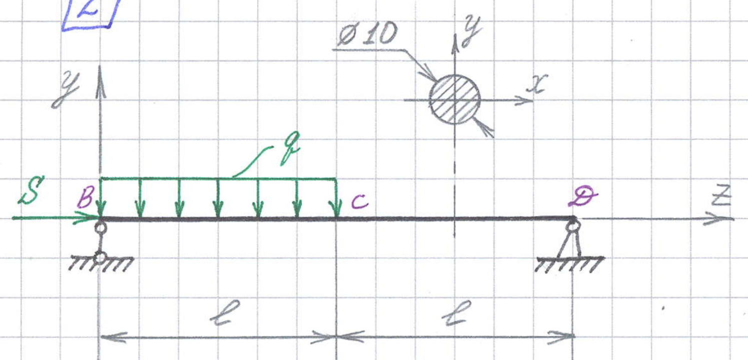
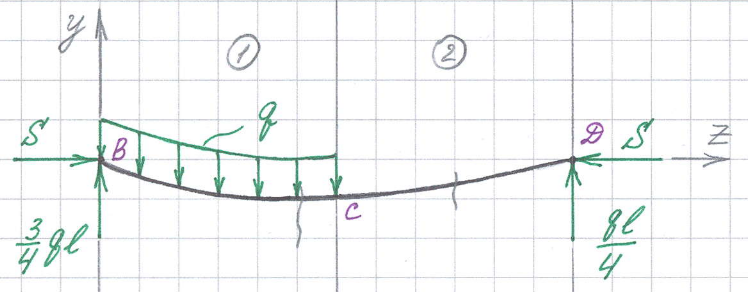
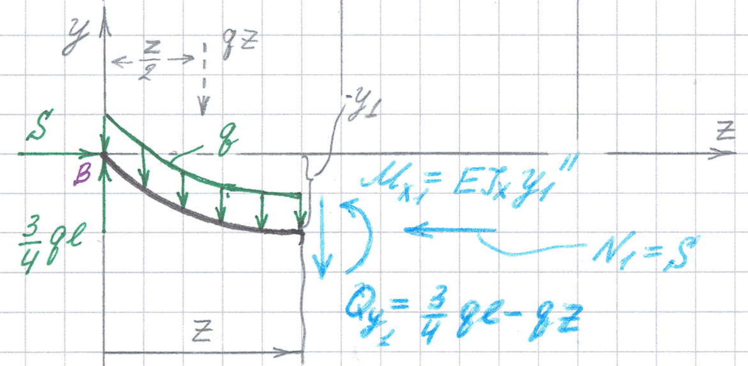
$\boxed{2}$

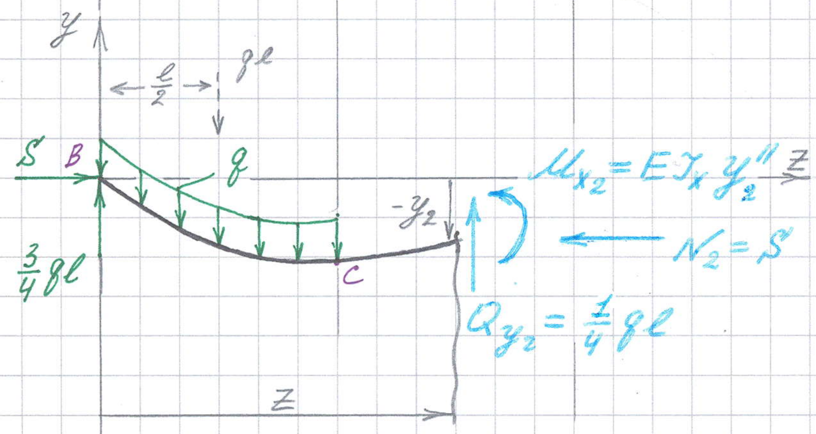






$\Sigma F_y=0=\frac{3}{4}ql-qz-Q_{y_1}$

$Q_{y_1}=\frac{3}{4}ql-qz$



$\Sigma F_y=0=\frac{3}{4}ql-ql+Q_{y_1}$

$Q_{y_1}=ql-\frac{3}{4}ql=$

$=\frac{1}{4}ql$

Дано: $A=\frac{\pi d^2}{4}=78{,}5\cdot10^{-6}\ м^2$

$J_x=\pi d^4/64=491\cdot10^{-12}\ м^4$

$W_x=\pi d^3/32=98\cdot10^{-9}\ м^3$

$E=2\cdot10^{11}\ Па$

$l=0{,}5\ м$

$q=100\ Н/м$

$S=300\ Н$

$\sigma_т=200\ МПа$

Найти: $V_{max}=?,\ |\sigma|_{max}=?,\ \eta_т=?$

$$\Sigma M_B=0=-qz\cdot\frac{z}{2}-\left(\frac{3}{4}ql-qz\right)\cdot z+EJ_x y_1''-S(-y_1)$$

