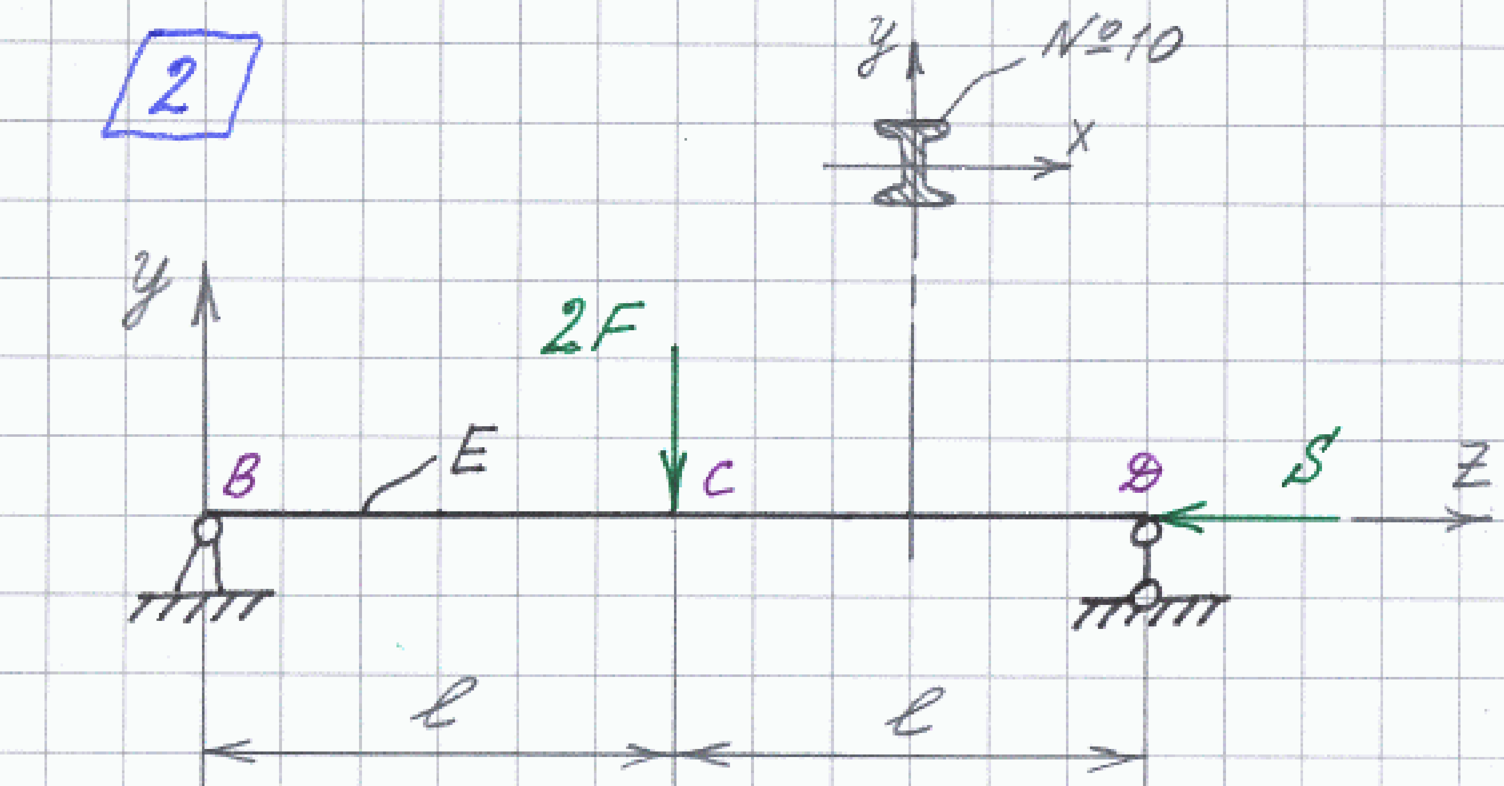
2



Дано: $A = 12 \cdot 10^{-4}$ м^2

$J_x = 198 \cdot 10^{-8}$ м^4

$W_x = 39{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^3 } двутавр №10

$E = 2 \cdot 10^{11}$ Па

