосредоточенные массы. В пределе получается балка с распределенной по всей длине массой (рис. 516, б) — *система с бесконечным числом степеней свободы*. При этом прогиб в любой точке балки меняется по особому закону. С одной стороны, прогиб балки при колебаниях является функцией абсциссы x , а с другой — непрерывной функцией времени t .

Классифицируя механические колебания по другим признакам, различают следующие четыре типа возможных колебаний: собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания.

Собственными (свободными) называют колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения («толчков»), вызывающего у точек системы начальные отклонения от положения равновесия или начальные скорости, и продолжающиеся затем благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

Классическим примером собственных колебаний упругой системы являются вертикальные колебания груза, подвешенного к концу пружины (рис. 515), если верхний конец ее закреплен, а груз первоначально оттянут вниз и затем отпущен.

При собственных колебаниях характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зависящими от ее физического строения. Необходимая энергия, обеспечивающая процесс колебаний, поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний.

Наибольшее значение отклонений, т. е. амплитуда колебаний и скорость собственных колебаний, определяется из начальных

условий. При этом период колебаний (время одного полного колебания) или частота колебаний, т. е. величина, обратная периоду, зависит от самой системы. Эта величина является определенной для данной системы и называется *собственной частотой* колебаний системы.

Собственные колебания могут происходить не только около положения устойчивого равновесия, но и по отношению к устойчивому движению, например крутильные колебания равномерно вращающегося вала.

Вследствие наличия сил сопротивления колебательному движению (сопротивление среды, в которой происходит движение, трение в подшипниках, трение в сочленениях конструкции, силы внутреннего трения в материале) во всех реальных механических системах собственные колебания всегда затухают.

В этом заключается важная особенность собственных колебаний по сравнению с другими типами колебательных движений.



Рис. 517

Для упрощения при теоретическом исследовании собственных колебаний в начале решения задачи силами сопротивления обычно пренебрегают.

Вынужденными называют колебания упругой системы, происходящие при действии на систему (на протяжении всего периода колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил, которые действуют непрерывно независимо от колебаний в системе. Характер процесса при этом определяется не только свойствами системы, но также существенно зависит от внешней силы.

Примером вынужденных колебаний системы могут служить поперечные колебания балки (рис. 517), служащей опорой для электродвигателя, если у него вращающиеся массы не вполне уравновешены. Период вынужденных колебаний равен периоду изменения возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

В отличие от собственных вынужденные колебания не затухают, хотя имеют место силы сопротивления. Это объясняется тем, что при вынужденных колебаниях в систему со стороны возмущающей силы непрерывно подводится энергия, которая и расходуется на преодоление имеющихся в системе сопротивлений.

В известных условиях, когда частота возмущающих сил близка или совпадает с частотой собственных колебаний рассматриваемой системы, вынужденные колебания сопровождаются значительным (часто опасным) увеличением амплитуд, вызывающим недопустимые для конструкции деформации. Это явление, как известно, носит название *резонанса*.

Параметрическими называют колебания упругой системы, в процессе которых периодически меняются физические параметры системы, т. е. величины, характеризующие массу системы или ее жесткость. Существенной особенностью параметрических колебаний

является то, что внешние силы влияют не непосредственно на колебательное движение, а на физические параметры системы.

Таким образом, параметрические колебания отличаются от вынужденных видом внешнего воздействия. При вынужденных колебаниях извне задана сила или какая-либо другая величина, вызывающая колебания, а параметры системы при этом остаются постоянными. Параметрические колебания вызываются периодическим изменением извне какого-либо физического параметра системы. Так, например, вращающийся вал некруглого сечения, имеющий относительно различных осей сечения различные моменты инерции, которые входят в характеристику жесткости при изгибе, испытывает поперечные колебания (см. с. 531) в определенной плоскости благодаря переменной жесткости, периодически изменяющейся за каждый оборот вала. Изменение физического параметра вызывается внешними силами. В приведенном примере внешним фактором является двигатель, осуществляющий вращение вала. Параметрические колебания незатухают при наличии сил сопротивления. Поддержание параметрических колебаний происходит за счет подвода энергии внешними силовыми воздействиями, изменяющими физические параметры системы.

Автоколебаниями, или *самоколебаниями*, упругой системы называют незатухающие колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом.

Автоколебания возникают в системе без внешнего периодического воздействия. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, покрывающий потери ее в системе при колебаниях (главным образом на тепло), обычно составляет неотъемлемую часть системы.

Из сказанного следует, что *автоколебания отличны от собственных колебаний*, поскольку последние являются затухающими, в то время как автоколебания не затухают. С другой стороны, автоколебания отличаются от вынужденных и от параметрических колебаний, так как и те и другие так или иначе вызываются внешними силами, характер действия которых задан. В этом смысле автоколебания могут быть названы также *самовозбуждающимися*, так как процесс колебаний здесь управляется самими колебаниями. Источник дополнительной энергии, поддерживающей колебания системы, находится вне упругой системы. Например, энергия воздушного потока, набегающего на вибрирующие части самолета, вызывает особый вид автоколебаний, называемый *флаттером*.

Кроме указанной классификации колебаний, принято также различать колебания по виду деформации упругих элементов конструкций. В частности, применительно к стержневым системам различают продольные, поперечные и крутильные колебания.

К *продольным* колебаниям относят такие колебательные движения системы, в частности упругого стержня, при которых перемещения всех точек направлены вдоль оси стержня; при этом имеет место деформация его удлинения или укорочения. Возникающие при та-

кого рода колебаниях нормальные напряжения распределены равномерно по поперечному сечению. Следовательно, продольные колебания иначе можно назвать колебаниями растяжения — сжатия.

Поперечными колебаниями называют колебания изгиба, при которых основные компоненты перемещений (в данном случае прогибы) направлены перпендикулярно к оси стержня. Напряженное состояние при поперечных колебаниях, очевидно, такое же, как и при статическом изгибе балок. Поэтому поперечные колебания иначе можно назвать изгибными колебаниями.

Крутильными называют колебания стержней, сопровождаемые переменной деформацией кручения. С этими колебаниями в машиностроении приходится иметь дело главным образом при анализе деформаций различного рода валов, работающих преимущественно на кручение.

При рассмотрении тонкостенных конструкций, в частности конструкций самолета, часто приходится иметь дело с колебаниями смешанного типа, при которых одновременно имеют место напряженные состояния изгиба и кручения, так называемые изгибно-крутильные колебания.

§ 124. СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Задача о гармонических колебаниях системы с одной степенью свободы рассматривается в курсе теоретической механики. В качестве упругой системы обычно рассматривают груз, подвешенный к вертикально расположенной пружине (рис. 518).

Дифференциальное уравнение колебаний груза весом Q (пренебрегая массой пружины) можно получить, пользуясь принципом Д'Аламбера. Приравнивая к нулю сумму проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на груз, получаем

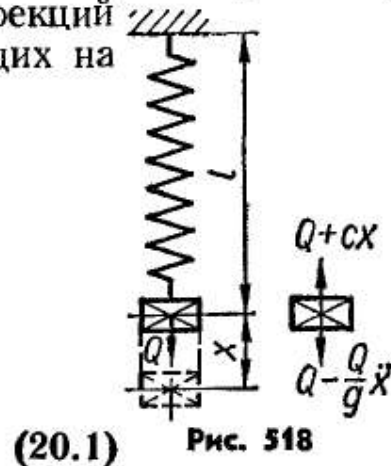
$$Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 0,$$

или

$$\boxed{x + \omega^2 x = 0,}$$



(20.1) Рис. 518

где \ddot{x} — вторая производная перемещения груза по времени t ;

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\delta_{ст}}. \quad (20.2)$$

Здесь c — жесткость пружины, численно равная силе, вызывающей растяжение пружины, равное единице длины;
 g — ускорение силы тяжести;

$\delta_{\text{ст}}$ — статическая деформация растяжения пружины под действием подвешенного груза весом Q .

Уравнение (20.1) имеет, очевидно, следующее общее решение, устанавливающее зависимость между ординатой x груза и временем t :

$$\boxed{x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,} \quad (20.3)$$

где ω — круговая частота собственных колебаний, а A и B — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий. За начало отсчета перемещений выбирается положение груза, соответствующее состоянию равновесия.

Если заданы начальная координата груза x_0 и начальная скорость $v_0 = \dot{x}$ при $t = 0$, то из уравнения (20.3) определяются постоянные интегрирования:

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \quad (20.4)$$

Полагая $x = a \sin \alpha$ и $\frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha$, уравнение (20.3) можно представить также в виде

$$x = a \sin (\omega t + \alpha);$$

при этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{A^2 + B^2},$$

или

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Величина $\omega t + \alpha$ носит название *фазы колебаний*, а величину α называют *сдвигом фазы*. На основании выражений (20.4) α может быть определено из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Из уравнения (20.2) круговая частота собственных колебаний определится формулой

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}.} \quad (20.5)$$

Имея в виду, что $\frac{Q}{g}$ представляет собой массу m подвешенного груза Q , круговую частоту можно также представить так:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Напомним, что под круговой частотой подразумевается число колебаний, совершаемых в течение 2π с; измеряется круговая частота в с^{-1} .

Зная круговую частоту колебаний, можно найти период колебаний T (время одного полного колебания) по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (20.6)$$

Величина, обратная периоду колебаний, определяет число колебаний в единицу времени (секунду) и носит название *секундной частоты*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Секундная частота колебаний обычно выражается в герцах; число герц равно числу колебаний в секунду.

В качестве реальной упругой колебательной системы с одной степенью свободы может служить система, состоящая из упругого тонкого стержня, верхний конец которого жестко закреплен, а к нижнему подвешен груз. Очевидно в том случае, когда масса стержня значительно меньше массы груза, данная система ничем не отличается от ранее рассмотренной (рис. 518). Поэтому для нахождения частоты, периода и амплитуды собственных колебаний груза, подвешенного к упругому стержню, можно пользоваться полученными выше формулами для груза, подвешенного к пружине. При этом необходимо установить жесткость стержня, эквивалентную жесткости c пружины.

При растяжении стержня длиной l и площадью поперечного сечения F абсолютное удлинение стержня, как известно, определяется формулой

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{EF}.$$

Усилие, соответствующее статической деформации $\delta_{ст}$, равной единице, представляет собой искомую жесткость:

$$c = \frac{EF}{l}. \quad (20.7)$$

Тогда на основании выражения (20.5) собственная частота колебаний подвешенного груза Q

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \quad (20.8)$$

Имея в виду, что $\frac{Q}{g}$ представляет собой массу груза, можно записать

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \quad (20.9)$$

Из формул (20.8) и (20.9) видно, что частота свободных колебаний системы возрастает с увеличением жесткости, или, что то же,

с уменьшением статической деформации, вызываемой данным грузом. Легко убедиться, что груз, подвешенный к упругому стержню, обладает значительно более высокой собственной частотой колебания, чем тот же груз, подвешенный к податливой пружине.

Отношение частот собственных колебаний груза, прикрепленного к двум различным стержням, обратно пропорционально корню квадратному из отношения статических удлинений стержней.

Пример 79. Определить собственную частоту колебаний груза весом $Q = 20$ кгс, подвешенного к концу стального стержня длиной 40 см и площадью поперечного сечения $F = 1$ см², при модуле упругости материала $E = 2 \times 10^6$ кгс/см².

Круговая частота колебаний, согласно формуле (20.8),

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1}{20 \cdot 40}} \text{ с}^{-1} = 1570 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, соответствующая собственная частота колебаний груза

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1570}{2 \cdot 3,14} \text{ Гц} = 250 \text{ Гц}.$$

Пример 80. Определить, как изменится частота собственных колебаний груза P , если от первого способа крепления его перейти ко второму, разрезав пружину на две равные части и закрепив груз посередине (рис. 519).

Частота колебаний груза, подвешенного на пружине,

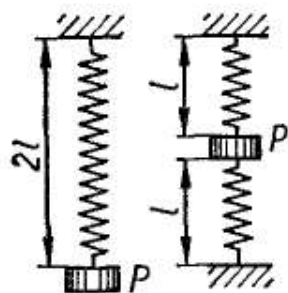


Рис. 519

Для первой схемы

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}};$$

$$\delta_{ст} = \lambda = \frac{4PR^3n}{Gr^4} = \frac{P}{c},$$

где c — жесткость пружины;
 R — средний радиус витка пружины;
 n — число витков;
 r — радиус проволоки пружины;
 G — модуль упругости при сдвиге.

$$c_1 = \frac{Gr^4}{4R^3n}.$$

Во второй схеме каждая часть пружины будет обладать большей жесткостью

$$c_2 = \frac{Gr^4}{4R^3n} = 2c_1.$$

В первом случае перемещение груза

$$\delta_1 = \frac{P}{c_1}.$$

Во втором случае каждая половина пружины воспримет нагрузку $P/2$. Поэтому перемещение груза

$$\delta_2 = \frac{P}{2c_2} = \frac{P}{2 \cdot 2c_1} = \frac{\delta_1}{4}.$$

Частота колебаний груза, подвешенного на пружине по первой схеме,

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gc_1}{P}}.$$

Частота колебаний груза, подвешенного по второй схеме,

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g4c_1}{P}}.$$

Соотношение частот колебаний

$$\frac{f_2}{f_1} = 2,$$

т. е. при замене способа подвеса груза частота увеличится в два раза.

Пример 81. Найти период колебаний груза Q , подвешенного на жесткой нити (рис. 520), пренебрегая трением в блоке. Жесткость верхней и нижней пружин соответственно c_1 и c_2 .

Определяем перемещение статически подвешенного груза Q . Это перемещение складывается из удлинения верхней пружины $\delta_{\text{в}}$ под действием силы $2Q$ и удлинения нижней пружины $\delta_{\text{н}}$ под действием силы Q , т. е. опускание груза Q

$$\delta_{\text{ст}} = \delta_{\text{в}} + \delta_{\text{н}} = \frac{2Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{c_1 c_2} (c_1 + 2c_2).$$

Тогда период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}} = \sqrt{\frac{Q(c_1 + 2c_2)}{g c_1 c_2}}.$$

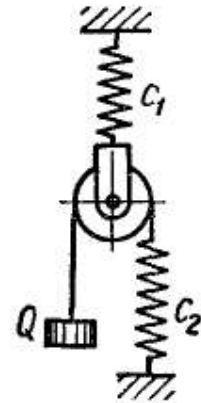


Рис. 520

Изложенная выше теория расчета продольных колебаний может быть распространена также и на случаи расчета поперечных и крутильных колебаний. Например, рассматривая невесомую балку с одной степенью свободы, получим уравнение движения в виде (20.1).

В этом случае вместо переменной x следует принять перемещение груза в направлении, перпендикулярном к оси, т. е. прогиб w . Выражения для собственной частоты и периода колебаний сохраняют прежний вид (20.5) и (20.6). При этом $\delta_{\text{ст}}$ представляет собой прогиб под грузом Q при статическом его приложении.

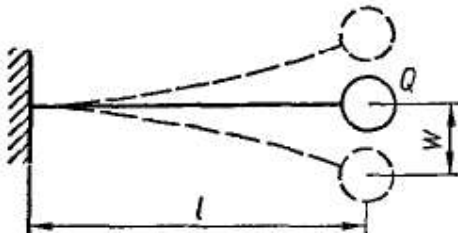


Рис. 521

Для случая, изображенного на рис. 521,

$$\delta_{\text{ст}} = w_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

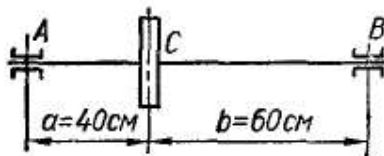


Рис. 522

Пример 82. Определить частоту собственных поперечных колебаний стального вала диаметром $d = 50$ мм, несущего диск весом $Q = 100$ кгс (рис. 522).

Собственная частота поперечных колебаний рассматриваемой системы с одной степенью свободы определится по формуле (20.5):

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}},$$

где $\delta_{\text{ст}}$ — статический прогиб вала в месте расположения диска:

$$\delta_{\text{ст}} = w_{\text{ст}} = \frac{Qa^2b^2}{3EJ} = \frac{100 \cdot 40^2 \cdot 60^2 \cdot 64}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 5^4 \cdot 100} \text{ см} = 0,0312 \text{ см}.$$

Подставляя полученное значение $\delta_{ст}$ в формулу частоты, будем иметь

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0,0312}} \text{ с}^{-1} \approx 177 \text{ с}^{-1}.$$

Примером упругой системы, способной совершать крутильные колебания, может служить диск, сопряженный со стержнем по схеме, показанной на рис. 523. Если к диску в его плоскости приложена и внезапно удалена пара сил, то возникнут свободные колебания кручения стержня вместе с диском.

Обозначим крутильную жесткость вала (скручивающий момент, необходимый для закрутки вала на один радиан) через $c = \frac{G\pi d^4}{l \cdot 32}$

(d — диаметр стержня, l — его длина), а полный угол закручивания стержня — через φ . Крутящий момент в циклически закручиваемом при колебаниях стержне в произвольный момент времени будет $c\varphi$. Пренебрегая силами инерции массы стержня по сравнению с массой диска и приравнявая крутящий момент в стержне моменту сил инерции диска, получаем следующее дифференциальное уравнение движения диска:

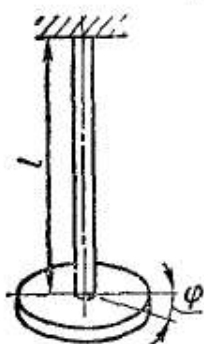


Рис. 523

$$\boxed{J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0,} \quad (20.10)$$

где J — момент инерции диска относительно оси стержня, перпендикулярной к плоскости диска.

Для круглого диска постоянной толщины диаметром D с удельным весом его материала γ

$$J = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32g} = \frac{QD^2}{8},$$

где Q — вес диска.

В случае диска переменной толщины $h(\rho)$

$$J = \frac{2\pi}{g} \int_0^{D/2} h(\rho) \gamma \rho^3 d\rho.$$

Обозначая $\omega^2 = \frac{c}{J}$, уравнение (20.10) можно переписать в виде (20.1):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

общее решение которого

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Отсюда видно, что период колебаний кручения рассматриваемой системы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Для стержня постоянного сечения диаметром d период и частота колебаний соответственно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32lJ}{G\pi d^4}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32Jl}}. \quad (20.11)$$

Полученный результат применим также и к системам с двумя вращающимися дисками (рис. 524). Действительно, если закрутить диски один относительно другого, а затем мгновенно снять приложенные внешние моменты, то диски начнут совершать крутильные колебания навстречу друг другу. При этом некоторое промежуточное сечение вала останется неподвижным. Положение этого так называемого *узлового сечения* $m - m$ можно найти из условия равенства частот колебаний обоих дисков с примыкающими к ним участками вала длиной a и b , для которых применимы формулы (20.11):

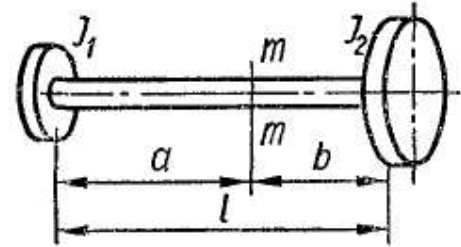


Рис. 524

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_1 a}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_2 b}},$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{J_2}{J_1},$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно первого и второго дисков.

Используя последнее соотношение, а также имея в виду, что $a + b = l$, найдем

$$a = \frac{J_2 l}{J_1 + J_2}; \quad b = \frac{J_1 l}{J_1 + J_2}.$$

Тогда период и частота крутильных колебаний системы, согласно формулам (20.11), в которых вместо l следует подставить выражение для a (или b), будут следующими:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32J_1 J_2 l}{\pi G d^4 (J_1 + J_2)}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4 (J_1 + J_2)}{32J_1 J_2 l}}.$$

Заметим, что рассмотренная колебательная система имеет большое практическое значение, так как она является прототипом колебательной системы, к которой могут приводиться многие упругие системы, встречающиеся в инженерном деле, в частности валы с двумя вращающимися массами.

§ 125. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Если принять, что кроме постоянной силы тяжести груза Q (см. рис. 518) на него действует периодическая возмущающая сила P , то в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе свободных

колебаний будем иметь случай вынужденных колебаний. Уравнение этих колебаний получим из выражения (20.1), прибавляя к его правой части силу $P(t)$:

$$\boxed{\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P(t)}. \quad (20.12)$$

Деля все члены уравнения на $\frac{Q}{g}$, получаем

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)g}{Q}. \quad (20.13)$$

Рассмотрим частный случай, когда сила $P(t)$ пропорциональна $\cos pt$, т. е. когда период силы $T_1 = \frac{2\pi}{p}$, а частота $f_1 = \frac{p}{2\pi}$.

Обозначив

$$\frac{P(t)g}{Q} = q \cos pt,$$

приведем уравнение (20.13) к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt. \quad (20.14)$$

При медленном изменении $P(t)$, т. е. при p , малом по сравнению с ω , можно пренебречь членом \ddot{x} , содержащим ускорение в уравнении (20.14), и тогда получить статическую деформацию

$$x_{\text{ст}} = \frac{q \cos pt}{\omega^2}. \quad (20.15)$$

Для определения динамической деформации нужно решить дифференциальное уравнение (20.14). Это решение, как известно, можно получить, если к решению однородного уравнения (20.1)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (20.16)$$

прибавить частное решение уравнения (20.14)

$$x = C \cos pt. \quad (20.17)$$

Подставляя частное решение (20.17) в дифференциальное уравнение (20.14), найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -pC \sin pt; \\ \ddot{x} &= -p^2C \cos pt; \\ -p^2C \cos pt + \omega^2 C \cos pt &= q \cos pt. \end{aligned}$$

Отсюда после сокращения на $\cos pt$ получим

$$C(\omega^2 - p^2) = q,$$

т. е. амплитуда

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \quad (20.18)$$

Тогда общее решение уравнения (20.14) окончательно примет вид

$$\boxed{x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt.} \quad (20.19)$$

Первых два слагаемых правой части уравнения (20.19) характеризуют свободные колебания, которые обычно быстро затухают; последнее слагаемое характеризует вынужденные установившиеся колебания системы, которые происходят с частотой внешней возмущающей силы.

Амплитуда C вынужденных колебаний, как следует из формулы (20.18), зависит от частоты этих колебаний p . Отношение амплитуды C к статической деформации (20.15) определяет так называемый коэффициент нарастания колебаний β :

$$\beta = \frac{C}{x_{ст}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}, \quad (20.20)$$

или

$$\boxed{\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}},} \quad (20.21)$$

где

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Из формулы (20.20) следует, что при малом отношении $\frac{p}{\omega}$ коэффициент β близок к единице и амплитуда вынужденных колебаний лишь немного отличается от статической деформации. Когда же частота вынужденных колебаний приближается к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности, т. е. при $\frac{p}{\omega} \rightarrow 1$ амплитуда $C \rightarrow \infty$. При $p = \omega$ имеем состояние резонанса. Соответствующая частота возмущающей силы называется критической.

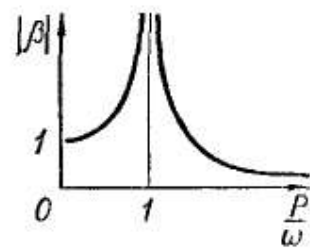


Рис. 525

Рассматривая выражение (20.20), графическое изображение которого представлено на рис. 525, видим, что при частоте возмущающей силы p , большей собственной частоты ω колебаний системы, т. е. при $p > \omega$, амплитуда C динамического перемещения уменьшается и при $p \gg \omega$ делается очень малой по сравнению со статическим перемещением. В этом случае груз Q можно рассматривать как неподвижный.

При $p < \omega$ вынужденные колебания и возмущающая сила находятся в одной фазе, т. е. сдвиг фаз $\alpha = 0$. Это значит, что в момент, когда колеблющийся груз (см. рис. 518) достигает своего наибольшего

отклонения, предположим, вниз, возмущающая сила получает наивысшее значение в этом же направлении. При $p > \omega$ разница в фазах вынужденных колебаний и возмущающей силы составляет величину $\alpha = \pi$, т. е. колебания происходят в противофазе с возмущающей силой. Это значит, что в то время, когда возмущающая сила имеет максимальное значение в направлении вниз, колеблющийся груз достигает своего максимального отклонения вверх. Такое явление можно хорошо понять на примере вынужденных колебаний математического маятника (рис. 526), возбуждения которого осуществляют путем горизонтального возвратно-поступательного периодического перемещения точки подвеса с различной частотой. Положение маятника, колеблющегося в одной фазе с возмущающим фактором, приведено на рис. 526, а; колебание маятника в противо-

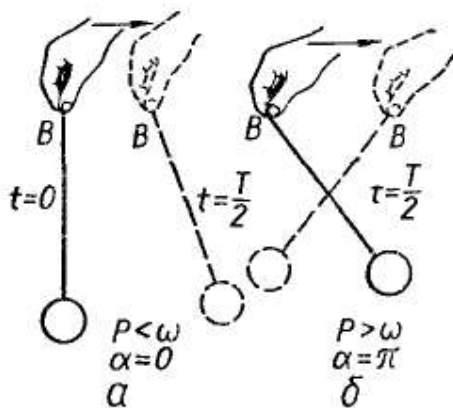


Рис. 526

фазе с возмущающей силой показано на рис. 526, б.

Амплитуду собственных (независимых) колебаний можно определить из общего решения (20.19) при рассмотрении начальных условий. Так, полагая, что в начальный момент (при $t = 0$) перемещение и скорость равны нулю, т. е. $(x)_{t=0} = 0$ и $(\dot{x})_{t=0} = 0$ из уравнения (20.19) будем иметь

$$B = 0; \quad A = -\frac{q}{\omega^2 - p^2}.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (20.19), окончательно получаем

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2} (\cos pt - \cos \omega t). \quad (20.22)$$

В начале действия возмущающей силы возникают вынужденные и свободные колебания одной амплитуды.

Если частота возмущающей силы приближается к частоте собственных колебаний, имеет место биение. Пусть

$$\omega - p = 2\Delta.$$

Тогда уравнение (20.22) при

$$\Delta = \frac{1}{2} (\omega - p)$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} \sin \frac{(p - \omega)t}{2} = \\ &= -\frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin (-\Delta)t \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{2q \sin t\Delta}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{(p + \omega)t}{2}, \quad (20.23) \end{aligned}$$

т. е. получим уравнение синусоидального колебательного движения с периодом

$$T = 2\pi : \frac{p + \omega}{2} = \frac{4\pi}{p + \omega}$$

и переменной амплитудой

$$a = \frac{2q}{\omega^2 - p^2} \sin t\Delta,$$

период изменения которой, или период биения, характеризуется величиной

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Delta}.$$

Графическое представление колебания с биением приведено на рис. 527. Из последней формулы следует, что период биения увеличивается с приближением частоты возбуждения p к частоте собствен-

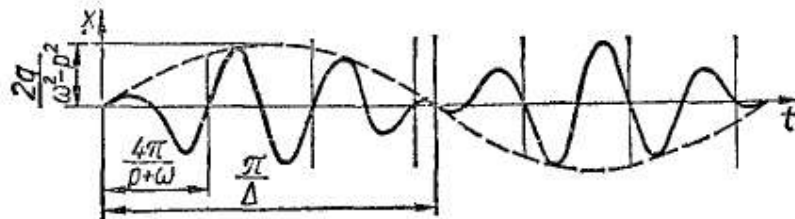


Рис. 527

ных колебаний ω и становится равным бесконечности в случае резонанса (при $p = \omega$). В последнем случае, когда $p \rightarrow \omega$ и $\Delta \rightarrow 0$, уравнение (20.23) может быть представлено так:

$$x = \frac{2qt\Delta}{2\Delta(\omega + p)} \sin \frac{(p + \omega)t}{2} = \frac{qt}{2p} \sin pt, \quad (20.24)$$

т. е. амплитуда с течением времени возрастает безгранично. Заметим, что последнее заключение справедливо только при отсутствии в колебательной системе сил сопротивления. Таких реальных колебательных систем не существует.

§ 126. РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Прежде всего рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы (рис. 528) в случае, когда силы сопротивления при колебании пропорциональны скорости движения. Для получения уравнения движения груза воспользуемся принципом Д'Аламбера (условия динамического равновесия груза рассматриваем при отклонении его на расстояние x от положения статического равновесия):

$$Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} - \alpha \dot{x} = Q + cx,$$

где α — коэффициент пропорциональности;

$\alpha \dot{x}$ — сила трения, пропорциональная скорости (действующая в направлении, обратном движению).

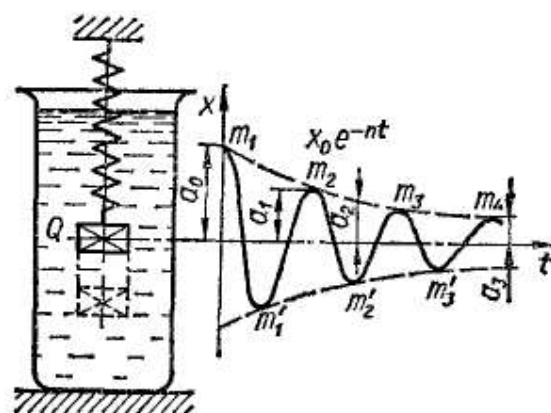


Рис. 528

Отсюда дифференциальное уравнение колебаний системы с учетом рассеяния энергии можно представить в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (20.25)$$

где

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}. \quad (20.26)$$

Обозначая

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2, \quad (20.27)$$

общее решение дифференциального уравнения (20.25) можно представить так:

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t), \quad (20.28)$$

где $e = 2,718$.

Из этого уравнения следует, что период колебаний рассматриваемой системы с затуханием

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}, \quad (20.29)$$

т. е. он зависит от затухания, характеризуемого коэффициентом n .

Общее решение (20.28) может быть представлено также и так:

$$x = \mathfrak{A} e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \psi), \quad (20.30)$$

где \mathfrak{A} и ψ — некоторые постоянные, которые зависят от начальных условий и могут быть найдены таким же путем, как в § 124.

При $n \ll \omega$ разность между круговой частотой ω_1 системы с затуханием и собственной частотой ω , т. е. $\varepsilon = \omega_1 - \omega$, является величиной второго порядка малости, поэтому период T будет мало отличаться от периода собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

т. е. можно считать, что небольшая сила сопротивления не влияет на период (частоту) колебаний системы.

Рассматривая решение (20.28), видим, что из-за множителя e^{-nt} амплитуда колебаний с течением времени убывает. Постоянные интегрирования A и B , входящие в решение, определим из начальных условий. Так, полагая в начальный момент (при $t = 0$) $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, из уравнения (20.28) найдем, что

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1} (x_0 + nx_0).$$

Подставляя эти данные в уравнение (20.28), получаем

$$x = e^{-nt} \left[\frac{x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + x_0 \left(\cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].$$

В частном случае, когда $A = 0$, т. е. когда

$$\frac{x_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

последнее уравнение примет вид

$$x = x_0 e^{-nt} \cos \omega_1 t. \quad (20.31)$$

Графически зависимость (20.31) представлена на рис. 528. Уравнения верхней и нижней огибающих приведенной затухающей виброграммы соответственно $x = x_0 e^{-nt}$ и $x = -x_0 e^{-nt}$. Точки m_1, m_2, m_3, \dots касания огибающей к виброграмме имеют координаты времени $t = 0; t = T; t = 2T$ и т. д., а точки m'_1, m'_2, m'_3, \dots касания к нижней огибающей кривой — координаты $t = \frac{T}{2}; t = \frac{3T}{2}$ и т. д. При этом указанные точки не совпадают с точками крайних перемещений системы из положения равновесия. Легко убедиться, что вследствие затухания время перемещения системы из среднего положения к следующему крайнему положению меньше времени, необходимого для возвращения из крайнего в следующее среднее положение.

Степень затухания колебаний системы зависит от величины постоянной n (характеристики затухания). Амплитуда колебаний после каждого цикла уменьшается в отношении

$$e^{-nT} : 1,$$

что видно из уравнения (20.31), т. е. уменьшение амплитуды соответствует геометрической прогрессии. Действительно, последовательные амплитуды при $t = 0; t = T; t = 2T$ и т. д. имеют значения

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0 e^{-nT}; \quad a_2 = x_0 e^{-2nT}; \quad \dots;$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{x_0 e^{-nT}}{x_0} = e^{-nT}; \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{x_0 e^{-2nT}}{x_0 e^{-nT}} = e^{-nT} \text{ и т. д.}$$

Отношение какой-либо амплитуды колебаний к непосредственно следующей за ней амплитуде через один период

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{x_0 e^{-knT}}{x_0 e^{-(k+1)nT}} = e^{nT},$$

откуда

$$\boxed{\ln \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = \ln e^{nT} = nT = \delta.} \quad (20.32)$$

Величина δ называется *логарифмическим декрементом затухания колебаний* и обычно является основной характеристикой затухания колебаний.

В технике, в частности в машиностроении, величина декремента существенно отличается от единицы и составляет, например для таких колебательных систем, как турбинные лопатки, величину порядка 0,03, т. е. 3%.

Кроме сил сопротивления, пропорциональных скорости движения, затухание колебаний (демпфирование) в реальных конструкциях может обуславливаться и другими причинами, в частности, потерями на рассеяние энергии в самом материале упругого элемента системы, т. е. потерями гистерезисного типа, величина которых, оказывается, зависит уже не от скорости, а от амплитуды колебаний. Другим распространенным источником потерь энергии при колебаниях является рассеяние энергии за счет сил трения в сочленениях элементов конструкции, утечки энергии в фундамент и т. д.

Здесь мы лишены возможности останавливаться на расчете колебаний элементов конструкций с учетом различных видов рассеяния энергии¹ и ограничимся лишь случаем вынужденных колебаний, когда рассеяние энергии пропорционально скорости.

§ 127. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости. Уравнение движения для такого случая получим, если в дополнение к силе сопротивления $S = \alpha \dot{x}$ на груз в вертикальном направлении (рис. 528) будет действовать некоторая периодическая сила $P \sin pt$. Обозначив

$$q = \frac{gP}{Q},$$

получим уравнение движения для данного случая, добавляя в правую часть уравнения свободных колебаний с затуханием (20.25) член $q \sin pt$. При этом

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt.} \quad (20.33)$$

Общее решение этого уравнения найдем, если к решению (20.28)

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) \quad (20.34)$$

однородного уравнения прибавим частное решение

$$x = K \sin pt + L \cos pt. \quad (20.35)$$

¹ Детально этот вопрос освещен в монографиях Г. С. Писаренко «Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале». Киев, Изд-во АН УССР, 1955 и «Рассеяние энергии при механических колебаниях». Киев, Изд-во АН УССР, 1962.

Тогда, имея в виду, что

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Kp \cos pt - Lp \sin pt; \\ \ddot{x} &= -Kp^2 \sin pt - Lp^2 \cos pt,\end{aligned}$$

и подставляя выражения x , \dot{x} и \ddot{x} в дифференциальное уравнение (20.33), а затем приравнивая коэффициенты при $\sin pt$ и $\cos pt$ правой и левой частей, получим

$$\begin{aligned}-Lp^2 + 2Kpn + L\omega^2 &= 0; \\ -Kp^2 - 2Lpn + K\omega^2 &= q.\end{aligned}$$

Решая совместно полученную систему двух уравнений относительно неизвестных постоянных K и L , найдем, что

$$\begin{aligned}K &= \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}; \\ L &= -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}.\end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (20.33) может быть представлено в виде

$$\boxed{x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) - \frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt.} \quad (20.36)$$

Первые слагаемые, имеющие множитель e^{-nt} , со временем уменьшаются (затухают), два других слагаемых, пропорциональных q , характеризуют вынужденные колебания; они со временем не затухают.

Период незатухающих колебаний тот же, что и период возмущающей силы:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p},$$

а их амплитуда пропорциональна величине возмущающей силы. Эта амплитуда, как легко убедиться, зависит также от характеристики n затухания, а также от соотношения периода независимых колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

и периода T_1 возмущающей силы.

Если ввести следующую замену:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \sin \alpha; \quad (20.37)$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \cos \alpha, \quad (20.38)$$

то вынужденные колебания можно представить несколько проще:

$$x_1 = \mathfrak{A} (\cos \alpha \sin pt - \sin \alpha \cos pt) = \mathfrak{A} \sin (pt - \alpha). \quad (20.39)$$

Амплитуда \mathfrak{A} вынужденных колебаний на основании уравнений (20.37) и (20.38) определится из выражений

$$\frac{4q^2 p^2 n^2}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2 n^2]^2} = \mathfrak{A}^2 \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{q^2 (\omega^2 - p^2)^2}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2]^2} = \mathfrak{A}^2 \cos^2 \alpha,$$

складывая которые и решая относительно \mathfrak{A} , находим

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{4q^2 p^2 n^2 + q^2 (\omega^2 - p^2)^2}}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}}. \quad (20.40)$$

Угол сдвига фаз α на основании тех же уравнений (20.37) и (20.38) можно определить делением первого из них на второе:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}. \quad (20.41)$$

При $\omega > p$ угол α положительный и меньше $\frac{\pi}{2}$, т. е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Из уравнения (20.39) следует, что при этом вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы. Когда $\omega < p$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, т. е. вынужденные колебания отстают больше чем на $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Когда $\omega = p$, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, т. е. во время колебательного движения система занимает свое среднее положение в тот момент, когда возмущающая сила достигает максимального значения.

Анализируя выражение для амплитуды \mathfrak{A} вынужденных колебаний, имея при этом в виду, что

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q},$$

находим

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \delta_{ст}, \quad (20.42)$$

где $\delta_{ст}$ — перемещение, которое возникло бы при статическом приложении максимального амплитудного значения возмущающей силы.

Имея в виду формулу (20.42) и деля числитель и знаменатель выражения (20.40) для амплитуды \mathfrak{A} на квадрат круговой частоты собственных колебаний ω^2 , получаем

$$\mathfrak{A} = \frac{\delta_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2 n^2}{\omega^4}}} = \frac{\delta_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right)^2 + \frac{T^2 \gamma^2}{T_1^2}}}, \quad (20.43)$$

где $\gamma = \frac{2n}{\omega}$ — коэффициент, зависящий от величины силы сопротивления.

При очень большом периоде вынужденных колебаний амплитуда вынужденных колебаний приближается к статическому перемещению ($\mathcal{A} \rightarrow \delta_{ст}$). При $T_1 \rightarrow T$ и малом затухании $\mathcal{A} \rightarrow \infty$.

Как указывалось, при расчетах амплитуд вынужденных колебаний удобно пользоваться коэффициентом нарастания амплитуды колебаний β , представляющим собой отношение амплитуды \mathcal{A} вынужденных колебаний к статическому перемещению $\delta_{ст}$:

$$\beta = \frac{\mathcal{A}}{\delta_{ст}}$$

На основании уравнения (20.43) выражение для коэффициента β , очевидно, будет

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}} \quad (20.44)$$

Представив $\beta = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$ графически при различных значениях γ (рис. 529), получим так называемые *резонансные кривые*, наглядно иллюстрирующие зависимость амплитуды вынужденных колебаний от соотношения частот (периодов) свободных и вынужденных колебаний при различных демпфирующих характеристиках системы, определяемых значением коэффициента γ .

