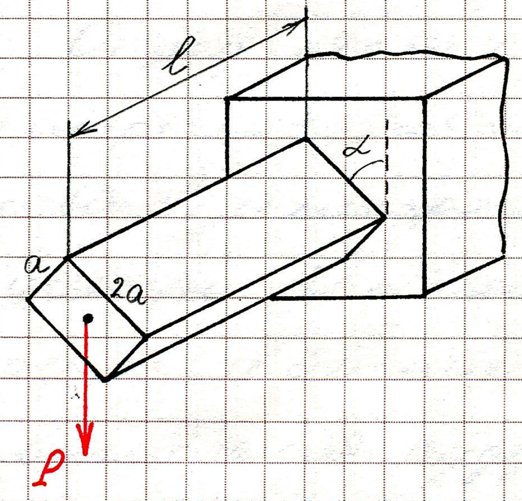
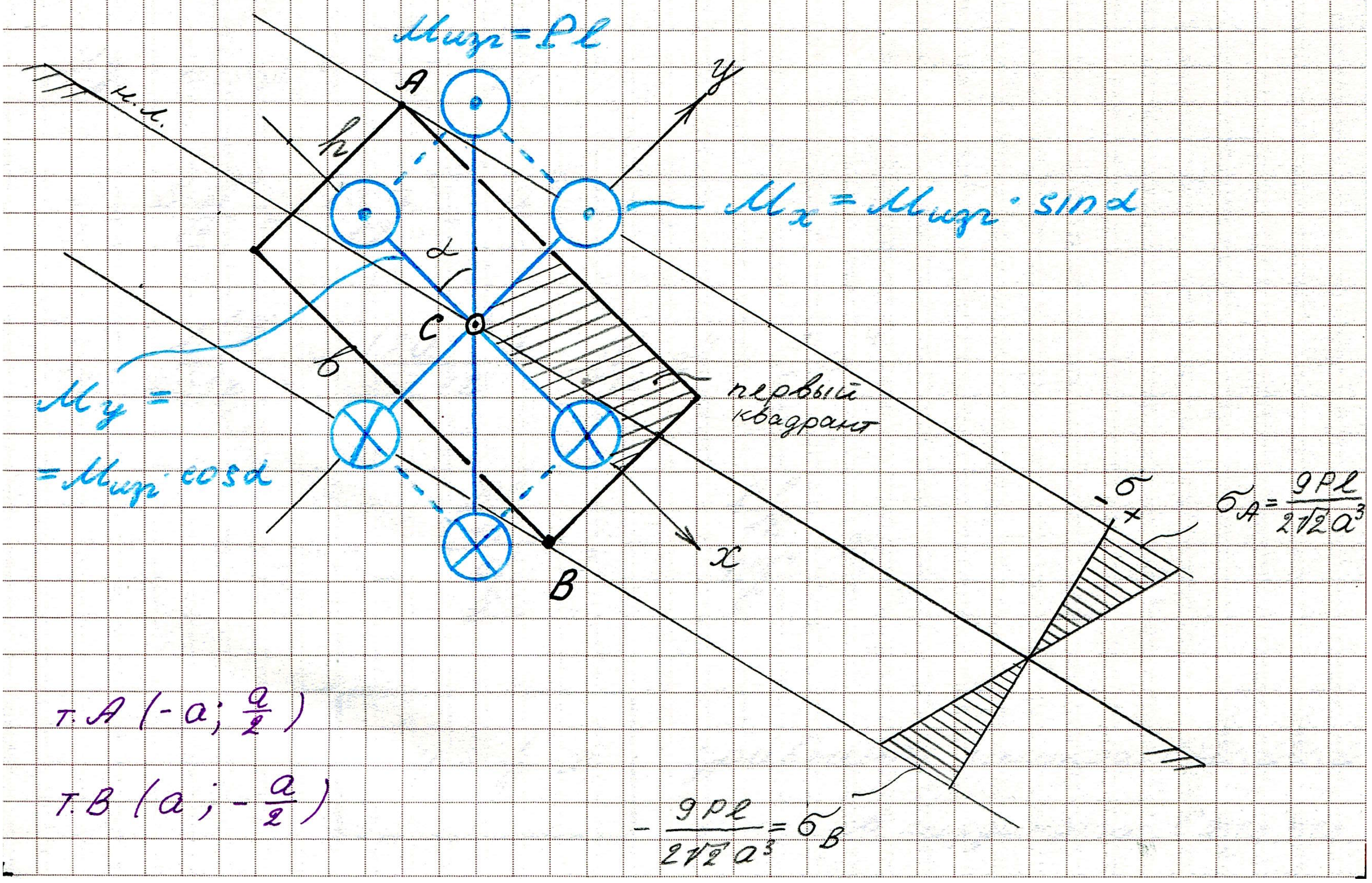


