

$$\mu_T = 1,5$$

Дано:  $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$

$$l = 0,5 \text{ м}$$

$$q = 200 \text{ Н/м}$$

$$\nu = 0,25$$

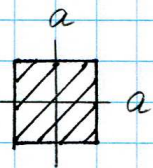
Найти:

- 1) Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов;
- 2) Определить размеры поперечного сечения из условий прочности.

### Решение

Связь между изгибной и крутильной податливостями:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{E}{2 \cdot (1 + 0,25)} = \frac{2}{5} E$$



$$J_{изг} = \frac{a^4}{12}$$

$$J_K = \beta \cdot a^4 = 0,141 \cdot a^4$$

$$\frac{1}{GJ_K} = k \frac{1}{EJ_{изг}}$$

$$k = \frac{EJ_{изг}}{GJ_K} = \frac{\frac{E a^4}{12}}{\frac{2}{5} E \cdot 0,141 \cdot a^4} = 1,48 \approx \frac{3}{2}$$

# I. Вычисление степени статической неопределенности:

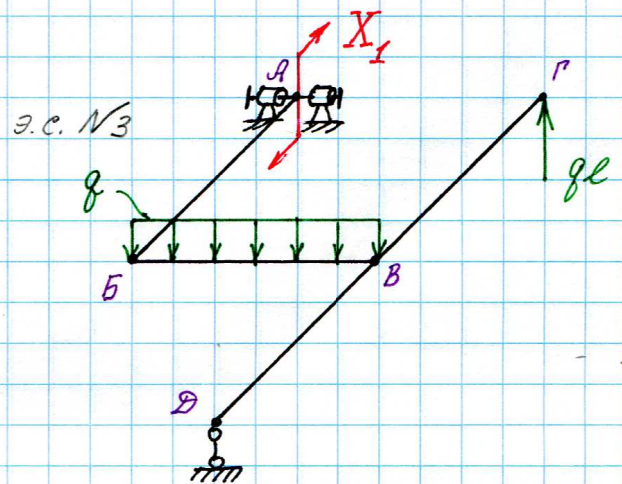
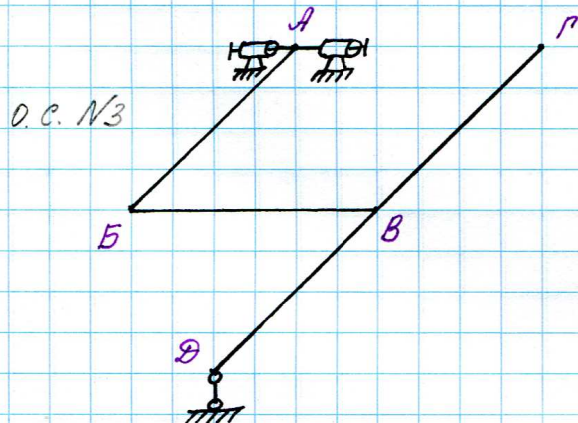
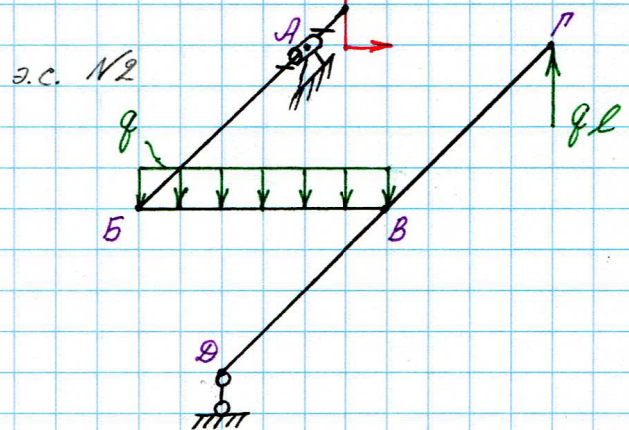
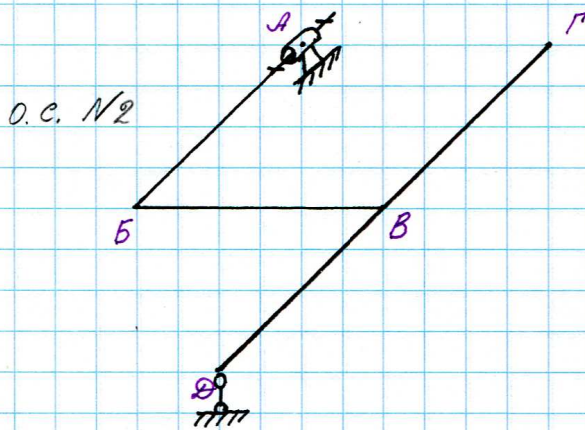
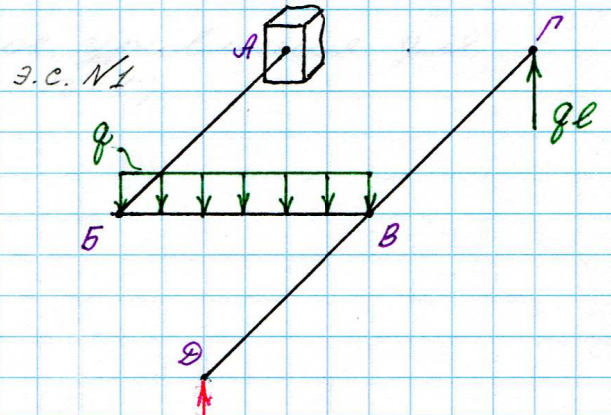
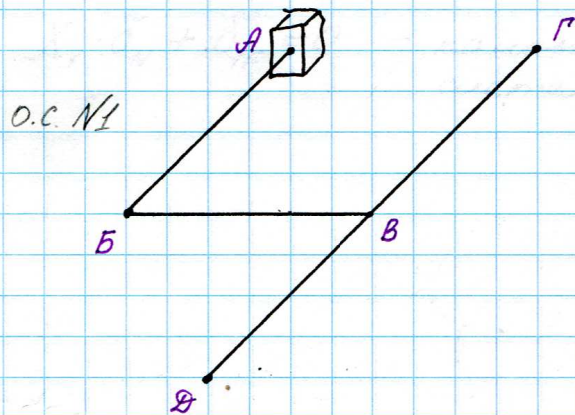
$$a) n_{\text{внеш. св.}} = 3 + 1 = 4$$

$$b) n_{\text{внутр. св.}} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0$$