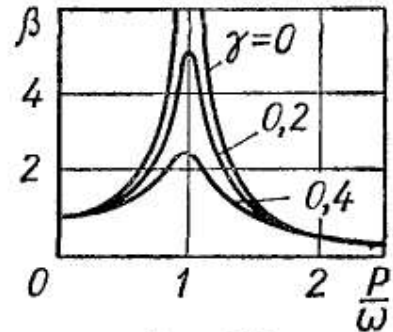


Рис. 529

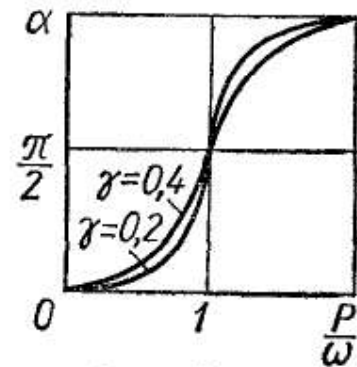


Рис. 530

Графическое представление величины сдвига фазы $\alpha = f_1\left(\frac{p}{\omega}\right)$ при различных значениях коэффициента γ приведены на рис. 530. Из этих диаграмм видно, что в области, близкой к резонансу, имеет место очень резкое изменение фазы вынужденных колебаний в том случае, если затухание мало.

Пример 83. Электродвигатель весом 400 кгс, делающий $n = 1000$ об/мин, установлен на двух швеллерах, консольно заделанных в стене. Подобрать сечение швеллеров, если расстояние от стены до центра тяжести двигателя $l = 1$ м, вертикальная составляющая центробежной силы, возникающая от неуравновешенности двигателя, равна $P \sin \omega t$, где амплитуда центробежной силы P составляет 25% от веса двигателя.

Сечение швеллеров должно быть таким, чтобы собственная частота колебаний системы примерно на 30% была больше частоты возмущающей силы, т. е.

$$n_c = 1,3n = 1,3 \cdot 1000 = 1300 \text{ колебаний в минуту,}$$

или

$$\omega_c = \frac{\pi n_c}{30} = \frac{3,14 \cdot 1300}{30} \text{ с}^{-1} = 136 \text{ с}^{-1},$$

а возникающее напряжение не превышало допускаемого $[\sigma] = 1000$ кгс/см².

Колебательную систему, представляющую собой мотор на швеллерах, с достаточной степенью точности можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, для которой собственная частота может быть определена по формуле (20.5):

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = 136 \text{ с}^{-1},$$

откуда

$$\delta_{ст} = \frac{g}{\omega_c^2} = \frac{981}{136^2} \text{ см} = 0,053 \text{ см}.$$

С другой стороны, статический прогиб двух консольно закрепленных швеллеров

$$\delta_{ст} = f = \frac{Ql^3}{3E2J_z}.$$

Отсюда определим момент инерции одного швеллера:

$$J_z = \frac{Ql^3}{6E\delta_{ст}} = \frac{400 \cdot 100^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,053} \text{ см}^4 = 629 \text{ см}^4.$$

Согласно таблице сортамента, ближайший по размерам швеллер № 16 с моментом инерции

$$J_z = 747 \text{ см}^4.$$

Для швеллеров № 16 частота собственных колебаний системы

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 3E2J_z}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 747}{400 \cdot 100^3}} \text{ с}^{-1} = 147 \text{ с}^{-1},$$

или

$$n_c = \frac{30\omega_c}{\pi} = \frac{30 \cdot 147}{3,14} \approx 1400 \text{ колебаний в минуту},$$

что выше частоты возмущающей силы на

$$\frac{1400 - 1000}{1000} \cdot 100\% = 40\%.$$

Проверим напряжения, возникающие в швеллерах, с учетом вибрационной нагрузки. Напряжения в швеллерах (под действием веса мотора)

$$\sigma_{ср} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Ql}{2W_z} = \frac{400 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} \text{ кгс/см}^2 = 216 \text{ кгс/см}^2.$$

Коэффициент нарастания амплитуды колебаний, согласно выражению (20.20),

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1000}{1400}\right)^2} = 2,04.$$

Тогда величина напряжения с учетом динамичности

$$\sigma_a = \beta \frac{Pl}{2W_z} = 2,04 \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 93,4} \text{ кгс/см}^2 = \pm 110 \text{ кгс/см}^2.$$

Максимальное напряжение в швеллере

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ср} + \sigma_a = (216 + 110) \text{ кгс/см}^2 = 326 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 1000 \text{ кгс/см}^2.$$

§ 128. КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА

Из практики эксплуатации машин известно, что вращающиеся валы при некоторых вполне определенных для данной машины числах оборотов, попадая в резонанс, становятся динамически неус-

тойчивыми; при этом могут возникать большие поперечные колебания. Число оборотов, при котором обнаруживается указанное явление резонанса, называется *критическим*. Легко показать, что критическая скорость для вала соответствует числу оборотов вала в секунду, равному собственной частоте его поперечных колебаний.

Для доказательства рассмотрим вращение вертикального вала с одним диском посередине (рис. 531, а).

Предположим, что центр тяжести C диска отстоит от его оси на расстоянии e (при посадке дисков на вал избежать эксцентриситета e практически не удастся). При вращении такой системы на вал будет действовать центробежная сила, вызывающая его изгиб:

$$T = \frac{Q}{g} \omega^2 (\omega + e),$$

где ω — угловая скорость вращения вала;

w — прогиб вала в месте посадки диска.

Найдем реакцию сил упругости вала в месте приложения центробежной силы:

$$P = c\omega,$$

где c — изгибная жесткость вала, которая, например, для вала постоянного сечения при размещении диска посередине между опорами

$$c = \frac{48EJ}{l^3}. \quad (20.45)$$

Из условия равновесия очевидно, что $T = P$. Подставляя вместо T и P их выражения, получим следующее уравнение для определения w :

$$\frac{Q}{g} (\omega + e) \omega^2 = c\omega. \quad (20.46)$$

Из последнего уравнения

$$\omega = \frac{e}{\frac{c}{\omega^2} \frac{g}{Q} - 1}. \quad (20.47)$$

Имея в виду [см. формулу (20.26)], что

$$\frac{cg}{Q} = \omega_c^2$$

представляет собой квадрат собственной частоты поперечных колебаний вала, уравнение (20.47) можно переписать так:

$$\omega = \frac{e}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}. \quad (20.48)$$

Из этого уравнения видно, что прогиб вала w быстро увеличивается с приближением значения угловой скорости вращения вала ω к собственной частоте ω_c поперечных колебаний вала. Критическая

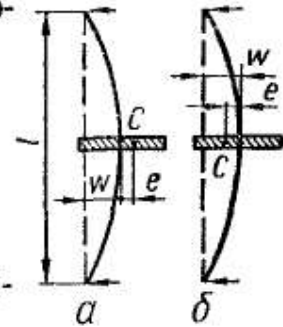


Рис. 531

$$\boxed{\omega_{кр} = \omega_c = \sqrt{\frac{cg}{Q}}} \quad (20.49)$$

При этом знаменатель в выражении (20.48) равен нулю, а поэтому прогиб теоретически равен бесконечности, т. е. должен безгранично увеличиваться вплоть до разрушения вала. В действительности же из-за имеющихся в системе потерь энергии, которые в приведенном расчете не учитывались, на практике при попадании вала в резонанс прогибы не всегда принимают значения, опасные для эксплуатации.

Интересно отметить, что при скоростях вращения вала, больших критических, амплитуда колебания вала существенно уменьшается, колебания затухают. Опыты показывают, что при $\omega > \omega_c$ центр тяжести диска располагается между линией, соединяющей опоры, и искривленной осью вала (рис. 531, б). В этом случае уравнение для определения прогиба будет иметь вид

$$\frac{Q}{g} (\omega - e) \omega^2 = c\omega,$$

откуда

$$\boxed{\omega = \frac{e}{1 - \frac{cg}{\omega^2 Q}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad (20.50)$$

Отсюда видно, что с увеличением скорости вращения вала прогиб ω уменьшается и приближается к эксцентриситету e , т. е. при очень больших скоростях центр тяжести диска достигает линии, соединяющей опоры, и изогнутый вал вращается вокруг центра тяжести C диска.

Пример 84. Определить диаметр вала турбогенератора мощностью $N = 100$ л. с., несущего посередине пролета длиной $l = 100$ см диск весом $Q = 150$ кгс, в двух случаях: 1) для жесткого вала с критическим числом оборотов выше $n = 3000$ об/мин на 35%; 2) для гибкого вала с критическим числом оборотов ниже рабочего числа в три раза. Массой вала по сравнению с массой диска пренебречь. Дано: эксцентриситет $e = 0,01$ см; $[\sigma] = 800$ кгс/см²; $E = 2 \times 10^6$ кгс/см².

Для первого случая определяем собственную частоту колебаний системы:

$$\omega_{ж} = \omega_{кр} = 1,35 \frac{\pi n}{30} = 1,35 \frac{3,14 \cdot 3000}{30} \text{ с}^{-1} = 424 \text{ с}^{-1}.$$

Диаметр жесткого вала находим из выражения

$$\omega_{ж} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{g48EJ}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48gE\pi d^4}{64Ql^3}},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_{ж}^2 4Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{424^2 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 100^3}{3 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} \text{ см} = 8,75 \text{ см}.$$

Его максимальный прогиб при колебаниях

$$f = \frac{e}{\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{0,01}{1,35^2 - 1} \text{ см} = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 8,75 \cdot 1,22 \cdot 10^{-2}}{100^2} \text{ кгс/см}^2 = 128 \text{ кгс/см}^2.$$

Касательные напряжения, вызванные скручиванием,

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{71\,620N}{\frac{\pi d^3}{16} n} = \frac{71\,620 \cdot 100 \cdot 16}{3,14 \cdot 8,75^3 \cdot 3000} \text{ кгс/см}^2 = 18 \text{ кгс/см}^2$$

Эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{эkv III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{128^2 + 4 \cdot 18^2} \text{ кгс/см}^2 = 133 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 800 \text{ кгс/см}^2.$$

Во втором случае собственная частота колебаний системы с гибким валом

$$\omega_r = \omega_{кр} = \frac{\omega}{3} = \frac{\pi n}{30 \cdot 3} = \frac{3,14 \cdot 3000}{3 \cdot 30} \text{ с}^{-1} = 105 \text{ с}^{-1}.$$

Диаметр гибкого вала

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_r^2 \cdot 4 \cdot Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{105^2 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 100^3}{3 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} \text{ см} = 4,35 \text{ см.}$$

Динамический прогиб

$$f = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2} = \frac{0,01}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \text{ см} = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4,35 \cdot 1,13 \cdot 10^{-2}}{100^2} \text{ кгс/см}^2 = 59 \text{ кгс/см}^2.$$

Касательные напряжения кручения

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{71\,620N}{\frac{\pi d^3}{16} n} = \frac{71\,620 \cdot 100 \cdot 16}{3,14 \cdot 4,35^3 \cdot 3000} \text{ кгс/см}^2 = 146 \text{ кгс/см}^2.$$

Эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{эkv III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{59^2 + 4 \cdot 146^2} \text{ кгс/см}^2 = 298 \text{ кгс/см}^2 < [\sigma] = 800 \text{ кгс/см}^2.$$

§ 129. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Системой с двумя, тремя и т. д. степенями свободы называется, как указывалось выше, такая система, положение которой в любой момент времени может определяться соответственно двумя, тремя и т. д. независимыми параметрами.

Типичными колебательными системами такого рода, часто встречающимися в машиностроении, являются вал с несколькими дисками (рис. 532), совершающий крутильные колебания, балка с несколькими сосредоточенными массами (рис. 533), совершающая поперечные колебания, и т. п. В первом случае движение описывается

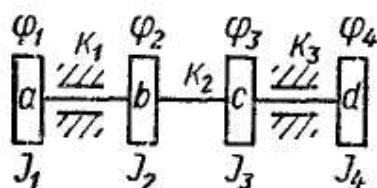


Рис. 532



Рис. 533

углом поворота вокруг продольной оси вала, а во втором — вертикальным перемещением сосредоточенных масс в направлении, перпендикулярном к оси балки. Примером колебательной системы, в которой движение массы определяется одновременно линейным смещением и углом поворота, может служить кузов автомобиля, схема которого приведена на рис. 534.

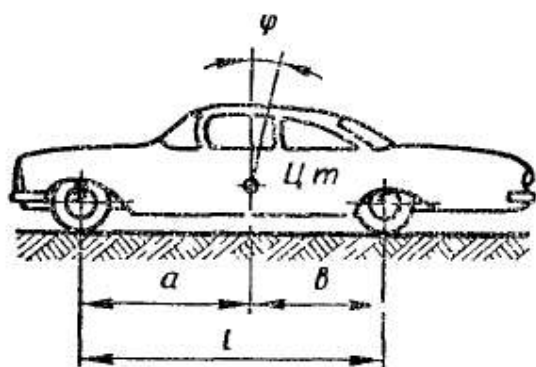


Рис. 534

Рассматривая колебания упругих систем с несколькими степенями свободы, дифференциальные уравнения движения во многих случаях можно получить, как и в случае систем с одной степенью свободы, пользуясь принципом Д'Аламбера.

Рассматривая колебания упругих систем с несколькими степенями свободы, дифференциальные уравнения движения во многих случаях можно получить, как и в случае систем с одной степенью свободы, пользуясь принципом Д'Аламбера.

Движение массы m в пространстве рассмотрим в координатной системе xyz . Составляя уравнения равновесия, к равнодействующим X , Y и Z всех внешних сил, действующих на массу и направленных

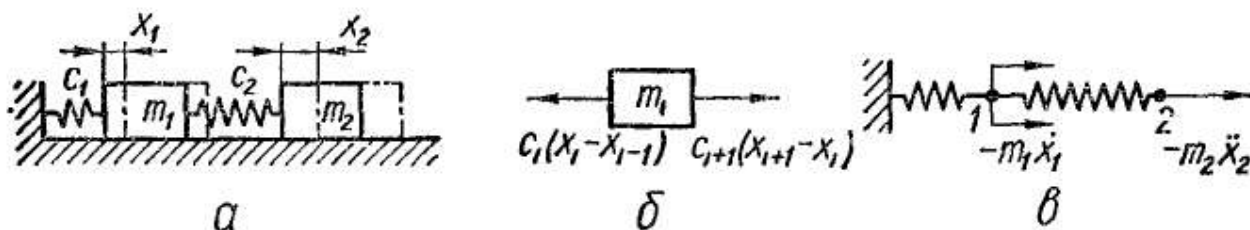


Рис. 535

соответственно вдоль осей x , y и z , необходимо добавить силы инерции. Составляющие сил инерции на направлениях x , y , z равны соответственно $-m\ddot{x}$, $-m\ddot{y}$, $-m\ddot{z}$. Тогда уравнения движения будут

$$X - m\ddot{x} = 0; \quad Y - m\ddot{y} = 0; \quad Z - m\ddot{z} = 0. \quad (20.51)$$

Если рассматривается система из нескольких масс, свободных в пространстве, то уравнения (20.51) должны быть написаны для каждой массы системы.

Теперь рассмотрим применение принципа Д'Аламбера для составления уравнения движения колебательной системы (рис. 535, а),

состоящей из двух масс m_1 и m_2 и двух пружин с жесткостями c_1 и c_2 . Будем полагать, что указанные массы могут перемещаться без трения только в горизонтальном направлении вдоль оси x . Перемещение первой массы обозначим через x_1 , второй — через x_2 .

В процессе колебания на массу m_1 в качестве внешних сил действуют сила $c_1 x_1$ натяжения внешней пружины и сила $c_2 (x_2 - x_1)$ натяжения второй пружины. Силами сопротивления пренебрегаем. Тогда, пользуясь принципом Д'Аламбера, уравнение движения первой массы

$$X - m_1 \ddot{x} = 0$$

запишем в виде

$$-c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) - m_1 \ddot{x}_1 = 0,$$

или

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0.} \quad (20.52)$$

На массу m_2 действует только сила натяжения второй пружины

$$-c_2 (x_2 - x_1),$$

а уравнение движения будет

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0.} \quad (20.53)$$

Если бы система имела не две, а три или более последовательно соединенных масс, то уравнение движения для каждой из масс содержало бы три или более неизвестных координат. Так, например, силы упругости пружины, действующие на i -ю массу, полностью определяются смещениями x_{i-1} , x_i и x_{i+1} (рис. 535, б).

Составляя дифференциальные уравнения движений, можно было воспользоваться и другим методом.

Действительно, при рассмотрении той же колебательной системы можно было бы считать, что имеются две связанные между собой пружины (рис. 535, в), которые подвергаются действию сил инерции $-m_1 \ddot{x}_1$ и $-m_2 \ddot{x}_2$, приложенных соответственно в местах удаленных масс (точки 1 и 2). Тогда первая пружина нагружена силой $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$, а вторая — силой $-m_2 \ddot{x}_2$. При этом перемещение первой массы, равное удлинению первой пружины,

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1},$$

а перемещение второй массы определится суммарным удлинением обеих пружин:

$$x_2 = x_1 - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2 \ddot{x}_2}{c_2}.$$

Несколько преобразовав последние уравнения, окончательно получим

$$x_1 c_1 + m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0; \quad (20.54)$$

$$x_2 c_1 c_2 + c_2 (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) + c_1 m_2 x_2 = 0. \quad (20.55)$$

Полученная система уравнений движения (20.54) и (20.55) эквивалентна системе уравнений (20.52) и (20.53), но отличается своей структурой.

Заметим, что второй способ в задачах рассмотренного типа громоздок, так как смещение, например, концевой точки зависит от сил инерции всех масс, а следовательно, выразится через вторые производные от смещений всех точек.

Кроме указанных двух способов, существует третий, наиболее общий способ, основанный на применении известных из теоретической механики уравнений Лагранжа второго рода, которые при отсутствии сил сопротивления и внешних возмущающих сил имеют вид

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i},} \quad (20.56)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

где T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы.

Применяя уравнения Лагранжа для составления уравнений движения рассматриваемой двухмассовой системы, прежде всего запишем выражения кинетической и потенциальной энергии этой системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2};$$

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Соответствующие производные, входящие в уравнение (20.56), такие:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

Тогда уравнение (20.56) применительно к рассматриваемому случаю примет вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0; \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Заметим, что уравнения, полученные из уравнений Лагранжа, всегда совпадают с уравнениями, полученными способом, основанным на использовании принципа Д'Аламбера. В некоторых случаях, в частности для систем цепной структуры типа рассматриваемой

мой, по соображениям простоты выкладок следует пользоваться первым способом; при расчете изгибных колебаний оказывается более удобным второй.

Итак, предположим, что уравнения движения системы с двумя степенями свободы одним из рассмотренных способов получены. Пусть эти уравнения имеют вид (20.52) и (20.53):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (20.57)$$

Решение системы этих двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в следующей форме:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ x_2 &= \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}} \quad (20.58)$$

где λ_1 , λ_2 , ω и α — постоянные, которые нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись уравнения (20.57). Подставляя решения (20.58) в уравнения (20.57), получим

$$\begin{aligned} -m_1 \lambda_1 \omega^2 + c_1 \lambda_1 - c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) &= 0; \\ -m_2 \lambda_2 \omega^2 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda_1 (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) - \lambda_2 c_2 &= 0; \\ -\lambda_1 c_2 + \lambda_2 (c_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (20.59)$$

Уравнения (20.59) содержат три неизвестных: амплитуды λ_1 , λ_2 и частоту ω . Из этих двух уравнений найти указанные три величины нельзя, однако из них можно определить частоту. Действительно, рассматривая систему уравнений (20.59), видим, что случай колебательного движения, когда $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, возможен тогда, когда равен нулю определитель указанной системы однородных уравнений относительно λ_1 и λ_2 , т. е. когда

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Написав этот определитель в развернутом виде, после преобразований получим

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно ω^2 , и легко показать, что оно имеет два действительных положительных корня:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}; \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \end{aligned}$$

Соответственно могут быть получены и две собственные частоты:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \end{aligned} \quad (20.60)$$

Получившийся в соответствии с выражениями (20.60) двухчастотный колебательный процесс в общем виде следует записать так:

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (20.61)$$

Здесь первый индекс у амплитуды λ показывает номер координаты, а второй — номер слагаемого в строке, или номер частоты.

Амплитуды колебаний связаны отношением, определяемым из первого или второго уравнений системы (20.59):

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2},$$

или в соответствии с принятой индексацией

$$\begin{aligned}\kappa_{21} &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \\ \kappa_{22} &= \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2}.\end{aligned}$$

Тогда уравнения (20.61) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \kappa_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \kappa_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (20.62)$$

При этом собственные частоты ω_1 и ω_2 , а также отношения амплитуд κ_{21} и κ_{22} зависят от параметров колебательной системы. Что касается значений амплитуд λ_{11} и λ_{21} , а также углов сдвига фаз α_1 и α_2 , то они должны быть определены из четырех начальных условий, выражающих значения смещений и скоростей обеих масс в начальный момент времени.

В случае, когда движение системы вызвано ударом по массе m_2 , что соответствует следующим начальным условиям при $t = 0$:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0; & x_2(0) &= 0; \\ \dot{x}_1(0) &= 0; & \dot{x}_2(0) &= v_0,\end{aligned}$$

из уравнений (20.62) получим

$$\begin{aligned}\lambda_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21} \lambda_{11} \sin \alpha_1 + \kappa_{22} \lambda_{12} \sin \alpha_2 &= 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{11}\omega_1 \cos \alpha_1 + \lambda_{12}\omega_2 \cos \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21}\lambda_{11}\omega_1 \cos \alpha_1 + \kappa_{22}\lambda_{12}\omega_2 \cos \alpha_2 &= v_0.\end{aligned}$$

Отсюда, поскольку ω_1 , ω_2 , κ_{21} и κ_{22} известны, находим, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \frac{1}{\kappa_{21} - \kappa_{22}}; \quad \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \frac{1}{\kappa_{22} - \kappa_{21}}.$$

Подбирая искусственным образом начальные условия так, чтобы амплитуда $\lambda_{12} = 0$, можно получить одночастотные колебания, описываемые одной гармоникой:

$$\begin{aligned}x_{11} &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \\ x_{21} &= \kappa_{21} \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1).\end{aligned}\tag{20.63}$$

Колебания, описываемые одной гармоникой, называются *первыми нормальными* колебаниями. Поскольку величина κ_{21} отношения амплитуд не зависит от начальных условий то рассматриваемые одночастотные колебания характеризуются вполне определенным соотношением амплитуд, зависящим только от параметров системы. Следовательно, κ_{21} определяет первую нормальную форму колебаний.

Вторая форма колебаний, очевидно, определится отношением $\kappa_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}}$ в том случае, когда начальные условия выбраны такими, при которых $\lambda_{11} = 0$ и осуществляются вторые нормальные колебания, описываемые формулами

$$\begin{aligned}x_{12} &= \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_{22} &= \kappa_{22} \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).\end{aligned}\tag{20.64}$$

Заметим, что число нормальных форм колебаний и равное ему число собственных частот совпадает с числом степеней свободы колебательной системы и что две нормальные формы колебаний ортогональны, т. е. имеет место соотношение

$$m_1 \lambda_{11} \lambda_{12} + m_2 \lambda_{21} \lambda_{22} = 0.$$

Установив общие принципы определения основных параметров колебаний упругих систем с несколькими степенями свободы, перейдем к рассмотрению важнейших видов колебаний, часто встречающихся в инженерном деле.

§ 130. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОВ И СИСТЕМ ПЕРЕДАЧ

Представим себе механическую систему, состоящую из упругого вала с насаженными на него дисками (рис. 536, а), совершающую крутильные колебания. Пусть $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$ — моменты инерции масс дисков относительно оси вала, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ — углы поворота дисков при колебании; $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — жесткости

(20.75), равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 & \dots & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20.76)$$

Написав этот определитель в развернутом виде и обозначив через a_i коэффициенты при различных степенях ω , получим частотное уравнение n -й степени для квадрата частоты ω :

$$1 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \dots + (-1)^n a_n\omega^{2n} = 0. \quad (20.77)$$

Из уравнения (20.77) получим

$$\omega_1 = +\sqrt{\omega_1^2}; \quad \omega_2 = +\sqrt{\omega_2^2}; \quad \dots; \quad \omega_n = +\sqrt{\omega_n^2};$$

$$(\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_n).$$

Тогда общее решение системы уравнений можно записать так:

$$w_i = \lambda_{i1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{i2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{in} \sin(\omega_n t + \alpha_n),$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{1n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ w_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{2n} \sin(\omega_n t + \alpha_n); \\ &\dots \\ w_n &= \lambda_{n1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{n2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + \lambda_{nn} \sin(\omega_n t + \alpha_n) \end{aligned} \quad (20.78)$$

Таким образом, в каждом направлении $i = 1, 2, \dots, n$ происходят колебания с большим спектром частот.

В частном случае системы с двумя степенями свободы уравнения (20.75) примут вид

$$\begin{aligned} \lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2 \delta_{12}\omega^2 &= 0; \\ \lambda_1 m_1 \delta_{21}\omega^2 + \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Определитель (20.76) при этом будет

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Записав определитель в развернутом виде, найдем частотное уравнение

$$\omega^4 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2 - \omega^2 (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0,$$

откуда первая и вторая частоты колебаний определяются соответственно формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 m_2)} \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} + \dots \right]}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}}; \\
 \omega_2 = & \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) m_2} \left[\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} - \right.} \\
 & \left. - \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}.
 \end{aligned}$$

Пример 85. Определить собственную частоту колебаний балки (рис. 539), несущей три одинаковых сосредоточенных груза массой m каждый.

Прежде всего определим перемещения точек приложения грузов под действием единичных сил $\bar{P}_1 = 1$, $\bar{P}_2 = 1$ и $\bar{P}_3 = 1$. С этой целью построим эпюры изгибающих моментов от указанных единичных сил (рис. 540). Пользуясь фор-

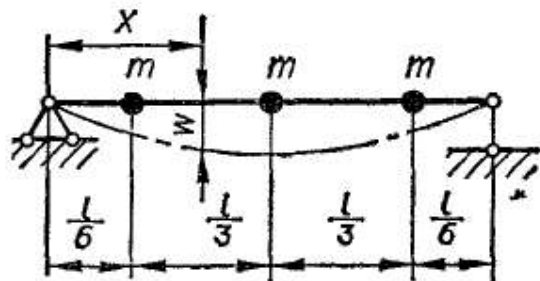


Рис. 539

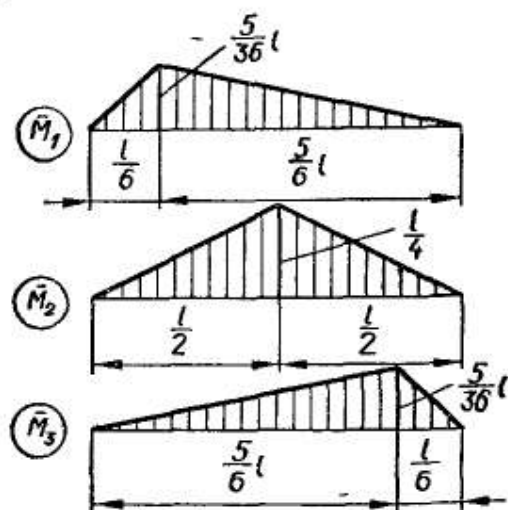


Рис. 540

мулой Верещагина, найдем перемещения от единичных нагрузок:

$\delta_{11} = \delta_{33} = 75k$; $\delta_{22} = 243k$; $\delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{23} = 117k$; $\delta_{13} = \delta_{31} = 51k$,
 где

$$k = \frac{l^3}{9 \cdot 1296EJ}.$$

Имея значения δ_{in} , составим определитель, аналогичный выражению (20.76):

$$\begin{vmatrix}
 75mk\omega^2 - 1 & 117mk\omega^2 & 51mk\omega^2 \\
 117mk\omega^2 & 243mk\omega^2 - 1 & 117mk\omega^2 \\
 51mk\omega^2 & 117mk\omega^2 & 75mk\omega^2 - 1
 \end{vmatrix} = 0.$$

Записав полученный определитель в развернутом виде, найдем уравнение частоты:

$$77\,760 (mk\omega^2)^3 - 12\,096 (mk\omega^2)^2 + 393mk\omega^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет следующих три корня, соответствующих трем значениям собственных круговых частот колебаний рассматриваемой упругой системы.

$$\omega_1 = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad (20.80)$$

$$\omega_2 = \frac{22,05}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad (20.81)$$

$$\omega_3 = \frac{36,00}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}. \quad (20.82)$$

**§ 132. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ**

Поперечные колебания струны. Выведем дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Для этого рассмотрим отклонение струны, закрепленной в точках A и B (рис. 541, a). Первоначальное ее натяжение пусть будет P . Будем считать отклонение незначительным, а изменением усилия натяжения P при этом пренебрежем, т. е. $P = \text{const}$. Длина струны l .

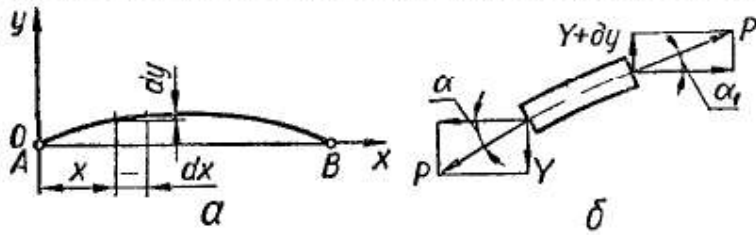


Рис. 541

Полагая, что при отклонении все точки струны находятся в плоскости xy , рассмотрим элемент струны, имеющий массу dm ; концевые точки его x и $x + dx$. Проведем касательные к струне в крайних точках элемента; углы наклона касательных к оси x соответственно α и α_1 (рис. 541, b). Считаем их также малыми.

Составляющая натяжения по оси Oy в точке x

$$Y = -P \sin \alpha,$$

а в точке $x + dx$

$$Y + \delta Y = P \sin \alpha_1.$$

В силу малости углов можно принять, что

$$\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x};$$

$$\sin \alpha_1 \approx \text{tg } \alpha_1 = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Сумма проекций натяжений на ось y составляет

$$\delta Y = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Чтобы найти уравнение движения, нужно, следуя принципу Д'Аламбера, эту силу приравнять силе инерции элемента струны, равной $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, что дает

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (20.83)$$

Обозначив через Q вес всей струны, для dm получим следующее выражение:

$$dm = \frac{Q}{gl} dx,$$

где g — ускорение силы тяжести.

Тогда уравнение (20.83) примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Pgl}{Q} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (20.84)$$

Обозначая

$$\frac{Pgl}{Q} = a^2,$$

выражение (20.84) запишем так:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.} \quad (20.85)$$

Это и есть уравнение плоских поперечных колебаний натянутой струны.

Теперь задача состоит в том, чтобы отыскать y как функцию от x и t , т. е.

$$y = F(x, t).$$

Эта функция должна удовлетворять:

- 1) дифференциальному уравнению (20.85);
- 2) граничным условиям, т. е. при $x = 0$ и $x = l$ ордината $y = 0$, или

$$F(0, t) = 0; \quad F(l, t) = 0; \quad (20.86)$$

- 3) начальным условиям, т. е. при $t = 0$ она должна обращаться в заданную функцию прогибов:

$$F(x, 0) = f(x). \quad (20.87)$$

Кроме того, частная производная по t при $t = 0$ должна обращаться в заданную функцию $v(x)$ (начальная скорость):

$$\frac{\partial F(x, 0)}{\partial t} = v(x). \quad (20.88)$$

Условие (20.87) означает, что в начальный момент, т. е. при $t = 0$, струна имеет заданную форму, например такую, какую она примет, если будет оттянута штифтом S (рис. 542). В момент $t = 0$ штифт убирают и струна начинает свои колебания.

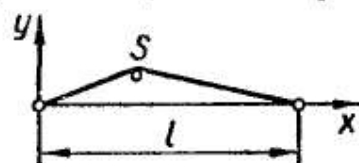


Рис. 542

Условие (20.88) означает, что в начальный момент все точки струны имеют заданную скорость, в частности могут находиться и в состоянии покоя, как это имеет место в случае, показанном на рис. 542.

Решение уравнения (20.85), следуя методу Фурье, ищем в виде

$$\boxed{y = XT,} \quad (20.89)$$

где X и T — соответственно функции x и t :

$$X = f_1(x); \quad T = f_2(t).$$

Продифференцировав выражение (20.89) по x и t , получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (20.85) последнее примет вид

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

или

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (20.90)$$

Приравнивая правую и левую части последнего уравнения к одной и той же постоянной величине — k^2 , получим два уравнения:

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 T; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{k^2}{a^2} X.} \quad (20.91)$$

Частные решения этих двух обыкновенных дифференциальных уравнений следующие:

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \cos kt; & T_2 &= \sin kt; \\ X_1 &= \cos \frac{k}{a} x; & X_2 &= \sin \frac{k}{a} x. \end{aligned}} \quad (20.92)$$

В этом легко убедиться, подставив их в уравнение (20.91).

Из функций (20.92) $\cos \frac{k}{a} x$ следует исключить как выражение, не удовлетворяющее первому из условий (20.86), так как оно не обращается в нуль при $x = 0$. Чтобы $\sin \frac{k}{a} x$ равнялся нулю при $x = l$, нужно, чтобы $kl = a n \pi$, откуда $k = \frac{a n \pi}{l}$, где n — целое число. Равенство $kl = a n \pi$ называется *уравнением периодов* или *уравнением частоты*. Оно получается непосредственно из граничных условий.

Теперь имеем два частных решения уравнения (20.85):

$$y_1 = \sin \frac{n \pi}{l} x \cos \frac{a n \pi}{l} t; \quad y_2 = \sin \frac{n \pi}{l} x \sin \frac{a n \pi}{l} t. \quad (20.93)$$

Умножив каждое из этих решений на неопределенные коэффициенты A и B и сложив эти два решения, получим общее решение в виде

$$\boxed{y = \sin \frac{n \pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{a n \pi}{l} t + B_n \sin \frac{a n \pi}{l} t \right),} \quad (20.94)$$

или, полагая

$$A_n = C_n \cos \frac{a n \pi}{l} \tau_n; \quad B_n = C_n \sin \frac{a n \pi}{l} \tau_n,$$

где C_n и τ_n — постоянные, уравнение (20.94) запишем в виде

$$y = C_n \sin \frac{n \pi}{l} x \cos \frac{a n \pi}{l} (t - \tau_n). \quad (20.95)$$

Полученное уравнение характеризует движение как периодическое, т. е. колебательное. Период колебаний

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{an\pi}{l}} = \frac{2l}{an}, \quad (20.96)$$

а частота колебаний

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{an}{2l}. \quad (20.97)$$

При $n = 1$ струна колеблется в основном тоне (с одной полуволной). При $n = 2$ струна колеблется, образуя две полуволны, при $n = 3$ — с тремя полуволнами (рис. 543).

Характер колебаний, которые струна совершает в действительности, зависит от начальных условий. Например, струна будет колебаться только в основном тоне, если при $t = 0$ она имела форму первой кривой ($n = 1$) и все ее точки были в покое. Если же начальная форма струны иная, то кроме основного тона появляются и обертоны, так как колебания струны представляют совокупность налагающихся друг на друга отдельных колебаний. Уравнение движения примет в этом случае такой вид:

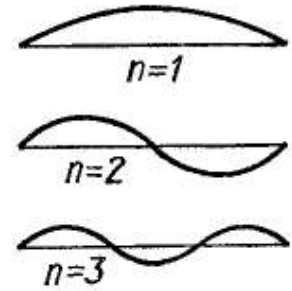


Рис. 543

$$y = \sum_n \left(A_n \cos n \frac{\pi a}{l} t + B_n \sin n \frac{\pi a}{l} t \right) \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (20.98)$$

Для окончательного решения задачи нужно из начальных условий (20.87) и (20.88) определить коэффициенты A и B уравнения (20.98).

Из условия (20.87)

$$(y)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad (20.99)$$

а из условия (20.88)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = v(x). \quad (20.100)$$

Здесь $f(x)$ и $v(x)$ — функции, заданные в интервале от 0 до l .

Равенства (20.99) и (20.100) требуют разложения этих функций в ряды, члены которых представляют собой тригонометрические функции углов, кратных $\frac{\pi x}{l}$. Эта задача решается методом Фурье, который, как известно, заключается в том, что равенство (20.99) умножают на $\sin m \frac{\pi x}{l}$ и интегрируют по всей длине от 0 до l . В результате

этого интегрирования получают

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (20.101)$$

Все члены правой части этого равенства, кроме одного, обращаются в нуль, так как при $n \neq m$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad (20.102)$$

а при $n = m$

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}. \quad (20.103)$$

Для доказательства равенств (20.102) и (20.103) вспомним, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

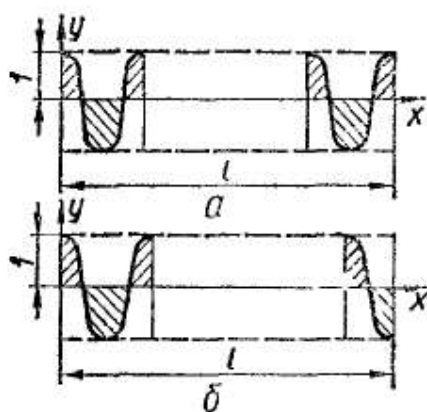


Рис. 544

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin n \frac{\pi x}{l} \sin m \frac{\pi x}{l} dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй интеграл правой части этого равенства. Он представляет собой площадь, ограниченную кривой

$$y = \cos(n+m) \frac{\pi x}{l}$$

и ординатами $x = 0$ и $x = l$. Если $n + m$ — четное число, то кривая имеет вид, показанный на рис. 544, а, если $n + m$ — нечетное число — вид на рис. 544, б. Площади отдельных частей в обоих случаях взаимно уничтожаются. Интеграл

$$\int_0^l \cos(n-m) \frac{\pi x}{l} dx$$

также обращается в нуль для всех значений $n \neq m$, а при $n = m$ его величина равна l .

Таким образом, в правой части равенства (20.101) только один член, содержащийся в равенстве (20.103), не обращается в нуль. Он по доказанному равен $\frac{A_n l}{2}$, откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (20.104)$$

Аналогично

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l v(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (20.105)$$

С помощью этих равенств вполне можно определить ряд (20.98), а вместе с тем и движение струны.

Продольные колебания стержней. Перейдем к рассмотрению колебаний призматических стержней, обладающих в отличие от струны значительной поперечной жесткостью. Прежде всего напомним, что различают три типа колебаний: продольные, поперечные и крутильные.

При продольных колебаниях все частицы стержня движутся параллельно его оси (рис. 545, а). Сжатие и растяжение поочередно следуют друг за другом как во времени, так и в пространстве.