Консольный брус прямоугольного поперечного сечения $a \times 2a$ и длиной l повёрнут на угол $\alpha = 45°$ (см. рис.) и нагружен на конце вертикальной силой P.

Построить эпюру нормальных напряжений σ в корневом сечении бруса, найти перемещение точки приложения силы P.

Решение

Сила P создаёт в корневом поперечном сечении бруса внутренний изгибающий момент $M_{изг} = P \cdot l$ (сжаты нижние волокна):



т. $A\left(-a; \frac{a}{2}\right)$

т. $B\left(a; -\frac{a}{2}\right)$

Определяемся с центром тяжести С поперечного сечения бруса (на пересечении осей симметрии) и с его главными центральными осями x и y (эти самые оси симметрии и есть). Все последующие вычисления будут проводиться в системе координат Cxy.

Уравнение нейтральной линии:

$$0 = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

Mx растягивает волокна в первом квадранте

My сжимает волокна в первом квадранте

$$M_x = M_{изг} \cdot \sin\alpha = \frac{P \cdot l}{\sqrt{2}}$$

$$M_y = M_{изг} \cdot \cos\alpha = \frac{Pl}{\sqrt{2}}$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6}$$

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{(2a)^3 \cdot a}{12} = \frac{8}{12} a^4 = \frac{4}{6} a^4$$

$$0 = + \frac{\frac{\cancel{Pl}}{\cancel{\sqrt{2}}}}{\frac{a^4}{\cancel{6}}} \cdot y - \frac{\frac{\cancel{Pl}}{\cancel{\sqrt{2}}}}{\frac{4a^4}{\cancel{6}}} x$$

$\boxed{y = \frac{1}{4} \cdot x}$ – уравнение нейтральной линии в координатах Cxy.

Проводим на рисунке нейтральную линию (н.л.), концы линии подштриховываем.

На нейтральной линии нормальные напряжения σ равны нулю. По мере удаления от нейтральной линии они возрастают линейно. Наиболее удалёнными от н.л. являются точки A и B поперечного сечения, следовательно, наибольшие по модулю напряжения возникнут именно в этих точках:

$$\sigma(x,y) = +\frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x = \frac{\frac{Pl}{\sqrt{2}}}{\frac{a^4}{6}}y - \frac{\frac{Pl}{\sqrt{2}}}{\frac{4a^4}{6}}\cdot x =$$

$$= \frac{6Pl}{a^4\sqrt{2}}\left[y - \frac{x}{4}\right] = \frac{3Pl}{2\sqrt{2}\cdot a^4}\left[4\cdot y - x\right]$$

т. $A\left(-a; \frac{a}{2}\right)$

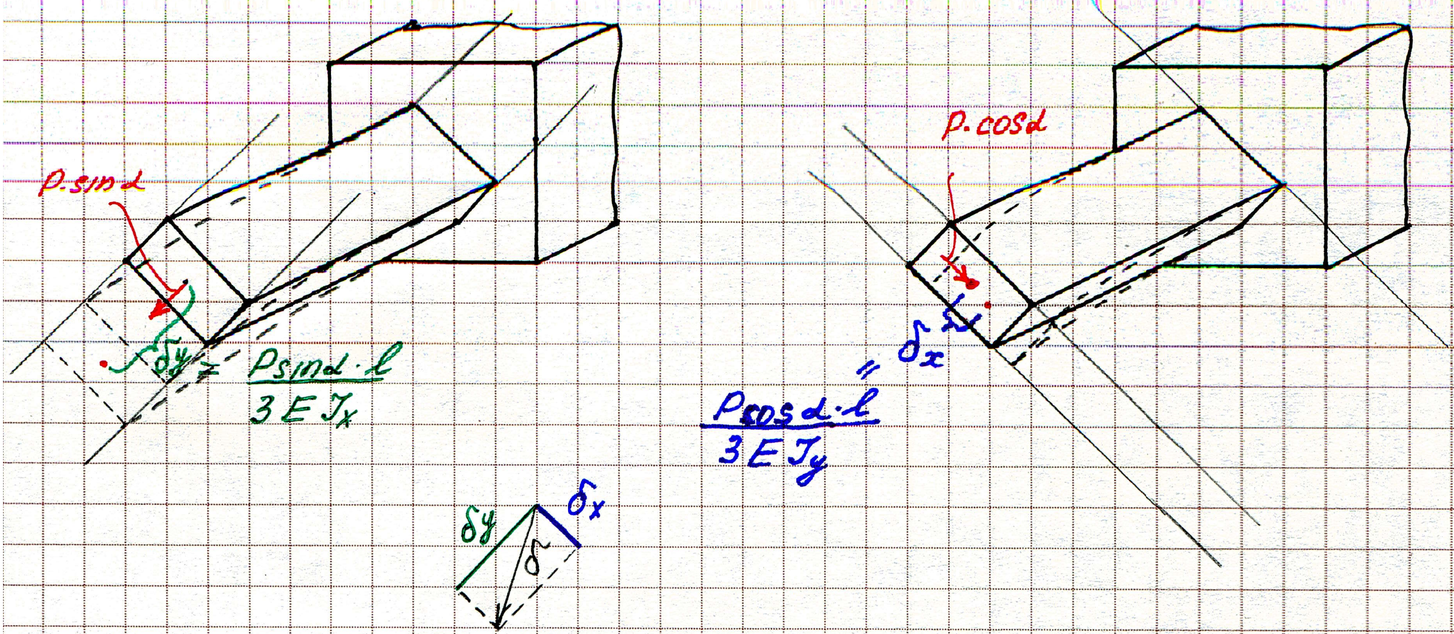
$$\sigma_A = \frac{3Pl}{2\sqrt{2}a^4}\left[4\cdot\frac{a}{2} - (-a)\right] = \frac{9\cdot P\cdot l}{2\sqrt{2}a^3}$$

т. $B\left(a; -\frac{a}{2}\right)$

$$\sigma_B = \frac{3Pl}{2\sqrt{2}a^4}\left[4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) - a\right] = -\frac{9Pl}{2\sqrt{2}a^3}$$

Строим на рисунке эпюру нормальных напряжений σ.

Перемещения точки приложения силы рассчитываются по отдельности для каждого из двух прямых изгибов и потом геометрически складываются:



$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_x^2} =$$

$$= \frac{Pl}{3\sqrt{2}E} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{J_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{J_x}\right)^2} = \frac{Pl}{3\sqrt{2}E} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{4a^4}\right)^2 + \left(\frac{6}{a^4}\right)^2} =$$

$$= \frac{2Pl}{\sqrt{2}Ea^4} \sqrt{\frac{1}{16} + 1} = \sqrt{\frac{17}{8}} \cdot \frac{Pl}{Ea^4}$$