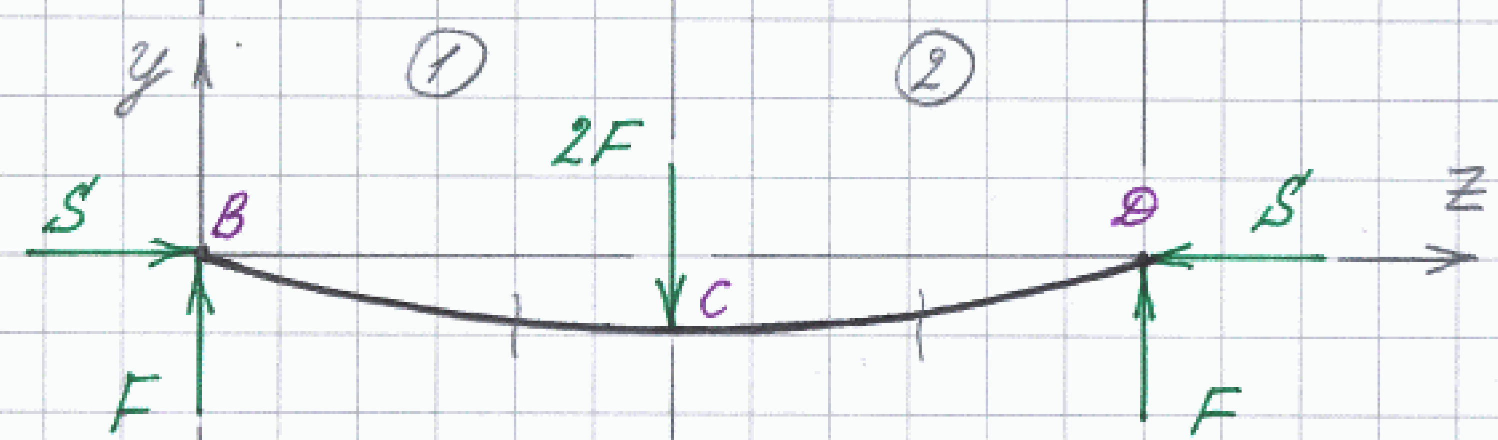
$l = 3$ м

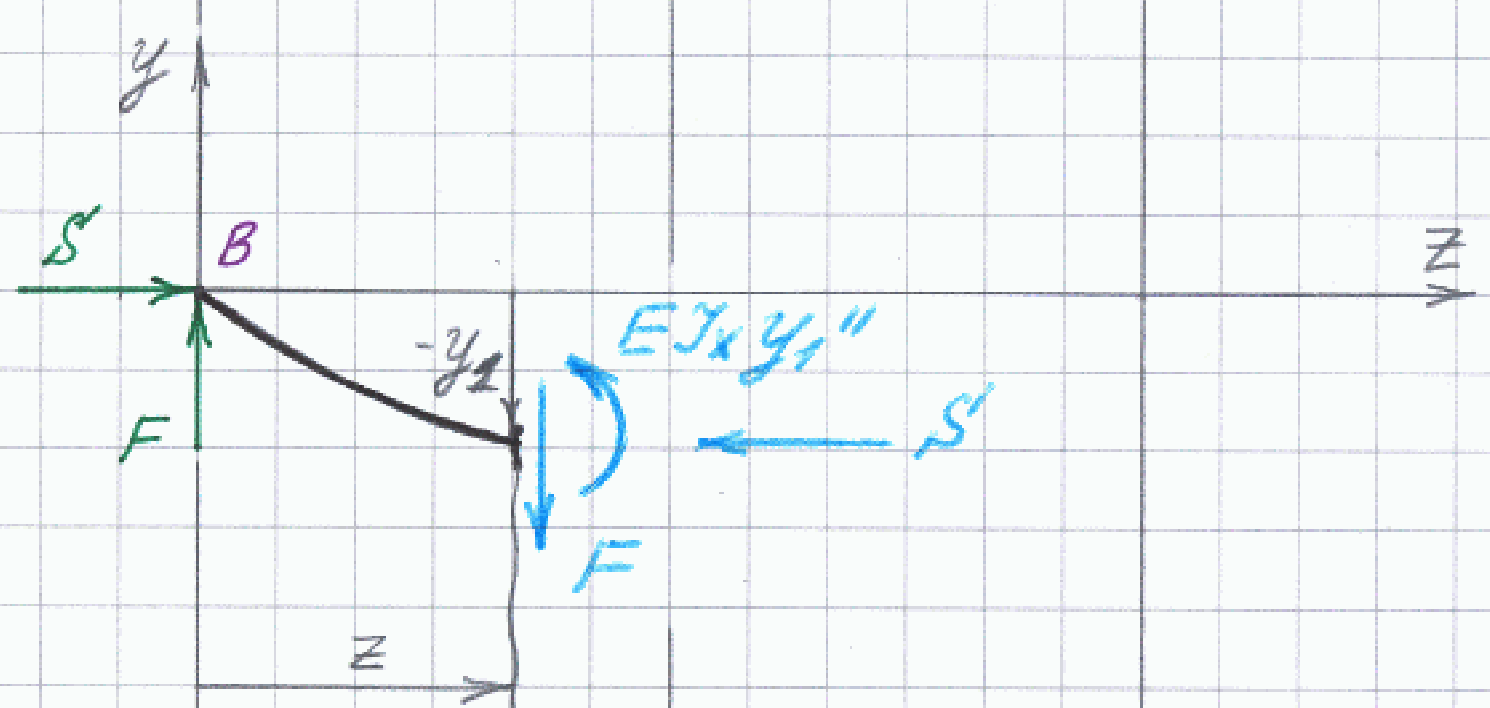
$F = 425$ Н

$S = 85000$ Н

$\sigma_T = 240$ МПа

Найти: $V_c = ?$ $\eta_T = ?$