Выведем дифференциальное уравнение колебаний стержня. С этой целью рассмотрим условие динамического равновесия участка колеблющегося стержня. Сечения a и b (рис. 545, б), ограничивающие элементарную длину dx , периодически перемещаются. Перемещение u произвольного сечения с координатой x может быть выражено как $u = f(x, t)$. Это уравнение указывает на наличие в стержне относительных перемещений отдельных его поперечных сечений. Если сечение a перемещается на u , а b — на $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, то относительное удлинение

в сечении a элемента dx (рис. 545, в) $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Тогда осевая сила в сечении a

$$N_a = EF \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В сечении b , расположенном на бесконечно близком расстоянии dx , осевая сила

$$N_b = N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x} dx = EF \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right].$$

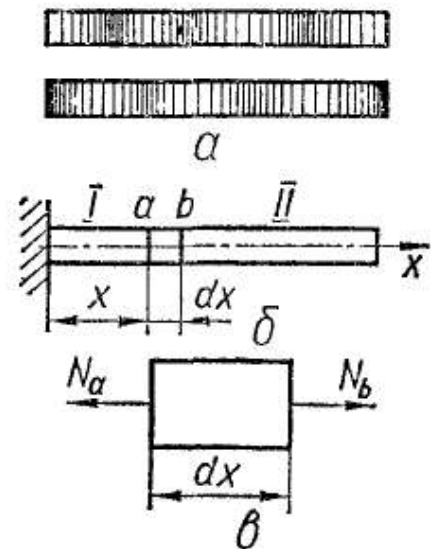


Рис. 545

Равнодействующая этих усилий должна быть равна силе инерции элемента, величина которой при массе стержня m и длине l будет

$$j = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Тогда уравнение движения

$$EF \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (20.106)$$

После сокращения на dx и замены $\frac{m}{lF}$ на ρ (плотность материала) получим

$$\boxed{E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.} \quad (20.107)$$

Это уравнение замечательно тем, что выражаемое им движение не зависит от размеров стержня. Если положить

$$\frac{E}{\rho} = a^2,$$

то получим уравнение, совпадающее по форме с уравнением (20.85) движения струны:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.} \quad (20.108)$$

Поэтому формулы, полученные при рассмотрении колебаний струны, могут быть автоматически использованы для расчета продольных колебаний стержней.

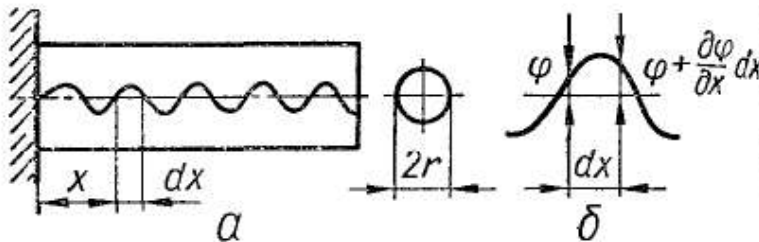


Рис. 546

При этом только потребуются соответствующее значение для коэффициента a .

Крутильные колебания стержней. При колебаниях кручения какого-нибудь, например цилиндрического, стержня движение лучше всего охарактеризовать волнистой линией, вычерчивая ее на развернутой поверхности стержня (рис. 546, а).

Пусть сечение на расстоянии x закручивается относительно неподвижного сечения на угол φ , а сечение на расстоянии $x + dx$ — на угол $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ (рис. 546, б). Тогда величина относительного угла закручивания элемента длиной dx будет $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и крутящие моменты в обоих поперечных сечениях — соответственно

$$GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } GJ_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right).$$

Приравнивая равнодействующую этих крутящих моментов к моменту инерции вращения элемента длиной dx , равному $\rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx$, получим уравнение движения

$$G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \rho J_p dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

которое после сокращения на J_p и dx примет вид

$$\boxed{G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \quad (20.109)$$

Обозначая $\frac{G}{\rho}$ через a^2 , вновь получаем уравнение в форме колебания струны:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} \quad (20.110)$$

Поэтому и в данном случае формулы, выведенные при рассмотрении колебаний струны, остаются в силе.

§ 133. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

При выводе дифференциального уравнения поперечных колебаний стержня рассмотрим динамическое равновесие участка dx , выделенного из произвольно закрепленной балки, предположим по схеме, показанной на рис. 547, а.

Пользуясь принципом Д'Аламбера, спроектируем на ось w силы, действующие на рассматриваемый элемент (рис. 547, б), и приравняем их к нулю:

$$Q - q_i dx - Q - \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0,$$

откуда

$$q_i = - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (20.111)$$

где Q — поперечная сила;

q_i — интенсивность сил инерции массы балки, направленных параллельно оси прогибов w ;

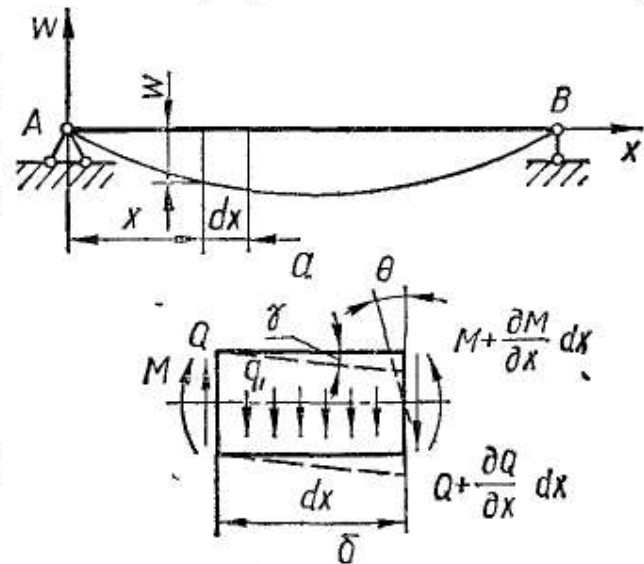


Рис. 547

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (20.112)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения стержня;
 ρ — плотность материала.

Подставляя выражение (20.112) в уравнение (20.111), найдем уравнение поступательного движения элемента колеблющегося стержня в виде

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (20.113)$$

Кроме поступательного движения, рассматриваемый элемент совершает также вращательное движение в плоскости wx . Для вывода уравнения движения элемента с учетом его вращения выразим угол между осью элемента и осью x , зависящий не только от поворота поперечного сечения Θ , но и от сдвига γ , следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Theta + \gamma. \quad (20.114)$$

Известны зависимости между изгибающим моментом M в поперечном сечении и углом поворота Θ этого сечения:

$$M = EJ \frac{d\Theta}{dx}, \quad (20.115)$$

а также между поперечной силой Q и углом сдвига γ , который в нашем случае отрицательный:

$$Q = -k\gamma FG, \quad (20.116)$$

где k — коэффициент формы сечения. На основании зависимости (20.114) выражение для Q , согласно формуле (20.116), можно записать в виде

$$Q = -kFG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Theta \right). \quad (20.117)$$

Момент инерции вращения массы рассматриваемого элемента

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \int_F y^2 dm = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \int_F y^2 \rho F(x) dx = \rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} dx. \quad (20.118)$$

Учитывая выражение (20.118) и рассматривая, пользуясь принципом Д'Аламбера, динамическое равновесие вращения стержня, будем иметь

$$Q dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx = -\rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} dx. \quad (20.119)$$

Поделив уравнение (20.119) на dx и учитывая формулы (20.115) и (20.117), запишем его в виде

$$-kFG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Theta \right) - EJ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \rho J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0. \quad (20.120)$$

Продифференцировав последнее уравнение по x , получим

$$-kFG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - EJ \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3} + \rho J \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial t^2} = 0. \quad (20.121)$$

Перепишав уравнение (20.113) с учетом выражения (20.117) в виде

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kFG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (20.122)$$

и исключая из уравнений (20.121) и (20.122) угол Θ , легко получить дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня постоянного сечения.

Действительно, определив из уравнения (20.122)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

а также выразив $\frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial t^2}$ и подставив их в уравнение (20.121), окончательно получим

$$\boxed{EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0.} \quad (20.123)$$

Если пренебречь силами инерции вращения элемента, а также влиянием на прогиб поперечной силы, как это обычно и принято в инженерной практике при рассмотрении поперечных колебаний тонких длинных стержней, то уравнение (20.123) существенно упростится и его можно будет записать в виде

$$\boxed{EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,} \quad (20.124)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (20.125)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (20.126)$$

представляет собой скорость распространения волны деформации по стержню.

Простейшим периодическим решением уравнения (20.125) свободных поперечных колебаний стержня является так называемое *главное колебание*, в котором функция прогиба колеблющегося стержня изменяется с течением времени по гармоническому закону:

$$\boxed{w = \varphi(x) \sin(\omega t + \alpha).} \quad (20.127)$$

Функция $\varphi(x)$, устанавливающая закон распределения максимальных амплитудных отклонений точек оси стержня, называется *формой главного колебания* или *собственной формой*. Собственных форм колебаний прямого стержня, как известно, бесконечное множество, и каждой из них соответствует определенное значение частоты ω , которая называется *собственной частотой*. Эти частоты и соответствующие им собственные формы определяют с помощью уравнения собственных форм и краевых условий задачи.

Для получения уравнения собственных форм подставим выражение (20.127) в уравнение (20.124). После сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$

получим

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} - k^4\varphi(x) = 0, \quad (20.128)$$

где

$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}. \quad (20.129)$$

Уравнение (20.128) имеет четыре независимых частных решения:

$$\cos kx; \quad \sin kx; \quad \operatorname{ch} kx; \quad \operatorname{sh} kx,$$

а его общее решение может быть записано так:

$$\boxed{\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx.} \quad (20.130)$$

Четыре произвольные постоянные A , B , C и D следует подбирать так, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условиям закрепления концов стержня.

В обычных случаях число краевых условий равно числу произвольных постоянных — по два на каждом конце. Все они выражаются равенством нулю двух из следующих четырех величин:

$$\varphi(x); \quad \varphi'(x); \quad \varphi''(x); \quad \varphi'''(x),$$

пропорциональных соответственно прогибу, углу поворота (геометрические условия), изгибающему моменту и поперечной силе (динамические условия) при $x = 0$ и $x = l$.

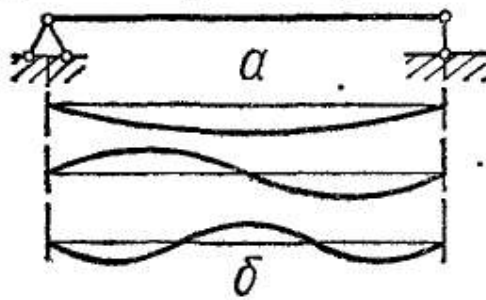


Рис. 548

Выполняя эти условия, получим четыре однородных уравнения, из которых найдем соотношения между A , B , C , D и частотные уравнения для определения собственных частот колебаний рассматриваемой системы.

Так, например, для стержня на двух опорах (рис. 548, a) условия на концах следующие: при $x = 0$ $\varphi(x) = 0$, $\varphi''(x) = 0$; при $x = l$ $\varphi(x) = 0$, $\varphi''(x) = 0$.

Запишем эти условия, исходя из формулы (20.130):

$$\begin{aligned} A + C &= 0; & B \sin kl + D \operatorname{sh} kl &= 0; \\ -A + C &= 0; & -B \sin kl + D \operatorname{sh} kl &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$A = C = D = 0$$

и

$$B \sin kl = 0.$$

Так как для нетривиального решения $B \neq 0$, то

$$\sin kl = 0. \quad (20.131)$$

Выражение (20.131) и будет уравнением частоты для рассматриваемого случая поперечных колебаний балки, свободно опирающейся

своими концами. Из уравнения (20.131) следует, что

$$k_i l = i\pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

но так как

$$k_i^4 = \frac{m\omega_i^2}{EJ} \quad (m = \rho F),$$

то собственные круговые частоты колебаний рассматриваемой балки

$$\boxed{\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}}, \quad (20.132)$$

а частоты колебаний в герцах

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (20.133)$$

Для собственных форм колебаний балки, согласно формуле (20.130), получим уравнение

$$\varphi_i(x) = B_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (20.134)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$

Первые три собственные формы графически представлены на рис. 548, б.

Общее решение дифференциального уравнения (20.125) применительно к рассматриваемой балке на двух опорах имеет вид

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Коэффициенты a_i, b_i находят из начальных условий, выражающихся соотношениями

$$w(x, 0) = u(x); \quad \dot{w}(x, 0) = v(x),$$

имеющими место в момент $t = 0$, где $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые заданные функции переменной x , определяющие начальное распределение по оси стержня поперечных отклонений и скоростей отдельных его элементов.

§ 134. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ

Во многих случаях при решении задач колебаний систем удобно исходить из рассмотрения принципа сохранения энергии системы. Так, рассматривая простейшую колебательную систему с одной степенью свободы (см. рис. 515), легко убедиться, что кинетическая энергия такой системы во время колебаний (массой пружины пренебрегаем) составляет величину

$$T = \frac{Q}{2g} \dot{x}^2,$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии деформации пружины и потенциальной энергии груза, зависящей от его положения.

При любом перемещении x нижнего конца пружины растягивающая сила в пружине будет $(\delta_{ст} + x)c$, а соответствующая потенциальная энергия, накапливаемая при этом в пружине,

$$U'_n = c \frac{(\delta_{ст} + x)^2}{2},$$

где $\delta_{ст}$ — деформация пружины под действием статически приложенного груза Q .

Энергия пружины в положении равновесия, т. е. при $x = 0$,

$$U''_n = \frac{c\delta_{ст}^2}{2}.$$

Следовательно, увеличение потенциальной энергии в пружине при перемещении на величину x

$$\begin{aligned} U_n &= U'_n - U''_n = \frac{c(\delta_{ст} + x)^2}{2} - \frac{c\delta_{ст}^2}{2} = \\ &= c\delta_{ст}x + \frac{cx^2}{2} = Qx + \frac{cx^2}{2}. \end{aligned} \quad (20.135)$$

Потенциальная энергия, обусловленная положением груза при перемещении его на величину x , уменьшится на величину

$$U_r = Qx. \quad (20.136)$$

Тогда на основании последних двух равенств полное изменение потенциальной энергии колебательной системы при перемещении груза на величину x

$$U = U_n - U_r = \frac{cx^2}{2}. \quad (20.137)$$

Благодаря тому, что груз Q всегда уравновешивается начальной растягивающей силой, возникающей при статических растяжениях $\delta_{ст}$, окончательное выражение (20.137) для потенциальной энергии системы будет то же, что и для случая, когда $Q = 0$ и удлинение пружины равно x .

Пользуясь принципом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии в системе при колебаниях, следует положить, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы остается постоянной, т. е.

$$T + U = \text{const},$$

или

$$\boxed{\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \text{const.}} \quad (20.138)$$

Величина постоянной в правой части равенства (20.138) зависит от начальных условий. Так, например, полагая, что при $t = 0$ перемещение $x = x_0$, а начальная скорость $\dot{x}_0 = 0$, будем иметь

$$\frac{Q}{2g} x^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.139)$$

Уравнение (20.139) показывает, что при колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергий остается равной начальной энергии деформации. При этом, когда колеблющийся груз находится в своем крайнем положении и его скорость равна нулю, вся энергия системы состоит только из потенциальной энергии деформации. При $x = 0$, т. е. когда груз проходит среднее положение, скорость достигает своего наибольшего значения и вся энергия системы состоит из кинетической энергии. На основании уравнения (20.139) имеем

$$\frac{Q (x^2)_{\text{макс}}}{2g} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.140)$$

Последнее уравнение можно использовать для вычисления частот колебаний системы. Как уже отмечалось, в данном случае имеем простое гармоническое движение, т. е. можем положить, что

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad (x)_{\text{макс}} = x_0 \omega.$$

Подставляя значения x и $(x)_{\text{макс}}$ в уравнение (20.140), получаем

$$\frac{Qx_0^2 \omega^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}. \quad (20.141)$$

Это совпадает с ранее полученной формулой (20.2).

Описанный способ, основанный на принципе сохранения энергии, весьма часто используют для решения различных инженерных задач колебаний, в том числе более сложных, чем здесь рассмотрены.

В заключение заметим, что изложенный здесь энергетический метод может быть использован для получения дифференциального уравнения колебаний рассматриваемой системы с одной степенью свободы. Действительно, продифференцировав уравнение (20.139), найдем, что

$$\frac{Q}{2g} 2\dot{x}\ddot{x} + c \frac{2x\dot{x}}{2} = 0.$$

Отсюда получим ранее найденное дифференциальное уравнение движения (20.1):

$$\frac{Q\ddot{x}}{g} + cx = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}.$$

Сказанное здесь применительно к колебательной системе с одной степенью свободы справедливо также и по отношению к упругим колебательным системам с несколькими и с бесконечным числом степеней свободы.

§ 135. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Способ Рейлея. При рассмотрении колебаний упругих систем с одной и с несколькими степенями свободы мы, как правило, пренебрегали массой упругого элемента по сравнению с колеблющейся сосредоточенной массой. Это имело место и в случае вертикальных колебаний груза, подвешенного на пружине (см. рис. 515), и в случае крутильных колебаний диска на валу (рис. 523), и в случае поперечных колебаний грузов, расположенных на балке (рис. 533), и в других случаях. Хотя эти упрощения во многих практических случаях не вносят особых погрешностей в получаемые решения, тем не менее для некоторых технических задач желательно более детально рассмотреть точность этих приближений. Чтобы оценить влияние принятых упрощений на получаемое значение частоты колебаний упругой системы, воспользуемся приближенным методом Рейлея.

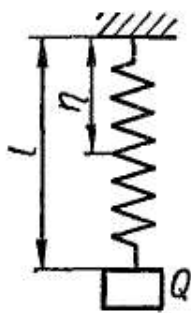


Рис. 549

Приближенность метода состоит в том, что при его применении делают некоторые допущения относительно конфигурации колебательной упругой системы во время колебания. Частоту колебаний по способу Рейлея определяют из баланса энергии системы.

Проиллюстрируем применение метода Рейлея на примере колебаний груза, подвешенного на пружине (рис. 549).

При допущении, что масса пружины мала по сравнению с массой подвешенного груза Q , тип колебания груза не может существенно зависеть от массы пружины и с достаточной точностью можно принять, что перемещение ее поперечного сечения на расстоянии η от закрепленного конца то же, что и в случае невесомой пружины, т. е. равно

$$\frac{x\eta}{l},$$

где l — длина пружины; x — перемещение груза Q .

Если перемещение, согласно принятому допущению, не зависит от массы пружины, то, очевидно, потенциальная энергия системы такая же, как и в случае, если бы пружина была невесомой.

Кинетическую энергию системы определим следующим образом. Пусть q — вес единицы длины пружины. Тогда масса элемента пружины

жины $d\eta$ будет $\frac{qd\eta}{g}$, а соответствующая кинетическая энергия

$$dT_{\pi} = \frac{q}{2g} \left(\frac{\eta}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta.$$

Полная кинетическая энергия пружины, очевидно,

$$T_{\pi} = \int_0^l \frac{q}{2g} \left(\frac{\eta}{l} \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta = \frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{ql}{3}.$$

Это значение кинетической энергии пружины следует прибавить к кинетической энергии груза

$$T_Q = \frac{Q}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия, подлежащая учету при колебании системы,

$$T = T_{\pi} + T_Q = \frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(Q + \frac{ql}{3} \right).$$

В то же время полное изменение потенциальной энергии системы при перемещении груза на величину x , согласно уравнению (20.137),

$$U = \frac{cx^2}{2}.$$

Условие сохранения энергии должно быть записано в виде

$$\frac{1}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(Q + \frac{ql}{3} \right) + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (20.142)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (20.139), можем заключить, что для оценки влияния массы пружины на период собственных колебаний нужно к весу груза Q прибавить одну треть веса пружины. Это заключение, полученное при допущении, что вес пружины очень мал по сравнению с грузом, можно с достаточной степенью точности использовать и для случаев, когда вес пружины того же порядка, что и вес груза. Так, для $ql=0,5Q$ ошибка приближенного решения составляет 0,5%, а для $ql=Q$ — около 0,75% и для $ql=2Q$ — около 3%.

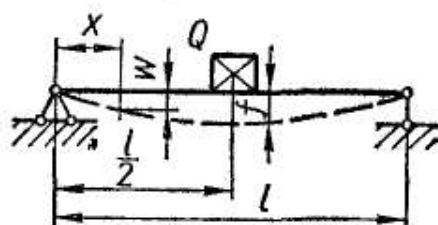


Рис. 550

В качестве второго примера рассмотрим колебания груза, расположенного посередине балки (рис. 550).

Следуя методу Рейлея и полагая, что вес ql балки мал по сравнению с весом Q груза, с достаточной точностью можно допустить, что кривая прогибов балки при колебании имеет такую же форму, как и кривая статических прогибов. Тогда, обозначая через f перемещение груза Q при колебании, получим перемещение любого элемента qdx балки на расстоянии x от опоры:

$$w = f \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3}. \quad (20.143)$$

Кинетическая энергия самой балки

$$T_6 = 2 \int_0^{l/2} \frac{q}{2g} \left(\frac{df}{dt} \frac{3xt^2 - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35} \frac{ql}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_r = \frac{Q}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия колеблющейся системы

$$T = T_6 + T_r = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2. \quad (20.144)$$

Потенциальная энергия деформации балки при изгибе

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ},$$

или, учитывая, что

$$M = EJ \frac{d^2 w}{dx^2},$$

а на основании выражения (20.143)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{24}{l^3} fx,$$

получим

$$U = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{EJ}{2} \left(\frac{24}{l^3} fx \right)^2 dx = \frac{24EJ}{l^3} f^2. \quad (20.145)$$

Условие (20.138) сохранения энергии тогда примет вид

$$T + U = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{24EJ}{l^3} f^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя последнее уравнение по t , найдем, что

$$\frac{Q + \frac{17}{35} \gamma El}{2g} 2 \frac{d^2 f}{dt^2} \frac{df}{dt} + \frac{2 \cdot 24EJ}{l^3} f \frac{df}{dt} = 0,$$

откуда после сокращения получим

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{48EJ}{l^3} \frac{g}{\left(Q + \frac{17}{35} \gamma Fl \right)} f = 0,$$

или, вводя понятие приведенного прогиба $\delta_{пр}$:

$$\boxed{\delta_{пр} = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma Fl}{48FJ} l^3,} \quad (20.146)$$

дифференциальное уравнение колебания груза на балке с учетом ее массы можно представить в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{g}{\delta_{\text{пр}}} f = 0. \quad (20.147)$$

Отсюда частота ν собственных колебаний груза, согласно выражению (20.6),

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{пр}}}}.$$

Из формулы (20.146) следует, что для учета массы балки при определении частоты или периода свободных колебаний следует балку считать невесомой, а к весу груза прибавлять $\frac{17}{35} = 0,486$ веса балки.

Величина $\frac{17}{35} \frac{\gamma F l}{g}$ называется *приведенной массой балки*.

В заключение рассмотрим случай поперечных колебаний грузов, связанных с балкой, лежащей на двух опорах (см. рис. 538). Предположим, что кинетическая энергия системы обусловлена только поступательным перемещением грузов, а потенциальная — только изгибом балки. Далее полагаем, что колебания всех точек оси балки происходят с одной частотой и находятся в одной фазе, тогда свободные колебания сечения балки с абсциссой x в функции времени можно описать синусоидальным законом

$$\varphi(x, t) = \omega(x) \sin(\omega t + \alpha),$$

где $\omega(x)$ — уравнение кривой максимальных отклонений от равновесного состояния, определяющее форму колебаний.

Имея в виду, что скорость перемещения точек оси балки определится выражением

$$v(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) \omega \cos(\omega t + \alpha),$$

максимальное значение скорости запишем в виде

$$v_{\text{макс}} = \omega \omega(x),$$

а кинетическая энергия, соответствующая максимальной скорости,

$$T_{\text{макс}} = \frac{m_1 v_{1\text{макс}}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2\text{макс}}^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_{n\text{макс}}^2}{2},$$

или

$$T_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\omega_i^2 \omega^2), \quad (20.148)$$

где ω_i — амплитуда перемещения сечения балки в месте расположения сосредоточенной i -й массы.

Значение максимальной потенциальной энергии деформации изгиба балки, которое будет при наибольшем отклонении балки, определится выражением

$$U_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (20.149)$$

Приравнивая выражения (20.148) и (20.149), найдем следующую основную формулу Рейлея для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.150)$$

В случае непрерывного распределения массы суммирование в знаменателе последней формулы заменяется интегрированием:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m \omega^2 dx}. \quad (20.151)$$

Поскольку в рассмотренном случае форма колебаний балки принята была приближенно в виде синусоиды, то формула (20.150) дает приближенное значение частоты. Когда же известна действительная форма $w(x)$ колебаний, то формула (20.150) дает точное значение частоты. Вообще же уравнение функции прогиба $w(x)$ заранее не известно и им обычно приходится задаваться. При выборе формы кривой необходимо стремиться отразить хотя бы примерно форму колебаний и соблюдать граничные условия задачи (в нашем случае условия на опорах).

Практически вместо того чтобы задаваться формой колебаний, задаются некоторой статической нагрузкой и определяют форму упругой линии, которую и принимают за форму колебаний. Этот способ удобен тем, что граничные условия всегда будут удовлетворены автоматически, какой бы ни была выбрана нагрузка. Принимая нагрузки в виде какой-либо системы сил P_1, P_2, \dots, P_n , потенциальную энергию изгиба можно выразить через работу внешних сил:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} P_i w_i,$$

где w_i — прогибы, вызываемые принятой системой нагрузки.

Тогда формула (20.150) примет вид

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i w_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.152)$$

Вообще говоря, за систему сил P_i целесообразно принять фактическую нагрузку $P_i = m_i g$. Тогда на основании выражения

(20.152) получим

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega_i^2}. \quad (20.153)$$

Пример 86. Определить наименьшую собственную частоту двухопорной балки, несущей три одинаковых груза массой m (см. рис. 539).

При решении поставленной задачи примем синусоидальную форму колебаний:

$$w(x) = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Это выражение удовлетворяет условиям на концах балки. Действительно, при $x = 0$ и $x = l$ прогиб и изгибающий момент отсутствуют, т. е. $w(x) = 0$ и $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$, в то же время угол поворота и поперечная сила не равны нулю, т. е. $\frac{dw}{dx} \neq 0$ и $\frac{d^3 w}{dx^3} \neq 0$.

Для определения частоты воспользуемся формулой (20.150).

Поскольку

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 = \left(-\frac{a\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l},$$

то числитель формулы (20.150)

$$\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l EJ a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3}. \quad (20.154)$$

Чтобы определить знаменатель формулы (20.150), нужно вычислить значения прогибов балки в местах расположения грузов, т. е. значения $w(x)$ при $x = \frac{l}{6}$; $x = \frac{l}{2}$ и $x = \frac{5}{6}l$:

$$w_1 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left(\frac{\pi}{l} \frac{l}{6} \right) = \frac{a}{2};$$

$$w_2 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left(\frac{\pi}{l} \frac{l}{2} \right) = a;$$

$$w_3 = a \sin \frac{\pi x}{l} = a \sin \left(\frac{\pi}{l} \frac{5l}{6} \right) = \frac{a}{2}.$$

Тогда знаменатель формулы (20.150)

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i \omega_i^2 = m \left(\frac{a}{2} \right)^2 + ma^2 + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} ma^2. \quad (20.155)$$

Подставляя выражения (20.154) и (20.155) в формулу (20.150), определим квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i \omega_i^2} = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3 \frac{3}{2} ma^2} = \frac{\pi^4 EJ}{3ml^3}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EJ}{3ml^3}} = \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}. \quad (20.156)$$

Заметим, что полученное значение частоты, определенное приближенным энергетическим методом Рейля, мало отличается от точного ее значения, определяемого формулой (20.80).

Способ Ритца. При использовании способа Рейля делается определенное допущение относительно формы упругой линии колебаний стержня. Выбор этой формы равносильен введению некоторых добавочных ограничений, которые приводят сложную систему к системе, имеющей только одну степень свободы. При этом указанные добавочные ограничения могут только увеличить жесткость системы, что дает несколько преувеличенное значение частоты по сравнению с фактическим ее значением.

Более точные значения основной частоты, а также частот высших видов колебаний можно получить, пользуясь методом Ритца, который является дальнейшим развитием метода Рейля.

При использовании метода Ритца в уравнение упругой линии, представляющей вид колебаний, вводят несколько параметров, величины которых выбирают таким образом, чтобы частота основного типа колебаний была минимальной.

Так, например, рассматривая поперечные колебания стержня, задаемся функцией прогиба стержня в виде ряда

$$\boxed{w(x) = a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x) + \dots,} \quad (20.157)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям. Подставляя выражение (20.157) в формулу Рейля (20.151), легко убедимся, что результат зависит от конкретного выбора коэффициентов a_1, a_2, a_3 (а точнее — от отношений $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}$ и т. п.).

Согласно способу Ритца, указанные коэффициенты должны быть выбраны так, чтобы формула (20.151) давала наименьшее значение для частоты ω . Условием минимума, очевидно, будет следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m w^2 dx} \right] = 0,$$

или

$$\int_0^l m w^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l m w^2 dx = 0.$$

Деля это уравнение на $\int_0^l m\omega^2 dx$ и учитывая формулу (20.151), получим

$$\frac{\partial}{\partial a_l} \int_0^l \left[EJ \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 m \omega^2 \right] dx = 0. \quad (20.158)$$

Очевидно, таких уравнений будет столько, сколько членов в ряду (20.157). Эти уравнения однородные и линейные относительно коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Приравнявая определитель указанной системы уравнений нулю, получим частотное уравнение.

Способ позволяет определить не только низшую частоту, но и значения высших частот, хотя и с меньшей точностью. При этом можно определить столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (20.157).

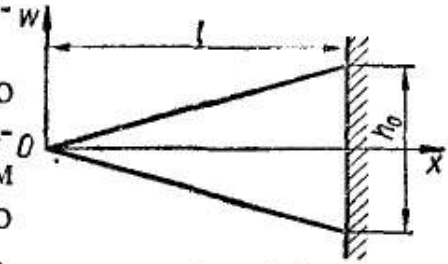


Рис. 551

Пример 87. Определить способом Ритца низшую частоту поперечных колебаний консольно закрепленного стержня переменного сечения (рис. 551), имеющего толщину, равную единице, а высоту, меняющуюся по линейному закону

$$h(x) = \frac{x}{l} h_0.$$

В этом случае

$$J = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h_0^3}{12l^3} x^3; \quad m = \frac{\rho h_0}{l} x.$$

Для приближенного решения примем, что

$$\omega(x) = a_1 \omega_1(x) + a_2 \omega_2(x) + \dots = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \dots \quad (20.159)$$

Каждый член этого разложения удовлетворяет граничным условиям задачи: при $x=l$ $\omega_l(x) = 0$; $\frac{d\omega_l(x)}{dx} = 0$.

Принимая в выражении (20.159) два члена разложения и подставляя их в уравнение (20.158), получаем

$$\frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \frac{h_0^3}{12l^3} \left[(a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} (a_1 - 2a_2) a_2 + 6a_2^2 \right] - \omega^3 \rho \frac{h_0}{E} \left(\frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right) \right\} = 0.$$

Дифференцируя это выражение по a_1 и по a_2 , найдем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Eh_0^2}{12\rho l^4} - \frac{\omega^2}{30} \right) a_1 + \left(\frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_2 &= 0; \\ \left(\frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_1 + \left(\frac{Eh_0^2}{30\rho l^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.160)$$

Приравнивая к нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим уравнение частоты, решая которое, найдем, что

$$\omega = \frac{2,66h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}. \quad (20.161)$$

Эта формула дает ошибку 0,1% по сравнению с точным решением рассматриваемой задачи, данным Кирхгофом, согласно которому

$$\omega = \frac{2,657h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Способ Бубнова — Галеркина. Способ, разработанный Н. Г. Бубновым и Б. Г. Галеркиным, получил широкое распространение для приближенного решения различных задач статики и динамики упругих тел. Для большей наглядности рассмотрим применение этого способа на примере решения задачи о поперечных колебаниях стержня переменного сечения, описываемых дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (20.162)$$

Решение этого уравнения, как известно, можно получить, представляя функцию прогиба w в виде произведения двух функций, одна из которых X является функцией только координаты сечения, а вторая T — только времени:

$$w = X(x) T(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (20.162), получаем два уравнения для определения функций X и T . Первое из них имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] - m\omega^2 X = 0.$$

Согласно способу Бубнова — Галеркина, действительную кривую прогиба $X(x)$ заменяют некоторой приближенно выбранной функцией $\Psi(x)$, удовлетворяющей граничным условиям закрепления и ортогональной к исходному дифференциальному оператору. Для этого образуют интеграл

$$\int_0^l \{ [EJ(x) \Psi''(x)]'' - m\omega^2 \Psi(x) \} \Psi(x) dx = 0. \quad (20.163)$$

Отсюда, в частности, может быть получена формула Рейлея (20.151):

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [EJ(x) \Psi''(x)]'' \Psi(x) dx}{\int_0^l m \Psi^2(x) dx}.$$

Если принять $\Psi(x)$ в виде

$$\Psi(x) = a_1 \Psi_1(x) + a_2 \Psi_2(x) + \dots \quad (20.164)$$

и рассмотреть каждое из слагаемых $\Psi_i(x)$ как возможное перемещение, то вместо равенства (20.163) получится соотношение, выражающее равенство нулю виртуальной работы:

$$\int_0^l \{ [EJ(x) \Psi''(x)]'' - m\omega^2(x) \} \Psi_i(x) dx = 0. \quad (20.165)$$

Таких равенств можно записать столько, сколько слагаемых имеет принятое выражение $\Psi(x)$.

Каждое из уравнений (20.165) однородно и содержит неизвестные значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots в первой степени. Приравняв к нулю определитель полученной таким образом системы однородных уравнений (20.165), получим частотное уравнение.

Пример 88. Определим способом Бубнова — Галеркина низшую частоту поперечных колебаний консоли переменного сечения (рис. 551), имеющей толщину, равную единице; высота изменяется по линейному закону

$$h(x) = \frac{x}{l} h_0; \quad J = \frac{h_0^3}{12l^3} x^3; \quad m = \frac{\rho h_0}{l} x.$$

Для приближенного решения поставленной задачи по способу Бубнова — Галеркина примем:

$$\Psi(x) = a_1 \Psi_1(x) + a_2 \Psi_2(x) + \dots = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \dots$$

Выбранная функция, очевидно, удовлетворяет граничным условиям задачи:

при $x = l$

$$\Psi(x) = 0; \quad \Psi'_i(x) = 0;$$

при $x = 0$

$$EJ\Psi''_i(x) = 0 \quad \text{и} \quad EJ\Psi'''_i(x) = 0.$$

Дифференцируя $\Psi(x)$ два раза, умножая на $EJ(x) = \frac{Eh_0^3}{12l^3} x^3$ и вновь дифференцируя два раза, будем иметь

$$[EJ(x) \Psi''(x)]'' = \frac{Eh_0^3}{l^6} \left[(a_1 - 2a_2)x + 6 \left(\frac{a_2 x^2}{l} \right) \right].$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (20.165), получим

$$\int_0^l \left\{ \frac{Eh_0^3}{l^6} \left[(a_1 - 2a_2)x + \frac{6a_2 x^3}{l} \right] - \frac{\omega^2 \rho h_0}{l} \left[a_1 x \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \right] \right\} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = 0;$$

$$\int_0^l \left\{ \frac{Eh_0^3}{l^6} \left[(a_1 - 2a_2)x + \frac{6a_2 x^2}{l} \right] - \frac{\omega^2 \rho h_0}{l} \left[a_1 x \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x^2}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \right] \right\} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = 0.$$

Выполняя указанное интегрирование, после преобразования будем иметь такую же систему однородных уравнений, как и (20.160) по способу Ритца. Приравнявая к нулю определитель системы, получим уже известную формулу (20.161) для определения частоты.

Глава 21

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЕЙСТВИЮ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 136. ЯВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов действию нагрузок, меняющихся во времени по величине или по величине и знаку, существенно отличается от сопротивления действию статической нагрузки. При этом под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок. Типичным примером детали, испытывающей переменные нагрузки, является шток поршневой машины, знак напряжений в котором меняется в соответствии с изменением направления движения поршня.

Практикой установлено, что если элемент конструкции многократно подвергать переменному нагружению определенного уровня, то после некоторого числа перемен напряжений в нем появится трещина, которая постепенно будет развиваться. В конце концов деталь разрушится, не дав при этом заметных остаточных деформаций даже в том случае, когда ее материал высоко пластичен.

Число циклов до появления первой трещины и до полного разрушения стержня будет тем больше, чем меньше напряжение. Характерно, что разрушение материала под действием повторно-переменных нагрузок может произойти при напряжениях ниже предела текучести. Разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений называется *разрушением от усталости*.

Вообще же *усталостью материалов* (в частности, металлов) называют явление разрушения в результате постепенного накопления в них повреждений, приводящих к возникновению усталостной трещины при многократном повторении нагружений.

Способность металлов сопротивляться разрушению при действии повторно-переменных напряжений называется *выносливостью материала*.

Изучение вопросов усталости в сопротивлении материалов имеет чрезвычайно большое значение. Такие ответственные детали, как оси железнодорожных вагонов, коленчатые валы, шатуны моторов, гребные винты, клапанные пружины, воздушные винты, поршневые пальцы и многие другие детали, выходят из строя главным образом вследствие разрушений усталостного характера.

Усталостное разрушение наблюдается при наличии одной из следующих двух особенностей приложения нагрузки:

1) многократного приложения нагрузки одного знака, например периодически изменяющейся от нуля до максимума (рис. 552, а);

2) многократного повторения нагрузки, периодически изменяющейся не только по величине, но и по знаку (знакопеременной нагрузки), когда на выносливость материала одновременно оказывают влияние и повторность и переменность нагружения. При этом раз-

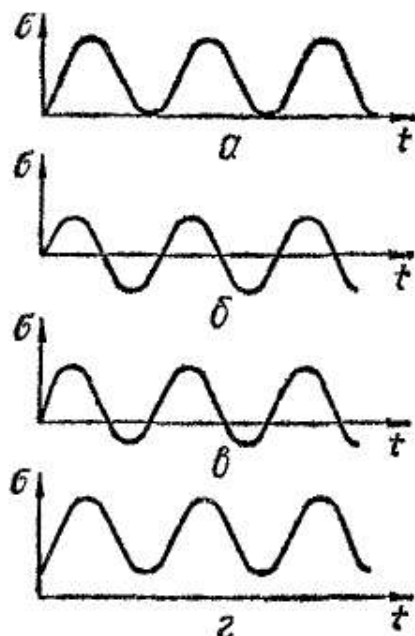


Рис. 552



В Рис. 553

личают изменение нагрузки по симметричному циклу (рис. 552, б) и изменение нагрузки несимметричное (рис. 552, в, г).

Для разрушения от усталости недостаточно переменности напряжений. Необходимо также, чтобы напряжения имели определенную величину.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе повторений переменных напряжений, называется пределом выносливости или пределом усталости.

Излом детали от усталости имеет характерный вид (рис. 553). На нем почти всегда можно наблюдать две зоны. Одна из них (А) — гладкая, притертая, образованная вследствие постепенного развития трещины; другая (В) — крупнозернистая, образовавшаяся при окончательном изломе ослабленного развившейся трещиной сечения детали. Зона В у хрупких деталей имеет крупнокристаллическое, а у вязких — волокнистое строение.

Остановимся кратко на механизме явления усталости.

Все металлы, применяемые в технике, являются поликристаллическими веществами, состоящими из отдельных зерен и не представляющими того однородного монолита, каким считают материал согласно основным гипотезам сопротивления материалов. Зерна технических металлов представляют собой совокупность кристаллов,

имеющих неправильную огранку, которые обычно называют *кристаллитами*. Поликристалличность материала и неизбежная его неоднородность приводят к тому, что под действием тех или иных нагрузок в отдельных зернах возникают перенапряжения и создаются возможности появления микротрещин. При этом в случае напряжений, вызванных статическими нагрузками, подобные микротрещины не опасны. Если же напряжения переменны во времени, то имеет место тенденция к развитию микротрещин, приводящая в конечном итоге к усталостному излому детали.