$$y_1''+\frac{S}{EJ_x}y_1=\frac{S}{S}\frac{q}{EJ_x 4}\left[3zl-2z^2\right]$$

$$y_1''+\alpha^2 y_1=\alpha^2\frac{q}{4S}\cdot\left[3zl-2z^2\right]$$

Общий интеграл:

$$y_1=C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z+\frac{q}{4S}\left[\frac{4}{\alpha^2}+3zl-2z^2\right]$$

$$y_1'=\alpha C_1\cos\alpha z-\alpha C_2\sin\alpha z+\frac{q}{4S}\left[3l-4z\right]$$

$$y''=-\alpha^2C_1\sin\alpha z-\alpha^2C_2\cos\alpha z-\frac{q}{S}$$

$$\Sigma M_B=0=-ql\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{4}qlz+EJ_x y_2''-S(-y_2)$$

$$y_2''+\frac{S}{EJ_x}\cdot y_2=\frac{S}{S}\cdot\frac{ql}{EJ_x\cdot4}\left[2l-z\right]$$

$$y_2''+\alpha^2y_2=\alpha^2\frac{ql}{4S}\left[2l-z\right]$$

Общий интеграл:

$$y_2=C_3\sin\alpha z+C_4\cos\alpha z+\frac{ql}{4S}\left[2l-z\right]$$

$$y_2'=\alpha C_3\cos\alpha z-\alpha C_4\sin\alpha z-\frac{1}{4}\frac{ql}{S}$$

$$y_2''=-\alpha^2C_3\sin\alpha z-\alpha^2C_4\cos\alpha z$$

ГУ:

1) $z=0: \; y_1=0 \;\; \Rightarrow \;\; C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 + \dfrac{q}{\alpha^2\cdot S} = 0$ (1)

2) $z=l: \; y_1=y_2 \;\; \Rightarrow \;\; C_1\sin\alpha l + C_2\cos\alpha l + \dfrac{q}{4S}\left[\dfrac{4}{\alpha^2}+\cancel{l^2}\right] = C_3\sin\alpha l + C_4\cos\alpha l + $

$C_1\sin\alpha l + C_2\cos\alpha l - C_3\sin\alpha l - C_4\cos\alpha l = -\dfrac{q}{\alpha^2 S}$ (2

3) $z=l: \; y_1'=y_2' \;\; \Rightarrow \;\; \cancel{\alpha}\cdot C_1\cos\alpha l - \cancel{\alpha}C_2\sin\alpha l - \cancel{\dfrac{ql}{4S}} = \cancel{\alpha}C_3\cos\alpha l - \cancel{\alpha}C_4\sin\alpha l -$

$C_1\cos\alpha l - C_2\sin\alpha l - C_3\cos\alpha l + C_4\sin\alpha l = 0$ (3

4) $z=2l: \; y_2=0 \;\; \Rightarrow \;\; -\cancel{\alpha^2}C_3\sin 2\alpha l - \cancel{\alpha^2}C_4\cos 2\alpha l = 0$

$C_3\sin 2\alpha l + C_4\cos 2\alpha l = 0$ (4)

Система уравнений (1)-(4) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l \\ \cos\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l & \sin\alpha l \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha l & \cos 2\alpha l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2 S}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l & \cos\alpha l \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l \\ 0 & \cos 2\alpha l & \sin 2\alpha l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2 S}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{\cos\alpha l}{\sin\alpha l}\times \\ \\ + \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l & \cos\alpha l \\ 0 & \cos 2\alpha l & \sin 2\alpha l & 0 \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2\cdot S}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l & \cos\alpha l \\ 0 & \cos 2\alpha l & \sin 2\alpha l & 0 \\ 0 & 1/\sin\alpha l & 0 & -1/\sin\alpha l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ \cos\alpha l/\sin\alpha l \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}$$

$$\sin\alpha l \times \begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l & \cos\alpha l \\ 0 & \sin 2\alpha l & \cos 2\alpha l & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sin\alpha l & -1/\sin\alpha l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ \cos\alpha l/\sin\alpha l \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l & \cos\alpha l \\ 0 & \sin 2\alpha l & \cos 2\alpha l & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ \cos\alpha l \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{q}{\alpha^2 S} \quad \begin{matrix} (а) \\ (б) \\ (в) \\ (г) \end{matrix}$$