$$в) n = (n_{\text{внеш. св.}} + n_{\text{внутр. св.}}) - 3 = (4 + 0) - 3 = 1$$

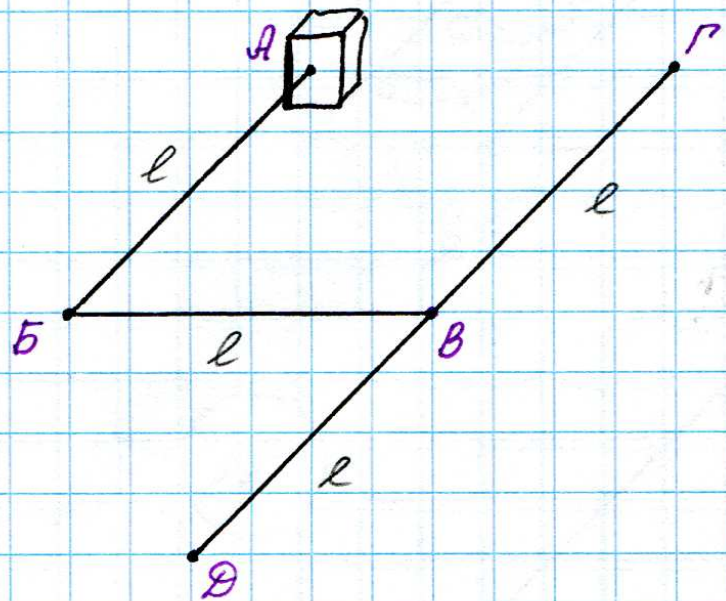
# II. Раскрытие статической неопределенности:

a)

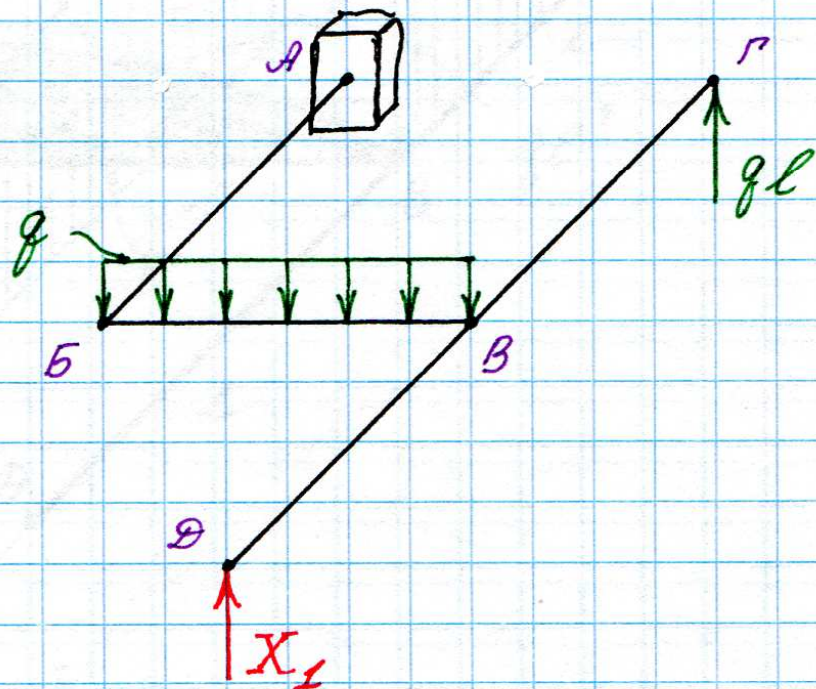


8) Для решения задачи выбираем о.с. и э.с. N1:

о.с. N1

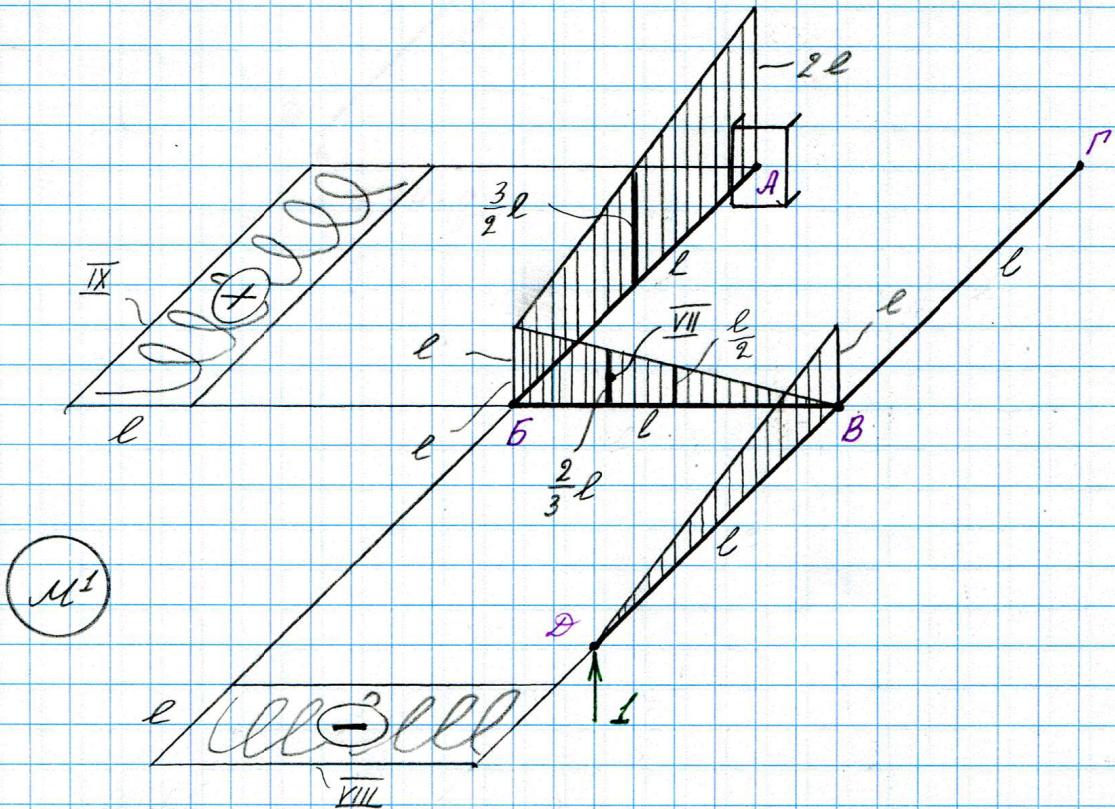
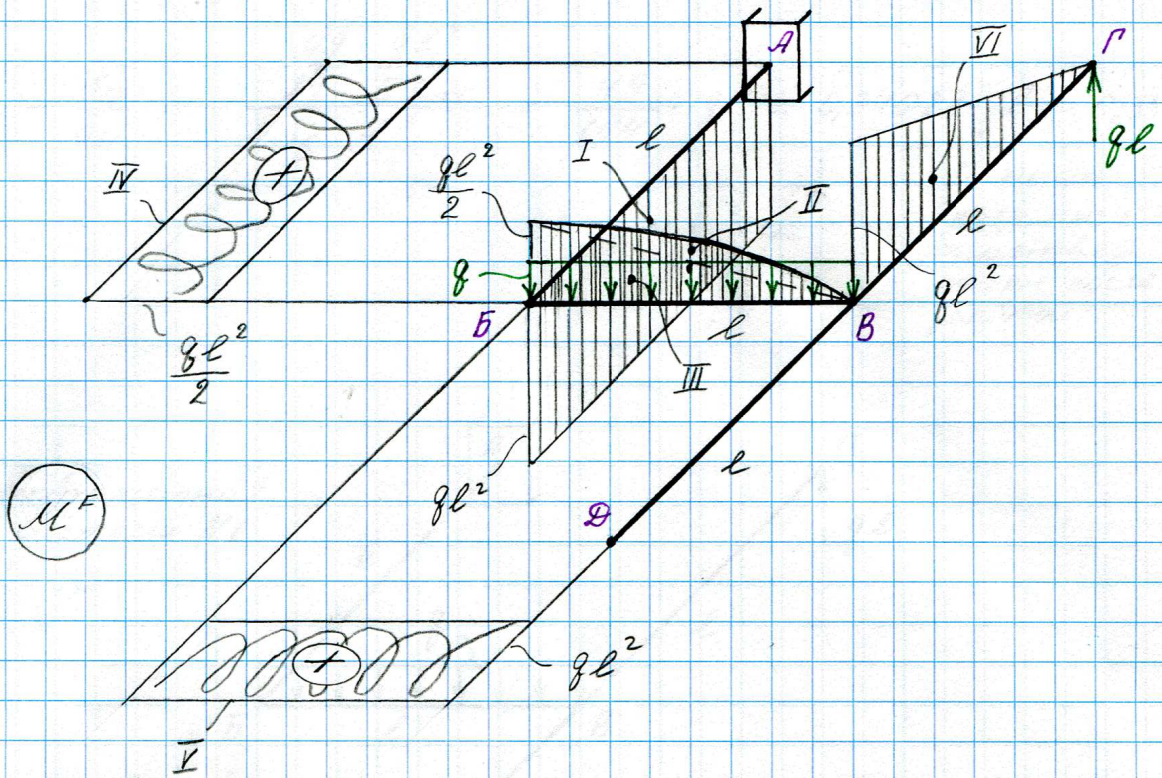