$$\sum M_B = -F \cdot z + EJ_x y_1'' - S \cdot (-y_1) = 0$$

$$y_1'' + \frac{S}{EJ_x} y_1 = \frac{S}{S}\frac{F}{EJ_x} z$$

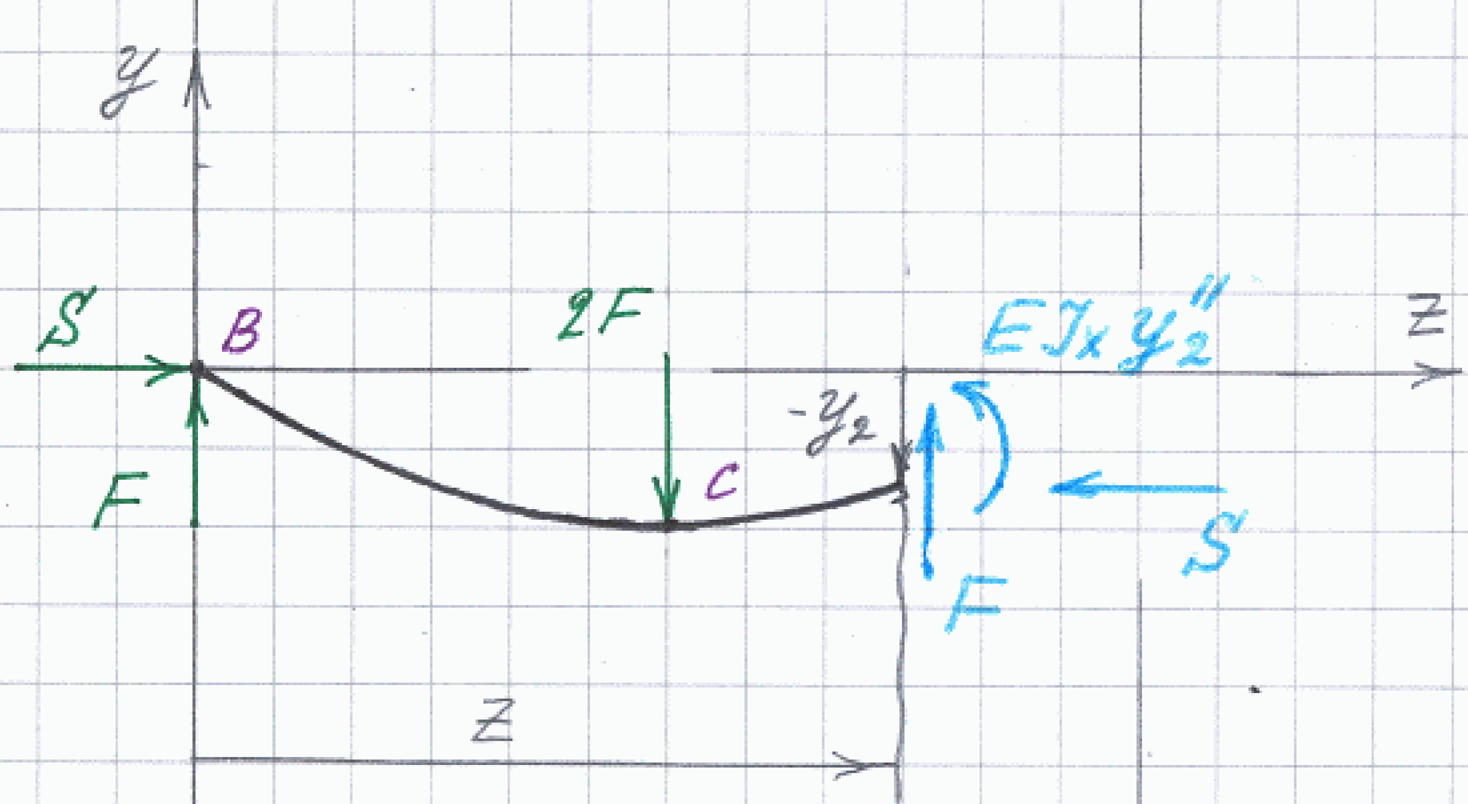
$$y_1'' + \alpha^2 \cdot y_1 = \alpha^2 \cdot \frac{F}{S} \cdot z$$