Решаем эту систему уравнений:

(г): $\boxed{C_2 = -\frac{q}{\alpha^2 \cdot S}}$

(в): $C_4 - C_2 = \cos\alpha l \cdot \frac{q}{\alpha^2 S}$

$$\boxed{C_4 = C_2 + \cos\alpha l \cdot \frac{q}{\alpha^2 S} = \frac{q}{\alpha^2 S} \cdot (\cos\alpha l - 1)}$$

(б): $C_3 \cdot \sin 2\alpha l + C_4 \cos 2\alpha l = 0$

$$\boxed{C_3 = -C_4 \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha l = \frac{q}{\alpha^2 S} (1 - \cos\alpha l) \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha l}$$

(a): $$C_1 \sin\alpha l - C_3 \sin\alpha l - C_4 \cdot \cos\alpha l + C_2 \cos\alpha l = -\frac{q}{\alpha^2 \cdot S}$$

$$C_1 = C_3 + (C_4 - C_2)\cdot \frac{\cos\alpha l}{\sin\alpha l} - \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}\cdot \frac{1}{\sin\alpha l} =$$

$$= -\frac{q}{\alpha^2 S}\cdot(\cos\alpha l - 1)\cdot \operatorname{ctg}\alpha l + \frac{q}{\alpha^2 S}\cdot(\cos\alpha l - 1 + 1)\cdot\frac{\cos\alpha l}{\sin\alpha l} - \frac{q}{\alpha^2 S}\cdot\frac{1}{\sin\alpha l} =$$

$$= \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}\cdot\left[\overbrace{\frac{\cos^2\alpha l}{\sin\alpha l} - \frac{1}{\sin\alpha l}}^{-\sin\alpha l} + (1 - \cos\alpha l)\cdot \operatorname{ctg} 2\alpha l\right] =$$

$$= \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}\cdot\left[(1 - \cos\alpha l)\cdot \operatorname{ctg} 2\alpha l - \sin\alpha l\right]$$

$$\boxed{C_1 = \frac{q}{\alpha^2 \cdot S}\cdot\left[(1 - \cos\alpha l)\cdot \operatorname{ctg} 2\alpha l - \sin\alpha l\right]}$$

Итак, перемещения, углы поворота и внутренний изгибающий момент по длине стержня:

$$V_1(Z) = y_1(Z) = C_1 \cdot \sin\alpha Z + C_2 \cdot \cos\alpha Z + \frac{q}{4 \cdot S} \cdot \left[\frac{4}{\alpha^2} + 3 \cdot Z \cdot l - 2 \cdot Z^2 \right];$$

$$V_2(Z) = y_2(Z) = C_3 \cdot \sin\alpha Z + C_4 \cdot \cos\alpha Z + \frac{q \cdot l}{4 \cdot S} \cdot \left[2l - Z \right];$$

$$\theta_1(Z) \approx y_1'(Z) = \alpha \cdot \left(C_1 \cdot \cos\alpha Z - C_2 \cdot \sin\alpha Z \right) + \frac{q}{4S} \cdot \left[3l - 4 \cdot Z \right];$$

$$\theta_2(Z) \approx y_2'(Z) = \alpha \cdot \left(C_3 \cdot \cos\alpha Z - C_4 \cdot \sin\alpha Z \right) - \frac{ql}{4S};$$

$$M_{x_1}(Z) \approx EJ_x \cdot y_1'' = -\overset{S}{EJ_x \cdot \alpha^2} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\alpha Z + C_2 \cdot \cos\alpha Z \right) - q \cdot \overset{1/\alpha^2}{\frac{EJ_x}{S}};$$

$$M_{x_2}(Z) \approx -S \cdot \left(C_3 \cdot \sin\alpha Z + C_4 \cdot \cos\alpha Z \right).$$