э.с. N1



б)  $X_1 \cdot \delta_{1H} + \delta_{1F} = 0$  - каноническое уравнение для системы с  $n=1$ ;

2)



$$\delta_{1F} = M^F \cdot M^I = \frac{1}{EJ_{sup}} \left[ - (l \cdot ql^2) \cdot \frac{3}{2}l + \left( \frac{ql^3}{12} \right) \frac{l}{2} + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \frac{2}{3}l \right] + \frac{1}{GJ_K} \left[ - (ql^2 \cdot l) \cdot l + \left( \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \cdot l \right] = - \frac{49}{24} \cdot \frac{ql^4}{EJ_{sup}}$$

$$\delta_{11} = M^I \cdot M^I = \frac{1}{EJ_{sup}} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \right) \frac{2}{3} \cdot 2l + \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \right) \frac{2}{3}l \right] + \frac{1}{GJ_K} \left[ (l \cdot l) \cdot l + (l \cdot l) \cdot l \right] = \frac{6l^3}{EJ_{sup}}$$

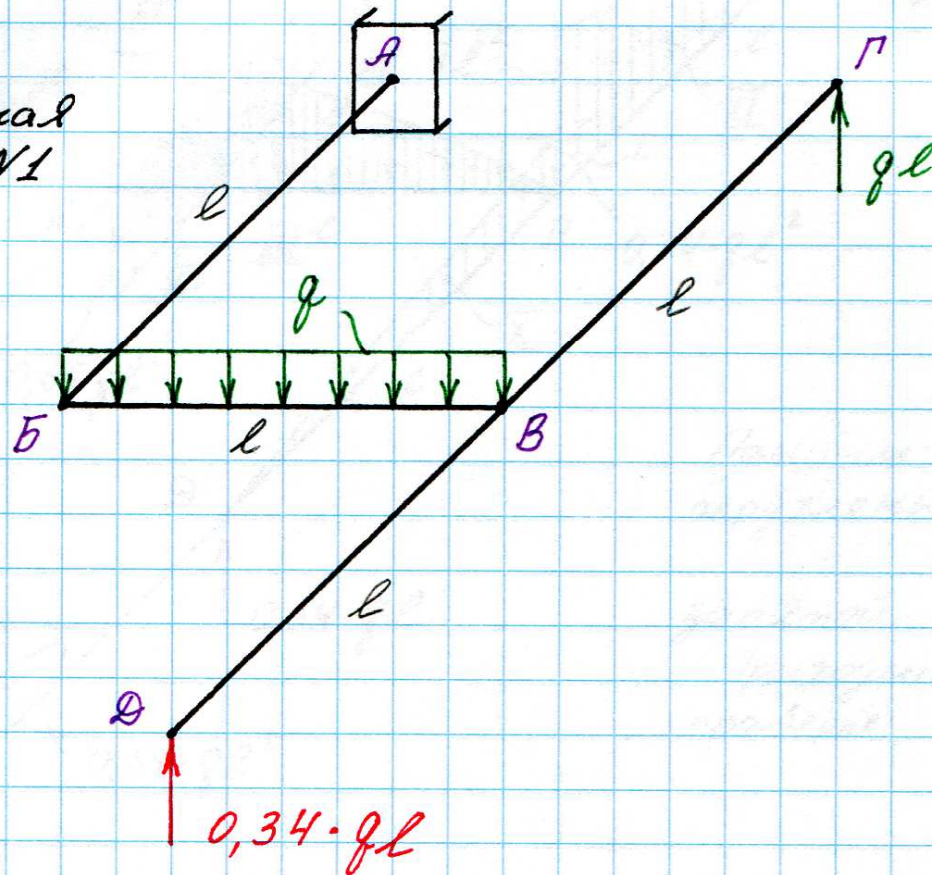
g)

$$X_1 = - \frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = - \frac{\frac{49}{24} \frac{q l^4}{E J_{\text{изг}}}}{6 \frac{l^3}{E J_{\text{изг}}}} = \frac{49}{144} \cdot q l = 0,34028 \cdot q l \approx 0,34 \cdot q l$$