Общий интеграл:

$$y_1 = C_1 \cdot \sin\alpha z + C_2 \cdot \cos\alpha z + \frac{F}{S} \cdot z$$

$$y_1' = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos\alpha z - \alpha C_2 \cdot \sin\alpha z + \frac{F}{S}$$

$$y_1'' = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin\alpha z - \alpha^2 C_2 \cdot \cos\alpha z$$



$$\sum M_B = 0 = -2Fl + F \cdot z + EJ_x y_2'' - S \cdot (-y_2)$$

$$y_2'' + \frac{S}{EJ_x} \cdot y_2 = \frac{S}{S}\frac{F}{EJ_x} \cdot (2l - z)$$

$$y_2'' + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^2 \frac{F}{S}(2l - z)$$

Общий интеграл:

$$y_2 = C_3 \sin\alpha z + C_4 \cdot \cos\alpha z + \frac{F}{S}(2l - z)$$

$$y_2' = \alpha C_3 \cdot \cos\alpha z - \alpha C_4 \cdot \sin\alpha z - \frac{F}{S}$$

$$y_2'' = -\alpha^2 \cdot C_3 \cdot \sin\alpha z - \alpha^2 C_4 \cdot \cos\alpha z$$

ГУ:

1) $z=0:\ y_1=0 \Rightarrow C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2=0$

2) $z=l:\ y_1=y_2 \Rightarrow C_1 \sin\alpha l + \cancel{C_2}^{0}\cos\alpha l + \cancel{\frac{F}{S}l} = C_3\sin\alpha l + C_4\cdot\cos\alpha l + \cancel{\frac{F}{S}l}$

$$C_1\sin\alpha l - C_3\sin\alpha l - C_4\cos\alpha l = 0 \qquad (1)$$

3) $z=l:\ y_1'=y_2' \Rightarrow \alpha C_1\cos\alpha l - \alpha\cancel{C_2}^{0}\sin\alpha l + \frac{F}{S} = \alpha C_3\cos\alpha l - \alpha C_4\sin\alpha l - \frac{F}{S}$

$$C_1\cos\alpha l - C_3\cos\alpha l + C_4\sin\alpha l = -\frac{2F}{\alpha S} \qquad (2)$$