где

$$C_1 = \frac{q}{\alpha^2 \cdot S} \cdot \left[(1 - \cos\alpha l) \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha l - \sin\alpha l \right];$$

$$C_2 = -\frac{q}{\alpha^2 S};$$

$$C_3 = \frac{q}{\alpha^2 S} \cdot (1 - \cos\alpha l) \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha l;$$

$$C_4 = \frac{q}{\alpha^2 S} \cdot (\cos\alpha l - 1).$$

В нашем случае:

$$\alpha=\sqrt{\frac{S}{EJ_x}}=\sqrt{\frac{300}{2\cdot10^{11}\cdot491\cdot10^{-12}}}=1{,}7479\ 1/м\ ;\quad \alpha^2=3{,}055\ \frac{1}{м^2}$$

$$\alpha\cdot l=1{,}7479\cdot0{,}5=0{,}8739 \qquad\qquad \frac{q}{\alpha^2}=\frac{100}{3{,}055}=32{,}73\ Н\cdot м$$

$$2\alpha l=1{,}7479$$

$$\sin\alpha l=0{,}7669$$

$$\cos\alpha l=0{,}6418$$

$$ctg\,2\alpha l=\frac{1}{tg\,2\alpha l}=-0{,}1789$$

$$\frac{q}{\alpha^2S}=\frac{100}{1{,}7479^2\cdot300}=0{,}1091\ ;\quad \frac{q}{4S}=\frac{100}{4\cdot300}=0{,}08333\ ;\quad \frac{ql}{4S}=0{,}04167;$$

$$C_1=\frac{q}{\alpha^2S}\cdot\left[(1-\cos\alpha l)\cdot ctg\,2\alpha l-\sin\alpha l\right]=0{,}1091\cdot\left[(1-0{,}6418)\cdot(-0{,}1789)-0{,}7669\right]=-0{,}09066;$$

$$C_2=-\frac{q}{\alpha^2S}=-0{,}1091\ ;$$

$$C_3=\frac{q}{\alpha^2S}\cdot(1-\cos\alpha l)\cdot ctg\,2\alpha l=0{,}1091\cdot(1-0{,}6418)\cdot(-0{,}1789)=-0{,}006991\ ;$$

$$C_4=\frac{q}{\alpha^2S}\cdot(\cos\alpha l-1)=0{,}1091\cdot(0{,}6418-1)=-0{,}03908\ ;$$

$$(*)\begin{cases}
V_1(z)=\left\{-90{,}66\cdot\sin(\overset{1{,}7479}{\alpha}z)-109{,}1\cdot\cos(\overset{1{,}7479}{\alpha}z)+83{,}33\cdot\left[1{,}3093+1{,}5\cdot z-2\cdot z^2\right]\right\}\cdot10^{-3}\ ;\\
V_2(z)=\left\{-6{,}991\cdot\sin(1{,}7479\cdot z)-39{,}08\cdot\cos(1{,}7479\cdot z)+83{,}33\cdot\left[1-z\right]\right\}\cdot10^{-3}\ ;\\
\theta_1(z)=\left\{1{,}7479\cdot\left[-90{,}66\cdot\cos(1{,}7479\cdot z)+109{,}1\cdot\sin(1{,}7479\cdot z)\right]+83{,}33\cdot\left[1{,}5-4z\right]\right\}\cdot10^{-3}\ ;\\
\theta_2(z)=\left\{1{,}7479\cdot\left[-6{,}991\cdot\cos(1{,}7479\cdot z)+39{,}08\cdot\sin(1{,}7479\cdot z)\right]-41{,}67\right\}\cdot10^{-3}\ ;\\
M_{x_1}(z)=\overbrace{+300\cdot10^{-3}}^{+0{,}3}\cdot\left\{+90{,}66\cdot\sin(1{,}7479\cdot z)+109{,}1\cdot\cos(1{,}7479\cdot z)\right\}-32{,}73\ ;\\
M_{x_2}(z)=0{,}3\cdot\left\{6{,}991\cdot\sin(1{,}7479\cdot z)+39{,}08\cdot\cos(1{,}7479\cdot z)\right\}.
\end{cases}$$

Проверка ГУ:

1) $V_1(0) = \{-90{,}66\cdot 0 - 109{,}1\cdot 1 + 83{,}33\cdot 1{,}3093\}\cdot 10^{-3} = 3{,}969\cdot 10^{-6} \approx 0$ м