Кроме указанной гипотезы, существует и несколько другой подход к объяснению физической природы явления усталости. В частности, возникновение усталостных трещин можно объяснить исчерпанием способности кристаллических зерен сопротивляться сдвигу.

Зерна большинства металлов состоят из ряда элементарных кубиков с размерами сторон $3 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-8}$ см. Кубики, в свою очередь, состоят из системы взаимодействующих между собой атомов, расположенных в строго определенном для данного материала порядке, образуя так называемую пространственную атомную решетку. Форма и размеры элементов последней зависят от сил взаимодействия атомов и определяют характерные свойства данного вещества.

Деформация материала обычно связана с искажением кристаллической решетки и изменением межатомных расстояний. При этом в случае небольших напряжений взаимодействие между атомами не нарушается и при последующих разгрузках указанные искажения решетки исчезают. Если же напряжения большие, то в кристаллических зернах пластичных материалов по некоторым плоскостям, которые называются плоскостями скольжения кристаллита, происходят необратимые сдвиги. Сдвинутые относительно друг друга группы атомов уже не образуют единой атомной решетки. Получившееся при этом новое образование оказывается более прочным в результате усиления плоскостей скольжения внутри отдельных зерен. Теперь для его разрушения требуется большее усилие.

Однако упрочнению при сдвигах сопутствует разупрочнение (разрыхление). Поэтому процесс сдвига обязательно сопровождается появлением зон, где атомные связи нарушаются, а новые не создаются. Проявляется это в том, что образуются мельчайшие микротрещины, каждая из которых в определенных условиях (например, при соседстве нескольких зерен, ослабленных трещиной) может явиться очагом развития усталостной трещины, приводящей в конечном итоге к разрушению от усталости.

Таким образом, из сказанного видно, что механизм образования трещин при повторно-переменных нагрузках весьма сложен и не может считаться полностью изученным.

Из несомненных положений теории усталости можно отметить следующие:

1) процессы, проходящие при повторно-переменных нагрузках в металле, носят резко выраженный местный характер;

2) из двух видов напряжений — нормальных и касательных — решающее влияние на процессы усталости до образования первой трещины включительно имеют касательные напряжения, вызывающие пластические сдвиги и разрушение.

Развитие усталостной трещины, несомненно, может ускоряться при наличии растягивающих напряжений как у пластичных, так и, в особенности, у малопластичных и хрупких материалов типа чугуна, в которых появление трещины отрыва значительно повышает чувствительность к растягивающим напряжениям.

Образование трещин чаще всего наблюдается в зернах, лежащих ближе к поверхности детали. Объясняется это тем, что поверхност-

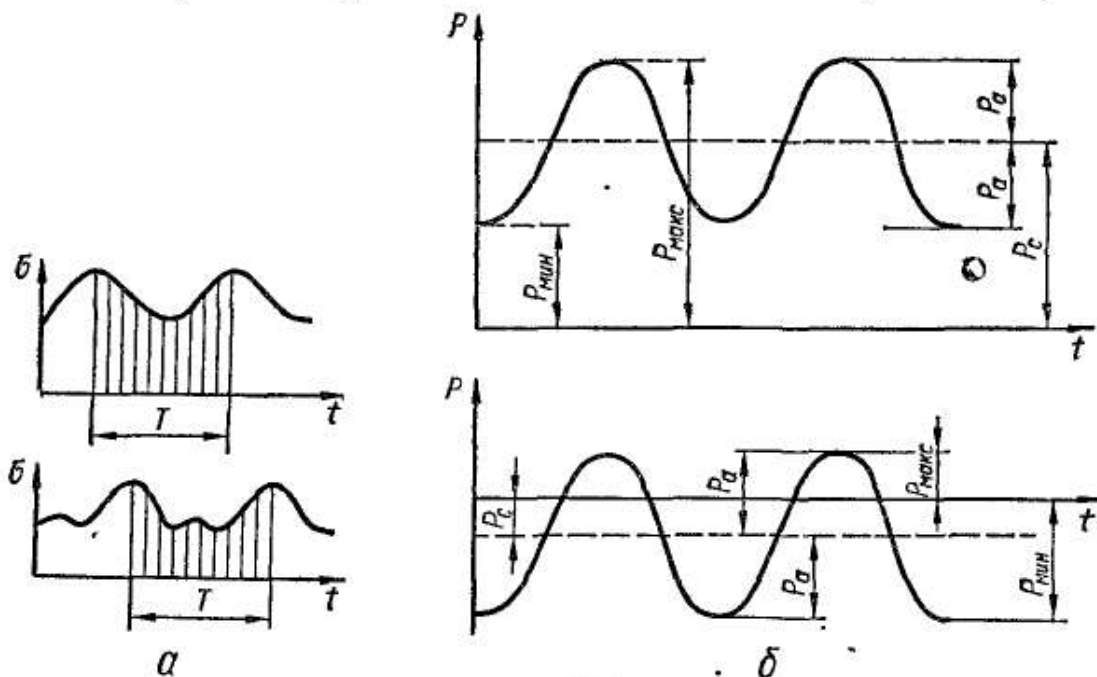


Рис. 554

ные слои материала в известной степени имеют следы повреждений различными технологическими операциями при обработке детали (внутренние напряжения, следы механической обработки), не говоря уже о тех случаях, когда наружные слои при повторно-переменных нагрузках испытывают наибольшие напряжения (при изгибе и кручении).

Предел выносливости определяют экспериментально. Он зависит от целого ряда факторов, в частности, от формы и размеров детали, способа ее обработки, состояния поверхности детали, вида напряженного состояния (растяжение — сжатие, кручение, изгиб и т. п.), закона изменения нагрузки во времени при испытаниях и т. п.

При рассмотрении сопротивления материалов действию переменных напряжений в большинстве случаев инженерной практики предполагается, что эти напряжения представляют собой периодические функции времени $p = f(t)$ с периодом, равным T^1 .

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется циклом напряжений (рис. 554, а).

¹ В настоящем учебнике не рассматриваются расчеты на выносливость под действием случайных переменных нагрузок, встречающихся в ряде конструкций.

На усталостную прочность в основном влияют максимальные $\rho_{\text{макс}}$ и минимальные $\rho_{\text{мин}}$ напряжения цикла. Кроме них в сопротивлении материалов вводят понятие *постоянного, или среднего, напряжения цикла* ρ (рис. 554, б):

$$\rho_c = \frac{\rho_{\text{макс}} + \rho_{\text{мин}}}{2} \quad (21.1)$$

и понятие об амплитуде ρ_a цикла, характеризующее переменность напряжений:

$$\rho_a = \frac{\rho_{\text{макс}} - \rho_{\text{мин}}}{2} \quad (21.2)$$

Среднее напряжение может быть как положительным, так и отрицательным, амплитуда же цикла определяется абсолютной величиной (без учета знака). В соответствии с выражениями (21.1) и (21.2)

$$\rho_{\text{макс}} = \rho_c + \rho_a; \quad \rho_{\text{мин}} = \rho_c - \rho_a.$$

Удвоенная величина амплитуды колебаний напряжений называется *размахом цикла*. Отношение минимального напряжения цикла к максимальному с учетом знаков этих напряжений называется *характеристикой цикла* или *коэффициентом асимметрии цикла*, и обозначается буквой r , т. е.

$$r = \frac{\rho_{\text{мин}}}{\rho_{\text{макс}}} \quad (21.3)$$

Наиболее опасным является так называемый симметричный цикл, когда $\rho_{\text{макс}} = -\rho_{\text{мин}}$ и $\rho_c = 0$, при котором

$$r = \frac{\rho_{\text{мин}}}{\rho_{\text{макс}}} = -1.$$

Предел усталости при симметричном цикле является минимальным для данного типа деформации и обозначается через ρ_{-1} . В случае напряжения, изменяющегося от нуля до максимума, т. е. при отнулевом, или пульсирующем, цикле, когда $\rho_{\text{мин}} = 0$,

$$r = \frac{0}{\rho_{\text{макс}}} = 0,$$

а предел усталости, соответствующий данному циклу, обозначается через ρ_0 .

При $\rho = \text{const}$, т. е. когда действует постоянная статическая нагрузка, $\rho_{\text{макс}} = \rho_{\text{мин}} = \rho$ и характеристика цикла


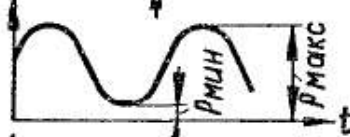
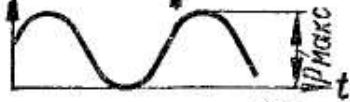
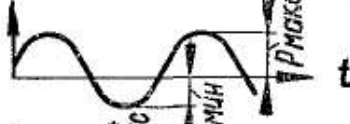
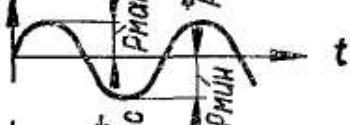
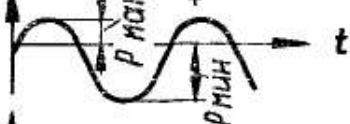
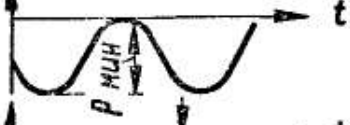
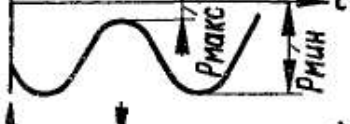
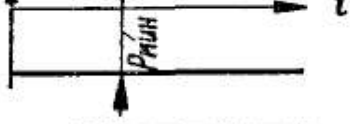
$$r = \frac{\rho_{\text{мин}}}{\rho_{\text{макс}}} = \frac{\rho}{\rho} = 1.$$

В самом общем случае предел выносливости, полученный при характеристике цикла r , обозначают ρ_r , предел выносливости, по-

ченный при каком-то определенном значении r , предположим при $r = -0,5$, обозначают соответственно $p_{-0,5}$.

Циклы, имеющие одинаковые характеристики r , называются *добными*. Характеристика цикла, или коэффициент асимметрии, может меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Таблица 22

Вид цикла	$p_{\text{макс}}, p_{\text{мин}}$	$p_c = \frac{p_{\text{макс}} + p_{\text{мин}}}{2}$ $p_a = \frac{p_{\text{макс}} - p_{\text{мин}}}{2}$	$r = \frac{p_{\text{мин}}}{p_{\text{макс}}}$
	$p_{\text{макс}} = p_{\text{мин}} > 0$	$p_c = p_{\text{макс}} = p_{\text{мин}} > 0$ $p_a = 0$	$r = +1$
	$p_{\text{макс}} > 0$ $p_{\text{мин}} > 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$0 < r < +1$
	$p_{\text{макс}} > 0$ $p_{\text{мин}} = 0$	$p_c = 1/2 p_{\text{макс}}$ $p_a = 1/2 p_{\text{макс}}$	$r = 0$
	$p_{\text{макс}} > 0$ $p_{\text{мин}} < 0$	$p_c > 0$ $p_a \neq 0$	$-1 < r < 0$
	$p_{\text{макс}} = -p_{\text{мин}} > 0$ $p_{\text{мин}} < 0$	$p_c = 0$ $p_a = p_{\text{макс}}$	$r = -1$
	$p_{\text{макс}} > 0, p_{\text{мин}} < 0$ $p_{\text{макс}} < p_{\text{мин}} $	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$-\infty < r < -1$
	$p_{\text{макс}} = 0$ $p_{\text{мин}} < 0$	$p_c = 1/2 p_{\text{мин}}$ $p_a = 1/2 p_{\text{мин}} $	$r = \pm \infty$
	$p_{\text{макс}} < 0$ $p_{\text{мин}} < 0$	$p_c < 0$ $p_a \neq 0$	$+1 < r < +\infty$
	$p_{\text{макс}} = p_{\text{мин}} < 0$	$p_c = p_{\text{макс}} = p_{\text{мин}} < 0$ $p_a = 0$	$r = +1$

Значения коэффициентов асимметрии цикла для различных видов циклов приведены в табл. 22. Очевидно, для полного суждения о характере действия циклической нагрузки кроме характеристики цикла r должно быть известно хотя бы максимальное или минимальное напряжение цикла.

В заключение заметим, что в частных случаях, когда речь будет идти о нормальных или касательных напряжениях (в первом случае

при циклическом растяжении — сжатии или изгибе, во втором — при циклическом кручении), буква p в принятых выше обозначениях должна быть заменена соответственно на σ или на τ при сохранении соответствующих индексов. Так, например, при циклическом растяжении — сжатии или изгибе вместо p_{\max} , p_{\min} , p_c и p_a должны соответственно фигурировать σ_{\max} , σ_{\min} , σ_c и σ_a , тогда предел усталости при характеристике цикла r будет обозначаться σ_r , а, например, при симметричном цикле, т. е. при $r = -1$, будет σ_{-1} . В случае кручения с циклическим изменением напряжений характерные напряжения цикла будут соответственно обозначаться через τ_{\max} , τ_{\min} , τ_c , τ_a , а предел выносливости — через τ_r , τ_{-1} , τ_0 и т. д.

§ 137. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ. ДИАГРАММЫ УСТАЛОСТИ

Чтобы определить предел выносливости того или иного материала, нужно на соответствующей испытательной машине испытать партию образцов из данного материала в количестве не менее 6—12 шт. Для этого чаще всего берут гладкие цилиндрические образцы диаметром 7—10 мм.

Пределы выносливости материала при выбранной характеристике цикла r , разумеется, будут различными в зависимости от вида деформации, при которой испытывают образцы, т. е. в зависимости

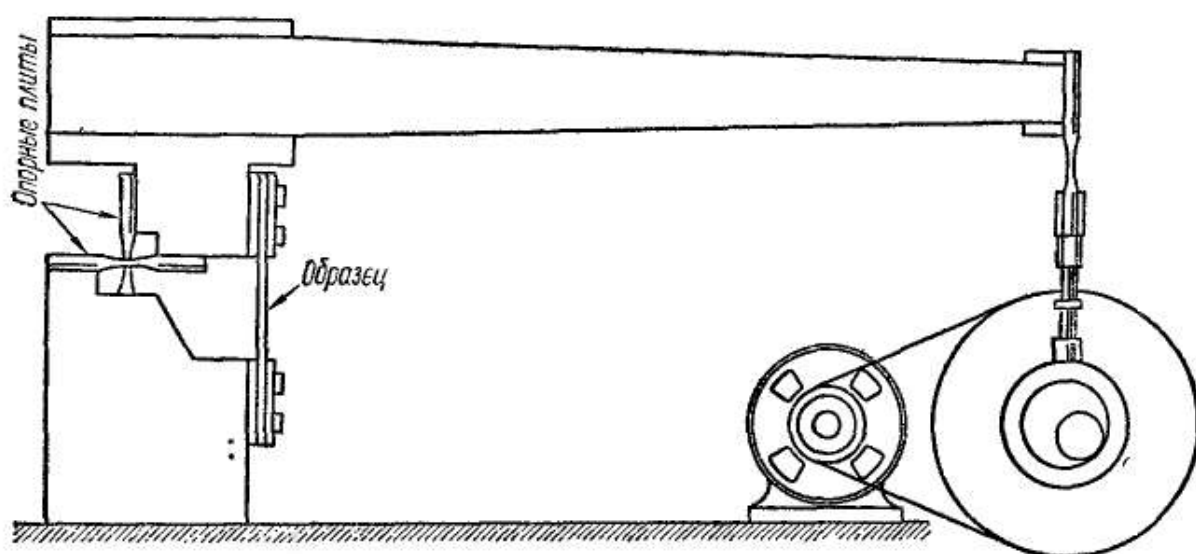


Рис. 555.

от того, при переменных напряжениях растяжения — сжатия, переменном кручении, изгибе или в условиях сложного напряженного состояния их испытывают. Поэтому, ставя перед собой цель получения предела выносливости, следует заранее указать, при каком виде деформации и характере изменения напряжений за цикл требуется определить предел выносливости.

В соответствии с поставленными требованиями выбирают необходимую испытательную машину. Для испытания материала на выносливость при переменном растяжении — сжатии можно взять машину, схема которой приведена на рис. 555.

В лабораторных условиях симметричный цикл осуществить проще всего. Схема простейшей установки для определения предела выносливости при ротационном изгибе в случае симметричного цикла показана на рис. 556. При вращении образца его наружные волокна будут испытывать попеременно то растяжение (когда они расположены снизу), то сжатие (при повороте образца на 180°).

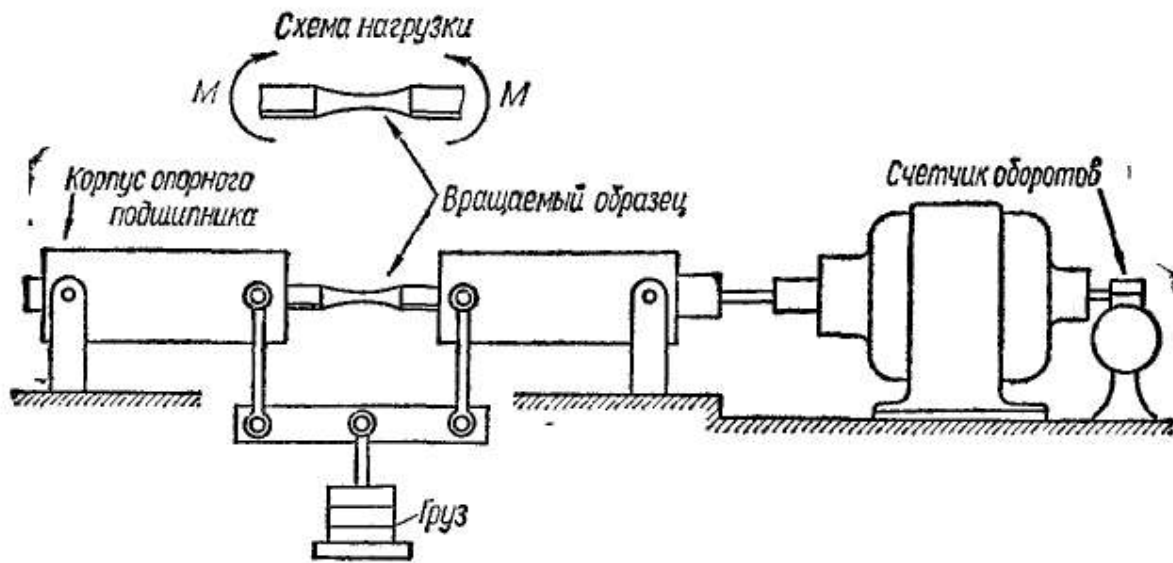


Рис. 556

Число оборотов в минуту наиболее распространенных усталостных машин обычно порядка 3000 (50 Гц). Поэтому испытание на усталость с целью получения предела выносливости требует продолжительного времени, исчисляемого неделями непрерывной работы машины. За последнее время во многих случаях при исследовании выносливости материалов и конструктивных деталей применяют более быстроходные машины — 100—500 Гц, а в некоторых случаях и 20 000 Гц (ультразвуковые частоты). В последнем случае для испытания требуются только десятки минут.

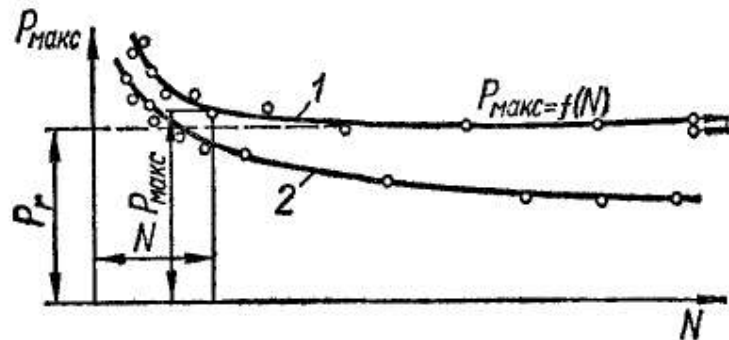


Рис. 557

При испытании партии образцов с целью получения предела выносливости необходимо давать такие нагрузки на отдельные образцы, чтобы они разрушались, выдержав различное число циклов нагружения.

Обработка полученных экспериментальных данных обычно сопровождается построением кривой усталости, которая в литературе часто называется кривой Веллера (рис. 557). Кривую усталости строят по точкам в координатах числа циклов N и напряжения p_{\max} . Каждому разрушившемуся образцу на диаграмме соответствует одна точка с координатами N (число циклов до разрушения) и p_{\max}

(напряжение), т. е. кривая усталости представляет собой функцию $p_{\text{макс}} = f(N)$.

Порядок установления нагрузок на испытуемые образцы в большинстве случаев принимают ниспадающим, т. е. на первый образец дают нагрузку, значительно превышающую предел выносливости, а нагрузку на последующие образцы постепенно снижают. Разумеется, каждый из менее нагруженных образцов будет выдерживать все большее и большее число циклов. Может быть принят и другой порядок установления нагрузок.

Строя кривую усталости по точкам разрушившихся образцов, легко убедиться, что, например при испытании стали (рис. 557, кривая 1), при высоком уровне напряжений кривая круто падает, а по мере снижения их крутизна уменьшается и кривая асимптотически приближается к некоторой горизонтальной прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, величиной которого и определяется предел выносливости. Ордината точки на кривой, где последняя практически начинает совпадать с указанной асимптотой, соответствует такому напряжению, при котором образец не разрушится, пройдя число циклов, соответствующее заранее заданной величине, так называемой *базе испытания* N_0 .

Нетрудно понять, что за базу испытания N_0 как раз и принимают то число циклов, при котором правый конец кривой усталости проходит практически параллельно оси абсцисс. Исходя из этого, *базой испытания на выносливость называется наибольшее число повторно-переменных нагрузок, существенное превышение которого не должно приводить к усталостным разрушениям испытываемого образца при данном напряжении.*

Для черных металлов (стали, чугуна и т. п.) за базу испытаний обычно принимают 10 млн. циклов, а для цветных (меди, алюминия и т. п.) — число, в 5—10 раз большее. Из рассмотрения характера усталостной кривой для цветных металлов (рис. 557, кривая 2) видно, что на большом участке она спадает весьма постепенно, т. е. кривая стремится к асимптоте медленно, поэтому и приходится в данном случае за базу испытания принимать большее число циклов. Вообще для таких металлов можно говорить только о некотором условном пределе усталости. *Условным пределом усталости называется максимальное напряжение, при котором не происходит разрушения при осуществлении определенного наперед заданного числа циклов, соответствующего той или иной принятой базе испытания.*

В связи с тем что по кривой усталости, построенной в координатах $N - p$, или, что то же самое, $N - \sigma$ (рис. 558, а), часто бывает затруднительно определить предел выносливости, применяют два других способа построения диаграмм усталости.

Первый способ заключается в том, что по оси абсцисс откладывают величину, обратную числу циклов (рис. 558, б). Предел усталости тогда определяют как ординату в месте пересечения кривой усталости с осью напряжений.

Второй способ основан на представлении результатов испытаний в полулогарифмических (рис. 558, в) или логарифмических (рис. 558, г) координатах. Как видно из чертежа, критерием для суждения о пределе усталости здесь является перелом кривой.

В заключение отметим, что, согласно многочисленным экспериментальным данным, для некоторых материалов можно заметить определенные соотношения между пределами выносливости при различных видах деформации и, в частности, между пределами выносливости при изгибе σ_{-1}^H , кручении τ_{-1} и растяжении — сжатии σ_{-1}^O при симметричных циклах.

Для гладких образцов эти соотношения приблизительно следующие: для стали $\sigma_{-1}^O = 0,7\sigma_{-1}^H$; для чугуна $\sigma_{-1}^O = 0,65\sigma_{-1}^H$; для сталей и легких сплавов $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}^H$; для чугуна $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}^H$.

Имея величину временного сопротивления σ_B , пределы выносливости стали при симметричном цикле можно приближенно найти по следующим эмпирическим соотношениям соответственно для растяжения — сжатия, изгиба и кручения:

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^O &= 0,28\sigma_B; & \sigma_{-1}^H &= 0,40\sigma_B; \\ \tau_{-1} &= 0,22\sigma_B. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Для цветных металлов наблюдается менее устойчивое соотношение между пределом усталости и временным сопротивлением; согласно опытным данным, в этом случае $\sigma_{-1}^H = (0,24 \div 0,50) \sigma_B$.

Диаграмма предельных напряжений. Чтобы охарактеризовать сопротивляемость материала действию переменных напряжений с различной асимметрией цикла, строят так называемую *диаграмму предельных напряжений* (рис. 559). В ней по оси ординат откладывают наибольшее σ_{\max} и наименьшее σ_{\min} напряжения цикла, а по оси абсцисс — среднее напряжение цикла σ_0 (диаграмма Смита). Их предельные значения $\sigma_{r_{\max}}$, $\sigma_{r_{\min}}$, σ_{r_0} определяются при данной

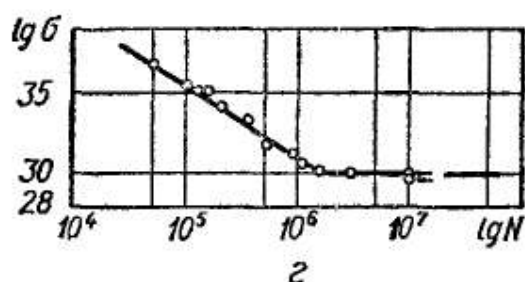
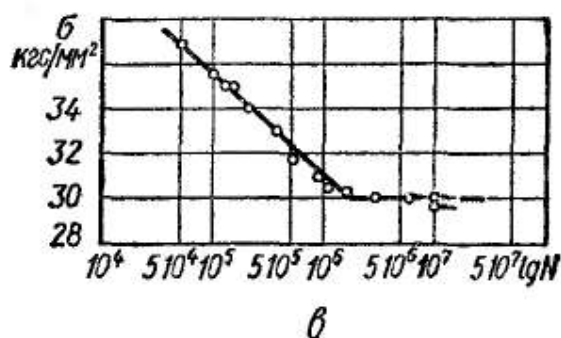
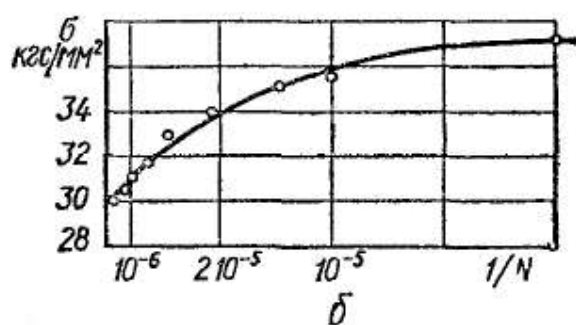
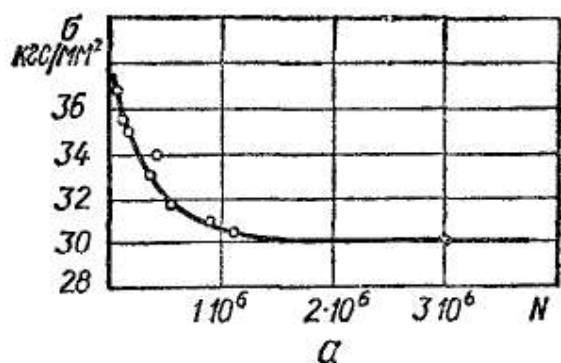


Рис. 558

характеристике цикла опытным путем в результате построения кривых усталости.

Обычно начинают с симметричного цикла ($r = -1$). Предельным напряжением в этом случае будет предел выносливости σ_{-1} . Следовательно,

$$\sigma_{-1_{\max}} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_{\min}} = -\sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_c} = 0.$$

Этому циклу на диаграмме соответствуют точки A и A' , лежащие на оси ординат.

Испытав партию образцов из данного материала при определенном значении характеристики цикла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$, определим наибольшее и наименьшее значения напряжений, при которых материал работает на пределе выносливости σ_r , т. е.

$$\sigma_{r_{\max}} = \sigma_r; \quad \sigma_{r_{\min}} = r\sigma_r; \quad \sigma_{r_c} = \frac{\sigma_{r_{\max}} + \sigma_{r_{\min}}}{2}.$$

Нанесем на диаграмму точки M и N , абсцисса которых равна σ_{r_c} , а ординаты — соответственно $\sigma_{r_{\max}}$ и $\sigma_{r_{\min}}$.

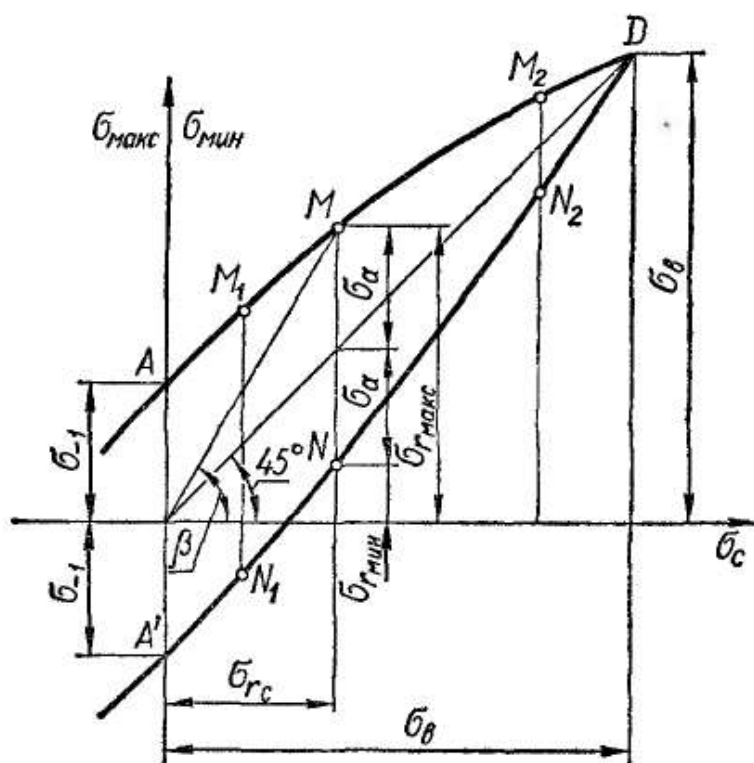


Рис. 559

Поступая подобным образом для ряда других значений r , получаем точки $M_1, N_1; M_2, N_2$ и т. д.

Соединяем линиями все точки, изображающие максимальные и минимальные предельные напряжения циклов. Очевидно правая крайняя точка диаграммы (точка D) соответствует циклу, при котором $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_c$, $r = 1$, т. е. постоянной нагрузке. Предельным напряжением в этом случае является предел прочности материала. Следовательно, абсцисса и ордината точки D равны пределу прочности материала.

Таким образом, ординаты точек линии AD соответствуют пределам выносливости материала при различных значениях коэффициента асимметрии циклов.

Легко убедиться, что лучи, проходящие через начало координат диаграммы предельных напряжений, являются геометрическим местом точек, характеризующих циклы с одинаковым коэффициентом

асимметрии $r = \frac{\sigma_{\text{мин}}}{\sigma_{\text{макс}}}$. Действительно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{\text{макс}}}{\sigma_{\text{макс}} + \sigma_{\text{мин}}} = \frac{2}{1+r}.$$

Для определения предела выносливости материала при данном значении коэффициента асимметрии r нужно вычислить по приведенной формуле угол β и провести луч под этим углом до пересечения с линией AD ; ордината точки пересечения равна величине σ_r .

В случае циклического кручения диаграмма строится по одну сторону от оси ординат и имеет такой вид, как показано, например, для конструкционной стали на рис. 560.

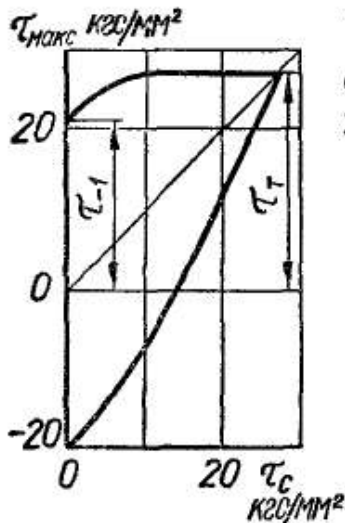


Рис. 560

Диаграмму предельных напряжений можно строить также в координатах $\sigma_a - \sigma_c$ (диаграмма Хейя), т. е. по оси ординат откладывать пре-

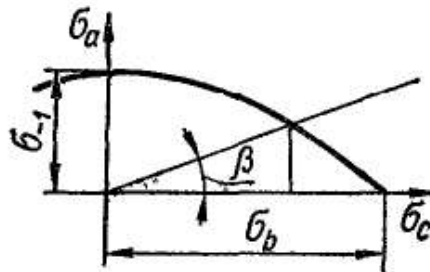


Рис. 561

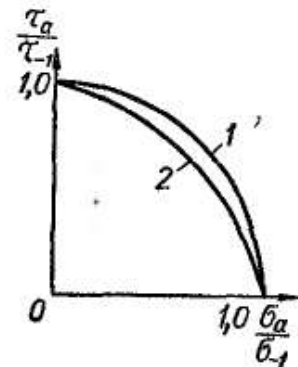


Рис. 562

дельную амплитуду σ_a цикла, а по оси абсцисс — среднее напряжение σ_c цикла (рис. 561). На этой диаграмме прямая, проведенная из начала координат под некоторым углом, также характеризует циклы с одинаковой асимметрией, так как

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{\frac{\sigma_{\text{макс}} - \sigma_{\text{мин}}}{2}}{\frac{\sigma_{\text{макс}} + \sigma_{\text{мин}}}{2}} = \frac{1-r}{1+r}.$$

Таким образом, при постоянном β оказывается постоянным и коэффициент асимметрии r .

В случае плоского или объемного напряженного состояния сопротивление усталости можно охарактеризовать, исходя из соответствующих гипотез прочности, согласующихся с экспериментальными данными.

Для исследования действительного поведения материала в условиях сложного напряженного состояния, например при сочетании изгиба с кручением, используют специальные испытательные машины, позволяющие одновременно нагружать образец переменными изгибающим и крутящим моментами.

По результатам испытаний, полученным при различных сочетаниях переменных σ и τ , строят диаграммы в координатах $\sigma_a - \tau_a$ или в относительных величинах $\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}$ и $\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}$. Точки таких диаграмм определяют напряженные состояния, характеризуемые величинами σ_a и τ_a при сложном напряженном состоянии. Типичная диаграмма для конструкционных сталей, построенная по экспериментальным данным, показана на рис. 562 (кривая 1). Она соответствует дуге окружности. Для высокопрочных сталей и чугунов экспериментальные данные располагаются ближе к эллиптическим дугам (рис. 562, кривая 2).

В случае симметричного цикла с соблюдением синхронности и синфазности напряжений условие прочности в амплитудах главных напряжений в соответствии с гипотезой наибольших касательных напряжений запишется так:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}.$$

Исходя из теории прочности энергии формоизменения, условие прочности можно записать в виде

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (21.5)$$

Для сложного напряженного состояния, характеризуемого совместным действием растяжения и кручения или изгиба и кручения, с поправкой на соотношение величин пределов выносливости условие прочности выражается так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \quad (21.6)$$

Последнее условие совпадает с ранее приведенной экспериментально полученной зависимостью, характеризующейся в координатах $\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}$; $\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}$ дугой круга.

§ 138. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

На величину предела выносливости образцов или деталей, изготавливаемых из того или иного материала, кроме характеристики цикла влияет целый ряд различных факторов. К ним относятся форма образца, размеры, состояние поверхности, среда, в которой происходят испытания, температура испытаний, режим циклического силового воздействия (тренировка, паузы, перегрузки, частота нагружения и т. п.), предварительная внутренняя напряженность материала и др.

Для выяснения влияния того или иного фактора в качестве эталона принят предел усталости p_{-1} , полученный испытанием на воздухе при симметричном цикле партии гладких полированных об-

разцов диаметром 7—10 мм. Тогда влияние различных факторов на выносливость может быть оценено отклонением предела выносливости ρ_{-1} партии рассматриваемых образцов от предела выносливости ρ_{-1} эталонных.

Влияние концентрации напряжений. Наиболее важным фактором, снижающим предел выносливости, является концентрация напряжений, вызванная резким изменением сечения детали. Концентрациями напряжений на практике являются шпоночные канавки, отверстия в детали, нарезки на поверхности, малые радиусы закруглений в местах резкого изменения размеров сечения и т. п. Концентрация напряжений, как правило, содействует зарождению усталостной трещины, которая, развиваясь, приводит в конце концов к разрушению детали.

Как показывают опыты, в случае действия переменных напряжений предел выносливости с концентрацией напряжений больше, чем частное от деления предела выносливости гладкого образца на теоретический коэффициент концентрации напряжений α_σ (см. § 33), т. е.

$$\rho_{-1к} \leq \frac{\rho_{-1}}{\alpha_\sigma}.$$

Такое расхождение объясняется тем, что теоретический коэффициент концентрации α_σ отражает характер распределения напряжений лишь для идеально упругого материала. В реальных же материалах за счет пластических деформаций в микрообласти места концентрации напряжения несколько перераспределяются и сглаживаются. Учитывая это, наряду с теоретическим коэффициентом концентрации при рассмотрении вопросов усталости используют понятие *эффективного*, или *действительного*, *коэффициента концентрации*, представляющего собой отношение предела выносливости гладкого образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца с концентрацией напряжений, имеющего такие же абсолютные размеры сечений. Эти коэффициенты в дальнейшем обозначены так:

для нормальных напряжений

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}};$$

для касательных напряжений

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}},$$

где σ_{-1} и τ_{-1} — пределы выносливости гладких образцов;

$\sigma_{-1к}$ и $\tau_{-1к}$ — пределы выносливости образцов с концентрацией напряжений.

В дальнейшем все рассуждения будем вести применительно к нормальным напряжениям, имея в виду, что для касательных напряжений все сказанное останется в силе, только следует индекс « σ » при коэффициентах заменить на « τ ».

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений имеют меньшие значения, чем коэффициенты концентрации α_σ , определяемые теоретическим путем в предположении «упругого» распределения напряжений.

Количественная оценка указанной разницы коэффициентов k_σ и α_σ может быть получена введением так называемого коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений:

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{\alpha_\sigma - 1}.$$

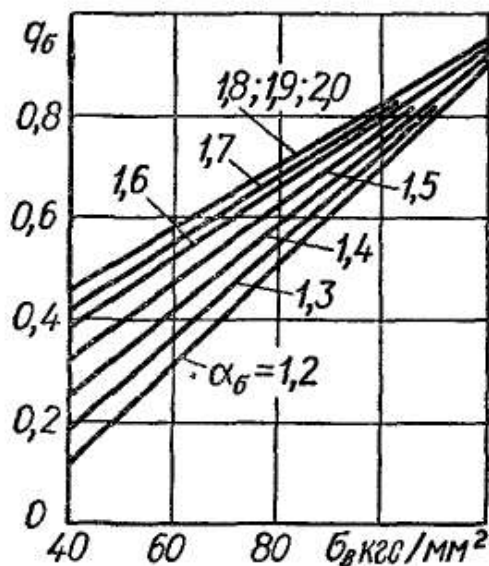


Рис. 563

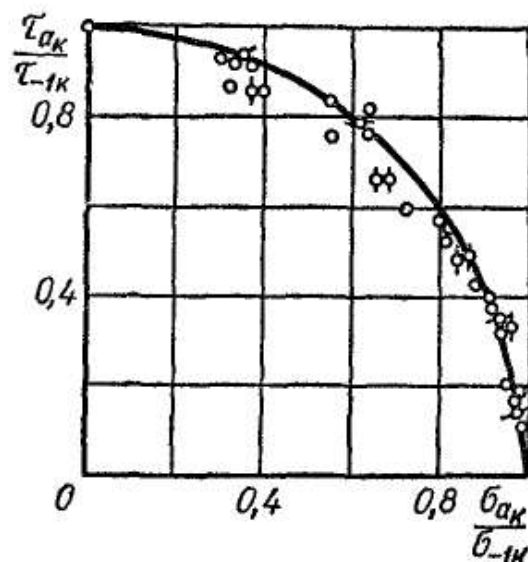


Рис. 564

Зная коэффициенты чувствительности q_σ , для которых в справочной литературе имеются соответствующие графики (рис. 563), можно по α_σ определить значения эффективных коэффициентов концентрации:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1). \quad (21.7)$$

Очевидно для материала, не чувствительного к концентрации напряжений, т. е. при $q_\sigma = 0$, $k_\sigma = 1$. Когда $q_\sigma = 1$, $k_\sigma = \alpha_\sigma$, т. е. материал обладает полной чувствительностью к концентрации напряжений.