4) $z=2l:\ y_2''=0 \Rightarrow -\alpha^2 C_3\cdot\sin 2\alpha l - \alpha^2 C_4\cos 2\alpha l = 0$

$$C_3\cdot\sin 2\alpha l + C_4\cos 2\alpha l = 0 \qquad (3)$$

Система уравнений (1)-(3) в матричной форме:

$$-\frac{\cos\alpha l}{\sin\alpha l}\times,\ + \quad \begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l \\ \cos\alpha l & -\cos\alpha l & \sin\alpha l \\ 0 & \sin 2\alpha l & \cos 2\alpha l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2F}{\alpha S} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha l & -\sin\alpha l & -\cos\alpha l \\ 0 & \sin 2\alpha l & \cos 2\alpha l \\ 0 & 0 & \underbrace{\sin\alpha l + \frac{\cos^2\alpha l}{\sin\alpha l}}_{\frac{1}{\sin\alpha l}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2F}{\alpha S} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (б) \\ (в) \end{matrix}$$

(б): $$\frac{C_4}{\sin\alpha l} = -\frac{2F}{\alpha S}$$

$$\boxed{C_4 = -\frac{2F}{\alpha S}\cdot\sin\alpha l}$$

(δ): $$C_3\cdot\sin 2\alpha l + C_4\cdot\cos 2\alpha l = 0$$

$$C_3\cdot\sin 2\alpha l - \frac{2F}{\alpha S}\cdot\sin\alpha l\cdot\cos 2\alpha l = 0$$

$$C_3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\sin\alpha l}\cdot\cos\alpha l - \frac{\cancel{2}F}{\alpha S}\cdot\cancel{\sin\alpha l}\cdot\cos 2\alpha l = 0$$

$$\boxed{C_3 = \frac{F}{\alpha\cdot S}\cdot\frac{\cos 2\alpha l}{\cos\alpha l}}$$

(a): $$C_1\cdot\sin\alpha l - C_3\cdot\sin\alpha l - C_4\cdot\cos\alpha l = 0$$

$$C_1\cdot\cancel{\sin\alpha l} - \frac{F}{\alpha S}\cdot\frac{\cos 2\alpha l}{\cos\alpha l}\cdot\cancel{\sin\alpha l} + \frac{2F}{\alpha S}\cancel{\sin\alpha l}\cdot\cos\alpha l = 0$$

$$C_1 = \frac{F}{\alpha S}\left[\frac{\overset{\cos^2\alpha l-\sin^2\alpha l}{\overset{\|}{\cos 2\alpha l}}}{\cos\alpha l} - 2\cdot\cos\alpha l\right]$$

$$C_1 = \frac{F}{\alpha S}\cdot\frac{\cos^2\alpha l - \sin^2\alpha l - 2\cos^2\alpha l}{\cos\alpha l} = \frac{F}{\alpha S}\cdot\frac{\overbrace{-\sin^2\alpha l - \cos^2\alpha l}^{-1}}{\cos\alpha l}$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{F}{\alpha\cdot S\cdot\cos\alpha l}}$$

Тогда:

$$y_1 = C_1 \cdot \sin\alpha z + \cancelto{0}{C_2} \cdot \cos\alpha z + \frac{F}{S} \cdot z = \frac{F}{S} \cdot \left[z - \frac{\sin\alpha z}{\alpha \cdot \cos\alpha l} \right] ;$$

$$y_1' = \alpha C_1 \cos\alpha z - \alpha \cancelto{0}{C_2} \sin\alpha z + \frac{F}{S} = \frac{F}{S} \left[1 - \frac{\cos\alpha z}{\cos\alpha l} \right] ;$$

$$y_1'' = -\alpha^2 C_1 \sin\alpha z - \alpha^2 \cancelto{0}{C_2} \cos\alpha z = \alpha \frac{F}{S} \cdot \frac{\sin\alpha z}{\cos\alpha l} ;$$