2) $V_1(l) = V_1(0{,}5) = -0{,}0096078$ м
$V_2(l) = V_2(0{,}5) = -0{,}0096110$ м

ANSYS: $V(l) = -0{,}0096001$ м

В вычислениях мы округляли результаты до 4-х значащих цифр. Значит, ошибка округления становится заметна, начиная с третьей значащей цифры. Именно с этой цифры и начинается расхождение в значениях $V_1(l)$ и $V_2(l)$, значит можно считать, что:

$$V_1(l) = V_2(l)$$

3) $\theta_1(l) = \theta_1(0{,}5) = 0{,}002872$ рад
$\theta_2(l) = \theta_2(0{,}5) = 0{,}002873$ рад

$$\theta_1(l) = \theta_2(l)$$

ANSYS: $\theta(l) = 0{,}0028711$ рад

4) $V_2(2l) = V_2(1) = 0{,}003439\cdot 10^{-3} = 3{,}439\cdot 10^{-6} \approx 0$

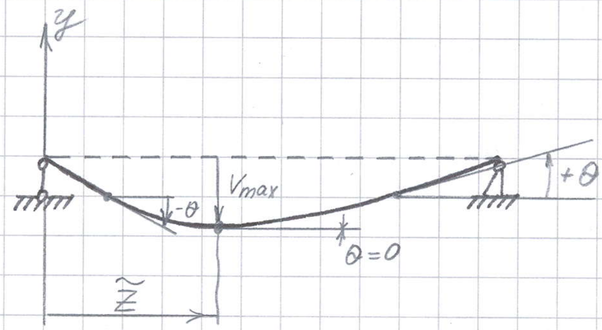
Проверка стыковки изгибающих моментов в т. С:

$M_{x_1}(l) = M_{x_1}(0{,}5) = 9{,}134$
$M_{x_2}(l) = M_{x_2}(0{,}5) = 9{,}133$

$$M_{x_1}(l) = M_{x_2}(l)$$

Проверки сошлись, значит (*) верны.

Наибольший прогиб (очевидно, на участке ①) будет там, где угол наклона поперечных сечений обращается в нуль:



Уравнение:

$$\theta_1(\tilde{z}) = 0 = \Big\{1{,}7479\cdot\big[-90{,}66\cdot\cos(1{,}7479\cdot\tilde{z}) + 109{,}1\cdot\sin(1{,}7479\cdot\tilde{z})\big] + 83{,}33\cdot\big[1{,}5 - 4\cdot\tilde{z}\big]\Big\}\cdot 10^{-3}$$

можно решить численно:

$\tilde{z} = 0{,}46974$ м. (ANSYS: $\tilde{z} = 0{,}4688$ м)

$$V_{max} = V_1(\tilde{z}) = \Big\{-90{,}66\cdot\sin(1{,}747\cdot 0{,}46974) - 109{,}1\cdot\cos(1{,}7479\cdot 0{,}46974) + 83{,}33\cdot\big[1{,}3093 + 1{,}5\cdot 0{,}46974 - 2\cdot 0{,}46974^2\big]\Big\}\cdot 10^{-3} =$$

$$= -0{,}009652 \text{ м} \approx 9{,}7 \text{ мм}$$

ANSYS: $V_{max} = -0{,}009642$ м.

Максимальное (экстремальное) значение внутреннего изгибающего момента M_{x_1} ищем там, где его первая производная обращается в нуль:

$$M_{x_1} = -S\cdot(C_1\cdot\sin\alpha z + C_2\cos\alpha z) - \frac{q}{\alpha^2}$$

$$\frac{dM_{x_1}}{dz} = -\alpha\cdot S\cdot(C_1\cdot\cos\alpha z - C_2\sin\alpha z)$$

$$z = z^*:\quad \frac{dM_{x_1}}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1\cdot\cos\alpha z^* - C_2\cdot\sin\alpha z^* = 0$$

$$tg\,\alpha z^* = \frac{C_1}{C_2}$$

$$z^* = \frac{arctg\,\frac{C_1}{C_2}}{\alpha} = \frac{arctg\,\frac{-0{,}09066}{-0{,}1091}}{,7479} =$$

$$= 0{,}3966\ м \quad (ANSYS:\ z^* \approx 0{,}4м)$$

$$M_{x_1}^{max} = M_{x_1}(z^*) = 0{,}3\cdot\{90{,}66\cdot\sin(1{,}7479\cdot0{,}3966) + 109{,}1\cdot\cos(1{,}7479\cdot0{,}3966)\} - 32{,}73 =$$

$$= 9{,}826\ Н\cdot м$$

$$(ANSYS:\ M_x^{max} = 9{,}811\ Н\cdot м)$$

Максимальное сжимающее напряжение в стержне:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_1}^{max}}{W_x} + \frac{S}{A} = \frac{9{,}826}{98\cdot10^{-9}} + \frac{300}{78{,}5\cdot10^{-6}} = 104{,}1\cdot10^6\ Па \approx 104\ МПа$$

$$(ANSYS:\ 104\ МПа)$$

Коэффициент запаса прочности:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{200}{104} = 1{,}9$$