Как видно из графиков (рис. 563), чувствительность металла к концентрации напряжений зависит прежде всего от его свойств. При этом чем выше прочность стали, тем выше ее чувствительность к концентрации напряжений. Поэтому применение высокопрочных сталей при переменных напряжениях не всегда оказывается целесообразным.

Чувствительность металла к концентрации напряжений у крупнозернистых сталей меньше, чем у мелкозернистых. Металлы и сплавы с неоднородной структурой, такие как, например, серый чугун, имеют пониженную чувствительность к концентрации напряжений вследствие того, что структурная неоднородность является внутрен-

ним источником концентрации напряжений и снижает предел выносливости гладких образцов, поэтому внешние концентраторы уже мало снижают предел выносливости.

Коэффициенты чувствительности к концентрации напряжений, как показывают эксперименты, зависят не только от механических свойств, но и от конструктивной формы самой детали, а также распределения в ней напряжений.

Влияние концентрации напряжений в расчетах деталей машин, подвергающихся действию переменных напряжений с асимметричным циклом, следует учитывать на основе экспериментальных данных, так как теоретически этот вопрос пока не решен.

Согласно экспериментальным данным, полученным на лабораторных образцах небольшого сечения, отношение предельных амплитуд гладких образцов и образцов с концентрацией, соответствующих одному и тому же среднему напряжению σ_c , не зависит от амплитуды цикла. Это обстоятельство используют для расчета деталей машин на выносливость при асимметричных циклах.

Оценку влияния концентрации напряжений при изгибе с кручением обычно осуществляют на основании соответствующих усталостных испытаний на машине, позволяющей создавать одновременное нагружение образца крутящими и изгибающими моментами при различном их соотношении. На рис. 564 представлены результаты экспериментов при синфазном изменении нормальных и касательных напряжений при симметричном цикле ($\sigma_{-1к}$, $\tau_{-1к}$ — пределы выносливости при симметричном цикле для образцов с концентрацией только при изгибе и только при кручении соответственно; $\sigma_{ак}$, $\tau_{ак}$ — предельные амплитуды для образцов с концентрацией при одновременном действии изгиба и кручения).

Рассматривая рис. 564, видим, что большая часть экспериментальных данных вполне отвечает эллиптической зависимости

$$\left[\left(\frac{\sigma_{ак}}{\sigma_{-1к}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ак}}{\tau_{-1к}} \right)^2 = 1, \right] \quad (21.8)$$

т. е. такой же зависимости, как и при отсутствии концентрации напряжений.

Влияние размеров (масштабный фактор). Эффективность концентрации напряжений связана с абсолютными размерами сечения детали, а именно: с увеличением размеров детали при сохранении ее геометрического подобия значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений увеличиваются.

Как показывают результаты экспериментов, при увеличении диаметра образца свыше 30—40 мм дальнейший рост эффективных коэффициентов концентрации практически прекращается. Можно полагать, что по достижении некоторого размера сечения эффективный коэффициент не отличается от теоретического, т. е. $k_\sigma = \alpha_\sigma$. Для легированных сталей с пределом прочности $\sigma_b \geq 120$ кгс/мм² равенство указанных коэффициентов при средних уровнях концент-

рации напряжений $\alpha_\sigma = 2 \div 3$ достигается уже при $d = 40 \div 50$ мм. Что касается углеродистых сталей, то там предельный размер, после которого $k_\sigma = \alpha_\sigma$, оказывается значительно бóльшим.

Абсолютные размеры сечений детали наряду с влиянием на эффективность концентрации напряжений оказывают существенное влияние и на пределы выносливости образцов без концентрации напряжений. При этом с ростом абсолютных размеров сечений пределы выносливости понижаются. Отношение предела выносливости детали размером d к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации, имеющего малые размеры ($d_0 = 7 \div 10$ мм), называют *коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения* и обозначают, например применительно к нормальным напряжениям так:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad (21.9)$$

Коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения можно определять и на образцах с концентрацией напряжений. В этом случае

$$\varepsilon_{\sigma_k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}, \quad (21.10)$$

причем деталь размером d и образец малого размера d_0 должны быть геометрически подобны.

Для расчета элементов машин с учетом влияния размеров детали как при наличии концентраторов напряжений, так и без них существуют специальные графики типа приведенных на рис. 565 (здесь шкала d — логарифмическая), полученные на основании экспериментов. Здесь кривая 1 соответствует детали из углеродистой стали без источника концентрации напряжений, а кривая 2 — детали из легированной стали ($\sigma_b = 100 \div 120$ кгс/мм²) при отсутствии концентрации напряжений и углеродистой стали при наличии умеренной концентрации напряжений. Кривая 3 соответствует детали из легированной стали при наличии концентрации напряжений, а кривая 4 — любой стали при весьма большой концентрации напряжений типа нарезки.

Как показывают эксперименты, при увеличении диаметра до 150—200 мм снижение пределов выносливости образцов при ротационном изгибе (см. рис. 556) может достигать 30—45%. Опытные данные свидетельствуют о малом влиянии абсолютных размеров на выносливость при однородном напряженном состоянии — растяжении — сжатии. При кручении, как и при изгибе, снижение пределов выносливости с ростом размеров детали проявляется в большей степени. Это следует отнести за счет влияния градиента напряжения.

Снижение пределов выносливости с ростом абсолютных размеров сечений детали можно объяснить также влиянием следующих факторов:

1) уменьшения механической прочности материала по мере увеличения диаметра заготовок даже при условии соблюдения их надлежащей термической обработки;

2) изменений свойств поверхностного слоя после механической обработки, поскольку эти изменения оказываются различными при разных размерах детали;

3) неоднородности механических свойств и напряженности различных зерен в связи с поликристаллической структурой металла и вытекающего отсюда повышения вероятности более раннего усталостного разрушения с ростом размеров детали; этот фактор, по видимому, является главным.

Падение прочности с ростом размеров особенно сильно выра-

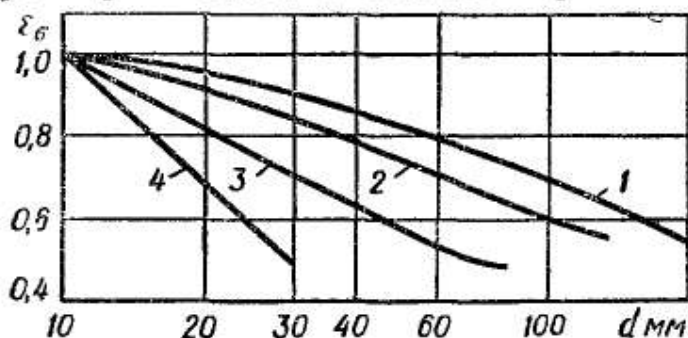


Рис. 565

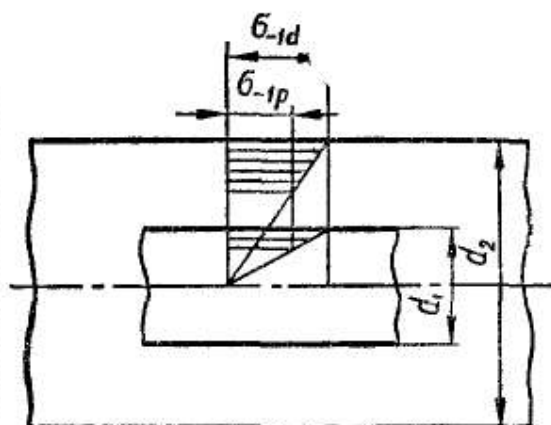


Рис. 566

жено у неоднородных металлов, например у серого чугуна: с увеличением размера с 5—10 до 50 мм снижение σ_B и σ_{-1} для него может достигать 60—70%. Исходя из вероятности усталостного разрушения, которую следует считать пропорциональной количеству опасных дефектов на единицу объема наиболее напряженного слоя металла, можно установить влияние абсолютных размеров сечения на прочность. На рис. 566 представлены эпюры напряжений при изгибе для образцов различных диаметров без концентрации напряжений. Заштрихованная зона представляет собой слой, в котором напряжения превышают предел выносливости σ_{-1p} (который получается при однородном распределении напряжений), определенный либо при растяжении — сжатии, либо при изгибе на образцах достаточно большого размера. Из рис. 566 видно, что с ростом диаметра образца растет объем опасно напряженного слоя, а следовательно, и вероятность разрушения от усталости, приводящая к снижению пределов выносливости. При увеличении диаметра образцов с 7 до 150 мм снижение предела выносливости для углеродистой стали достигает 45%.

Объяснение зависимости пределов выносливости от размеров сечений, как и других закономерностей и характеристик усталости, дают *статистические теории усталости*. Эти теории освещают вопросы изменения эффективных коэффициентов концентрации в зависимости от величин градиентов напряжений и абсолютных размеров.

Гипотезы, объясняющие ослабление эффективности концентрации напряжений по сравнению с тем, которое должно вытекать из

распределения напряжений в упругой области, и зависимость коэффициентов k_σ , k_τ от ряда факторов (размеров, свойств материала и т. д.), высказанные различными авторами, не позволяют пока вычислять значения этих коэффициентов для различных случаев расчетной практики исходя из первичных свойств металла. Поэтому для расчета деталей машин следует использовать экспериментальные данные, применяя в случае необходимости интерполяцию.

Сопротивление усталости материала оценивается по пределу выносливости $(\sigma_{-1})_{d_0}$, определяемому на гладких лабораторных образцах малого диаметра, а для суждения о прочности детали при переменных напряжениях необходимо знать ее предел выносливости

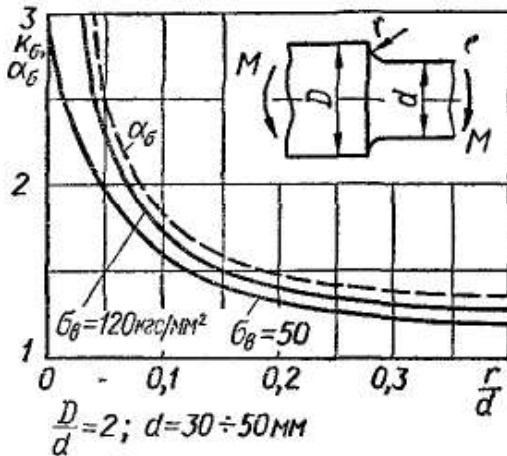


Рис. 567

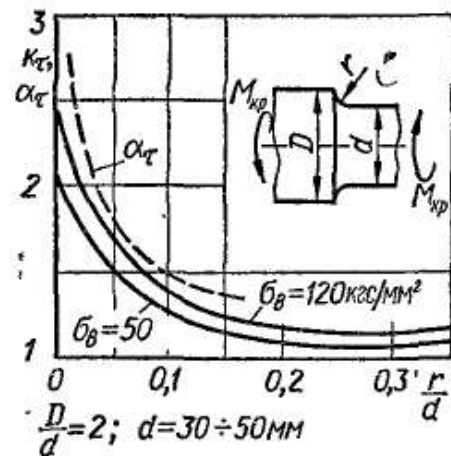


Рис. 568

$(\sigma_{-1k})_d$. Поэтому вводят дополнительное понятие *эффективного коэффициента концентрации напряжений детали* $(k_\sigma)_d$, определяемого по формуле

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d}. \quad (21.11)$$

Коэффициент $(k_\sigma)_d$ учитывает суммарное влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров на выносливость и обычно определяется по данным испытаний образцов и моделей различных сечений.

Если эффективный коэффициент концентрации $(k_\sigma)_d$ определяется на образцах достаточно большого диаметра d (после которого дальнейшее увеличение его размеров влияет на величину $(k_\sigma)_d$ незначительно), то

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\epsilon_\sigma)_d (\sigma_{-1k})_d} = \frac{(k_\sigma)_d}{(\epsilon_\sigma)_d}.$$

Заметим, что степень влияния концентрации напряжений на пределы выносливости зависит от вида напряженного состояния. При циклическом кручении, например, эффективные коэффициенты концентрации оказываются обычно более низкими, чем при изгибе для одних и тех же конструктивных форм (рис. 567 и 568). Соотношение между коэффициентами при изгибе и кручении, представленными

на рис. 567 и 568, можно выразить приближенной формулой

$$k_{\tau} = 1 + 0,6(k_{\sigma} - 1). \quad (21.12)$$

Что касается эффективного коэффициента концентрации при растяжении — сжатии, то его величина обычно равна или несколько превышает коэффициенты концентрации при изгибе (рис. 567 и 569).

Влияние состояния поверхности. В большинстве случаев поверхностные слои элемента конструкции, подверженного действию циклических нагрузок, оказываются более напряженными, чем внутренние (в частности, это имеет место при изгибе и кручении). Кроме того, поверхность детали почти всегда имеет дефекты, связанные с качеством механической обработки, а также с коррозией вследствие воздействия окружающей среды. Поэтому усталостные трещины, как правило, начинаются с поверхности, а плохое качество последней приводит к снижению сопротивления усталости.

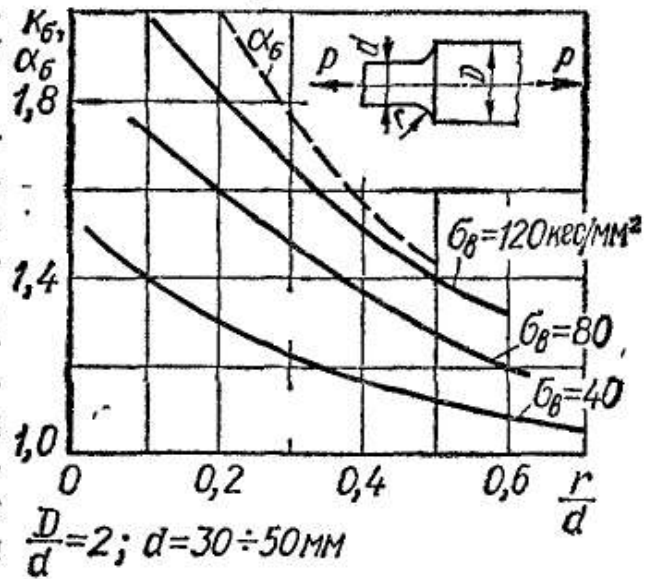


Рис. 569

Влияние состояния обработанной поверхности на выносливость оценивается коэффициентом β , который равен отношению предела выносливости испытываемого образца с определенной обработкой

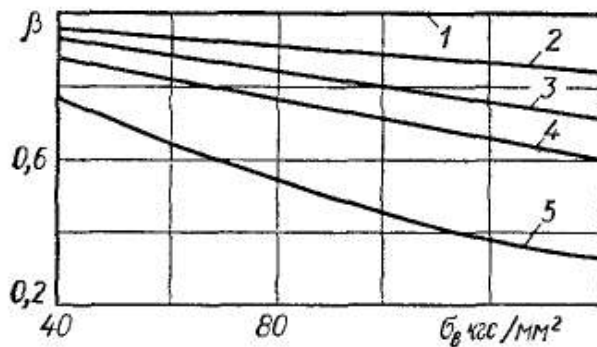


Рис. 570

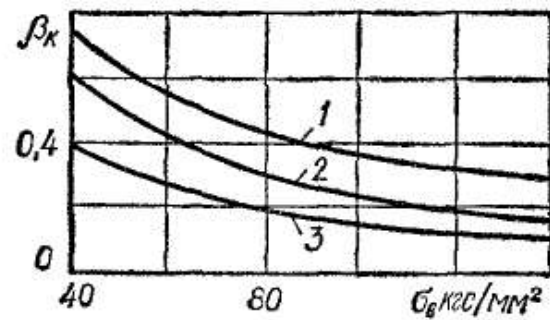


Рис. 571

поверхности к пределу выносливости тщательно полированного образца. Зависимость коэффициентов β от предела прочности σ_B для различных видов обработки приведена на рис. 570, где кривая 1 соответствует полированным образцам, 2 — шлифованным, 3 — образцам с тонкой обточкой; 4 — с грубой обточкой; 5 — с наличием окалины. Как видим, предел выносливости стальных образцов при грубой обточке снижается на 40%, а при наличии на поверхности окалины — на 70%.

Вредное влияние микронеровностей поверхности во многих случаях смягчается пластической деформацией, вызываемой в поверх-

ностном слое механической обработкой и распространяющейся на некоторую глубину, зависящую от режимов резания и, в частности, от величины подачи. При грубой обточке она может достигать 1 мм и более, а при шлифовании и полировании измеряется сотыми долями миллиметра и микронами. Пластическая деформация поверхностного слоя может дать повышение предела выносливости на 10—20%.

На предел выносливости существенное влияние оказывает коррозия. Это влияние будет различным в том случае, когда металл, подвергавшийся коррозии до испытания на усталость, не подвергается ей при испытаниях, и в случае, когда металл подвергается коррозии во время испытаний. В обоих указанных случаях, особенно во втором, коррозия вызывает резкое снижение пределов выносливости (до 70—80%). При этом снижение предела выносливости при наличии коррозии тем более сильно выражено, чем выше предел прочности металла и чем больше последний склонен к коррозии.

Влияние коррозии при расчете можно учесть коэффициентом β_k , представляющим отношение предела выносливости σ_{-1}^k коррозированного образца к пределу выносливости σ_{-1} полированного образца, т. е. $\beta_k = \frac{\sigma_{-1}^k}{\sigma_{-1}}$. Влияние коррозии в процессе испытания на предел выносливости стальных образцов при ротационном изгибе показано на рис. 571, где кривая 1 характеризует влияние коррозии в пресной воде при наличии концентрации напряжений; 2 — в пресной воде при отсутствии концентрации или в морской воде при наличии концентрации; 3 — в морской воде при отсутствии концентрации.

Причиной столь резкого снижения выносливости вследствие коррозии являются коррозионные повреждения поверхности, вызывающие значительную концентрацию напряжений, а также ослабление сопротивления образованию трещин.

Уменьшить влияние состояния поверхности на усталость можно соответствующими технологическими методами обработки, приводящими к упрочнению поверхностных слоев. К числу таких методов относятся: наклеп поверхностного слоя путем накатки роликом, обдувки дробью и т. п.; химико-термические методы — азотирование, цементация, цианирование; термические — поверхностная закалка токами высокой частоты или газовым пламенем. Указанные методы обработки приводят к увеличению прочности поверхностного слоя и созданию в нем значительных сжимающих остаточных напряжений, затрудняющих образование усталостной трещины, а потому влияющих на повышение предела выносливости.

При наличии концентрации напряжений помимо глубины слоя и его абсолютных размеров существенное влияние на эффект упрочнения оказывают уровень концентрации напряжений и градиент напряжений у поверхности. Эффект упрочнения растет с увеличением концентрации.

Влияние пауз. На предел выносливости имеют влияние паузы (перерывы в нагружении). При этом в одних случаях влияние пауз незначительно, в других число циклов до разрушения увеличивается за счет пауз на 15—20%. Увеличение числа циклов тем больше, чем чаще паузы и чем они длительнее (последний фактор влияет слабее).

Влияние перегрузок. Влияние перегрузок, т. е. нагрузок выше предела выносливости, это влияние зависит от характера перегрузки. При малых перегрузках до определенного количества циклов предел выносливости повышается, при больших перегрузках после определенного числа циклов — понижается.

Влияние тренировки. Если приложить к образцу напряжения немного ниже предела выносливости и затем постепенно повышать величину переменной нагрузки, то сопротивление усталости можно значительно повысить. Это явление, называемое *тренировкой* материала, широко используется в технике.

Упрочнение можно получить при сравнительно кратковременных тренировках (порядка 50 000 циклов), но значительных перегрузках. Опыты показывают, что если вначале действует меньшая, а затем бóльшая перегрузка, то выносливость материала оказывается более высокой, чем в том случае, когда сначала действует бóльшая, а затем меньшая перегрузка.

Влияние температуры. С повышением температуры предел выносливости обычно падает, а с понижением ее — растет как у гладких образцов, так и у образцов с концентраторами.

Для стали при температуре выше 300°C наблюдается понижение предела усталости примерно на 15—20% на каждые 100°C повышения температуры. Правда, у ряда сталей при повышении температуры от 20 до 300°C предел усталости повышается. Однако это повышение, по-видимому, связано с физико-химическими процессами, происходящими при одновременном влиянии нагрева и переменных напряжений.

При повышенных температурах даже при очень большом числе циклов кривая усталости не имеет горизонтального участка. Так, для гладких образцов даже при 100 млн. циклов горизонтальный участок не наблюдается. Влияние концентрации напряжений с повышением температуры в общем уменьшается, однако для ряда сталей, по-видимому, опять-таки за счет физико-химических процессов чувствительность к надрезу сплава увеличивается. При температурах порядка 500—600°C в стали начинаются процессы ползучести, имеющие место также и при переменных нагрузках даже при симметричном цикле.

При понижении температуры с 20 до —190°C предел выносливости у некоторых сталей увеличивается более чем вдвое, хотя ударная вязкость их при этом понижается.

Это еще раз указывает на принципиальное отличие между усталостным и хрупким разрушениями путем отрыва при статических и ударных нагрузках.

**§ 139. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ
ПРИ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ**

В случае простых видов деформации при изменении напряжений в детали по симметричному циклу запас прочности при действии, например, нормальных напряжений можно вычислить по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

где $(\sigma_{-1k})_d$ — предел выносливости детали при растяжении — сжатии или при изгибе;

σ_a — номинальные фактически действующие знакопеременные напряжения.

Для расчета на прочность при переменных нагрузках в случае сложного напряженного состояния можно использовать соответствующие теории прочности. При этом для материалов в пластическом состоянии, как известно, применяют третью и четвертую теории прочности. В рассматриваемом случае эти теории должны быть записаны в виде

$$\boxed{\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}} \quad (21.13)$$

$$\boxed{\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}} \quad (21.14)$$

В соответствии с экспериментальными данными условие прочности в форме эллиптической зависимости (см. рис. 562) при изгибе и кручении выражается формулой (21.6), а применительно к детали достаточно больших размеров с концентрацией напряжений — формулой

$$\boxed{(\sigma_{-1k})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_d} \right]^2 \tau_a^2}} \quad (21.15)$$

или

$$\boxed{\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1k})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1k})_d^2} = 1.} \quad (21.16)$$

Тогда, имея в виду, что $n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a}$ — коэффициент, характеризующий запас прочности только по нормальным напряжениям, и $n_{\tau} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a}$ — коэффициент, характеризующий прочность только по касательным напряжениям, на основании соотношения (21.16) будем иметь

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2},$$

откуда запас прочности n при сложном напряженном состоянии, например при совместном действии изгиба и кручения, определится формулой

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (21.17)$$

Определяя запасы прочности при асимметричных циклах для любого вида циклического нагружения (изгиба, растяжения — сжатия, кручения), исходят из схематизированной диаграммы предельных напряжений для образцов без концентрации напряжений (рис. 572).

Аналитическое выражение кривой предельных напряжений в координатах σ_{\max} — σ_c можно представить уравнением прямой, проходящей через две точки A и B с координатами $(0, \sigma_{-1})$ и $(\frac{\sigma_0}{2}, \sigma_0)$, и записать в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \sigma_c \operatorname{tg} \alpha,$$

где, согласно рис. 572,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2}.$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_c = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \sigma_c.$$

Обозначая

$$\Psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (21.18)$$

запишем уравнение кривой предельных напряжений для образца без концентрации напряжений так:

$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \Psi_\sigma) \sigma_c} \quad (21.19)$$

Таблица 23

σ_B кгс/мм ²	Ψ_σ	Ψ_τ
35—55	0	0
52—75	0,05	0
70—100	0,10	0,05
100—120	0,20	0,10
120—140	0,25	0,15

При действии касательных напряжений соответствующее уравнение имеет аналогичный вид:

$$\boxed{\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \Psi_\tau) \tau_c} \quad (21.20)$$

Значения Ψ_σ и Ψ_τ для ряда сталей при различных видах деформации в зависимости от предела прочности приведены в табл. 23.

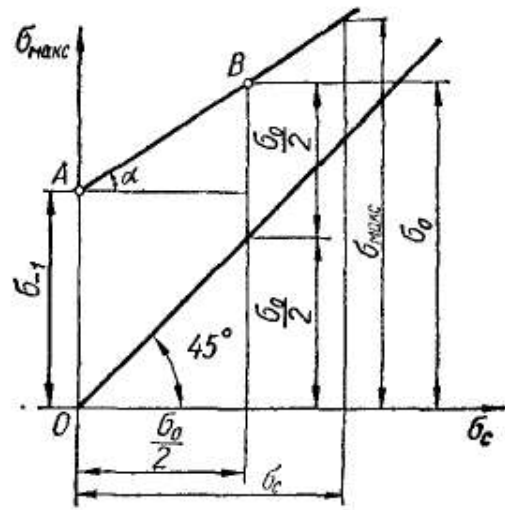


Рис. 572

Учитывая влияние на предел выносливости при асимметричном цикле различных факторов, в том числе концентрации напряжений, абсолютных размеров сечения, состояния поверхности и т. д., исходят из экспериментально установленных закономерностей, заключающихся в том, что отношение предельных амплитуд напряжений гладкого образца и рассматриваемой детали остается постоянным независимо от величины среднего напряжения цикла. На основании этого можно построить схематизированную диаграмму предельных напряжений для детали (рис. 573).

Это построение можно получить также, исходя из следующих аналитических представлений. В соответствии с выражением (21.19) предельная амплитуда напряжений образца выражается формулой

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c = [\sigma_{-1} + (1 - \Psi_\sigma) \sigma_c] - \sigma_c = \sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_c,$$

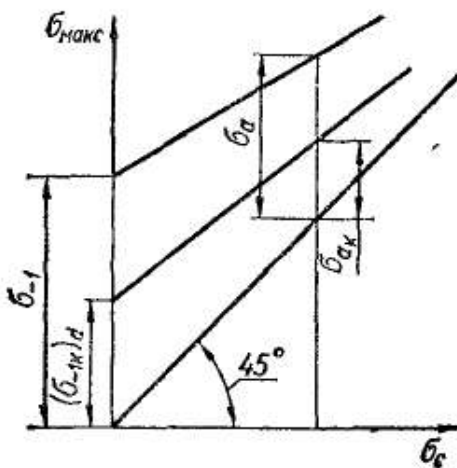


Рис. 573

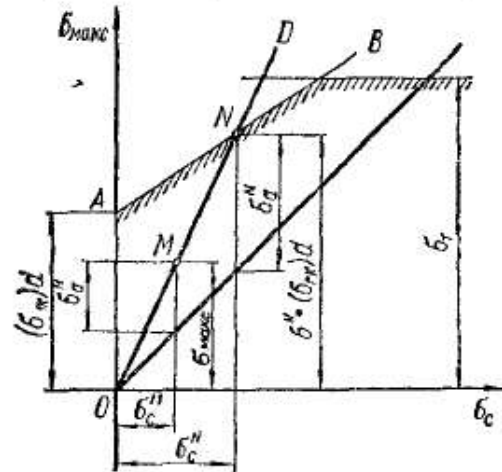


Рис. 574

а предельная амплитуда напряжений для детали $(\sigma_{ак})_d$ на основании вышеотмеченной закономерности о влиянии различных факторов только на переменную составляющую напряжений будет в $(k_\sigma)_d$ раз меньше, т. е.

$$(\sigma_{ак})_d = \frac{\sigma_a}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d}. \quad (21.21)$$

Тогда уравнение кривой предельных напряжений для детали может быть записано в виде

$$(\sigma_{\max})_d + \sigma_c = \sigma_c + \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right] \sigma_c. \quad (21.22)$$

Предположим, что деталь в опасной точке подвергается действию переменных напряжений с коэффициентом асимметрии r , причем известны соответственно σ_{\max} и σ_c цикла. Как отмечалось выше, все циклы, соответствующие $r = \text{const}$, лежат на одной прямой. По указанным данным на диаграмме рис. 574 заданное напряженное состояние характеризуется точкой M . Следовательно, все точки, лежащие на луче, проведенном из начала координат через данную точку M , имеют коэффициент асимметрии, равный r . Точка пересечения этого луча с кривой усталости имеет ординату, равную пределу вы-

носливости $(\sigma_{r\kappa})_d$. Следовательно, коэффициент запаса

$$n_\sigma = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{(\sigma_{r\kappa})_d}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_c^N}{\sigma_c^M} = \frac{\sigma_a^N}{\sigma_a^M}, \quad (21.23)$$

где $(\sigma_{r\kappa})_d$ — предел выносливости детали при асимметричном цикле;

$\sigma_{\max} = \sigma^M$ — максимальное напряжение детали.

При пересечении луча OD с прямой AB предельных напряжений в точке N максимальное напряжение σ_{\max} совпадает с максимальным предельным напряжением $\sigma^N = (\sigma_{r\kappa})_d$, т. е.

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N.$$

С другой стороны, на основании уравнения (21.23),

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N; \quad (21.24)$$

$$\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right] \sigma_c^N.$$

Отсюда находим абсциссу точки N :

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \left[\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} - 1 + \frac{\Psi_\sigma}{(k_\sigma)_d} \right]} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d (\sigma^M - \sigma_c^N) + \Psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Поскольку $\sigma^M - \sigma_c^M = \sigma_a^M$, последняя формула преобразуется так:

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Подставляя полученное выражение σ_c^N в формулу (21.24), найдем выражение максимального предельного напряжения для детали (ординату точки N):

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N = (\sigma_{r\kappa})_d = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Тогда окончательное выражение для запаса прочности будет следующим:

$$n_\sigma = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c^M}. \quad (21.25)$$

Аналогично при кручении

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_d \tau_a + \Psi_\tau \tau_c^M}. \quad (21.26)$$

Если асимметрия цикла очень велика, то роль переменных напряжений при оценке прочности может оказаться несущественной и расчет следует проводить по предельному состоянию, как при

статической нагрузке. В связи с этим наряду с запасом прочности по усталости [формулы (21.25), (21.26)] следует определять запас прочности и по несущей способности при статическом нагружении.

Аналогично проводят расчет и при сложном напряженном состоянии. При асимметричном цикле коэффициент запаса при переменных нагрузках определяется по формуле (21.17), в которой n_σ и n_τ вычисляются соответственно по формулам (21.25) и (21.26). Запас прочности по статической несущей способности определяют по методике, изложенной в гл. 18. При этом прочность оценивается по наименьшему из запасов по усталости и по статической несущей способности.

Величина запасов прочности при расчете на выносливость зависит от точности определения усилий и напряжений, от однородности материалов, качества технологии изготовления детали и других факторов. При повышенной точности расчета (с широким использованием экспериментальных данных по определению усилий, напряжений и характеристик прочности), при достаточной однородности материала и высоком качестве технологических процессов принимается запас прочности $n = 1,3 \div 1,4$. Для обычной точности расчета (без надлежащей экспериментальной проверки усилий и напряжений) при умеренной однородности материала $n = 1,4 \div 1,7$. При пониженной точности расчета (отсутствии экспериментальной проверки усилий и напряжений) и пониженной однородности материала, особенно для литья и деталей значительных размеров, $n = 1,7 \div 3,0$.

Наиболее достоверные данные о необходимых запасах прочности детали могут быть установлены на основе результатов натуральных испытаний деталей или опыта эксплуатации машин с деталями этого типа.

Пример 89. Шатун поршневого двигателя, представляющий собой стержень круглого сечения, вдоль оси подвержен повторно-переменным нагрузкам, меняющимся без ударов от $P_{\max} = +20\,000$ кгс до $P_{\min} = +5000$ кгс. Стержень имеет радиальное отверстие $\varnothing 3$ мм, материал стержня — сталь 12ХНЗА с такими характеристиками прочности: $\sigma_B = 95$ кгс/мм², $\sigma_T = 72$ кгс/мм², $\sigma_{-1} = 43$ кгс/мм² и $\Psi_\sigma = 0,1$. Поверхность шатуна грубо шлифованная. Требуется определить диаметр его из расчета на выносливость и полученные размеры сопоставить с найденными из расчета на статическую нагрузку, равную максимальной нагрузке цикла.

В рассматриваемом примере требуется произвести так называемый проекторочный расчет, т. е. по известным усилиям, действующим на деталь, определить ее размеры.

Устанавливаем опасное сечение вала. Таким следует принять сечение в месте радиального отверстия.

Поскольку соотношение размеров шатуна и радиального отверстия не известно, то не известна и величина α_σ . Поэтому, имея в виду, что этот коэффициент при малых отверстиях и крупных деталях машины составляет величину, близкую к двум, задаемся значением теоретического коэффициента концентрации $\alpha_\sigma = 2$.

Пользуясь графиком рис. 563, находим коэффициент чувствительности к концентрации напряжений: при $\alpha_\sigma = 2$ и $\sigma_B = 92$ кгс/мм² $q_\sigma = 0,77$.

Пользуясь формулой (21.7), определим эффективный коэффициент концентрации:

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1) = 1 + 0,77(2 - 1) = 1,77.$$

Из графика рис. 570 по кривой 3 находим коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности: $\beta = 0,82$.

Задаемся коэффициентом, учитывающим размеры стержня: $\epsilon = 0,8$.

Эффективный коэффициент концентрации детали с учетом размеров и состояния поверхности

$$(k_{\sigma})_d = \frac{k_{\sigma}}{\epsilon\beta} = \frac{1,77}{0,8 \cdot 0,82} = 2,70.$$

Примем запас прочности $n = 2,1$.

Определим сечение шатуна из формулы (21.25):

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_d \sigma_a + \Psi_{\sigma} \sigma_c} = \frac{\sigma_{-1} F}{(k_{\sigma})_d \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} + \Psi_{\sigma} \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2}}$$

откуда

$$F = \frac{n_{\sigma}}{\sigma_{-1}} \left[(k_{\sigma})_d \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} + \Psi_{\sigma} \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \right] =$$

$$= \frac{2,1}{43} \left[2,70 \cdot 7500 + 0,1 \frac{20\,000 + 5000}{2} \right] \text{ мм}^2 = 1050 \text{ мм}^2.$$

Определяем диаметр стержня из формулы $F = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1050}{3,14}} \text{ мм} \approx 37 \text{ мм}.$$

Проверим значение ранее принятого коэффициента, учитывающего абсолютные размеры, для чего воспользуемся графиком рис. 565. Согласно этому графику, при $d = 37$ мм $\epsilon = 0,81$, т. е. величина ϵ оказалась близкой к ранее принятому значению $\epsilon = 0,8$.

Находим диаметр шатуна из статического расчета, т. е. из условия $\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{F} \leq [\sigma_{+1}]$:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P_{\max}}{[\sigma_{+1}]} = \frac{20\,000}{48} \text{ мм}^2 = 417 \text{ мм}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 417}{3,14}} \text{ мм} = 23,1 \text{ мм}.$$

Примем $d = 24$ мм, т. е. диаметр оказался в $\frac{37}{24} = 1,54$ раза меньше, чем в случае расчета с учетом переменности нагрузки.

Пример 90. Шток водяного насоса, представляющий собой ступенчатый круглый стальной стержень (рис. 575), подвергается повторно-переменному растяжению — сжатию усилиями, сопровождающимся динамическим приложением нагрузки с характеристикой цикла $r = -0,5$. Материал штока — малоуглеродистая сталь с временным сопротивлением $\sigma_B = 40$ кгс/мм², пределом текучести $\sigma_T = 33$ кгс/мм² и пределом усталости при симметричном цикле $\sigma_{-1} = 20,4$ кгс/мм². Поверхность стержня обработана резцом. Определить допускаемые усилия, действующие на шток.

В данном случае речь идет о проверочном расчете. Имеются размеры детали, необходимо установить допускаемую нагрузку при заданной характеристике

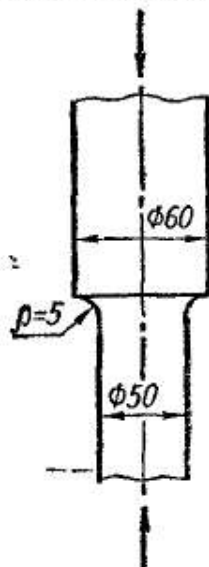


Рис. 575

цикла. За расчетное следует принять опасное сечение, находящееся в месте сопряжения двух диаметров.

Определим теоретический коэффициент концентрации: при $\frac{\rho}{d} = \frac{5}{50} = 0,1$ можно принять $\alpha_{\sigma} = 1,6$ (см. § 32).

По графику рис. 563 находим коэффициент чувствительности к концентрации напряжений: $q_{\sigma} = 0,39$.

Определяем действительный коэффициент концентрации:

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1) = 1 + 0,39(1,6 - 1) = 1,234.$$

По графику рис. 565 находим коэффициент влияния абсолютных размеров: $\epsilon = 0,75$.

Коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности, определим по графику рис. 570: $\beta = 0,875$.

Принимаем коэффициент запаса прочности с учетом динамичности (см. гл. 22) равным $n_{\sigma} = 3$.

Находим эффективный коэффициент концентрации напряжений для детали:

$$(k_{\sigma})_d = \frac{k_{\sigma}}{\beta\epsilon} = \frac{1,234}{0,875 \cdot 0,75} = 1,88.$$

Определяя амплитуду напряжений из формулы

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_d \sigma_a + \Psi_{\sigma} \sigma_c},$$

получим

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\sigma}} \frac{1}{(k_{\sigma})_d + \Psi_{\sigma} \frac{\sigma_c}{\sigma_a}}.$$

Имея в виду, что для рассматриваемого материала ($\sigma_B = 40$ кгс/мм²), согласно табл. 23, коэффициент $\Psi_{\sigma} = 0$, по последней формуле найдем, что

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\sigma} (k_{\sigma})_d} = \frac{20,4}{3 \cdot 1,88} \text{ кгс/мм}^2 \approx 4 \text{ кгс/мм}^2.$$

Определяем допускаемые усилия, действующие на шток: амплитудное значение усилия

$$P_a = F\sigma_a = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_a = \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} \cdot 4 \text{ кгс} = 7860 \text{ кгс};$$

среднее значение усилия

$$P_c = P_a \frac{1+r}{1-r} = 7860 \frac{1-0,5}{1+0,5} \text{ кгс} = 2620 \text{ кгс};$$

максимальное усилие

$$P_{\text{макс}} = P_a + P_c = (7860 + 2620) \text{ кгс} = 10\,480 \text{ кгс};$$

минимальное усилие

$$P_{\text{мин}} = P_{\text{макс}} r = -0,5 \cdot 10\,480 \text{ кгс} = -5240 \text{ кгс}.$$

Пример 91. Вращающийся круглый полый вал (рис. 576) в опасном сечении, ослабленном отверстием для смазки ($\varnothing 3$ мм), испытывает переменный изгиб с моментом $M = 15\,000$ кгс · см. Одновременно вал подвергается переменному кручению с коэффициентом асимметрии $r = -0,25$ и $M_{\text{кр.макс}} = 18\,000$ кгс · см. Диаметры вала: наружный $D = 70$ мм, внутренний $d = 35$ мм. Материал —

сталь 45 ($\sigma_B = 70$ кгс/мм²; $\sigma_T = 32$ кгс/мм²; $\sigma_{-1} = 30$ кгс/мм²; $\tau_1 = 18$ кгс/мм²). Поверхность вала шлифованная. Определить запас прочности вала.