$$y_2 = C_3 \cdot \sin\alpha z + C_4 \cos\alpha z + \frac{F}{S}(2l - z) = \frac{F}{\alpha \cdot S \cos\alpha l} \cdot \left[\cos 2\alpha l \cdot \sin\alpha z - \sin 2\alpha l \cdot \cos\alpha z + (2l - z) \cdot \alpha \cdot \cos\alpha l \right] ;$$

$$y_2' = \alpha C_3 \cos\alpha z - \alpha C_4 \sin\alpha z - \frac{F}{S} = \frac{F}{S \cdot \cos\alpha l} \cdot \left[\cos 2\alpha l \cdot \cos\alpha z + \sin 2\alpha l \cdot \sin\alpha z - \cos\alpha l \right] ;$$

$$y_2'' = -\alpha^2 C_3 \cdot \sin\alpha z - \alpha^2 C_4 \cdot \cos\alpha z = \frac{\alpha F}{S \cos\alpha l} \cdot \left[-\cos 2\alpha l \cdot \sin\alpha z + \cos 2\alpha l \cdot \cos\alpha z \right] .$$

Перемещения, углы поворота, внутренний изгибающий момент по длине стержня:

$$V_1(z) = y_1(z) = \frac{F}{S} \left[z - \frac{\sin\alpha z}{\alpha \cdot \cos\alpha l} \right]$$

$$\theta_1(z) \approx y_1'(z) = \frac{F}{S} \left[1 - \frac{\cos\alpha z}{\cos\alpha l} \right]$$

$$M_{x_1}(z) \approx EJ_x \cdot y_1''(z) = EJ_x \cdot \alpha \cdot \frac{F}{S} \cdot \frac{\sin\alpha z}{\cos\alpha z} = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha z}{\cos\alpha z}$$

$$V_2(z) = y_2(z) = \frac{F}{\alpha S \cdot \cos\alpha l} \cdot \left[\cos 2\alpha l \cdot \sin\alpha z - \sin 2\alpha l \cdot \cos\alpha z + (2l - z)\alpha \cdot \cos\alpha l \right]$$

$$\theta_2(z) \approx y_2'(z) = \frac{F}{S \cdot \cos\alpha l} \left[\cos 2\alpha l \cdot \cos\alpha z + \sin 2\alpha l \cdot \sin\alpha z - \cos\alpha l \right]$$

$$M_{x_2}(z) = EJ_x \cdot y_2''(z) = \frac{F}{\alpha \cdot \cos\alpha l} \cdot \left[-\cos\alpha l \cdot \sin\alpha z + \cos 2\alpha l \cdot \cos\alpha z \right]$$

Вертикальное перемещение точки C:

$$V_c = V_1(l) = \frac{F}{S}\left[l - \frac{\sin\alpha l}{\alpha\cdot\cos\alpha l}\right] = \frac{F}{S}\left[l - \frac{tg\,\alpha l}{\alpha}\right] = \frac{425}{85000}\cdot\left[3 - \frac{5,468}{0,4633}\right] =$$

$$= -0,044\ м = -44\ мм$$ ANSYS: $V_c = -48$ мм, $\Delta = 9\%$

$$\alpha = \sqrt{\frac{S}{E\cdot J_x}} = \sqrt{\frac{85000}{2\cdot10^{11}\cdot 198\cdot10^{-8}}} = 0,4633\ 1/м$$

$$\alpha l = 0,4633\cdot 3 = 1,3899$$

$$tg\,\alpha l = tg(1,3899) = 5,468$$

Максимальное (по модулю!) напряжение реализуется, очевидно, в точке C стержня:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_c}}{W_x} + \frac{S}{A} = \frac{5016}{39,7\cdot10^{-6}} + \frac{85000}{12\cdot10^{-4}} = 197,1\cdot10^6\ Па \approx 197\ МПа.$$

где

$$M_{x_c} = M_{x_1}(l) = \frac{F}{\alpha}\cdot tg\,\alpha l = \frac{425}{0,4633}\cdot 5,468 = 5016\ Н\cdot м$$

Коэффициент запаса прочности:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{240}{197} = 1,2$$

Примечание:

В силу симметрии конструкции, рассчитать можно было только её половину: