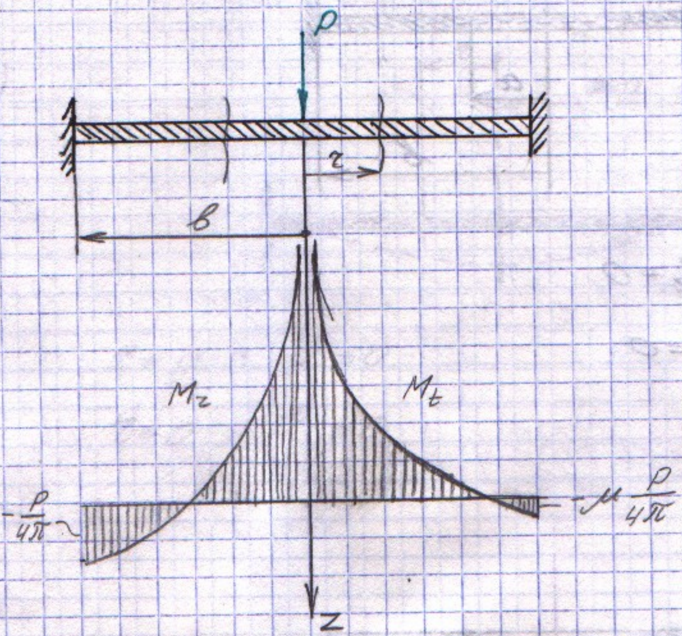
$\boxed{1}$ Пластина без выреза:



$M_r(b) = ?$

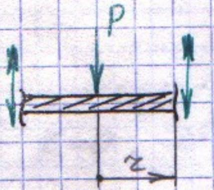
$M_t(b) = ?$

$w_{max} = ?$

$\sigma_r(b) = ?$

$\sigma_t(b) = ?$

Решение



$$\sum F_z = 0 = 2\pi r Q + P$$

$$Q = -\frac{P}{2\pi r}$$

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D\cdot r}\int r\left[\int Q\,dr\right]dr$$

$$\int Q\,d\tilde{r} = -\int \frac{P}{2\pi r}\,dr = -\frac{P}{2\pi}\int\frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{P}{2\pi}\ln r$$

$$\int r\left[\int Q\,dr\right]dr = -\frac{P}{2\pi}\int r\cdot\ln r\cdot dr =$$

подведение
под знак дифф-ла

$$= -\frac{P}{2\pi}\int \ln r\; d\left(\frac{r^2}{2}\right) =$$

интегрир-е по частям

$$= -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{r^2}{2}\ln r - \int\frac{r^2}{2}\underbrace{d\ln r}_{\frac{1}{r}dr}\right\} =$$

$$= -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{1}{2}\int r\,dr\right\} =$$

$$= -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right\} =$$

$$= -\frac{Pr^2}{4\pi}\left\{\ln r - \frac{1}{2}\right\}$$

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{P\cdot r}{4\pi D}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right)\Big(+ \frac{Pr\ln b}{4\pi D} - \frac{Pr\ln}{4\pi D}$$

$$= C_1 r + C_2/r + \frac{P r}{4\pi D}(\ln b - \ln r) - \frac{P r \ln b}{4\pi D} + \frac{P r}{8\pi D} =$$

$$= C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{P \cdot r}{4\pi D} \ln \frac{b}{r} - \frac{P_1 r \ln b}{4\pi D} + \frac{P r}{8\pi D} =$$

$$= \underbrace{\left(C_1 - \frac{P_1 \ln b}{4\pi D} + \frac{P}{8\pi D}\right)}_{\tilde{C}_1} r + \frac{C_2}{r} + \frac{P r}{4\pi D} \ln \frac{b}{r} =$$

$$= \tilde{C}_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} + \frac{P r}{4\pi D} \ln \frac{b}{r}$$

<u>Г.У.:</u>

1) $r = 0: \ \vartheta = 0 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{r \to 0} r \ln \frac{b}{r} = 0$

$$\Downarrow$$

$$C_2 = 0$$

2) $r = b: \ \vartheta = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$

Т.О:

$$\vartheta = \frac{P \cdot r}{4\pi D} \cdot \ln\frac{b}{r} \qquad (*)$$

$$M_r = D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{b}{r} - 1\right]$$

$$M_t = D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right) = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{b}{r} - \mu\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r\to 0} M_r &= \infty \\ \lim_{r\to 0} M_t &= \infty \end{aligned}\right\}$$ $r=0$ – особая точка, результат идеализации модели.

В строительной механике считают, что решения $(*)$, $(**)$ и $(***)$ годятся лишь на некоторам удалении от центра:

$$r \geq \frac{1}{20} b$$

$$w_{max} = -\int_b^0 \vartheta\, dr = \int_0^b \frac{P}{4\pi D}\, r \ln\frac{b}{r}\, dr =$$

$$= \frac{Pb^2}{16\pi D}$$

$$M_r(b) = -\frac{P}{4\pi}$$

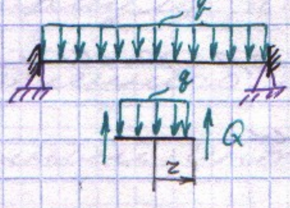
$$M_t(b) = -\mu\frac{P}{4\pi}$$

$$\sigma_r(b) = \frac{6 \cdot M_r(b)}{h^2} = -\frac{6P}{4\pi h^2}$$

$$\sigma_t(b) = \frac{6 \cdot M_t(b)}{h^2} = \frac{6 \cdot \mu P}{4\pi h^2}$$

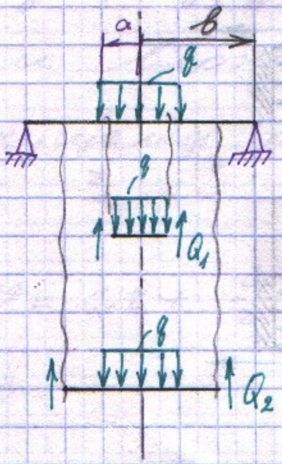
Замечание:

Подобным образом решаются все пластины без выреза внутри; например:



$Q = \frac{qr}{2}$ и т.д.

или:



$$Q_1 = \frac{qr}{2}$$

$$Q_2 = \cancel{\pi} a^2 q / 2\cancel{\pi} r = \frac{a^2 q}{2r}$$

$$\vartheta_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \int r\left[\int Q\,dr\right]dr$$

$$\vartheta_2 = C_3 r + \frac{C_4}{r} + \int r\left[Q\,dr\right]dr$$

Г.У.:

$r=0: \ \vartheta_1 = 0$

$r=a: \ \vartheta_1 = \vartheta_2, \ M_{r1} = M_{r2}$, $r=b: \ M_{r2}=0$