Определим номинальные напряжения в валу от изгиба и кручения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]}$$

$$= \frac{32 \cdot 15\,000}{3,14 \cdot 70^3 (1 - 0,5^4)} \text{ кгс/мм}^2 = 4,73 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = 4,73 \text{ кгс/мм}^2; \quad \sigma_c = 0;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр. макс}}}{W_p} = \frac{16M_{\text{кр макс}}}{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]} = \frac{16 \cdot 180\,000}{3,14 \cdot 70^3 (1 - 0,5^4)} \text{ кгс/мм}^2 = 2,83 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_{\min} = r\tau_{\max} = -0,25 \cdot 2,83 \text{ кгс/мм}^2 = -0,71 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{2,83 + 0,71}{2} \text{ кгс/мм}^2 = 1,77 \text{ кгс/мм}^2;$$

$$\tau_c = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{2,83 - 0,71}{2} \text{ кгс/мм}^2 = 1,06 \text{ кгс/мм}^2.$$

Определим коэффициенты концентрации при изгибе. Коэффициент концентрации α_σ при изгибе (см. § 65, рис. 269) при $\frac{\phi}{D} = \frac{8}{70} = 0,04$ $\alpha_\sigma = 2,5$. Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений q_σ , согласно графикам (рис. 563), $q_\sigma = 0,65$. Эффективный коэффициент концентрации при изгибе

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,65 (2,5 - 1) = 1,975.$$

Коэффициент, учитывающий абсолютные размеры, согласно графикам (см. рис. 565), можно принять равным $\epsilon = 0,70$; коэффициент, учитывающий состояние поверхности вала (см. рис. 570, кривая 2), $\beta = 0,92$. Тогда эффективный коэффициент концентрации вала

$$(k_\sigma)_d = \frac{k_\sigma}{\epsilon\beta} = \frac{1,975}{0,70 \cdot 0,92} = 3,1.$$

Определим запас прочности на изгиб:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_c} = \frac{30}{3,1 \cdot 4,73 + 0} = 2,05.$$

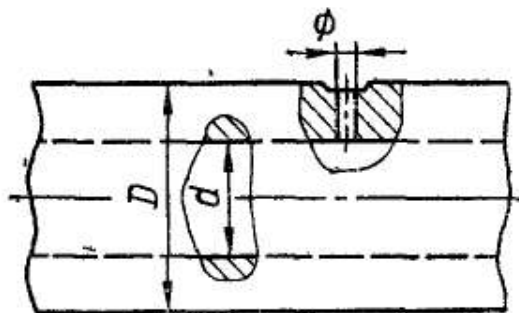


Рис. 576

Определим коэффициенты концентрации при кручении. Теоретический коэффициент концентрации примем $\alpha_\tau = 3$; коэффициент чувствительности к концентрации напряжений примем тот же, что и при изгибе, т. е. $q_\tau = q_\sigma = 0,65$. Тогда эффективный коэффициент концентрации при кручении

$$k_\tau = 1 + q_\sigma (\alpha_\tau - 1) = 1 + 0,65 (3 - 1) = 2,3.$$

Принимая, как и при изгибе, $\epsilon = 0,70$ и $\beta = 0,92$, получаем

$$(k_\tau)_d = \frac{k_\tau}{\epsilon\beta} = \frac{2,3}{0,70 \cdot 0,92} = 3,60.$$

Определим запас прочности при кручении:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_d \tau_a + \Psi_{\tau} \tau_c} = \frac{18}{3,60 \cdot 1,77 + 0,05 \cdot 1,06} = 2,77.$$

Определим общий запас прочности при совместном действии переменного изгиба и кручения:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,05 \cdot 2,77}{\sqrt{2,05^2 + 2,77^2}} = 1,65.$$

Таким образом, общий коэффициент запаса прочности оказался значительно меньше запаса прочности отдельно на изгиб и на кручение.

§ 140. ПОНЯТИЕ О МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Во многих реальных инженерных конструкциях наблюдается разрушение после относительно небольшого числа циклов нагружения, исчисляемого несколькими тысячами повторений. Разрушение после малого числа циклов нагружения от так называемой *малоцикловой усталости* обычно происходит при значительной (около 1%) пластической циклической деформации в макрообъемах рассматриваемого элемента конструкции.

Расчеты элементов конструкций на малоцикловую усталость базируются на экспериментальных данных изучения закономерностей сопротивления деформированию и разрушению при циклическом упруго-пластическом деформировании, а также исследованиях кинетики неоднородного напряженно-деформированного состояния и

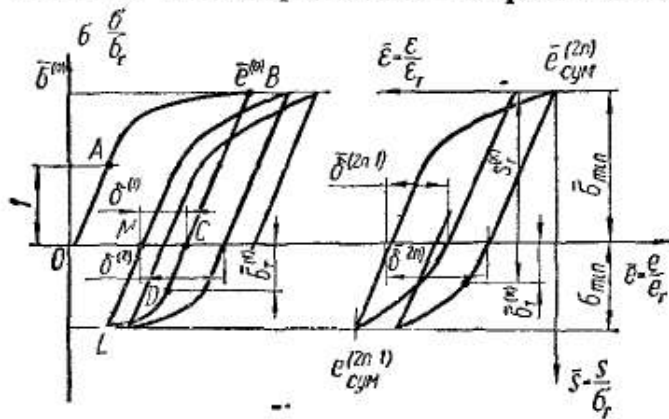


Рис. 577

накопления повреждений в зонах концентрации — местах вероятного разрушения. Ниже приведены основные понятия и некоторые результаты изучения кинетики деформирования и разрушения материалов при циклическом упруго-пластическом деформировании.

Сопротивление материалов циклическому упруго-пластическому деформированию обычно изучают при однородном напряженном состоянии, используя два основных вида нагружения. При первом в процессе циклического деформирования постоянной сохраняется амплитуда напряжений, при втором — амплитуда деформации. Эти виды соответственно называют *мягким* и *жестким* нагружением.

Мягкое нагружение. Диаграмма циклического деформирования при мягком нагружении в случае одноосного растяжения — сжатия (рис. 577) построена в относительных координатах $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{\tau}}$; $\bar{e} = \frac{e}{e_{\tau}}$. Здесь в качестве предела текучести σ_{τ} обычно принимают предел пропорциональности в исходном полуцикле, обозначаемом нуле-

вым; e_t — относительная деформация, соответствующая пределу текучести (пропорциональности). Для описания последующих полуциклов удобно пользоваться координатами $\bar{S} = \frac{S}{\sigma_t}$; $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{e_t}$, начала которых берутся в точках, соответствующих началу разгрузки в каждом полуцикле.

После исходного деформирования OAB и разгрузки BC , реверсивного деформирования CDL и разгрузки LM образуется, вообще говоря, незамкнутая петля упруго-пластического деформирования первого полуцикла; ее ширина обозначена через $\bar{\delta}^{(1)}$. При дальнейшем повторении нагружения и разгрузки получим кривые циклического деформирования в различных полуциклах и соответствующие им петли шириной $\bar{\delta}^{(k)}$.

Переход к нелинейному участку диаграммы в k -м полуцикле наблюдается при напряжениях и деформациях, равных $\bar{S}_T^{(k)}$ и $\bar{\epsilon}_T^{(k)}$, а в начальной системе координат — при $\bar{\sigma}_T^{(k)}$ и $\bar{e}_T^{(k)}$. Эти величины являются пределами текучести (пропорциональности) в данном полуцикле и соответствующими им деформациями.

В зависимости от свойств материала в процессе циклического упруго-пластического деформирования пределы текучести (пропорциональности) и форма кривых деформирования могут изменяться. Так, для большого количества металлов и сплавов при растяжении образца напряжением, превышающим предел текучести (пропорциональности), при последующей разгрузке и реверсивном деформировании, т. е. при сжатии, предел текучести (пропорциональности) оказывается ниже исходного. Это явление, названное *эффектом Баушингера*, наблюдается не только при растяжении — сжатии, но и при других видах напряженного состояния.

Для объяснения эффекта Баушингера был предложен ряд моделей. Наиболее вероятной причиной изменения пределов упругости, пропорциональности и условного предела текучести при реверсивном нагружении, по-видимому, являются остаточные ориентированные микронапряжения, возникающие в предшествующей пластической деформации. Они и способствуют более раннему возникновению пластической деформации при повторной нагрузке другого знака.

Модель Мазинга — одна из первых моделей. Он рассмотрел реверсивное деформирование поликристаллического образца в предположении, что зерна, обладая анизотропией свойств, различным образом ориентированы по отношению к деформирующей нагрузке, деформируются по-разному и имеют различные пределы текучести. Эта модель позволила установить следующую зависимость предела текучести при первом реверсивном нагружении для симметричного цикла от величины исходного напряжения в нулевом полуцикле, т. е. от степени предшествующей деформации:

$$\bar{\sigma}_T^{(1)} = \bar{\sigma}^{(0)} - 2, \quad (21.27)$$

или, в координатах $\bar{S} - \epsilon$:

$$\bar{S}_T^{(1)} = 2. \quad (21.28)$$

Зависимость (21.27), однако, как показали многочисленные эксперименты, не выполняется для многих материалов. Значения \bar{S}_T для некоторых материалов приведены в табл. 24.

Таблица 24

Материал	\bar{S}_T	α	β	A	k^*
Сталь:					
45 (нормализованная)	1,13	0	—	3,55	20—30
1X18H9Г (аустенизация)	1,66	0,15	—	1,13	10
30ХГС (отжиг)	1,61	0,03	—	0,90	—
30ХГС (закалка, отпуск 680°C)	1,34	—	0,01	1,2	—
30ХГС (закалка, отпуск 360°C)	1,60	—	0,10	0,86	—
теплоустойчивая	1,45	—	0,02	1,93	—
Сплав					
В96 (естественное старение)	1,84	0,4	—	1,15	—
АК8 (искусственное старение)	1,67	0,28	—	1,35	—

Сказанное относится к первому полуциклу. При последующем циклическом деформировании сопротивление материалов упруго-пластическому деформированию изменяется, что ведет к изменению предела текучести (пропорциональности) $\bar{S}_T^{(k)}$. С увеличением числа

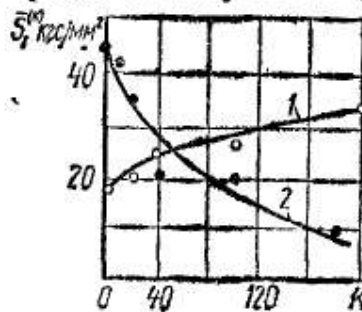


Рис. 578

циклов эта характеристика может возрастать или убывать в зависимости от свойств материала (рис. 578; линия 1 соответствует сплаву Д16, 2 — стали 30ХГСА). Изменяется она и в зависимости от степени исходного деформирования $\bar{\epsilon}^{(0)}$. Однако для практических расчетов обычно принимают, что предел текучести (пропорциональности) не зависит от числа циклов и от степени исходного деформирования.

Основным параметром в исследованиях малоциклового усталости при мягком нагружении является ширина петли гистерезиса $\bar{\delta}^{(2n-1)}$ для нечетных и $\bar{\delta}^{(2n)}$ для четных полуциклов (рис. 577). Ширина петли за данный полуцикл — пластическая (остаточная) деформация за полуцикл, а разность ширины петель в двух соседних полуциклах характеризует накопленную за цикл одностороннюю пластическую деформацию.

Для разных материалов кинетика изменения ширины петли с числом циклов различна. Для циклически упрочняющихся материалов (например, сталь 1X18H9Г, алюминиевые сплавы В96, Д16Г, АД33, АК8) ширина петли с числом циклов уменьшается, а накопленная в процессе циклического деформирования пластическая деформация стремится к некоторой предельной величине. Эксперименты по-

казывают, что для таких материалов изменение ширины петли с числом полуциклов хорошо описывается зависимостью

$$\bar{\delta}^{(k)} = \frac{\bar{\delta}^{(1)}}{k^{(\alpha)}}, \quad (21.29)$$

где параметр $\alpha > 0$ зависит от материала и исходной деформации, возрастая с ростом последней. В первом приближении, однако, его считают постоянным.

При симметричном цикле нагружения ширина петли в первом полуцикле зависит от величины начальной деформации $\bar{e}^{(0)}$ и предела текучести \bar{S}_T и, как показывают эксперименты, может быть представлена выражением

$$\bar{\delta}^{(1)} = A \left(\bar{e}^{(0)} - \frac{\bar{S}_T}{2} \right), \quad (21.30)$$

где A — константа материала, характеризующая сопротивление деформированию в первом полуцикле.

В случае циклически разупрочняющихся материалов (например, теплостойкие стали, чугуны) ширина петли с числом полуциклов увеличивается, а также увеличивается суммарная деформация. Зависимость ширины петли от числа полуциклов достаточно хорошо описывается выражением

$$\bar{\delta}^{(k)} = \bar{\delta}^{(1)} e^{\beta(k-1)}, \quad (21.31)$$

где β — константа материала, зависящая от степени исходного деформирования. Ее также в первом приближении можно принять постоянной.

Для некоторых материалов константы α , β , A приведены в табл. 24.

Наконец, в случае циклически стабильных материалов (например, среднеуглеродистые и аустенитные стали) ширина петли упруго-пластического гистерезиса практически не зависит от числа циклов деформирования. При различной ширине петель в четных и нечетных полуциклах происходит одностороннее накопление деформации. Для таких материалов, стабилизирующихся при определенном числе полуциклов $k = k^*$, ширина петли определяется по формуле (21.29) при $k = k^*$.

Заметим, однако, что деление материалов на циклически упрочняющиеся, стабильные и разупрочняющиеся носит несколько условный характер, так как поведение определенного материала при циклическом деформировании зависит от температуры, его исходного состояния (наклеп, термообработка) и других факторов. Например, наклеп — предварительное пластическое деформирование при комнатной температуре — ведет к циклическому разупрочнению. То же имеет место и при закалке. Так что в нестабильном состоянии материал циклически разупрочняется. В то же время в стабильном состоянии (отжиг) наблюдается циклическое упрочнение.

Пластические свойства материала после определенного числа циклов нагружения характеризует суммарная пластическая деформация, накопленная за k полуциклов. Она связана с шириной петли

в четных и нечетных циклах (см. рис. 577) выражением

$$\bar{e}^{(k)} = \bar{e}^{(0)} - \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{\delta}^{(k)}. \quad (21.32)$$

Жесткое нагружение. Как уже указывалось, весьма распространенным методом изучения сопротивления материалов циклическому упруго-пластическому деформированию являются испытания

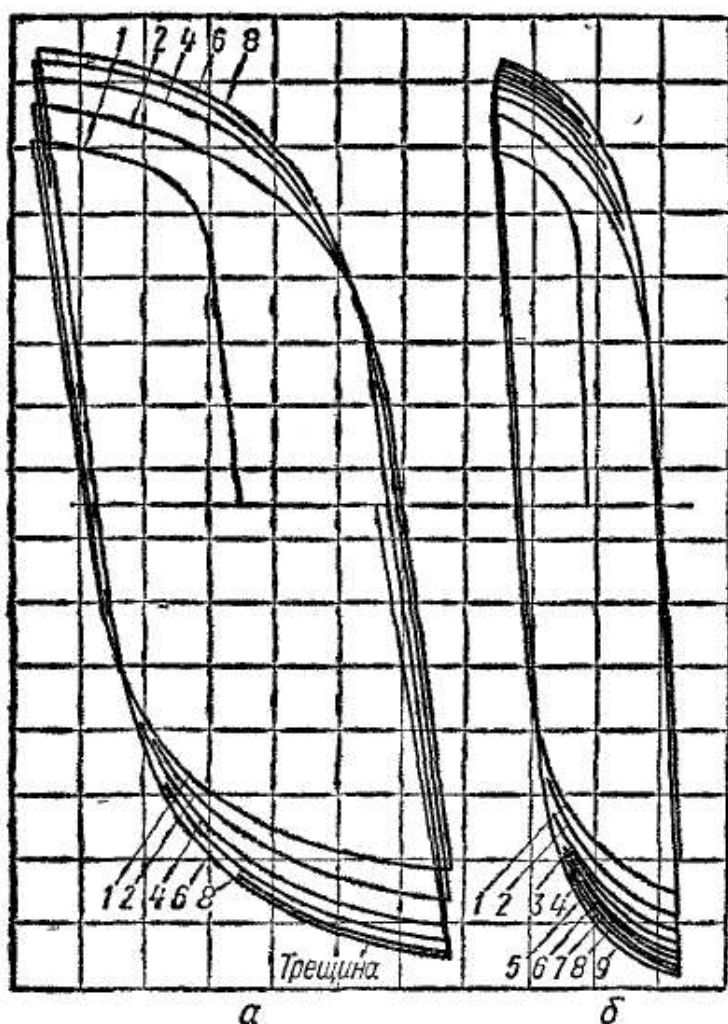


Рис. 579

при постоянных амплитудах деформации — жесткое нагружение (рис. 579; а — сплав В96, б — сталь 1Х18Н9Т). При таких испытаниях за счет перераспределения упругой и пластической составляющих деформации максимальные напряжения от цикла к циклу могут изменяться.

Кинетика изменения максимальных напряжений зависит от свойств материала и находится в соответствии с поведением различных групп материалов при мягком нагружении. Так, в испытаниях циклически упрочняющихся материалов при жестком нагружении амплитуда напряжения вначале возрастает. Интенсивность возрастания с увеличением числа циклов уменьшается. После сравнительно небольшого числа циклов амплитуда напряжений ста-

новится практически постоянной на большей части долговечности вплоть до разрушения. Размах установившегося напряжения иногда называют «асимптотическим» размахом или размахом «насыщения». Предполагают, что каждому размаху деформации соответствует определенный «асимптотический» размах напряжения. Он берется при числе циклов, равном половине разрушающего, т. е. при средней долговечности.

В испытаниях циклически разупрочняющихся материалов при фиксированной циклической деформации напряжения от цикла к циклу постепенно снижаются. Однако и в этом случае процесс сравнительно быстро затухает и можно говорить о существовании предельного асимптотического размаха напряжений, зависящего от размаха циклической деформации.

Разрушение при циклическом упруго-пластическом деформировании. Сопротивление разрушению при циклическом деформировании существенно зависит от характера нагружения (мягкое или жесткое) и циклических деформационных свойств материала.

При мягком нагружении циклически разупрочняющихся или стабильных металлов пакапливаются пластические деформации, которые могут привести к двум типам разрушения — квазистатическому и усталостному. Квазистатическое связано с возрастанием остаточных деформаций до уровня, соответствующего разрушению при однократном статическом нагружении. Разрушение усталостного характера связано с накоплением повреждений, образованием прогрессирующих трещин при существенно меньшей пластической деформации. Возможны и промежуточные формы разрушения, когда образуются трещины усталости на фоне заметных пластических деформаций.

Циклически упрочняющиеся материалы разрушаются только от усталости. Для них кривая усталости в интервале числа циклов 10^2 — 10^4 достаточно хорошо описывается эмпирическим уравнением

$$|\sigma_a N^\mu = \text{const},| \quad (21.33)$$

где σ_a — амплитуда напряжения;
 μ — показатель степени;
 N — число циклов до разрушения.

Для квазистатического разрушения в качестве критерия перехода в предельное состояние принимают величину накопленной деформации $\bar{e}_в$ при циклическом нагружении, соответствующую разрушению при однократном статическом нагружении.

На основании выражения (21.32),

$$\bar{e}_{пл}^{(k)} = \bar{e}^{(0)} - \bar{\sigma}^{(0)} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{\delta}^{(k)} = \bar{e}_в. \quad (21.34)$$

С учетом выражений для ширины петли, зная циклические параметры материала, из формулы (21.34) можно определить для заданной амплитуды напряжений число циклов до разрушения.

При жестком нагружении нет накопления деформаций, что исключает возможность квазистатического разрушения. В этом случае все материалы разрушаются по усталостному типу с образованием трещин.

Эксперименты с различными материалами показали, что зависимости между размахом пластической деформации за цикл $e_{пл} = 2e_{a пл}$ и числом циклов до разрушения в двойных логарифмических координатах близки к линейным. Это явилось основанием для следующего эмпирического выражения между циклической долговечностью N и размахом пластической деформации за цикл (формула Мэнсона — Коффина):

$$|e_{пл} N^m = M,| \quad (21.35)$$

где m и M — константы материала.

Показатель степени m для большинства материалов можно принять приблизительно равным 0,5. Постоянную M легко определить в предположении, что формула (21.35) справедлива и при однократном нагружении до разрушения, т. е. при $N = \frac{1}{4}$ и $e_{пл} = e_v$, где e_v — истинная деформация при статическом разрыве. Тогда $M = \frac{1}{2} e_v$ и

$$e_{пл} N^{0,5} = \frac{1}{2} e_v. \quad (21.36)$$

С учетом выражения (4.27) для истинной деформации формула (21.35) принимает вид

$$e_{a\text{ пл}} = \frac{1}{2} e_{пл} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi} N^{-0,5}. \quad (21.37)$$

Уравнения (21.35) и (21.37) можно считать основными зависимостями для оценки долговечности при малом числе циклов нагружения, когда преобладающее значение имеет сопротивление материала пластическим деформациям. С увеличением числа циклов до разрушения, т. е. с уменьшением размаха пластической деформации, упругая часть деформации становится соизмеримой с пластической. В связи с этим предложены критерии малоциклового разрушения в упругих и суммарных деформациях.

Опыты с многими материалами показывают, что в области долговечности $10-10^6$ циклов имеет место следующая зависимость:

$$e_y = \frac{L}{E} N^{-k}, \quad (21.38)$$

где e_y — размах упругой деформации за цикл, вычисленной в результате деления размаха асимптотического напряжения (соответствующего циклической долговечности N) на модуль упругости E ;

L и k — постоянные материала.

Зависимость между размахом полной деформации и циклической долговечностью можно получить из уравнений (21.35) и (21.38):

$$e = e_{пл} + e_y = MN^{-m} + \frac{L}{E} N^{-k}. \quad (21.39)$$

В области малых долговечностей упругая составляющая деформации незначительна, основное значение имеет пластическая деформация, а суммарная асимптотически приближается к прямой пластической составляющей (рис. 580). При больших долговечностях роль убывающей пластической деформации становится незначительной, в то время как упругая деформация вследствие малого наклона линии e_y сохраняет высокое значение; линия суммарной деформации асимптотически приближается к пря-

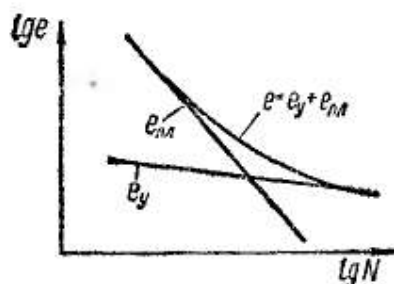


Рис. 580

мой упругой деформации. Переходная точка между двумя кривыми для большинства материалов находится в области 10^4 циклов.

При использовании критерия (21.39), как показали эксперименты, константы следует принять такими:

$$m = 0,6; \quad \kappa = 0,12; \quad M = e_{\sigma}^{0,6}; \quad L = 3,5\sigma_{\sigma},$$

где σ_{σ} — предел прочности.

Следовательно,

$$e = 2e_{\sigma} = \left(\ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0,6} N^{-0,6} + 3,5 \frac{\sigma_{\sigma}}{E} N^{-0,12}. \quad (21.40)$$

Предельную упругую деформацию можно выразить также через параметры кривой усталости: предел усталости σ_{-1} при выбранном базовом числе циклов N_{σ} и показателе степени кривой усталости μ . Подставляя эти значения в выражение (21.33), найдем значение константы в правой части уравнения:

$$\sigma_{\sigma} N^{\mu} = \sigma_{-1} N_{\sigma}^{\mu}.$$

Следовательно, амплитуда напряжения и условная упругая деформация

$$\sigma_{\sigma} = \sigma_{-1} N_{\sigma}^{\mu} N^{-\mu}; \quad (21.41)$$

$$e_{\sigma y} = \frac{\sigma_{-1}}{E} N_{\sigma}^{\mu} N^{-\mu}.$$

Уравнение кривой усталости при жестком нагружении принимает вид

$$e_{\sigma} = e_{\sigma пл} + e_{\sigma y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\psi} N^{-0,5} + \frac{\sigma_{-1}}{E} N_{\sigma}^{\mu} N^{-\mu}. \quad (21.42)$$

Эмпирические формулы (21.41) и (21.42) позволяют с достаточной точностью оценить долговечность материалов в довольно широком диапазоне перемен упруго-пластических деформаций.

Глава 22

РАСЧЕТЫ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

§ 141. РАСЧЕТ НА УДАР ПРИ ОСЕВОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

С явлением удара приходится иметь дело в том случае, когда скорость рассматриваемого элемента конструкции или соприкасающихся с ним частей в очень короткий промежуток времени изменяется на конечную величину. Получающиеся при этом большие ускорения (замедления) приводят к возникновению значительных инерционных сил, действующих в направлении, противоположном

направлению ускорений, т. е. в направлении движения тела. В случае падающего груза величина силы удара (динамической силы P_d) может быть вычислена по формуле

$$P_d(t) = \frac{Q}{g} j(t), \quad (22.1)$$

где Q — вес падающего груза;
 g — ускорение свободного падения;
 $j(t)$ — ускорение падающего груза после соприкосновения его с препятствием.

Однако определение силы удара $P_d(t)$ по формуле (22.1) весьма затруднительно, так как не известно время соударения, т. е. время,

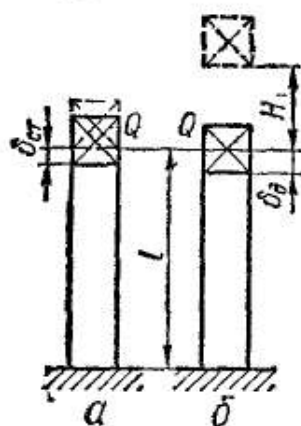


Рис. 581

в течение которого скорость движущегося тела снижается от своего максимального значения в момент соприкосновения с ударяемым телом (начало удара) до нуля после деформации последнего (конец удара). В связи с указанными трудностями, определяя напряжения в элементах упругих систем, вызываемые действием ударных нагрузок (динамические напряжения), в инженерной практике обычно пользуются так называемым энергетическим методом, основанным на законе сохранения энергии. Согласно этому методу полагают, что при соударении движущихся тел уменьшение запаса кинетической энергии их

равно увеличению потенциальной энергии деформации соударяющихся упругих тел.

Вывод расчетных формул для определения динамических напряжений проведем на примере простейшей системы (рис. 581), состоящей из вертикально расположенного упругого призматического стержня с жесткостью $c = \frac{EF}{l}$ и некоторого груза Q . Полагаем при этом, что удар неупругий в том смысле, что при соударении падающий груз не отскакивает от стержня, а движется вместе с ним, и, следовательно, в стержне не возникают упругие волны. Кроме того, данная система обладает одной степенью свободы.

Рассмотрим два случая:

1) груз Q прикладывается к стержню статически, т. е. нагрузка медленно нарастает от нуля до своего максимального значения (рис. 581, а) и сжимает стержень на величину $\delta_{ст}$;

2) груз падает с некоторой высоты H и, ударяя по стержню, создает в нем сжатие $\delta_d > \delta_{ст}$ (рис. 581, б).

Изменение деформации при ударном действии нагрузки Q по сравнению с деформацией при статическом приложении той же нагрузки может быть охарактеризовано коэффициентом динамичности

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}, \quad (22.2)$$

откуда динамическую деформацию через статическую можно выразить формулой

$$\delta_d = k_d \delta_{ст}. \quad (22.3)$$

Учитывая линейную связь между напряжением и деформацией, а также принимая одинаковыми модули упругости при статическом и ударном действии нагрузки, что с достаточной степенью точности подтверждается экспериментом, по аналогии с последней формулой можно установить связь между статическим и динамическим напряжениями:

$$|\sigma_d = k_d \sigma_{ст}| \quad (22.4)$$

где

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{F} \quad (22.5)$$

— напряжение, возникающее в стержне при сжатии силой, равной весу падающего груза.

Чтобы использовать формулу (22.4), нужно определить коэффициент динамичности k_d . При этом будем исходить из общепринятого в теории удара допущения, что связь между усилиями и деформациями сохраняется одной и той же как при статической, так и при динамической нагрузках, т. е.

$$\delta_{ст} = \frac{P_{ст}}{c}; \quad (22.6)$$

$$\delta_d = \frac{P_d}{c}, \quad (22.7)$$

где $P_{ст}$ — статическая нагрузка, равная весу падающего груза (в нашем случае $P_{ст} = Q$);

P_d — динамическая нагрузка, представляющая собой силу инерции ударяющего тела в первый момент его соприкосновения со стержнем.

Изменение кинетической энергии падающего груза численно равно работе, совершенной им при падении и деформировании стержня:

$$T = Q(H + \delta_d), \quad (22.8)$$

а потенциальную энергию деформации упругого тела при ударе, накопленную за счет уменьшения потенциальной энергии падающего тела, учитывая выражение (22.7), устанавливающее связь между усилием и деформацией, можно представить формулой

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c \delta_d^2}{2}. \quad (22.9)$$

Пользуясь законом сохранения энергии и пренебрегая потерями энергии, вызываемыми местными пластическими деформациями при соударении тел, а также инерцией массы ударяемого стержня, можно записать

$$T = U_d.$$

На основании выражений (22.8) и (22.9)

$$\frac{c\delta_d^2}{2} = Q(H + \delta_d). \quad (22.10)$$

Имея в виду, что $\delta_{ст} = \frac{Q}{c}$, уравнение (22.10) можно представить так:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{ст}\delta_d - 2\delta_{ст}H = 0.$$

Отсюда можно определить динамическую деформацию:

$$\delta_d = \delta_{ст} \pm \sqrt{\delta_{ст}^2 + 2\delta_{ст}H}. \quad (22.11)$$

Поскольку знак «минус» в этой формуле не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи, следует сохранить знак «плюс».

Записав формулу (22.11) в виде

$$\delta_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right) \quad (22.12)$$

и сопоставив ее с формулой (22.3), находим выражение для коэффициента динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (22.13)$$

Имея в виду, что $H = \frac{v^2}{2g}$ (v — скорость падающего груза в начале удара), коэффициент динамичности можно представить формулой

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (22.14)$$

Если учесть, что

$$\frac{2H}{\delta_{ст}} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_{ст}} = \frac{T_0}{U_{ст}},$$

то коэффициент динамичности k_d можно также записать и так:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст}}}, \quad (22.15)$$

где $T_0 = QH$ — кинетическая энергия падающего груза к моменту соударения;

$U_{ст}$ — потенциальная энергия деформации подвергающегося удару упругого стержня, которая накапливается в нем при статическом действии силы, равной весу ударяющего груза Q , т. е.

$$U_{ст} = \frac{1}{2} Q\delta_{ст} = \frac{Q^2}{2c} = \frac{Q^2 l}{2EF}. \quad (22.16)$$

Если $H = 0$, т. е. сила прикладывается внезапно, то, согласно выражению (22.13), коэффициент динамичности $k_d = 2$. Поскольку высота падения груза H всегда значительно больше $\delta_{ст}$, то в большинстве случаев определения коэффициента динамичности в выражениях под корнем единицей по сравнению со вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда на основании выражения (22.13) получим

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}, \quad (22.17)$$

или, согласно формуле (22.15),

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{ст}}}. \quad (22.18)$$

Имея выражение (22.13) для коэффициента динамичности, напряжение при ударе на основании зависимости (22.4) определим формулой

$$\boxed{\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right)}, \quad (22.19)$$

или

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}} \right) = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \quad (22.20)$$

Аналогично определяем и усилие при ударе:

$$\boxed{P_d = \sigma_d F = P_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right)}. \quad (22.21)$$

Изложенная приближенная теория расчета на удар имеет определенные пределы применения. Они обусловлены скоростью падающего груза к моменту удара и жесткостью конструкции, что выражается в формулах (22.13) или (22.15) отношением $\frac{2H}{\delta_{ст}}$ или $\frac{T_0}{U_{ст}}$.

Так, если

$$\frac{2H}{\delta_{ст}} = \frac{T_0}{U_{ст}} \leq 100,$$

то ошибка расчета не превышает 10%. Учет массы ударяемой конструкции расширяет пределы применения приближенной теории.

Из анализа формул (22.19) и (22.20) видно, что при равномерно распределенных напряжениях, одинаковых во всех сечениях стержня, величина динамических напряжений зависит не только от площади F его поперечного сечения, как это имеет место в случае действия статической нагрузки в статически определимых системах, но и от длины l и модуля упругости E материала стержня, т. е. можно сказать, что динамические напряжения в стержне при ударе зависят как от объема, так и от качества его материала. При этом чем больше объем упругого стержня, подвергающегося удару (чем больше «энергоемкость» стержня), тем меньше динамические напряжения,

возникающие в нем, а чем больше модуль упругости материала стержня, тем динамические напряжения больше.

До сих пор предполагалось, что стержни, подвергаемые действию удара, по всей длине имеют одинаковые сечения. Именно для таких стержней справедливо все сказанное о роли объема стержня при оценке динамических напряжений.

Картина оказывается несколько иной в стержнях, отдельные участки которых имеют различную площадь поперечного сечения. В этом случае (рис. 582, а) наибольшее номинальное напряжение

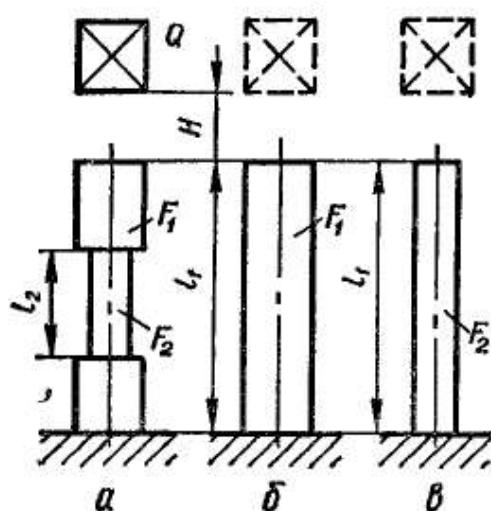


Рис. 582

будет в месте наименьшей площади (в месте выточки). Зависит оно, как известно, от деформативности всего стержня, а не только его ослабленной части. Понизить динамические напряжения в этом случае можно двумя путями: увеличением поперечного сечения в месте выточки или уменьшением площади поперечного сечения утолщенной части стержня и, следовательно, повышением податливости всего стержня в целом, что приводит к снижению максимальных динамических напряжений в месте выточки. Если изготовить весь стержень постоянного диаметра,

равного диаметру выточки d_2 , то при этом существенно увеличится деформативность стержня, а следовательно, уменьшится динамическое напряжение σ_d .

Таким образом, снижение напряжений при ударе может быть достигнуто увеличением объема путем уничтожения выточки, т. е. выравниванием напряжений по различным сечениям, или уменьшением объема материала за счет уменьшения площади утолщенной части, что приводит к увеличению деформативности.

Сказанное удобно проиллюстрировать на примере определения максимальных динамических напряжений, возникающих в трех типах стержней при продольном ударе грузом Q , падающим с одной и той же высоты H .

Пусть соотношения между отдельными размерами стержней следующие:

$$\frac{F_2}{F_1} = \alpha; \quad \frac{l_2}{l_1} = \beta.$$

Для определения напряжений в каждом из стержней воспользуемся общей формулой

$$(\sigma_d)_{\max} = k_d (\sigma_{ст})_{\max} = k_d \frac{Q}{F_{\min}},$$

где

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}; \quad \delta_{ст} = \sum_1^z \frac{Ql_n}{E_n F_n};$$

n — число ступеней.

Для ступенчатого стержня (рис. 582, а)

$$(\delta_{ст})_а = \frac{Q}{E} \left(\frac{l_1 - l_2}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = \frac{Ql_1}{EF_1} \left(1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Для стержня постоянного сечения с размерами утолщенной части ступенчатого стержня (рис. 582, б)

$$(\delta_{ст})_б = \frac{Ql_1}{EF_1}.$$

Для стержня постоянного сечения, равного минимальному сечению ступенчатого стержня (рис. 582, в), имеем

$$(\delta_{ст})_в = \frac{Ql_1}{EF_2} = \frac{Ql_1}{EF_1\alpha}.$$

Тогда соотношения между деформациями отдельных стержней, очевидно, будут следующими:

$$(\delta_{ст})_а : (\delta_{ст})_б : (\delta_{ст})_в = \left(1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} \right) : 1 : \frac{1}{\alpha}. \quad (22.22)$$

Пренебрегая в выражении (22.17) единицей по сравнению с корнем, что при большой высоте падения H и малой статической деформации $\delta_{ст}$ можно допустить, выражение для коэффициента динамичности приближенно можно записать в виде

$$k_d \approx \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}.$$

Пользуясь этой формулой и учитывая выражения (22.22), получим соотношения между коэффициентами динамичности для рассматриваемых случаев:

$$(k_d)_а : (k_d)_б : (k_d)_в = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha(1-\beta) + \beta}} : 1 : \sqrt{\alpha}. \quad (22.23)$$

Исходя из выражений

$$(\sigma_d)_а = (k_d)_а (\sigma_{ст})_а = (k_d)_а \frac{Q}{F_2} = (k_d)_а \frac{Q}{\alpha F_1};$$

$$(\sigma_d)_б = (k_d)_б (\sigma_{ст})_б = (k_d)_б \frac{Q}{F_1};$$

$$(\sigma_d)_в = (k_d)_в (\sigma_{ст})_в = (k_d)_в \frac{Q}{F_2} = (k_d)_в \frac{Q}{\alpha F_1}$$

и учитывая соотношение (22.23), получим

$$(\sigma_d)_а : (\sigma_d)_б : (\sigma_d)_в = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2(1-\beta) + \alpha\beta}} : 1 : \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \quad (22.24)$$

Предположим, например, что коэффициенты α и β имеют следующие числовые значения:

$$\alpha = \frac{F_2}{F_1} = 0,5; \quad \beta = \frac{l_2}{l_1} = 0,4.$$

Тогда по формуле (22.24) найдем следующее соотношение:

$$(\sigma_d)_a : (\sigma_d)_б : (\sigma_d)_в = 1,7 : 1 : 1,41.$$

Таким образом, видим, что наибольшее напряжение возникает в стержне с выточкой (рис. 582, а), а наименьшее—в стержне постоянного максимального сечения (рис. 582, б). В стержне же минимального сечения, постоянного по длине (рис. 582, в), напряжение имеет некоторое промежуточное значение.

Результаты проведенного анализа имеют существенное практическое значение. Прежде всего этот анализ показывает, что характер сопротивления стержней удару качественно резко отличается от

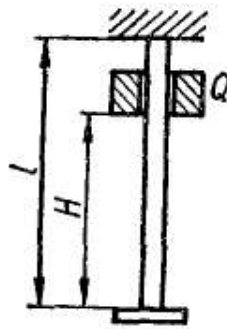


Рис. 583

сопротивления их статической нагрузке. При статическом сжатии утолщение одной части стержня не вызывает изменения напряжений в сечениях другой части; при ударе оно повышает их. Местное уменьшение площади поперечного сечения на небольшой длине стержня резко повышает напряжение.

Для снижения напряжений надо стремиться главным образом к увеличению податливости стержня путем увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, выравнивания площадей поперечного сечения с целью получить все участки стержня одинаковой минимальной площади сечения. Вот почему, конструируя стержни, работающие на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей их длине. Местные утолщения допустимы лишь на небольших участках длины; местные выточки небольшой протяженности крайне нежелательны. Если при таких условиях сконструировать достаточно прочный стержень не удастся, необходимо удлинить его или равномерно увеличить его площадь.

Условие прочности при ударе имеет вид

$$(\sigma_d)_{\max} \leq [\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

Величину коэффициента запаса n_T можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса при статическом действии нагрузки (1,4—1,6), так как динамичность уже отражена в расчетных формулах коэффициентом k_d . Однако ввиду некоторой упрощенности изложенного метода расчета этот коэффициент принимают несколько бóльшим ($n_T = 2$).

Мы рассмотрели расчет динамических напряжений в случае ударного сжатия. Однако все приведенные формулы будут также справедливы и для ударного растяжения, в частности для случая, показанного на рис. 583.

Пример 92. Груз Q весом 5 кгс, прикрепленный к стальной проволоке диаметром 3 мм (рис. 584), свободно падает от точки A с ускорением g . Найти напряжение в проволоке, когда ее верхний конец внезапно остановлен. Массой проволоки пренебречь.

Напряжение в точке A после внезапной остановки проволоки получим по формуле (22.20) при длине проволоки $l = H$:

$$\sigma_d = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{Fl}} = \frac{4 \cdot 5}{\pi \cdot 0,3^2} + \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{\pi \cdot 0,3^2}} =$$

$$= (70,8 + 17\,200) \text{ кгс/см}^2 \approx 17\,271 \text{ кгс/см}^2.$$

Так как кинетическая энергия падающего тела увеличивается в той же пропорции, что и объем проволоки, то напряжение не зависит от высоты падения груза Q .

Пример 93. Определить величину динамических напряжений, возникающих в стержнях подвески (рис. 585) при падении груза $Q = 25$ кгс с высоты $H = 1$ см. Площадь поперечного сечения медных наклонных стержней AC и BC $F_m = 0,2$ см², площадь поперечного сечения стального стержня CD $F_c = 0,25$ см², длина стального стержня $l_c = 2,4$ м, длина наклонных стержней $l_m = 2$ м.

Динамические напряжения в стальном стержне определяются по формуле

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$$

Находим значения величин, входящих в эту формулу:

$$(\sigma_{ст})_c = \frac{Q}{F_c} = \frac{25}{0,25} \text{ кгс/см}^2 = 100 \text{ кгс/см}^2;$$

$$(\sigma_{ст})_m = \frac{Q}{2F_m \cos 30^\circ} = \frac{25}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,866} \text{ кгс/см}^2 = 72 \text{ кгс/см}^2;$$

$$\delta_{ст} = (\delta_{ст})_c + \frac{(\delta_{ст})_m}{\cos 30^\circ} = \frac{Q l_c}{E_c F_c} + \frac{\frac{Q}{2} l_m}{E_m F_m \cos^2 30^\circ} = \left(\frac{25 \cdot 240}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,25} + \right.$$

$$\left. + \frac{12,5 \cdot 200}{1 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,75} \right) \text{ см} = 28,7 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{28,7 \cdot 10^{-3}}} = 9,4.$$

Напряжения в стержнях

$$(\sigma_d)_c = k_d (\sigma_{ст})_c = 9,4 \cdot 100 \text{ кгс/см}^2 = 940 \text{ кгс/см}^2;$$

$$(\sigma_d)_m = k_d (\sigma_{ст})_m = 9,4 \cdot 72 \text{ кгс/см}^2 = 677 \text{ кгс/см}^2.$$

На практике встречаются такие случаи, когда на основании полученных выше формул динамические напряжения найти нельзя. К числу таких задач может быть отнесена, например, задача об определении напряжений в стальном канате, поднимающем груз Q со скоростью v при внезапном торможении подъемника (рис. 586).

Обозначим свободную длину каната в момент остановки через l и площадь поперечного сечения его через F .



Рис. 586



Рис. 584

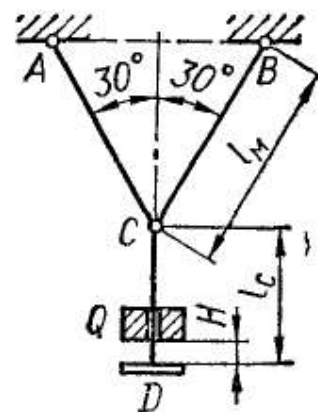


Рис. 585

Пренебрегая массой троса и полагая на основе закона сохранения энергии, что кинетическая энергия движущегося груза полностью превращается в потенциальную энергию деформации троса, получим следующее уравнение для определения наибольшего удлинения δ троса:

$$\frac{EF\delta^2}{2l} - \frac{EF\delta_{ст}^2}{2l} = \frac{Qv^2}{2g} + Q(\delta - \delta_{ст}),$$

откуда, имея в виду, что

$$Q = EF \frac{\delta_{ст}}{l},$$

получим

$$\frac{EF}{2l} (\delta - \delta_{ст})^2 = \frac{Qv^2}{2g}.$$

Отсюда

$$\delta = \delta_{ст} + \sqrt{\frac{Qv^2 l}{EFg}}.$$

Следовательно, при внезапной остановке растягивающие напряжения возрастают в отношении

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{v}{\delta_{ст}} \sqrt{\frac{Ql}{EFg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}}}, \quad (22.25)$$

т. е.

$$\boxed{k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}}}.$$

Пример 94. Определить напряжение в стальном канате, опускающем груз весом $Q = 4,5$ тс со скоростью $v = 1$ м/с в случае внезапной остановки в момент, когда груз опустится на 18 м. Сечение каната $F = 16$ см²; модуль упругости $E = 1,05 \cdot 10^6$ кгс/см².

Вычислим статическую деформацию каната:

$$\delta_{ст} = \frac{Ql}{EF} = \frac{4500 \cdot 1800}{1,05 \cdot 10^6 \cdot 16} \text{ см} = 0,482 \text{ см}.$$

Согласно формуле (22 25), коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{0,482 \cdot 981}} = 5,6$$

и динамические напряжения

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = k_d \frac{Q}{F} = 5,6 \frac{4500}{16} \text{ кгс/см}^2 = 1575 \text{ кгс/см}^2.$$

Получившиеся высокие напряжения при резком торможении могут привести к обрыву подъемного каната, что необходимо учитывать.

Пример 95. Решить предыдущую задачу при условии, что между тросом и грузом помещена пружина, которая под действием груза 4500 кгс дает статическое удлинение 12 см.

Статическая деформация упругого элемента (каната $\delta_{ст}^к$ и пружины $\delta_{ст}^п$)

$$\delta_{ст} = \delta_{ст}^к + \delta_{ст}^п = (0,482 + 12) \text{ см} = 12,482 \text{ см}.$$

Подставляя значение $\delta_{ст}$ в формулу (22.25), найдем, что

$$k_d = 1 + \frac{v}{\sqrt{\delta_{ст}g}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{12,482 \cdot 981}} = 1,92.$$

Динамическое напряжение в канате

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = k_d \frac{Q}{F} = 1,92 \frac{4500}{16} \text{ кгс/см}^2 = 540 \text{ кгс/см}^2.$$

Как видим, включение пружины между канатом и грузом существенно (почти в 3 раза) снизило динамические напряжения при резком торможении груза. В данном случае пружина явилась тем амортизатором, который часто применяют в технике для смягчения толчков, а следовательно, и уменьшения возникающих при толчках динамических напряжений.

Учет массы стержня, испытывающего удар. В некоторых случаях масса стержня может оказать существенное влияние на динамические напряжения, возникающие в стержне, подверженном действию ударных нагрузок.

Для учета влияния инерции массы ударяемого стержня в процессе удара следует различать два этапа. Первый начинается с момента соприкосновения падающего груза, имеющего максимальную скорость v , со стержнем и заканчивается, когда произойдет смятие материала, за счет чего скорость груза снизится до величины v_1 , а верхний конец ударяемого тела приобретет за это время ту же скорость v_1 . Второй этап начинается с момента совместного движения груза и конца подвергаемого удару стержня.

Если в момент начала второго этапа удара верхний конец ударяемого стержня будет иметь скорость v_1 , то, предположив, что скорость последующих (нижележащих) сечений стержня уменьшается по линейному закону, достигая нулевого значения в нижнем сечении стержня, найдем скорость движения произвольного сечения стержня на расстоянии x от нижнего сечения (рис. 587) в этот момент:

$$v(x) = v_1 \frac{x}{l}.$$

Кинетическая энергия массы участка dx , находящегося на расстоянии x от нижнего конца,

$$dT_c = \frac{\gamma F dx}{2g} \left(v_1 \frac{x}{l} \right)^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия всего стержня определится выражением

$$T_c = \frac{\gamma F}{2g} \frac{v_1^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma Fl}{3} \frac{v_1^2}{2g}.$$

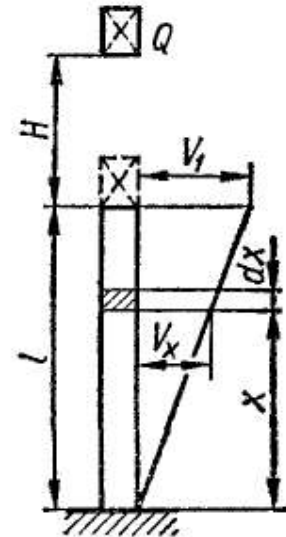


Рис. 587

Обозначив собственный вес стержня через Q_c , кинетическую энергию в начальный момент второго этапа можем выразить формулой

$$T_0 = \frac{Q_c}{3} \frac{v_1^2}{2g}. \quad (22.26)$$

Таким образом, если в момент начала первого этапа удара падающий груз обладал кинетической энергией $\frac{Qv^2}{2g}$, то потеря энергии до начала второго этапа за счет местных пластических деформаций

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \frac{Q_c v_1^2}{2g} \right),$$

или

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) \right]. \quad (22.27)$$

С другой стороны, эту же потерю кинетической энергии можно выразить, исходя из того, что скорость груза в первый этап удара изменяется на величину $v - v_1$, вследствие чего кинетическая энергия падающего груза уменьшается на величину $\frac{Q}{2g} (v - v_1)^2$. Ударяемый стержень за первый этап удара получит запас кинетической энергии $\frac{Q_c}{3} \cdot \frac{(0 - v_1)^2}{2g}$. Тогда суммарная потеря кинетической энергии падающего груза, выраженная через величину потери энергии груза и запасенной энергии стержня,

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{2g} (0 - v_1)^2,$$

или

$$\Delta T = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) \right]. \quad (22.28)$$

Приравняв правые части выражений (22.27) и (22.28), будем иметь

$$\frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) \right] = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) \right].$$

Отсюда определим величину скорости груза в момент начала второго этапа удара:

$$\boxed{v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q}}}. \quad (22.29)$$

Энергия удара стержня, характеризуемая кинетической энергией, запасенной системой в начальный момент второго этапа удара, оп-

ределится формулой

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \frac{Q_c v_1^2}{2g} = \frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) v_1^2 =$$

$$= \frac{Q}{2g} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) \left(\frac{v}{1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q}} \right)^2,$$

или окончательно:

$$\boxed{T = \frac{Qv^2}{2g \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right)}} \quad (22.30)$$

Энергия T при ударе согласно закону сохранения энергии и будет трансформирована в потенциальную энергию деформации упругого стержня. Поэтому полученное выражение (22.30) и должно быть подставлено вместо T_0 в формулу (22.15) для определения коэффициента динамичности, т. е.

$$\boxed{k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{ст}}}},$$

или

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g \left(1 + \frac{1}{3} \frac{Q_c}{Q} \right) U_{ст}}}.$$

Учитывая, что $\frac{v^2}{2g} = H$ и $HQ = T_0$, а также обозначая $\frac{Q_c}{Q} = \beta$, формулу для определения коэффициента динамичности представим в виде

$$\boxed{k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta \right)}}}, \quad (22.31)$$

а максимальное напряжение в стержне, испытывающем удар,

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = \sigma_{ст} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст} \left(1 + \frac{1}{3} \beta \right)}} \right],$$

или

$$\boxed{\sigma_d = \sigma_{ст} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql \left(1 + \frac{1}{3} \frac{F\gamma l}{Q} \right)}} \right]}.$$

Из последних формул видим, что если значение коэффициента β (отношение веса ударяемого стержня к падающему грузу) не мало

по сравнению с единицей, то энергия удара T меньше величины $T_0 = \frac{Qv^2}{2g}$, т. е. учет массы стержня снижает расчетное напряжение при ударе.

Удар стержня о жесткую плиту. В некоторых случаях приходится определять напряжения в ударяющем теле, в частности, рассчитывая шток ковочного молота. При этом наиболее опасным для прочности штока является момент окончанияковки, когда проковываемое изделие почти не деформируется и вся энергия удара поглощается штоком. Схематически этот случай показан на рис. 588, где некоторый призматический стержень длиной l поперечного сечения F и веса Q падает с высоты H и ударяется о жесткую плиту A .

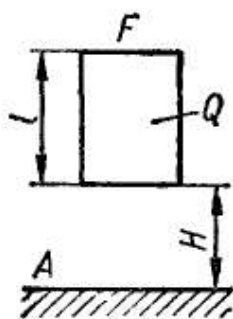


Рис. 588

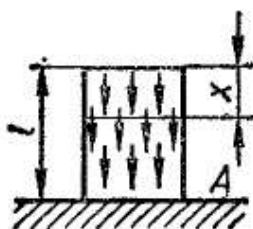


Рис. 589

Поскольку плита не деформируется, то весь запас кинетической энергии $T_0 = QH$, накопленной падающим стержнем к моменту соударения, целиком перейдет в потенциальную энергию деформации падающего стержня.

Так как характер сил инерции массовый (они действуют на каждую единицу объема), то при ударе стержня о плиту в каждом его сечении динамические напряжения по величине будут разными. В верхнем сечении они равны нулю, а в последующих (ниже лежащих) нарастают по линейному закону, достигая максимума у нижнего сечения. Динамическое напряжение в произвольном сечении x стержня (рис. 589) через максимальное напряжение в нижнем сечении может быть выражено так:

$$\sigma_d(x) = (\sigma_d)_{\max} \frac{x}{l}.$$

Величина потенциальной энергии деформации под действием сил инерции в элементе стержня длиной dx на расстоянии x может быть выражена следующим образом:

$$dU_d = \frac{\sigma_d^2(x)}{2E} F dx = \frac{(\sigma_d)_{\max}^2}{2E} F \frac{x^2}{l^2} dx.$$

Тогда энергия деформации всего стержня

$$U_d = \int_0^l \frac{F (\sigma_d)_{\max}^2}{2El^2} x^2 dx = \frac{(\sigma_d)_{\max}^2}{6E} Fl. \quad (22.32)$$

Зная запас кинетической энергии T_0 падающего стержня и пренебрегая потерями энергии на местное смятие при ударе, трение о среду, деформацию плиты и т. п., примем, что $U_d = T_0$, откуда на основании формулы (22.32)

$$\frac{(\sigma_d)_{\max}^2}{6E} lF = T_0.$$

Максимальное напряжение при ударе

$$\boxed{(\sigma_d)_{\max} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}}.} \quad (22.33)$$

Учитывая, что $T_0 = \gamma FlH$, получим

$$(\sigma_d)_{\max} = \sqrt{6E\gamma H}. \quad (22.34)$$

Так как высота падения груза H может быть выражена через скорость в момент удара по известной формуле $H = \frac{v^2}{2g}$, то максимальное напряжение при ударе может быть выражено также формулой

$$\boxed{(\sigma_d)_{\max} = v \sqrt{\frac{3E\gamma}{g}}.}$$

Преобразовав формулу (22.33) иначе, получим

$$(\sigma_d)_{\max} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2EQH}{Fl}}. \quad (22.35)$$

Из сопоставления формул (22.35) и (22.20), пренебрегая в последней членом $\frac{Q}{F}$, найдем, что динамические напряжения в ударяющем стержне будут такие, как будто он получил удар от другого стержня с кинетической энергией, в три раза большей по сравнению с энергией рассматриваемого стержня, падающего на жесткую плиту.

§ 142. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СКРУЧИВАЮЩЕМ УДАРЕ

В случае ударного кручения (рис. 590) можно из энергетического баланса ($U = T$) вывести формулу для определения максимального напряжения, аналогичную той, которая была получена при продольном ударе:

$$(\tau_d)_{\max} = k_d \tau_{ст}, \quad (22.36)$$

где, как и прежде,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}.$$

Здесь $\delta_{ст}$ — перемещение точки соударения в направлении удара под действием статически приложенной силы Q . Пренебрегая деформацией кривошипа и полагая, что вследствие малости перемещения проекция на вертикаль перемещения точки соударения равна длине дуги, $\delta_{ст}$ можно вычислить по формуле

$$\delta_{ст} = \varphi R = \frac{M_{кр} l}{GJ_p} R = \frac{QRl}{GJ_p} R,$$

т. е.

$$\boxed{\delta_{ст} = \frac{QR^2 l}{GJ_p},} \quad (22.37)$$

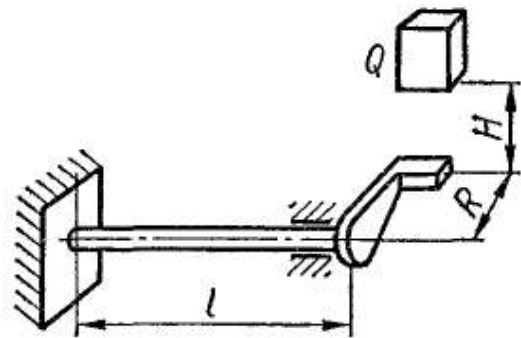


Рис. 590

где Q — вес падающего груза;

l — длина вала;

R — радиус кривошипа.

Если к кривошипу внезапно приложен крутящий момент, т. е. высота падения груза $H = 0$, то коэффициент динамичности [см. формулу (22.13)] $k_d = 2$.

В машиностроении ударное кручение чаще всего вызывается не падением тех или иных грузов, а силами инерции масс при больших ускорениях последних. Это имеет место главным образом при торможении быстровращающихся валов, несущих маховики.

Определять напряжения и деформации стержней, находящихся под действием скручивающих ударных нагрузок, как и при растяжении или сжатии, целесообразно из рассмотрения потенциальной энергии деформации скручиваемого стержня.

Потенциальная энергия деформации стержня при скручивающем ударе может быть представлена в виде

$$U_d = \frac{1}{2} M_d \varphi_d = \frac{M_d^2 l}{2GJ_p},$$

где M_d — динамический крутящий момент;

φ_d — соответствующий угол закручивания вала длиной l .

Вообще говоря, M_d обычно не известен. Известна кинетическая энергия T_0 соответствующей массы маховика, вызывающей ударное кручение. Так, например, при резком торможении вала, несущего маховик на некотором расстоянии от места торможения, участок вала между тормозом и маховиком будет испытывать ударное кручение. При этом, зная начальный запас энергии маховика и конечный после его торможения, можно найти ту часть кинетической энергии T_0 , которая превращается в потенциальную энергию деформации U_d вала. Определяя возникающие в этом случае напряжения, их выражают не через действующий при этом крутящий момент M_d , а через энергию деформации или равную ей кинетическую энергию.

Так как

$$\tau_{\max} = \frac{M_d}{W_p},$$

где W_p — момент сопротивления для круглого вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

то

$$M_d = \frac{\tau_{\max} \pi d^3}{16}.$$

Тогда потенциальная энергия деформации вала может быть выражена через максимальное напряжение формулой

$$U_d = \frac{\tau_{\max}^2 \pi^2 d^6 l}{16^2 \cdot 2GJ_p} = \frac{\tau_{\max}^2 l F}{4G},$$

где l — длина скручиваемого участка вала;
 F — площадь поперечного сечения его.

Пренебрегая различными потерями энергии, можно принять, что

$$U_d = T_0.$$

Тогда напряжение при ударном кручении может быть определено по формуле

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}}, \quad (22.38)$$

где кинетическая энергия маховика

$$T_0 = \frac{J}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{J}{2} \omega^2; \quad J = \frac{QD^2}{8g};$$

J — полярный момент инерции массы маховика;

Q — вес маховика.

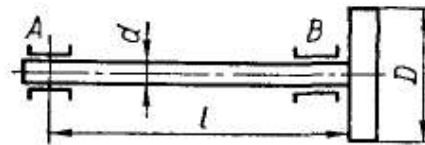


Рис. 591

Пример 96. Диск диаметром $D = 20$ см и весом $Q = 50$ кгс, насаженный на вал AB длиной $l = 1$ м и диаметром $d = 6$ см (рис. 591), вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей $n = 120$ об/мин. Определить величину наибольших касательных напряжений в вале в тот момент, когда конец A внезапно останавливается (крутящий удар). Массой вала пренебречь. Модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^5$ кгс/см².

Для определения максимального напряжения при ударном кручении воспользуемся формулой (22.38):

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}},$$

где

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{J}{2} \omega^2 = \frac{QR^2}{4g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 = \frac{QD^2}{16g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 = \\ &= \frac{50 \cdot 20^2 \cdot 3,14^2}{16 \cdot 981 \cdot 900} \frac{120^2}{900} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 201 \text{ кгс} \cdot \text{см}; \\ F &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} \text{ см}^2 = 28,26 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в формулу для τ_{\max} , найдем, что

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}} = 2 \sqrt{\frac{201 \cdot 8 \cdot 10^5}{100 \cdot 28,26}} \text{ кгс/см}^2 = 476 \text{ кгс} \cdot \text{см}^2.$$

Пример 97. Работающая на сжатие винтовая пружина изготовлена из стальной проволоки квадратного сечения $b = 6$ мм. Средний диаметр витка пружины $D = 12$ см, число витков $n = 18$. Определить величину статической нагрузки, которая сожмет пружину на $\lambda = 2,5$ см. Предполагая, что тот же груз падает на ненагруженную пружину с высоты $H = 10$ см, определить осадку пружины и наибольшее касательное напряжение при ударе. $G = 8 \cdot 10^5$ кгс/см².

Вес груза определим из выражения статической осадки пружины:

$$\lambda = \frac{M_{кр} l}{G J_k} R.$$

Имея в виду, что

$$J_k = \beta h b^3; \quad M_{кр} = RQ; \quad l = 2\pi Rn,$$

осадку можно представить формулой

$$\lambda = \frac{QR^2 2\pi Rn}{G\beta hb^3},$$

откуда определится вес груза Q :

$$Q = \frac{\lambda G\beta hb^3}{2\pi R^3 n} = \frac{2,5 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,141 \cdot 0,6^4}{2 \cdot 3,14 \cdot 6^3 \cdot 18} \text{ кгс} = 1,5 \text{ кгс}.$$

Согласно табл. 14 (с. 217), при $\frac{h}{b} = 1$ ($h = b$) коэффициент $\beta = 0,141$.

Определим величину осадки пружины при динамическом приложении груза $Q = 1,5$ кгс в случае падения его с высоты $H = 10$ см:

$$\lambda_d = k_d \delta_{ст}, \quad (22.39)$$

где

$$\delta_{ст} = \lambda = 2,5 \text{ см}; \quad k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{2,5}} = 4.$$

Подставляя значение k_d и $\delta_{ст} = \lambda$ в формулу (22.39), найдем величину λ_d :

$$\lambda_d = k_d \lambda = 4 \cdot 2,5 \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

Определим максимальную величину динамических напряжений кручения в витке пружины:

$$\tau_d = k_d \tau_{ст},$$

где

$$\tau_{ст} = \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k}; \quad W_k = \alpha b^3.$$

Для квадратного сечения, согласно табл. 14, коэффициент $\alpha = 0,208$. Тогда

$$\tau_{ст} = \frac{QR}{\alpha b^3} = \frac{1,5 \cdot 6}{0,208 \cdot 0,6^3} \text{ кгс/см}^2 = 200 \text{ кгс/см}^2,$$

а максимальное динамическое напряжение

$$\tau_d = k_d \tau_{ст} = 4 \cdot 200 \text{ кгс/см}^2 = 800 \text{ кгс/см}^2.$$

§ 143. РАСЧЕТ НА УДАР ПРИ ИЗГИБЕ

Рассматривая теорию удара, вызывающего изгиб, будем полагать, что, как и ранее, в процессе удара во всех его фазах движение конструкции происходит без потерь энергии на нагрев за счет трения о среду, на местные пластические деформации и т. п. Поэтому, определяя деформации и напряжения при изгибающем ударе, придем к формулам, аналогичным выражениям для ударного растяжения или сжатия. Применительно к случаю динамического изгиба указанные формулы соответственно примут вид

$$f_d = k_d f_{ст}; \quad (22.40)$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}; \quad (22.41)$$

$$\boxed{k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}},} \quad (22.42)$$

где $f_{ст}$ — статический прогиб в месте удара, зависящий от схемы нагружения и условий опирания.

Так, например, для балки с длиной пролета l , шарнирно закрепленной по концам и испытывающей посередине пролета удар от падающего с высоты H груза Q (рис. 592),

$$(f_{ст})_{\max} = \frac{Ql^3}{48EJ}; \quad (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{4W}.$$

Для консоли, испытывающей удар от груза Q , падающего на ее свободный конец,

$$(f_{ст})_{\max} = \frac{Ql^3}{3EJ}; \quad (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{W}.$$

Подставляя значения $f_{ст}$ в формулу для коэффициента динамичности (22.42), находим k_d , а затем по формулам (22.41) и (22.40) находим динамические напряжения и деформации. Так, для балки на двух опорах динамические напряжения определяются по формуле

$$(\sigma_d)_{\max} = k_d (\sigma_{ст})_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}} \right).$$

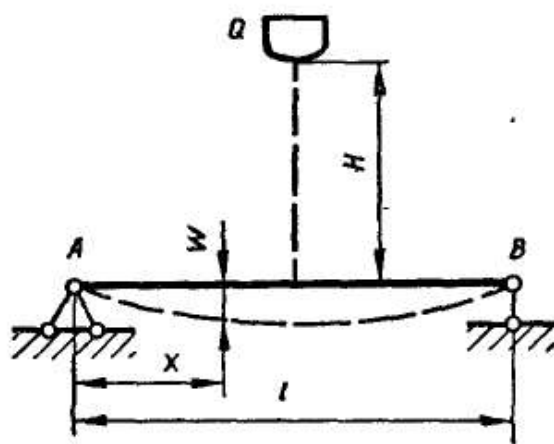


Рис. 592

Обозначая $QH = T_0$ (энергия ударяющего тела к моменту начала удара), последнюю формулу можно представить в виде

$$\boxed{(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} \right)}, \quad (22.43)$$

а условие прочности в этом случае запишется так:

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} \right) \leq |\sigma_d| = \frac{\sigma_T}{n_d},$$

где n_d — запас прочности с учетом динамической нагрузки.

Сопротивление балки ударным нагрузкам зависит как от момента сопротивления, так и от ее изгибной жесткости. Чем больше податливость (деформируемость) балки, тем большую кинетическую энергию удара она может принять при тех же допускаемых напряжениях. Наибольший прогиб балки получится тогда, когда во всех ее сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т. е. если это будет балка равного сопротивления изгибу. Поэтому рессоры и делают в форме балок равного сопротивления.

Вычисляя напряжения при ударе, мы считали, что вся энергия удара переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела. В действительности же некоторая ее часть расходуется на местные деформации, происходящие в зоне удара. При более или

менее значительной массе ударяемого тела эта поправка может оказаться существенной.

В расчетах напряжений при ударе [формула (22.41)] не учитывалась также масса ударяемого тела, которая после прихода в соприкосновение с ударяющим телом приобретает определенные ускорения и тем самым влияет на возникающие в балке динамические напряжения. В некоторых случаях учет массы упругой системы, испытывающей удар, может оказаться также весьма существенным.

В качестве примера рассмотрим случай удара при изгибе (рис. 592). Пусть в момент удара груз Q имеет скорость v , а балка неподвижна. В течение очень короткого промежутка времени все элементы балки приобретают некоторую скорость, а скорость груза тем временем несколько уменьшается.

Можно считать, что в этот период удара ось балки остается практически прямой, а уменьшение скорости груза происходит за счет местных деформаций как балки, так и самого груза. Этот период окончится тогда, когда скорость груза и приобретенная скорость балки сравняются и будут иметь одну и ту же величину v_1 . После этого начнется изгиб балки под действием груза Q , движущегося со скоростью v_1 вместе с получившим удар сечением балки, как бы прикрепленным к грузу.

В этот второй период удара, когда имеет место деформация уже всей балки, кинетическая энергия груза и движущейся балки переходит в потенциальную энергию изгиба. Для вычисления этой энергии необходимо знать скорость груза v_1 и скорость остальных сечений балки по ее длине.

Кинетическая энергия груза и балки до удара равна кинетической энергии падающего груза $\frac{Qv^2}{2g}$. В конце первого периода удара кинетическая энергия груза будет $\frac{Qv_1^2}{2g}$. Полагая, что при ударе балка гнется по той же кривой, что и при действии статической сосредоточенной нагрузки, приложенной посередине пролета ее, кинетическую энергию балки в конце первого периода удара можно определить следующим образом.

Уравнение изогнутой оси шарнирно опертой балки, статически нагруженной посередине пролета, легко представить в виде

$$\omega = \frac{f}{l^3} (3l^2x - 4x^3),$$

где $f = \frac{Ql^3}{48EJ}$ — стрела прогиба балки.

Если под действием удара среднее сечение балки переместится на величину $\omega_{\text{макс}}$ от положения статического равновесия, то сечение на расстоянии x от левого конца (рис. 592) переместится на

$$\omega = \frac{\omega_{\text{макс}}}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Скорость движения этого сечения при ударе

$$v = \frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \frac{1}{l^3} (3l^2x - 4x^3).$$

Тогда кинетическая энергия элемента балки длиной dx определится так:

$$dT_0 = \frac{v^2 \gamma F dx}{2g} = \frac{\gamma F dx}{2g} \left[\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \frac{1}{l^3} (3l^2x - 4x^3) \right]^2,$$

а кинетическая энергия всей балки

$$T_0 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\gamma F}{2g} \left(\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2 \frac{1}{l^6} (3l^2x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} \left(\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2;$$

$$\boxed{T_0 = \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} \left(\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} \right)^2.} \quad (22.44)$$

В конце первого периода удара, когда скорость сечения балки в месте удара

$$\frac{dw_{\text{макс}}}{dt} = v_1,$$

кинетическая энергия балки определится формулой

$$T_0 = \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2.$$

Таким образом, потерянная при ударе кинетическая энергия T_1 может быть вычислена по формуле

$$T_1 = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 \right) = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right].$$

$$(22.45)$$

С другой стороны, эту же энергию можно вычислить иначе. Действительно, кинетическая энергия, потерянная грузом за счет изменения скорости на величину $v_1 - v$, будет

$$\frac{Q}{2g} (v - v_1)^2.$$

В то же время кинетическая энергия балки, приобретенная за счет изменения скорости на величину $(v_1 - 0)$, равна

$$\frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} (0 - v_1)^2.$$

Поэтому суммарная кинетическая энергия груза и балки, соответствующая потерянной скорости груза и приобретенной скорости балки, может быть вычислена по формуле

$$T_1 = \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} (0 - v_1)^2 =$$

$$= \frac{Q}{2g} \left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right]. \quad (22.46)$$

Поскольку правые части формул (22.45) и (22.46) выражают одну и ту же энергию, то их можно приравнять, т. е.

$$\frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right] = \frac{Q}{2g} \left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right].$$

Отсюда определим скорость груза v_1 вместе с балкой в конце первого этапа удара:

$$\boxed{v_1 = \frac{v}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}}}. \quad (22.47)$$

Имея скорость v_1 , можно вычислить кинетическую энергию системы (груза с балкой), которая должна полностью перейти в упругую энергию деформации балки:

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 = \frac{v_1^2}{2g} Q \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right).$$

Подставляя в эту формулу v_1 согласно формуле (22.47), получим

$$T = \frac{Qv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}} = \frac{T_0}{1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q}}, \quad (22.48)$$

поскольку

$$T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g}. \quad (22.49)$$

Тогда формула (22.43) для определения максимального динамического напряжения в балке при ударе с учетом массы балки должна быть записана в виде

$$\boxed{(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2 l^3}} \right)}.$$

Подставляя вместо T его значение согласно формуле (22.48), получим

$$(\sigma_d)_{\max} = \frac{Ql}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}} \right),$$

т. е. в этом случае коэффициент динамичности

$$\boxed{k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left(1 + \frac{17}{35} \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}}}. \quad (22.50)$$

Рассматривая выражения (22.48) и (22.50), видим, что если отношение $\frac{\gamma Fl}{Q}$ не мало по сравнению с единицей, то энергия удара T заметно меньше величины $T_0 = \frac{Qv^2}{2g}$, т. е. учет массы балки снижает

расчетные напряжения в балке при ударе, а неучет массы, по-видимому, идет в запас прочности. Вообще же анализ последней формулы показывает, что одна и та же кинетическая энергия, запасенная ударяющей массой, будет вызывать разные динамические напряжения в зависимости от массы ударяемой балки, при этом, чем больше масса последней, тем напряжения будут меньше.

Пример 98. Определить напряжения и осадку рессоры автомобиля, если его колеса с небольшой скоростью попадают в канаву глубиной $H = 200$ мм. Нагрузка на рессору $P = 700$ кгс. Рессора представляет собой балку равного сопротивления. Состоит рессора из 11 листов, длина ее $l = 1020$ мм. Ширина листа $b = 65$ мм, высота $h = 6$ мм. Модуль упругости материала рессоры $E = 2,1 \times 10^6$ кгс/см².

Определим статическую деформацию рессоры:

$$f_{ст} = \frac{\beta Pl^3}{48EJ} = \frac{\beta Pl^3 12}{48Enbh^3} = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3},$$

где β — некоторый коэффициент ($\beta = 1,25 \div 1,40$), учитывающий степень приближения практически выполненной рессоры к балке равного сопротивления.

Подставляя в последнюю формулу известные величины и принимая $\beta = 1,35$, находим, что

$$f_{ст} = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3} = \frac{1,35 \cdot 700 \cdot 102^3 \text{ см}}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 6,5 \cdot 0,6^3} \approx 7,7 \text{ см.}$$

Статическое напряжение

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Pl \cdot 6}{4nbh^2} = \frac{3Pl}{2nbh^2} = \frac{3 \cdot 700 \cdot 102}{2 \cdot 11 \cdot 6,5 \cdot 0,6^2} \text{ кгс/см}^2 = 4170 \text{ кгс/см}^2.$$

Определяем коэффициент динамичности:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{7,7}} \approx 3,5.$$

Осадка рессоры при попадании колеса автомобиля в канаву

$$f_d = k_d f_{ст} = 3,5 \cdot 7,7 \text{ см} = 27 \text{ см.}$$

Определяем динамическое напряжение:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 3,5 \cdot 4170 \text{ кгс/см}^2 = 14600 \text{ кгс/см}^2.$$

Пример 99. Определить динамические нормальные напряжения в стальном стержне при его падении с высоты $H = 10$ см таким образом, что, оставаясь горизонтальным, он ударяется концами о жесткие опоры. Длина стержня $l = 100$ см, диаметр $d = 1$ см, удельный вес материала $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3}$ кгс/см³.

В данном случае динамические напряжения не могут быть определены через коэффициент динамичности k_d по приведенной выше методике. Поэтому, решая задачу, будем исходить из того, что вся кинетическая энергия T , запасенная падающим стержнем до достижения им опор, полностью перейдет в энергию деформации U стержня при его ударе (потерями энергии на смятие в местах контакта стержня с опорами и на трение о среду пренебрегаем), т. е.

$$U = T.$$

Полагаем, что в момент удара стержень будет нагружен силами инерции q_l массы стержня, равномерно распределенной по его длине. Эти силы не известны, поскольку не известны ускорения, какие будут иметь место при ударе стержня.

Поэтому для определения потенциальной энергии деформации воспользуемся формулами потенциальной энергии в стержне, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой:

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EJ},$$

где

$$M(x) = \frac{q_l l}{2} x - \frac{q_l x^2}{2}.$$

Определим кинетическую энергию стержня:

$$T = HQ = HFt\gamma = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 100 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 6,12 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Тогда потенциальная энергия деформации

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l \frac{q_l^2 l^2}{4} \left(x^2 - 2 \frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2} \right) dx = \frac{q_l^2 l^5}{240EJ},$$

или

$$U = \frac{q_l^2 l^5}{240EJ} = \frac{q_l^2 \cdot 100^5 \cdot 64}{240 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 1^4} = 425q_l^2.$$

Определяем интенсивность инерционной равномерно распределенной нагрузки q_l из условия

$$T = U,$$

или $6,12 = 425q_l^2$:

$$q_l = \sqrt{\frac{6,12}{425}} \text{ кгс/см} = 0,12 \text{ кгс/см}.$$

Тогда максимальный изгибающий момент

$$M_{\text{макс}} = \frac{q_l l^2}{8} = \frac{0,12 \cdot 100^2}{8} \text{ кгс} \cdot \text{см} = 150 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Определяем максимальное динамическое напряжение в падающем стержне:

$$(\sigma_d)_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} = \frac{150 \cdot 32}{\pi \cdot 1^3} \text{ кгс/см}^2 = 1530 \text{ кгс/см}^2$$

§ 144. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ УДАРЕ

Для проверки способности материала сопротивляться ударным нагрузкам применяют особый вид испытаний ударным изгибом — определение ударной вязкости надрезанных образцов. Эти испытания проводят на маятниковых копрах (рис. 593). На рис. 594 показаны применяемый при испытании образец и направление удара бойка маятника. Разность высот положения маятника до и после удара позволяет вычислить работу A , израсходованную на разрушение образца.

Ударной вязкостью материала a_k называется величина работы разрушения образца, отнесенная к площади его поперечного сечения

в месте надреза:

$$a_k = \frac{A}{F}. \quad (22.51)$$

Хотя данные об ударной вязкости не могут быть использованы при расчете на прочность, но они позволяют оценить особое качество

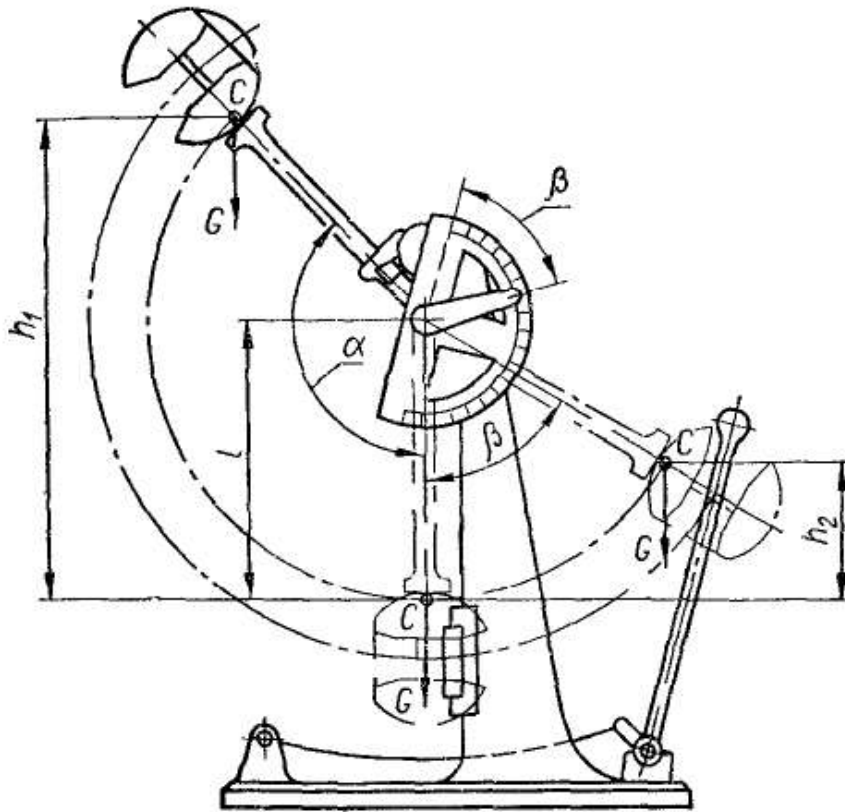


Рис. 593

металла — его склонность к хрупкости при динамических нагрузках в условиях сложного напряженного состояния в области надреза и решить вопрос о применимости того или иного материала для данных условий работы. Именно в таких условиях работают многие детали машин, имеющие отверстия, канавки для шпонок, разные входящие углы и т. п.

Низкая ударная вязкость служит основанием для браковки материала. Стали, применяемые для изготовления деталей, работающих при динамических нагрузках, должны иметь ударную вязкость не менее $8-10 \text{ кгс} \times \text{м/см}^2$.

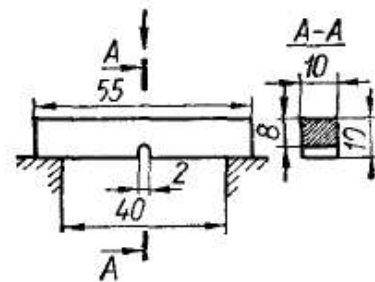


Рис. 594

Ударная вязкость одной и той же стали зависит от ее структуры, причем зависимость эту при статических испытаниях обнаружить невозможно. В табл. 25 приведены результаты определения ударной вязкости для мелкозернистой и крупнозернистой сталей марки Ст2 (0,15% углерода). Эти стали, имеющие почти одинаковые пластические свойства при статических испытаниях, сильно отличаются по ударной вязкости.

Материал	σ_B кгс/мм ²	δ	ψ	Ударная вязкость a_k кгс·м/см ²
Сталь мелкозернистая	37,5	35,3	72,2	13,1
» крупнозернистая	34,5	36,9	66,7	2,6

При низких температурах большинство черных металлов становятся хрупкими, ударная вязкость их также снижается. Для таких металлов ударными испытаниями с постепенным понижением температуры удалось установить так называемую *критическую температуру хрупкости* — температуру, при которой происходит резкое

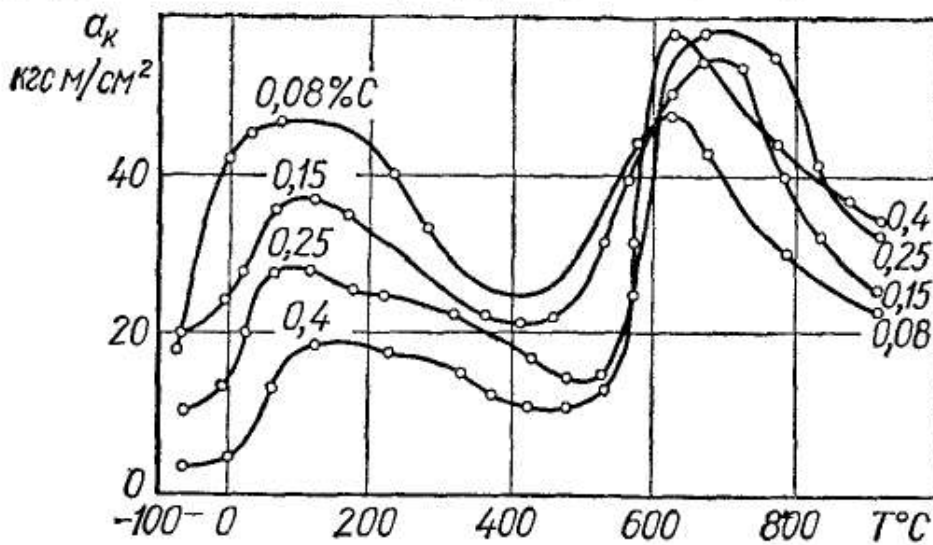


Рис. 595

уменьшение ударной вязкости металла. Критическая температура хрупкости различных металлов различна. Ниже этой температуры металл становится непригодным для работы при динамических воздействиях.

Ударная хрупкость может появляться и при повышенных температурах. Например, ударная вязкость углеродистых сталей значительно снижается в интервале температур 200—550°C (рис. 595).

Глава 23

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 145. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Деформации и напряжения, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называют *контактными*. Вследствие деформации в местах соприкосновения элементов конструкции пере-

дача давлений происходит по весьма малым площадкам. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объемное напряженное состояние (рис. 596). Как показывают расчеты, контактные напряжения имеют явно местный характер и весьма быстро убывают по мере удаления от места соприкосновения. Несмотря на это, исследовать контактные напряжения и деформации необходимо для решения вопросов прочности многих ответственных деталей. К таким деталям относятся, например, шариковые и роликовые подшипники, зубчатые колеса, элементы кулачковых механизмов, колеса подвижного состава, рельсы, шаровые и цилиндрические катки и т. д.

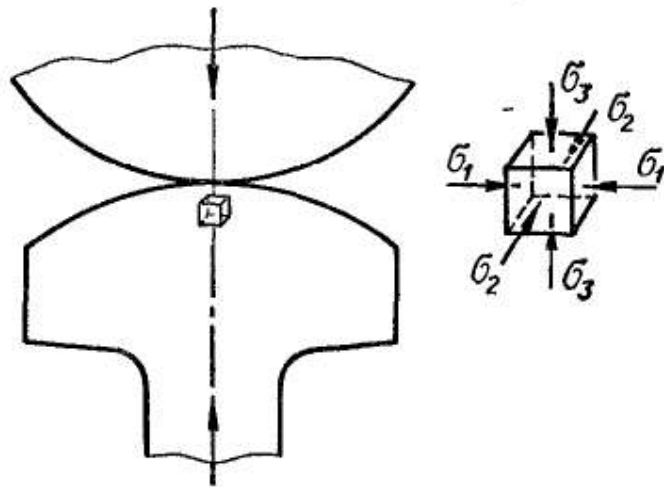


Рис. 596

Впервые правильное решение основных случаев сжатия упругих тел дано методами теории упругости в работах немецкого физика Г. Герца, относящихся к 1881—1882 гг. Дальнейшее развитие контактной проблемы принадлежит главным образом советским ученым.

Ниже приведены некоторые результаты, полученные методами теории упругости при следующих предположениях:

- 1) нагрузки создают в зоне контакта только упругие деформации, следующие закону Гука;
- 2) площадки контакта малы по сравнению с поверхностями соприкасающихся тел;
- 3) силы давления, распределенные по поверхностям контакта, нормальны к этим поверхностям.

§ 146. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Сжатие шаров. В случае взаимного сжатия силами P двух шаров с радиусами R_1 и R_2 (рис. 597) образуется круглая площадка контакта, радиус которой определяют по формуле

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (23.1)$$

где E_1 и E_2 — модули упругости материалов шаров.

Нормальные (сжимающие) напряжения на площадке контакта распределены по полусфере. Наибольшее из них имеет место в центре

площадки контакта:

$$\sigma_3 = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2} = -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}; \quad (23.2)$$

два других главных напряжения в центре площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{\max}|.$$

Таким образом, в наиболее напряженной точке площадки контакта материал испытывает напряженное состояние, близкое к равномерному сжатию. Благодаря этому в зоне контакта материал может выдержать без появления остаточных деформаций весьма большие давления (см. § 48). Вычислим, например, напряжение σ_{\max} в центре площадки контакта, при котором впервые появляются остаточные деформации. Воспользуемся для этого четвертой теорией прочности:

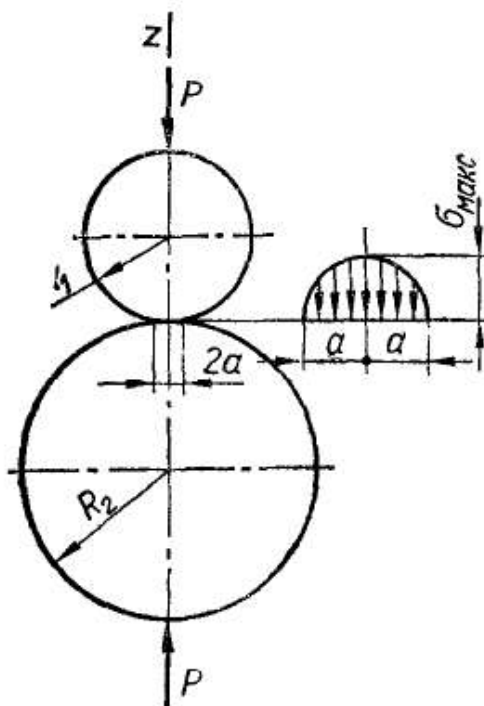


Рис. 597

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T.$$

Подставив значения главных напряжений, найдем, что

$$0,2\sigma_{\max} = \sigma_T, \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = 5\sigma_T.$$

Для закаленной хромистой стали, употребляемой для шариковых подшипников, вместо предела текучести примем

величину предела пропорциональности $\sigma_{\text{пл}} \approx 10\,000 \text{ кгс/см}^2$. Следовательно, $\sigma_{\max} \approx 50\,000 \text{ кгс/см}^2$.

Наиболее опасная точка расположена на оси z на глубине, примерно равной половине радиуса площадки контакта. Главные напряжения в этой точке

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= -0,18\sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,8\sigma_{\max}, \end{aligned} \quad (23.3)$$

где σ_{\max} — наибольшее напряжение в центре площадки контакта, определяемое по формуле (23.2).

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{\max}. \quad (23.4)$$

Изменяя в формуле (23.2) знак при R_2 на обратный, получим значение σ_{\max} в случае давления шара на вогнутую сферическую

поверхность (рис. 598):

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (23.5)$$

При взаимном давлении шара и плоскости (рис. 599), приняв $R_2 = \infty$, находим

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{1}{R^2}}. \quad (23.6)$$

Сжатие цилиндров. При взаимном нажатии двух цилиндров с параллельными образующими равно-

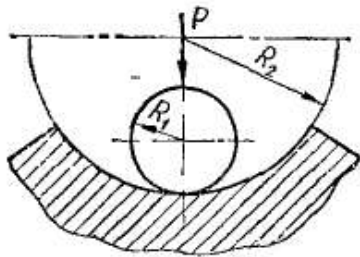


Рис. 598

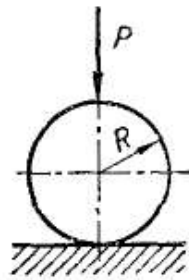


Рис. 599

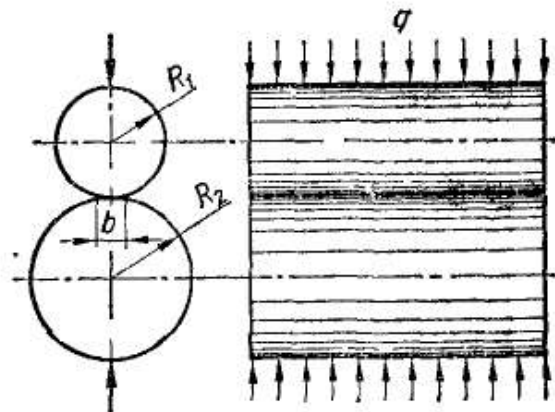


Рис. 600

мерно распределенной нагрузкой интенсивности q кгс/см (рис. 600) площадка контакта имеет вид узкого прямоугольника, ширина которого определяется по формуле

$$b = 2,15 \sqrt[3]{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (23.7)$$

Наибольшее напряжение сжатия, действующее в точках оси площадки контакта,

$$\sigma_{\max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt[3]{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (23.8)$$

Анализ напряженного состояния показывает, что опасная точка расположена на оси z на глубине, равной 0,4 ширины площадки контакта. Главные напряжения в этой точке имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180 \sigma_{\max}; \\ \sigma_2 &= -0,288 \sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,780 \sigma_{\max}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = 0,3 \sigma_{\max}. \quad (23.10)$$

Изменяя в формуле (23.8) знак при R_2 на обратный, получим напряжения в случае давления цилиндра на деталь с вогнутой цилинд-

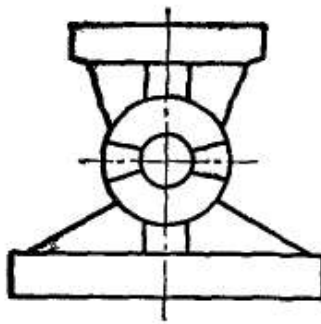


Рис. 601

рической поверхностью. Такие напряжения действуют между цилиндрическим шарниром и балансирами (рис. 601).

При взаимном давлении цилиндра и плоскости, приняв в формуле (23.8) $R_2 = \infty$, находим, что

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}} \quad (23.11)$$

Приведенные выше формулы получены при $\mu = 0,3$. Однако для практических расчетов они пригодны и при других значениях коэффициента Пуассона.

Общий случай контакта двух тел. Приведем формулы для общего случая контакта двух тел из одинакового материала.

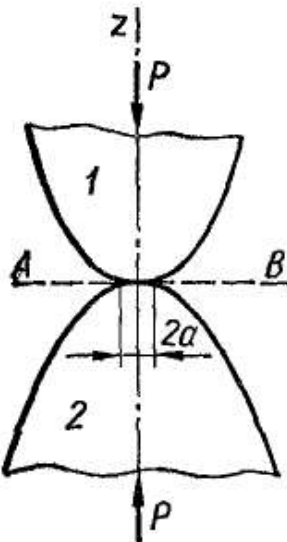


Рис. 602

Предполагается, что оба тела в точке касания имеют общую касательную плоскость AB и общую нормаль z , вдоль которой направлены силы P (рис. 602). Обозначим радиусы кривизны в точке касания первого тела ρ_1 и ρ'_1 , второго тела — ρ_2 и ρ'_2 , причем $\rho_1 < \rho'_1$, $\rho_2 < \rho'_2$. Напомним, что главными кривизнами называют наибольшую и наименьшую кривизны, расположенные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр кривизны.

Радиусы кривизны считаются положительными, если центры кривизны лежат внутри тела. Обозначим через φ угол между главными плоскостями кривизны тел, в которых лежат меньшие радиусы ρ_1 и ρ_2 .

В общем случае площадка контакта представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \alpha^3 \sqrt{\frac{3P(1-\mu^2)}{E \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right)}}; \quad (23.12)$$

$$b = \beta^3 \sqrt{\frac{3P(1-\mu^2)}{E \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right)}}, \quad (23.13)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Значения коэффициентов α и β приведены в табл. 26 как функции вспомогательного угла Ψ , вычисляемого по формуле

$$\cos \Psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1} \right) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2} \right) \cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}} \quad (23.14)$$

При этом знак числителя в формуле (23.14) выбирают так, чтобы $\cos \Psi$ был положительным.

Наибольшее напряжение сжатия в центре площадки контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} \quad (23.15)$$

Наиболее опасная точка расположена на оси z на некоторой глубине, зависящей от отношения $\left(\frac{b}{a}\right)$ полуосей эллиптической пло-

Таблица 26

ψ°	α	β	ψ°	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

щадки контакта. Однако наибольшее касательное напряжение в опасной точке почти не зависит от указанного отношения размеров площадки, и можно принять, что

$$\tau_{\text{макс}} \approx 0,32\sigma_{\text{макс}} \quad (23.16)$$

Из приведенных формул видно, что контактные напряжения зависят от упругих свойств материалов и не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил нарастая все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличиваются и размеры площадки контакта.

§ 147. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Учитывая «мягкость» напряженного состояния в опасных точках (все три главных напряжения сжимающие), проверку прочности при контактных напряжениях следует производить по третьей или же второй теориям прочности [формулы (7.10), (7.19)]:

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Внося в эти формулы значения главных напряжений в опасной точке, выраженные через наибольшее напряжение $\sigma_{\text{макс}}$ в центре площадки контакта, условия прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = m\sigma_{\text{макс}} \leq [\sigma], \quad (23.17)$$

откуда

$$\sigma_{\max} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{\text{конт}} \quad (23.18)$$

Здесь $[\sigma]_{\text{конт}} = \frac{[\sigma]}{m}$ — допускаемое значение для наибольшего напряжения в месте контакта.

Значения коэффициента m в зависимости от отношений полуосей эллиптической площадки контакта и выбранной теории прочности приведены в табл. 27.

Таблица 27

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_{\text{эквIII}}}{\sigma_{\text{макс}}}$ m	$\frac{\sigma_{\text{эквIV}}}{\sigma_{\text{макс}}}$ m
1 (круг)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (полоса)	0,600	0,557

Можно рекомендовать следующий порядок расчета на прочность элементов конструкции в местах контакта.

1. Определить главные радиусы кривизны контактирующих тел ($\rho_1, \rho_1, \rho_2, \rho_2$) и угол φ между главными плоскостями кривизны одного и другого тела.

2. Вычислить по формулам (23.12) и (23.13) с учетом формулы (23.14) размеры полуосей эллиптической площадки контакта.

3. Определить по формуле (23.15) наибольшее напряжение сжатия σ_{\max} в центре площадки контакта. В случае круглой и прямоугольной площадок контакта σ_{\max} находят непосредственно из формул (23.2) или (23.8), не определяя размеров площадки.

Таблица 28¹

Марка металла	Временное сопротивление σ_B кгс/мм ²	Гвердость по Бринеллю HB	Допускаемое наибольшее давление на площадке контакта $[\sigma]_{\text{конт}}$ кгс/см ²
Сталь:			
30	48—60	180	8 500—10 500
40	57—70	200	10 000—13 500
50	63—80	230	10 500—14 000
50Г	65—85	240	11 000—14 500
15X	62—75	240	10 500—16 000
20X	70—85	240	12 000—14 500
15XФ	160—180	240	13 500—16 000
ШХ15	—	—	38 000
Чугун:			
СЧ 21-40	96	180—207	8 000—9 000
СЧ 24-44	100	187—217	9 000—10 000
СЧ 28-48	110	170—241	10 000—11 000
СЧ 32-52	120	170—241	11 000—12 000
СЧ 35-56	130	197—255	12 000—13 000
СЧ 38-60	140	197—255	13 000—14 000

¹ Справочник машиностроителя, т. 3. М., Машгиз, 1955, с. 482.

4. Расчет на прочность производят по формуле (23.18). Значение коэффициента m берут из табл. 27. При этом рекомендуется исходить из четвертой теории прочности.

Допускаемые наибольшие напряжения в месте контакта $[\sigma]_{\text{конт}}$ для роликовых и шариковых подшипников из хромистой стали принимают до 35 000—50 000 кгс/см², для рельсовой стали — до 8000—10 000 кгс/см². В табл. 28 приведены значения допускаемых наибольших давлений на площадке контакта при первоначальном контакте по линии ($m = 0,557$) и статическом действии нагрузки. В случае первоначального контакта в точке значения $[\sigma]_{\text{конт}}$ следует увеличить в 1,3—1,4 раза.

Пример 100 Упорный шариковый подшипник с плоскими кольцами без желобов (рис. 603) статически сжат силами $Q = 640$ кгс.

Определить размеры площадки контакта между шариком и кольцом и величину наибольшего напряжения на этой площадке, проверить прочность. Диаметр шарика $d = 15$ мм, число шариков $i = 20$, коэффициент неравномерности распределения нагрузки между отдельными шариками подшипника — 0,8. Материал шариков и колец — хромистая сталь, допускаемое значение наибольшего напряжения в месте контакта $[\sigma]_{\text{конт}} = 35\,000$ кгс/см², модуль упругости $E = 2,12 \cdot 10^6$ кгс/см².

Учитывая неравномерность распределения нагрузки между отдельными шариками, найдем наибольшее усилие, сжимающее шарик, по формуле

$$P = \frac{Q}{0,8i} = \frac{640}{0,8 \cdot 20} \text{ кгс} = 40 \text{ кгс.}$$

В местах соприкосновения колец и шариков (рис. 599, точки κ) образуется круглая площадка, радиус которой, согласно формуле (23.1),

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{2PR}{E}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 1,5}{2,12 \cdot 10^6}} \text{ см} = 0,0268 \text{ см.}$$

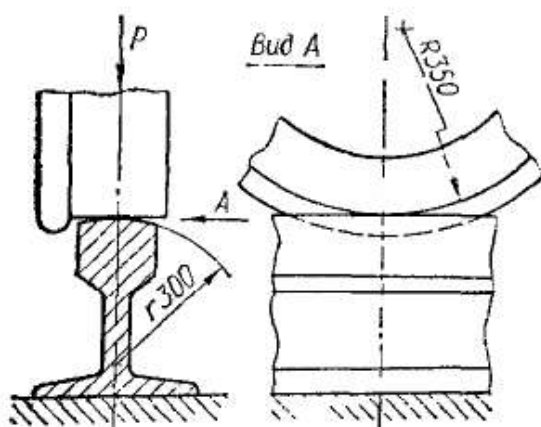


Рис. 604

При этом $R_1 = \frac{d}{2} = 0,75$ см; $R_2 = \infty$;

$$E_1 = E_2 = E$$

Величина наибольшего напряжения на этой площадке на основании формулы (23.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{макс}} &= 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \\ &= \frac{1,5 \cdot 40}{3,14 \cdot 0,0268^2} \text{ кгс/см}^2 = 26\,570 \text{ кгс/см}^2 \end{aligned}$$

Следовательно, $\sigma_{\text{макс}} < [\sigma]_{\text{конт}}$.

Пример 101. Цилиндрическое ходовое колесо крана передает на рельс давление $P = 7000$ кгс (рис. 604). Диаметр наружного

обода колеса $D = 700$ мм. Радиус поперечного сечения головки рельса $r = 300$ мм. Определить размеры площадки контакта и наибольшее напряжение на этой площадке. Модуль $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

В соответствии с указанным выше порядком расчета выпишем главные радиусы кривизны:

$$\text{для колеса } \rho_1 = 350 \text{ мм, } \rho'_1 = \infty;$$

$$\text{для рельса } \rho_2 = 300 \text{ мм, } \rho'_2 = \infty.$$

Угол между главными плоскостями, содержащими ρ_1 и ρ_2 , как легко увидеть из чертежа, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда из формулы (23.14) находим:

$$\cos \Psi = \pm \frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = - \frac{\frac{1}{35} - \frac{1}{30}}{\frac{1}{35} + \frac{1}{30}} = 0,077.$$

Следовательно, вспомогательный угол $\Psi = 85,5^\circ$.

Из табл. 26, произведя линейную интерполяцию, находим значения коэффициентов α , β :

$$\alpha = 1,055; \quad \beta = 0,950.$$

По формулам (23.12) и (23.13) определяем размеры полуосей эллиптической площадки контакта:

$$a = 1,055 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 7000}{2 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{30} \right)}} \text{ см} = 0,566 \text{ см};$$

$$b = 0,950 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 7000}{2 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{30} \right)}} \text{ см} = 0,510 \text{ см}.$$

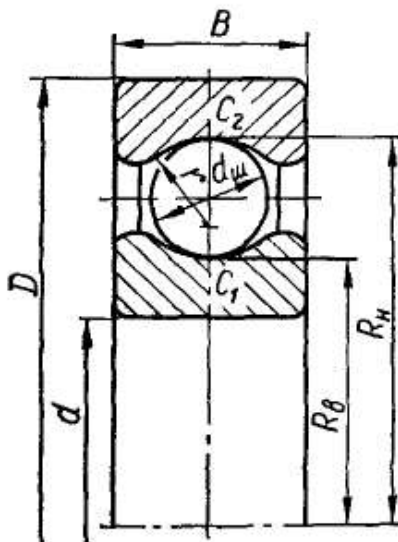


Рис. 605

Наибольшее напряжение на площадке контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 1,5 \frac{P}{\pi ab} = \\ &= \frac{1,5 \cdot 7000 \text{ кгс/см}^2}{3,14 \cdot 0,566 \cdot 0,51} = 11\,600 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

Пример 102. Предполагая статическое действие нагрузки для радиального однорядного шарикового подшипника (рис. 605), определить размеры эллиптической площадки контакта наиболее нагруженного шарика с дорожками качения внутреннего и наружного колец и наибольшее напряжение на площадке контакта. Размеры подшипника: внутренний диаметр $d = 130$ мм, наружный диаметр $D = 280$ мм, ширина $B = 58$ мм, диаметр шарика $d_{\text{ш}} = 44,5$ мм. Радиус наименьшей окружности дорожки качения внутреннего кольца $R_{\text{в}} = 80$ мм. Радиус наибольшей окружности дорожки качения наружного кольца $R_{\text{н}} = 125$ мм. Радиус поперечного профиля дорожки качения $r = 23,4$ см. Наибольшее расчетное давление на шарик $P = 4000$ кгс. Материал шариков и колец — хромистая сталь. Модуль упругости $E = 2,12 \cdot 10^6$ кгс/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Допускаемое значение для наибольшего напряжения в месте контакта $[\sigma]_{\text{конт}} = 50\,000$ кгс/см².

Главные радиусы кривизны поверхностей тел в точках C_1 и C_2 их первоначального касания равны:

для шарика

$$\rho_1 = \frac{1}{2} d_{\text{ш}} = 22,25 \text{ мм}; \quad \rho_1' = \frac{1}{2} d_{\text{ш}} = 22,25 \text{ мм};$$

для внутренней дорожки качения

$$\rho_2 = -r = -23,4 \text{ мм}; \quad \rho_2' = R_{\text{в}} = 80 \text{ мм};$$

для наружной дорожки качения

$$\rho_2 = -r = -23,4 \text{ мм}; \quad \rho_2' = -R_{\text{н}} = -125 \text{ мм};$$

Вначале рассмотрим соприкосновение шарика с внутренней дорожкой качения. Формула (23.14) при $\rho_1 = \rho_1'$ принимает вид

$$\cos \Psi = \pm \frac{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (23.19)$$

Подставим значения кривизны. Тогда

$$\cos \Psi = \pm \frac{-0,0427 - 0,0125}{0,0895 - 0,0427 + 0,0125} = 0,931.$$

Следовательно, $\Psi = 21^\circ 25'$.

Пользуясь табл. 26 и производя линейную интерполяцию, находим, что

$$\alpha = 3,629; \quad \beta = 0,420.$$

Согласно выражениям (23.12) и (23.13) определяем размеры площадки касания:

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} =$$

$$= 3,629 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{0,593 \cdot 2,12 \cdot 10^6}} \text{ см} = 0,740 \text{ см};$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} = 0,420 \cdot 0,206 \text{ см} = 0,087 \text{ см}.$$

Максимальное напряжение на площадке контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} = \frac{1,5 \cdot 4000}{3,14 \cdot 0,740 \cdot 0,087} \text{ кгс/см}^2 = 29\,700 \text{ кгс/см}^2.$$

Совершенно аналогично в месте контакта шарика с внешней дорожкой качения имеем

$$\cos \Psi = \pm \frac{-0,0427 + 0,0080}{0,0895 - 0,0427 - 0,0080} = 0,895.$$

Отсюда $\Psi = 26^\circ 30'$.

Из табл. 26 находим, что

$$\alpha = 3,097; \quad \beta = 0,463.$$

Тогда

$$a = 3,097 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{2,12 \cdot 10^6 \cdot 0,388}} \text{ см} = 0,732 \text{ см}$$

$$b = 0,463 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,91 \cdot 4000}{2,12 \cdot 10^6 \cdot 0,388}} \text{ см} = 0,109 \text{ см}$$

Наибольшее напряжение на площадке контакта

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{1,5P}{\pi ab} = \frac{1,5 \cdot 4000}{3,14 \cdot 0,732 \cdot 0,109} \text{ кгс/см}^2 = 24\,000 \text{ кгс/см}^2$$

Как видим, наиболее опасной является точка C_1 .

Для шариковых подшипников из закаленной хромистой стали допускаемое значение наибольшего напряжения на площадке контакта $[\sigma]_{\text{конт}} = 50\,000 \text{ кгс/см}^2$. Следовательно, прочность обеспечена.

Глава 24

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 148. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В предыдущих главах изложены основные положения курса сопротивления материалов, составляющие комплекс правил и методов для решения простейших задач прочности в инженерном деле.

В то же время, на практике приходится решать более сложные задачи, часто требующие проведения специальных исследований. Будущие инженеры-механики, практическая деятельность которых в той или иной степени связана с вопросами прочности конструкций, должны представлять себе те научные проблемы, которые стоят перед учеными и инженерами-прочнистами на современном этапе технического прогресса. Эти проблемы сводятся к тому, чтобы при проектировании и расчете на прочность и жесткость той или иной реальной детали, на которую действуют известные по величине силовые и тепловые нагрузки, был выбран наиболее подходящий материал с точки зрения оптимальной работы в будущей детали с учетом условий ее эксплуатации, чтобы при этом деталь была минимального веса и имела оптимальные конструктивные формы и технологию ее обработки.

Ниже остановимся на основных научных проблемах в области прочности, диктуемых уровнем современного технического прогресса человечества и перспективами его динамичного развития в ближайшие годы.

Прежде всего необходимо отметить, что в современных условиях развития науки и техники, когда появляются новые классы ранее неизвестных материалов, обладающих часто специфическими свойствами, взгляды на такие материалы и оценку их сопротивления из-

менились. Создание многих материалов, и в первую очередь композиционных, — дело не только материаловедов, но и в не меньшей степени прочнистов, потому что во многих случаях приходится, строго говоря, конструировать прочный материал, рациональным образом располагая составляющие композиции. При этом многие материалы создаются с наперед заданными свойствами, обеспечивающими их оптимальную работу в той или иной детали с учетом условий ее эксплуатации и характера силовых и тепловых нагрузок.

Существенно изменилось и представление о современных проблемах прочности. В настоящее время такие проблемы возникают, как правило, в связи с реализацией общегосударственных программ по использованию новейших открытий в области физики, механики, биологии и других естественных и технических наук. Это, например, программы, связанные с использованием энергии расщепления атомного ядра, а также с освоением космоса. Именно в этих областях мы сталкиваемся с чрезвычайно тяжелыми эксплуатационными условиями работы элементов конструкций как в отношении интенсивности воздействия внешней среды и уровня силового и теплового нагружения, так и в отношении характера изменения этих воздействий во времени.

Обобщая условия, порождающие проблематику в области прочности, мы имеем основание утверждать, что в подавляющем большинстве эти проблемы возникают при создании машин, аппаратов и конструкций, некоторые элементы которых работают в экстремальных условиях, а их прочность определяет в конечном итоге надежность и долговечность всего агрегата.

К числу экстремальных условий, существенным образом интенсифицирующих разупрочнение материалов в эксплуатации, относятся достаточно высокие температуры (до 3000—4000 К), пониженные и весьма низкие температуры (до температуры жидкого гелия — около 4К), интенсивное радиационное облучение, высокотемпературные газы (продукты сгорания), содержащие химически активные примеси, металлические расплавы и морская вода, а также сочетание одновременно действующих различных перечисленных факторов.

Экстремальными следует считать также условия, при которых в эксплуатации протекают неустановившиеся режимы силового и теплового воздействий, в том числе периодические или случайные импульсные нагрузки и резкие теплосмены, т. е. фактически условия, которые имеют место в реальной эксплуатации большинства стационарных энергетических установок, летательных аппаратов, различного типа турбомашин, корпусов надводных и подводных кораблей, химических установок, трубопроводов, двигателей внутреннего сгорания, подвижного состава железнодорожного транспорта, землеройных машин и т. п. Во многих из этих объектов при эксплуатации сложно сочетаются самые различные факторы, оказывающие неблагоприятное влияние на прочность и долговечность наиболее ответственных элементов конструкций.

Заметим, что классические методы сопротивления материалов без специальных исследований, главным образом экспериментальных, не позволяют учесть влияние многочисленных факторов, сопутствующих реальным условиям эксплуатации, при решении вопросов прочности тех или иных элементов конструкций и прогнозировать их долговечность. В связи с этим можно указать те вопросы и проблемы, стоящие перед прочнистами, решение которых вызывается настоятельными требованиями, запросами современного технического прогресса нашей страны.

Прежде всего внимание должно быть уделено накоплению экспериментальных данных о физико-механических свойствах различных материалов в условиях, максимально приближенных к эксплуатационным — экстремальным для данного класса материалов, чтобы получить уравнения состояний материала при заданных условиях силового и теплового воздействий.

Отметим, что простейшим выражением уравнения состояния, характеризующего поведение материала под действием статически прикладываемой нагрузки, является графическое представление зависимости деформации испытуемого образца материала от нагрузки в виде диаграммы растяжения $P - \Delta l$, или в относительных координатах — диаграммы напряжений $\sigma - \epsilon$. В других случаях это будут графические или аналитические зависимости исследуемых характеристик прочности или деформативности от тех или иных факторов (времени, температуры, асимметрии цикла, интенсивности облучения и т. п.).

Необходимость проводить в первую очередь экспериментальные исследования различных аспектов сопротивления материалов обусловлена тем, что разупрочняющее влияние перечисленных выше факторов, имеющих место в эксплуатации, нельзя учесть расчетным путем. Чтобы правильно учесть влияние этих факторов на показатели конструктивной прочности материалов, нужно поставить соответствующие хорошо продуманные экспериментальные исследования по методикам, разработка которых часто представляет самостоятельный научный интерес. К тому же установить соответствующие аналитические критериальные зависимости можно только на основе большого количества экспериментальных данных о свойствах материала. Получают их при испытаниях изготовленных из этого материала специальных образцов в тех или иных условиях силового и теплового воздействий заданной длительности и режима изменения этих воздействий во времени.

Следует иметь в виду, что исследовать прочностные и деформационные свойства любого материала — это значит изучать его потенциальные возможности, чтобы выявить специфические свойства и условия, при которых использование данного материала в конструкции было бы оптимальным. В других случаях нужно выявить те дополнительные модификации технологического и конструкционного характера, которые существенным образом скажутся на улучшении важнейших физико-механических свойств материала, а сле-

довательно, и на повышении их прочности и долговечности при эксплуатации в тех или иных условиях.

Конкретизируя сказанное, приведем перечень вопросов по проблемам прочности, подлежащих решению в ближайшие годы. К числу таких вопросов относятся следующие:

1. Исследование прочности при высоких температурах жаропрочных и тугоплавких материалов при простом и сложном напряженном состояниях как при статических кратковременных и длительных нагрузках, так и при повторно-переменных нагрузках и теплосменах. Особое внимание при этом должно быть обращено на изучение длительной прочности и выносливости материала при неустановившихся режимах силового и теплового воздействия (раздельно и совместно).

2 Изучение основных механических характеристик прочности и пластичности конструкционных материалов при пониженных и низких температурах при статических, повторно-переменных и импульсных нагрузках с учетом конструкционно-технологических факторов для установления уравнений состояния материалов и обоснования критериев предельного состояния и прочности тех или иных типовых элементов конструкций, работающих в условиях низких температур.

3. Изучение влияния реакторного облучения на кратковременную и длительную прочность и пластичность, а также на другие механические свойства конструкционных материалов при различных видах силового и теплового воздействий, установление уравнений состояния различных материалов и получение критериев их прочности, учитывающих эффект влияния радиационного облучения.

4. Изучение влияния агрессивных сред (металлических расплавов, продуктов сгорания, морской воды и др.) на механические свойства конструкционных материалов при длительных статических и повторно-переменных нагрузках в условиях нормальных и высоких температур с целью выявить эффект разупрочнения материалов, обусловленный влиянием среды, а также выбрать оптимальные защитные покрытия исследуемого материала.

5. Изучение влияния различного рода покрытий тугоплавких материалов и их сплавов на показатели прочности и пластичности этих материалов при высоких температурах, чтобы оптимизировать тип покрытия и технологию его нанесения для различных условий эксплуатации элементов конструкций из тугоплавких и жаропрочных материалов с покрытием.

6. Исследование характеристик конструкционной прочности композиционных материалов для оптимизации их состава и прочности объектов из композиционных материалов и установления критериев предельного состояния типовых изделий из композиционных материалов и разработки методов их расчетов.

7. Исследование конструкционной прочности хрупких материалов типа стекла и ситалла с целью создать рациональные инженерные

конструкции, в которых бы в наиболее полной мере были реализованы характерные положительные свойства (низкий удельный вес и высокая прочность при сжатии) этих материалов.

8. Дальнейшее развитие механики разрушения и прежде всего теории трещин, а также живучести различного типа инженерных конструкций, имеющих трещины, и установление критериев предельного состояния таких конструкций, а также прогнозирование их долговечности.

9. Вопросы усталости, и в первую очередь малоциклового усталости, совершенствование методов испытания на усталость, обоснование деформационных критериев малоциклового усталости, установление физической модели накопления повреждений при повторно-переменных нагрузках, кинетики развития усталостных трещин в тех или иных условиях нагружения, статистический аспект усталости, а также разработка инженерных методов расчета элементов конструкций на прочность при повторно-переменных напряжениях с учетом различных факторов (вида напряженного состояния, конструктивно-технологических особенностей, температуры, начальной напряженности и т. п.).

10. Вопросы расчета напряженно-деформированного состояния как в упругой, так и, особенно, в упруго-пластической области элементов конструкций сложных форм под действием внешних нагрузок (в том числе изменяющихся во времени) и неравномерного нагрева, вызывающего большие термические напряжения, при широком использовании современной вычислительной техники.

11. Исследование физических аспектов прочности материалов и элементов конструкций при широком использовании электронной микроскопии, рентгено-структурного анализа, фрактографии, ультразвуковой дефектоскопии и т. п.

12. Изыскание методов оценки накопления поврежденности материала и установления динамики изменения повреждаемости по мере наработки часов в процессе эксплуатации высоконапряженных ответственных элементов конструкций.

Можно было бы указать и более частные вопросы, представляющие значительный научный интерес и большую практическую ценность для технического прогресса.

Исследование конструктивной прочности рулонированных тонкостенных и толстостенных оболочек типа газопроводных труб и корпусов атомных реакторов. Здесь имеются в виду как разработка теории расчета таких систем, так и экспериментальное исследование их напряженно-деформированного состояния (в том числе в упруго-пластической области) и разрушения под действием силовых нагрузок и теплосмен при неравномерном нагреве, а также малоциклового усталости. Цель — установить их предельное состояние и разработать метод расчета таких объектов на прочность применительно к тем или иным условиям их эксплуатации.

Исследование конструктивной прочности лопаток газовых тур-

**Георгий Степанович Писаренко,
Виктор Андреевич Агарев,
Александр Львович Квитка,
Виктор Григорьевич Попков,
Эммануил Соломонович Уманский**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ**

Редактор *Г. В. Елисева*
Переплет художника *Ю. П. Щепкина*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *Т. И. Трофимова*
Корректор *Е. А. Каплан*