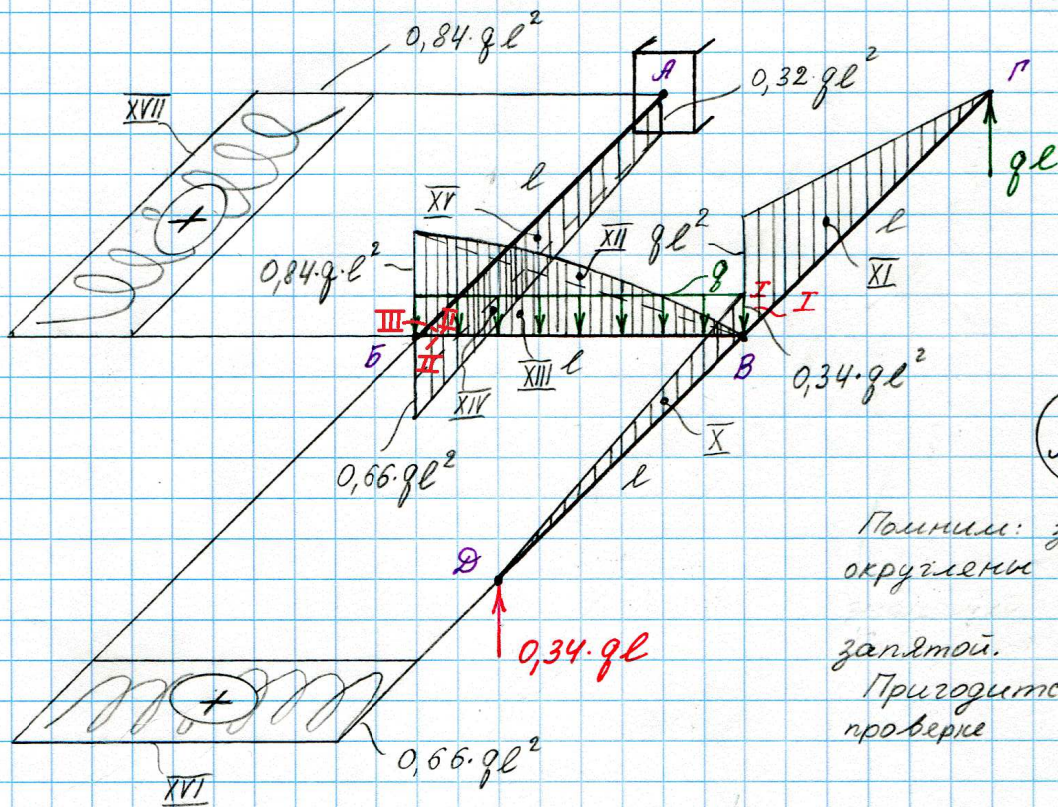
Помните!  
Округление  
третьей  
цифры после  
запятой

e)

Эквивалентная  
система №1



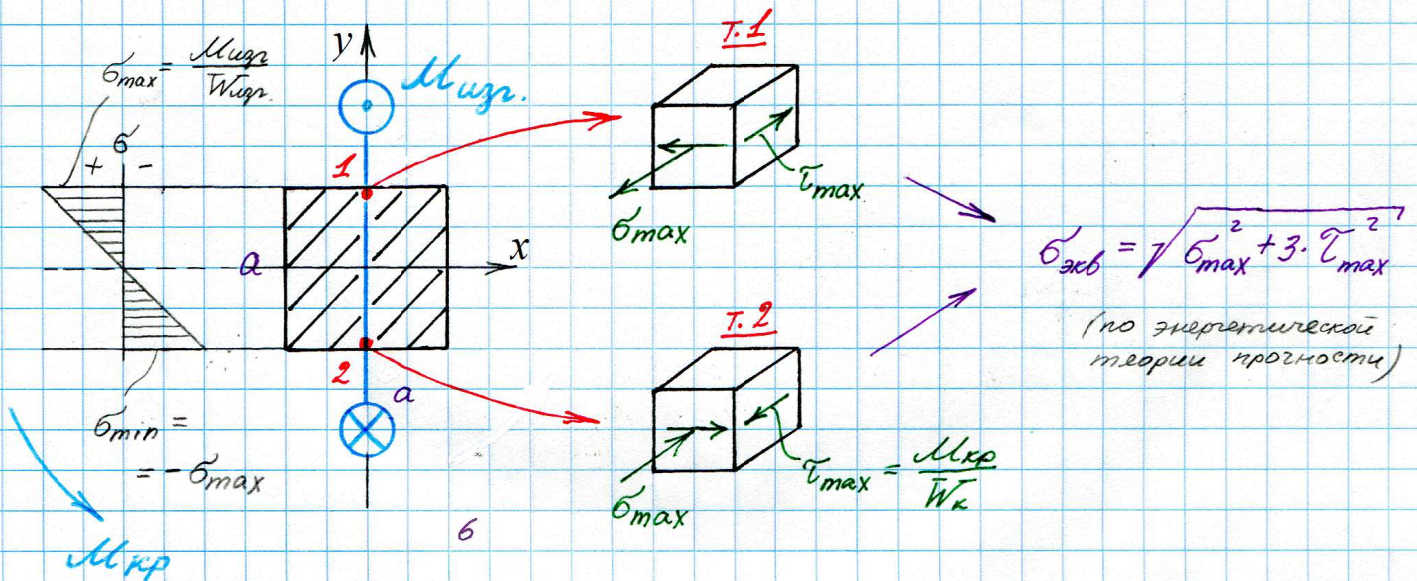
### III. Завершаем решение задачи:



$M_{\Sigma}$

Получим: значения округлены с третьей цифрой после запятой. Пригодится при проверке

Максимальное эквивалентное напряжение в сечении стержня рамы:



$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}\right)^2} = \frac{1}{a^3} \sqrt{36 M_{\text{изг}}^2 + \frac{3}{0,208^2} M_{\text{кр}}^2} \approx 69$$

$$W_{\text{изг}} = \frac{a^3}{6}; \quad W_{\text{к}} = 0,208 \cdot a^3$$

Максимальные эквивалентные напряжения в опасных поперечных сечениях рамы:

I-I:

$$\left. \begin{array}{l} M_{изг} = ql^2 \\ M_{кр} = 0 \end{array} \right\} \sigma_{экв}^{I-I} = \sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_{изг}} = \frac{6 \cdot M_{изг}}{a^3} = \frac{6 \cdot ql^2}{a^3}$$

II-II:

$$\left. \begin{array}{l} M_{изг} = 0,84 \cdot ql^2 \\ M_{кр} = 0,66 \cdot ql^2 \end{array} \right\} \sigma_{экв}^{II-II} = \frac{1}{a^3} \sqrt{36 \cdot M_{изг}^2 + 69 \cdot M_{кр}^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3} \sqrt{36 \cdot (0,84 \cdot ql^2)^2 + 69 \cdot (0,66 \cdot ql^2)^2} =$$

$$= \frac{ql^2}{a^3} \cdot 7,447$$

III-III:

$$\left. \begin{array}{l} M_{изг} = 0,66 \cdot ql^2 \\ M_{кр} = 0,84 \cdot ql^2 \end{array} \right\} \sigma_{экв}^{III-III} = \frac{1}{a^3} \sqrt{36 \cdot M_{изг}^2 + 69 \cdot M_{кр}^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3} \sqrt{36 \cdot (0,66 \cdot ql^2)^2 + 69 \cdot (0,84 \cdot ql^2)^2} =$$

$$= \frac{ql^2}{a^3} \cdot 8$$

Судя по уровню максимальных экв. напряжений, наиболее опасным является сечение III-III. По  $\sigma_{экв}^{III-III}$  выбираем сечение:

$$\sigma_{экв}^{III-III} = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{ql^2 \cdot 8}{a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot n_T \cdot ql^2}{\sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 1,5 \cdot 200 \cdot 0,5^2}{300 \cdot 10^6}} = 0,0126 \text{ м} \approx 13 \text{ мм}$$

IV. Проверка правильности решения (нахождение заведомо равного нулю „вращательного“ углового перемещения точки А):

Используем о.с.  $NZ$ , в ней у точки А есть „вращательная“ степень свободы:

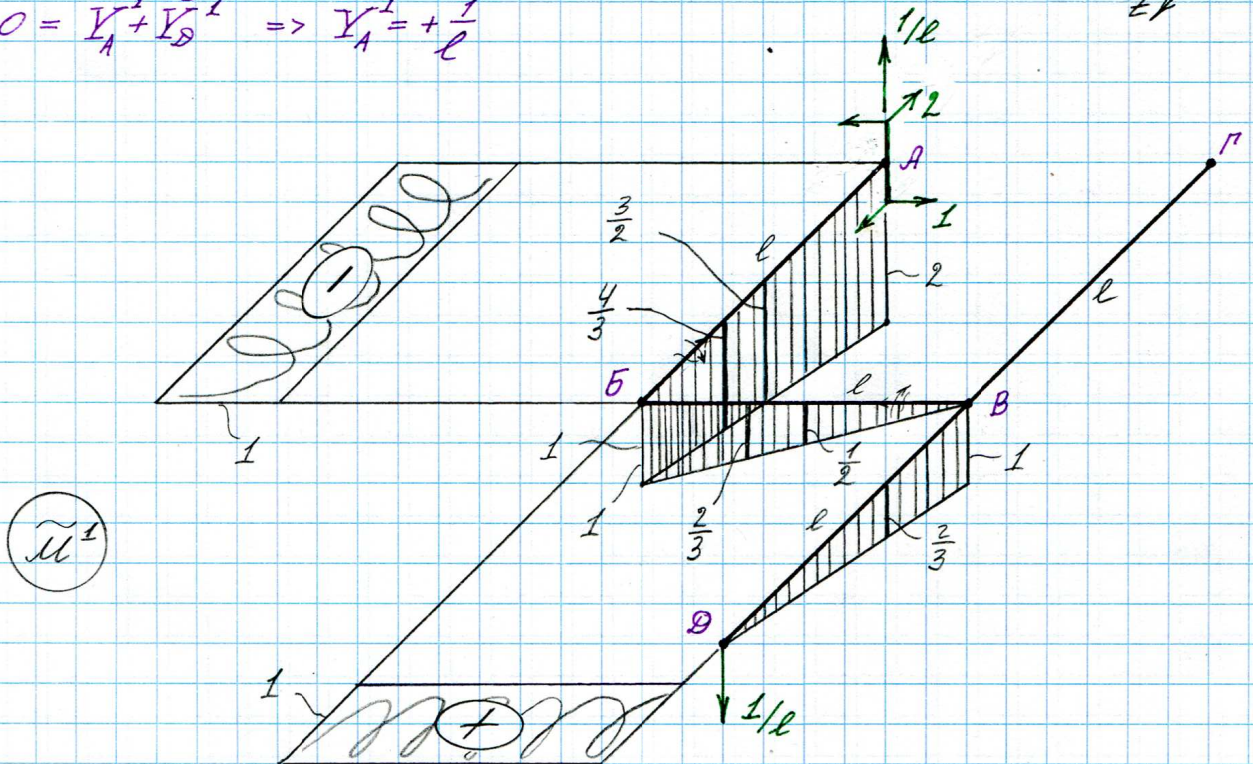
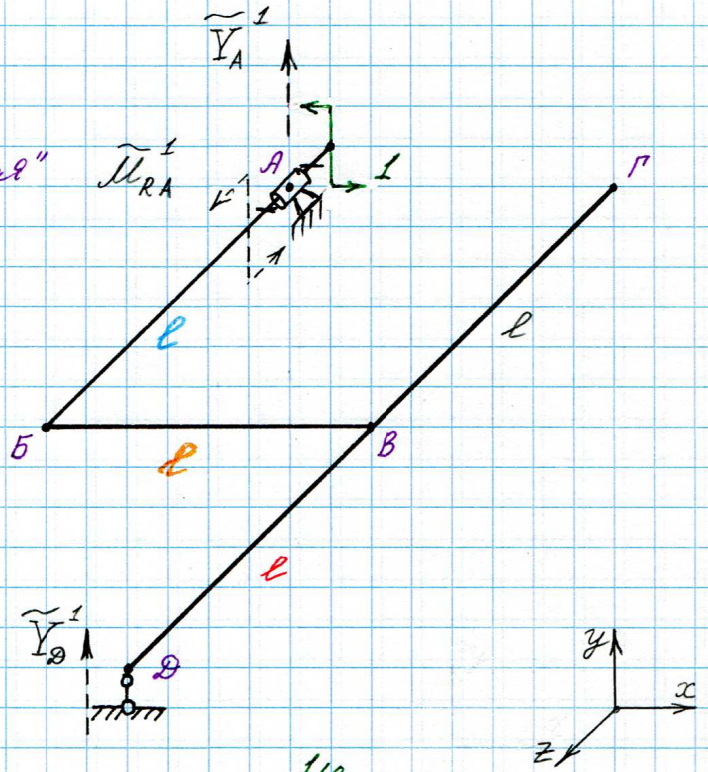
$$\sum M_{AB} = 0 = 1 + \bar{Y}_D^1 \cdot l$$

$$\bar{Y}_D^1 = -\frac{1}{l}$$

$$\sum M_{AP} = 0 = \bar{M}_{RA}^1 - \bar{Y}_D^1 \cdot (l+l)$$

$$\bar{M}_{RA}^1 = -2$$

$$\sum F_y = 0 = \bar{Y}_A^1 + \bar{Y}_D^1 \cdot l \Rightarrow \bar{Y}_A^1 = +\frac{1}{l}$$



$$\varphi_A = M^Z \cdot \bar{M}^1 = \frac{1}{EJ_x} \left[ \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot 0,9349l\right)}_{\text{X}} \cdot \frac{2}{3} - \underbrace{\left(\frac{9l^3}{12}\right)}_{\text{XII}} \cdot \frac{1}{2} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 0,849l\right)}_{\text{XIII}} \cdot \frac{2}{3} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot 0,349l\right)}_{\text{XIV}} \cdot \frac{2}{3} + \underbrace{\left(0,932 \cdot 9l^2\right)}_{\text{XV}} \cdot \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{G \cdot J_k} \left[ \underbrace{\left(1 \cdot 0,66 \cdot 9l^2\right)}_{\text{XVI}} \cdot 1 - \underbrace{\left(0,849 \cdot 9l^2\right)}_{\text{XVII}} \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{9l^3}{EJ_{xp}} \cdot 0,00167$$

Получим! Значения на  $M^Z$  округлялись с третьей цифрой после запятой. Значит 0,00167 можно считать нулем.



IV. Проверка правильности решения (вычисление заведомо равного нулю „гибридного“ условного перемещения Т.А):

Используем о.с. №3, в ней у точки А есть „поворотная“ степень свободы.

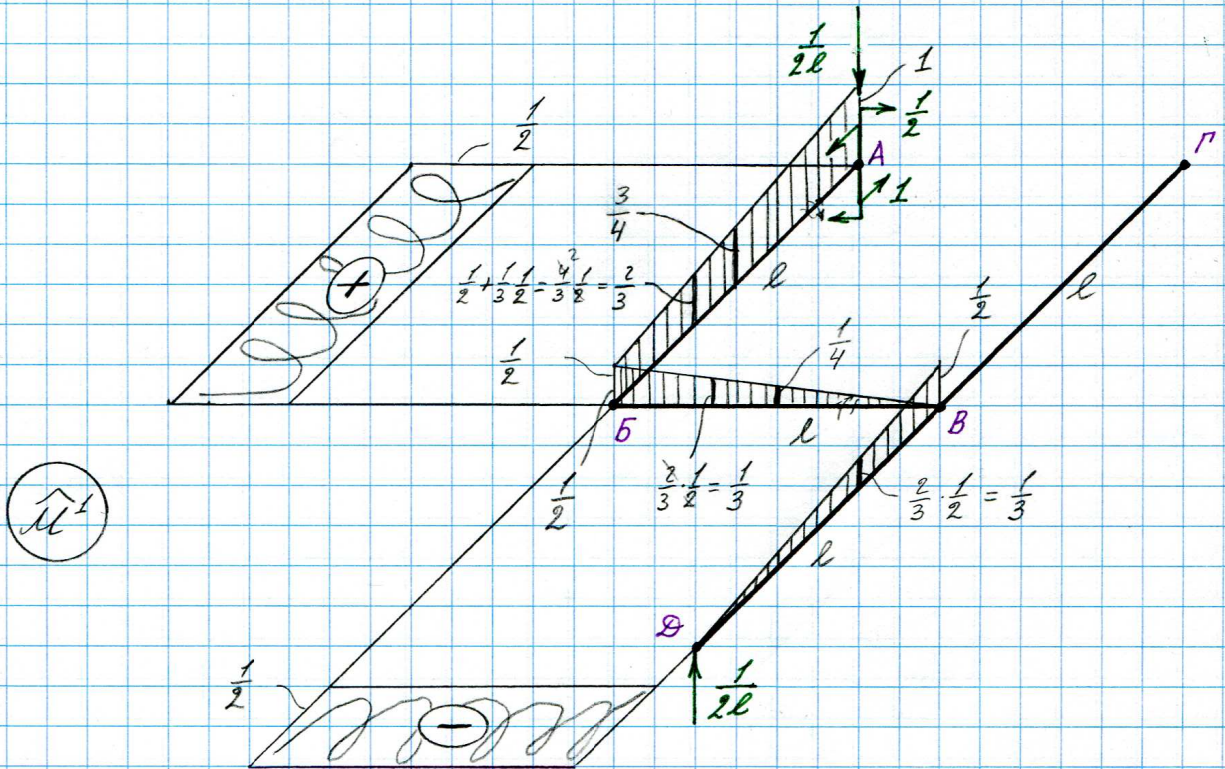
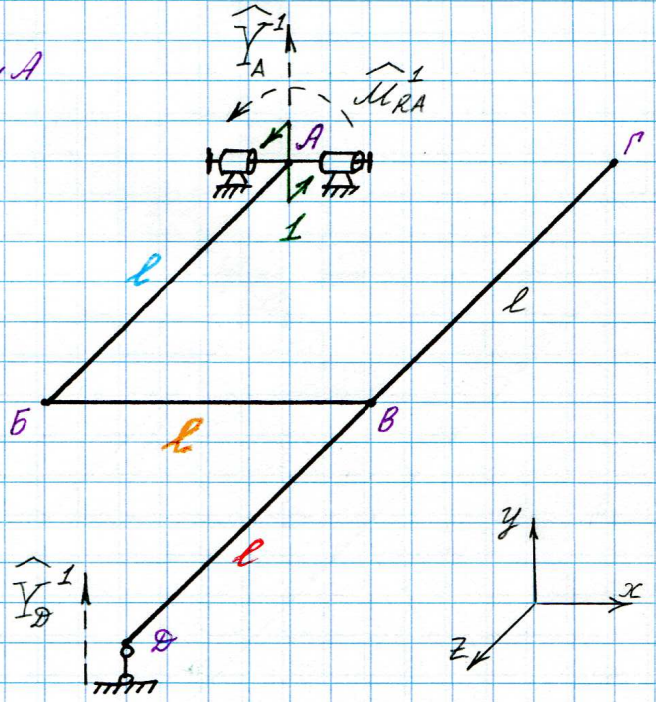
$$\sum M_{AB} = 0 = 1 - \hat{Y}_D^1 \cdot (l + l)$$

$$\hat{Y}_D^1 = \frac{1}{2l}$$

$$\sum M_{AB} = 0 = M_{RA}^1 + \hat{Y}_D^1 \cdot l$$

$$M_{RA}^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\sum F_y = 0 = \hat{Y}_A^1 + \hat{Y}_D^1 \Rightarrow \hat{Y}_A^1 = -\frac{1}{2l}$$

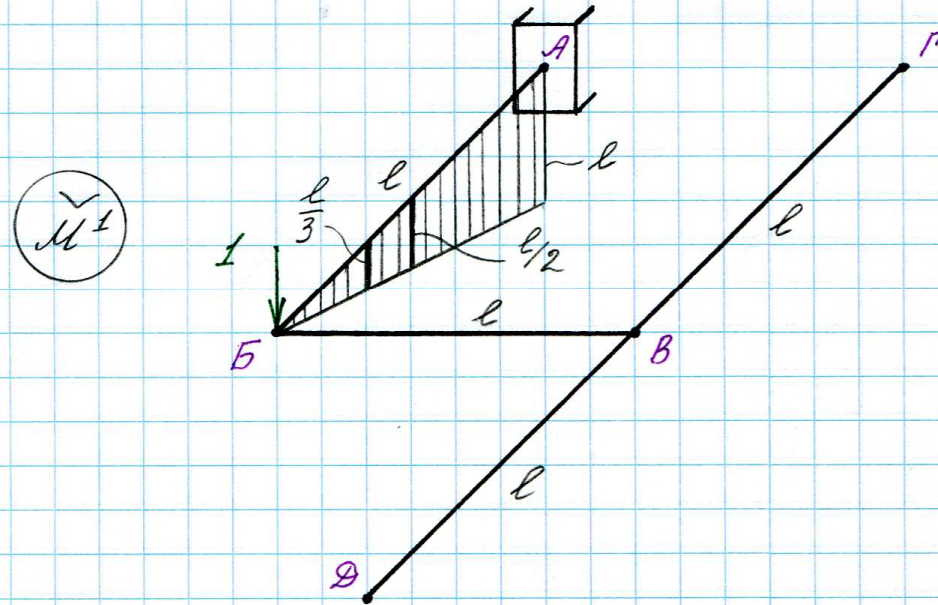


$$\theta_A = M^{\Sigma} \cdot \hat{M}^1 = \frac{1}{EJ_{sup}} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 0,349l^2 \right) \frac{1}{3} + \left( \frac{9l^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 0,849l^2 \right) \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot 0,349l^2 \right) \frac{1}{3} - \left( l \cdot 0,329l^2 \right) \cdot \frac{3}{4} \right] + \frac{1}{GJ_k} \left[ - \left( l \cdot 0,668l^2 \right) \cdot \frac{1}{2} + \left( l \cdot 0,849l^2 \right) \frac{1}{2} \right] = \frac{-9l^3}{EJ_{sup}} \cdot 0,000833$$

Значения на эпюре  $M^{\Sigma}$  округлились третьей цифрой после запятой. Значит ошибка, начинающаяся со второй цифры после запятой считается нулем:  $0,000833 \approx 0$

IV. Проверка правильности решения (вычисление вертикального перемещения точки Б в различных системах):

о.с. N1



$$\delta_B^1 = M^2 \cdot \overset{V^1}{M^1} = \frac{1}{EJ_{огр}} \cdot \left[ \overset{XIV}{\left( \frac{1}{2} l \cdot 0,34 ql \right) \frac{l}{3}} + \overset{XV}{\left( l \cdot 0,32 \cdot ql \right) \cdot \frac{l}{2}} \right] =$$

$$= 0,2167 \frac{ql^4}{EJ_{огр}}$$

o.c. N2

$$\sum \mathcal{M}_{AB} = 0 = Y_B^* \cdot l$$

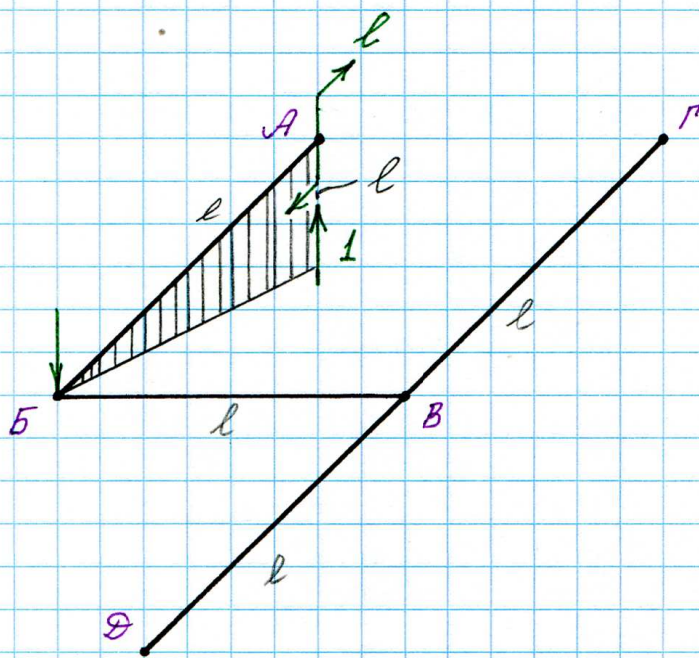
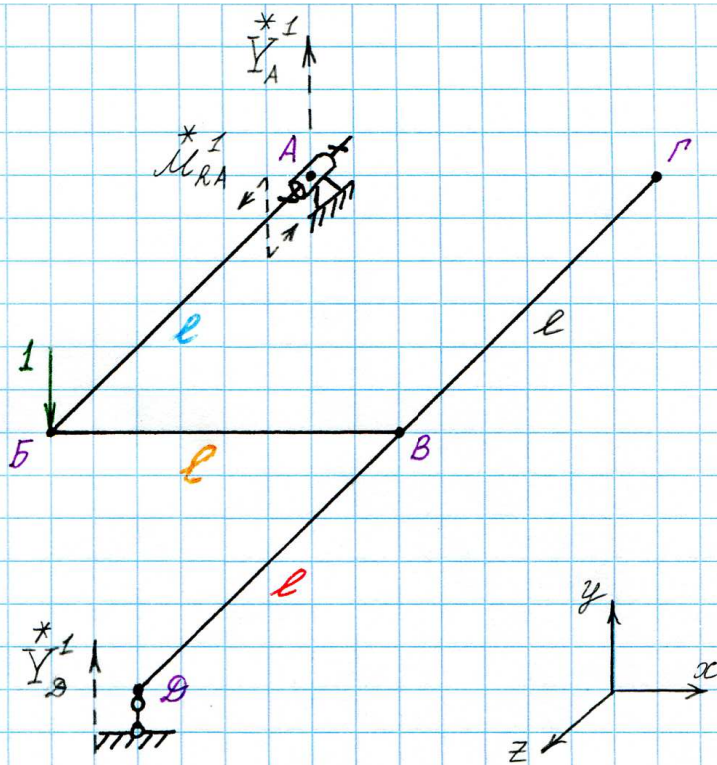
$$Y_B^* = 0$$

$$\sum \mathcal{M}_{AP} = 0 = M_{RA}^* + 1 \cdot l - Y_B^* \cdot (l+l)$$

$$M_{RA}^* = -l$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A^* + Y_B^* - 1$$

$$Y_A^* = +1$$



$M^*$

Важно!  $M^* = M^*$ ! Что с тем сравнивать, если эпюры одинаковые? o.c. N2 не годится.

O.C. N3

$$\sum \mathcal{M}_{AB} = 0 = 1 \cdot l - Y_D^1 \cdot (l + l)$$

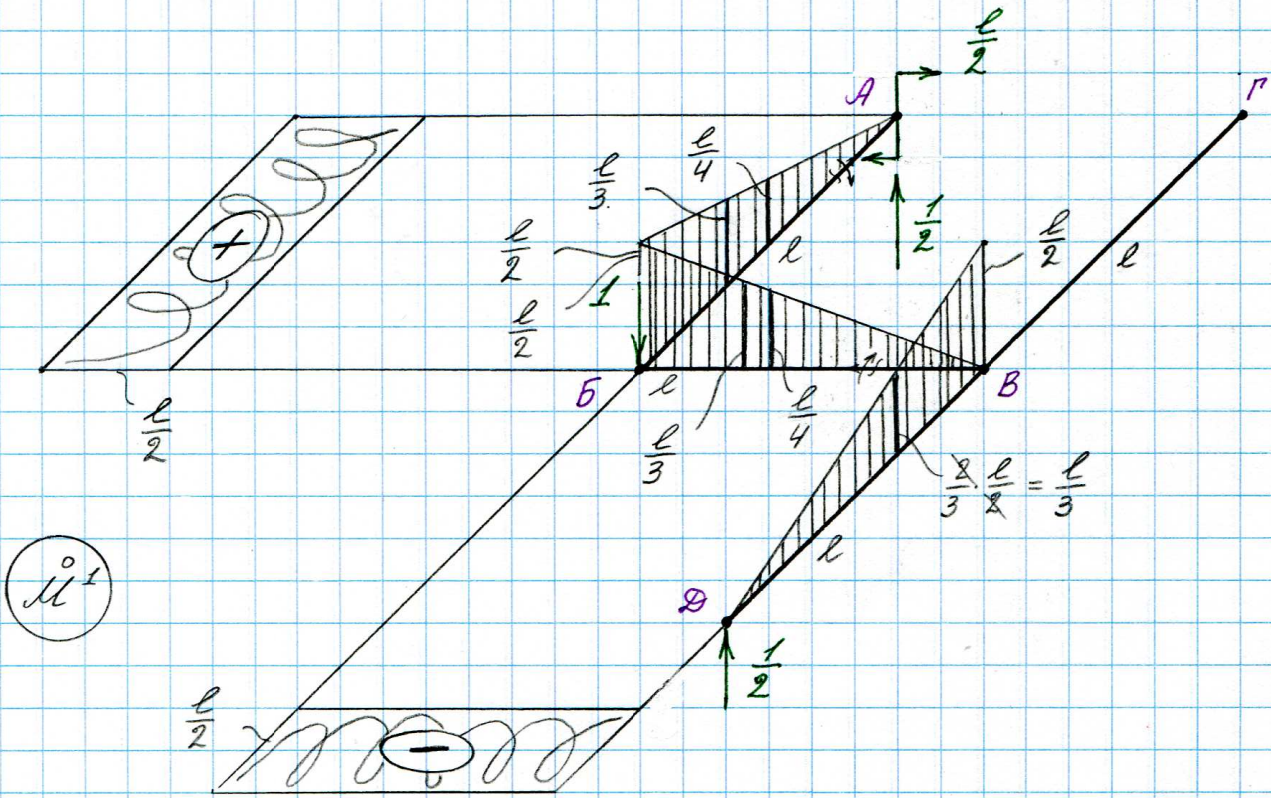
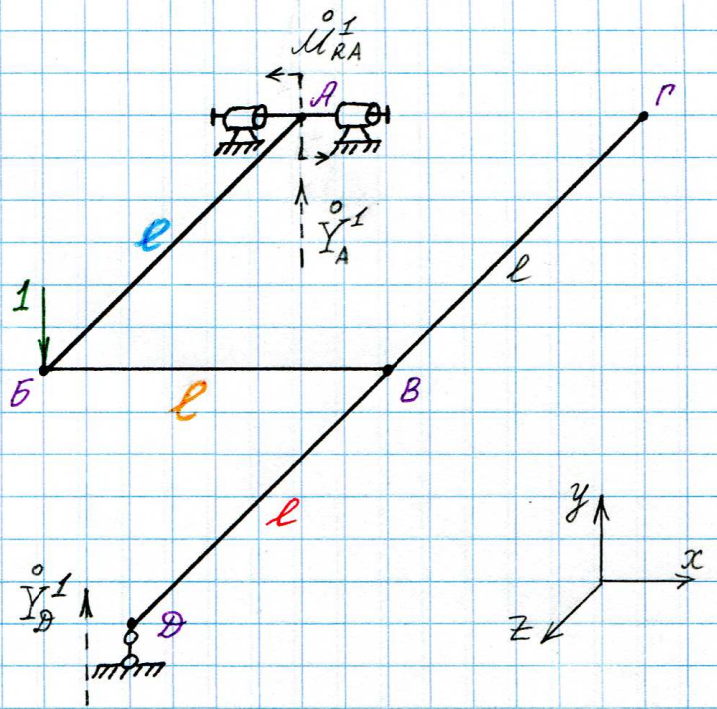
$$Y_D^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sum \mathcal{M}_{AB} = 0 = \mathcal{M}_{RA}^1 + Y_D^1 \cdot l$$

$$\mathcal{M}_{RA}^1 = -\frac{l}{2}$$

$$\sum F_y = 0 = Y_D^1 + Y_A^1 - 1$$

$$Y_A^1 = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} \theta_B^3 &= \mathcal{M}^\Sigma \cdot \mathcal{M}^1 = \frac{1}{EJ_{sup}} \left[ \underbrace{\left( \frac{1}{2} l \cdot 0,349 l^2 \right)}_{\text{X}} \frac{l}{3} + \underbrace{\left( \frac{8 l^3}{12} \right)}_{\text{XII}} \frac{l}{4} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} l \cdot 0,849 l^2 \right)}_{\text{XIII}} \frac{l}{3} - \underbrace{\left( \frac{1}{2} l \cdot 0,349 l^2 \right)}_{\text{XIV}} \frac{l}{3} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\left( l \cdot 0,329 l^2 \right)}_{\text{XV}} \frac{l}{4} \right] + \frac{1}{GJ_x} \left[ \underbrace{-\left( l \cdot 0,669 l^2 \right)}_{\text{XVI}} \frac{l}{2} + \underbrace{\left( l \cdot 0,849 l^2 \right)}_{\text{XVII}} \cdot \frac{l}{2} \right] = \\ &= 0,2158 \frac{9 l^4}{EJ_{sup}} \end{aligned}$$

$$\delta_5^1 = \underline{0,2167} \frac{gl^4}{E J_{изг.}}$$

$$\delta_5^3 = \underline{0,2158} \frac{gl^4}{E J_{изг.}}$$

Вспомним: значения на эпюре  $M^z$  округлились, начиная с третьей цифры после запятой. Значит, совпадающими  $\delta_5^1$  и  $\delta_5^3$  можно считать в случае их схожести до второй цифры после запятой включительно. Так и есть. Значит:

$$\delta_5^1 \approx \delta_5^3$$

решение верно.

Если эпюры построим в обычных градах без всяких округлений, то и проверки должны совпадать точно.