

Пример решения задачи на устойчивость стержней

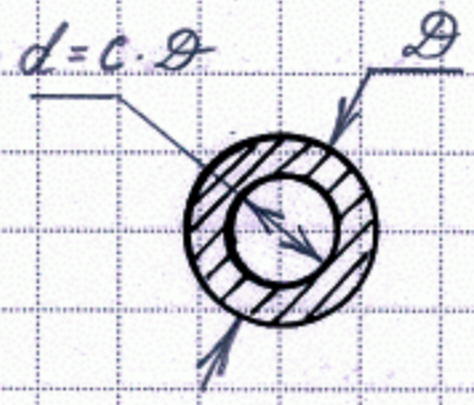
Вариант: 31

Номер сечения по табл. 1: 5



$\mu = 0,7$

Номер сечения по табл. 3: 4



$c = 0,1$

$A = \frac{\pi D^2}{4} \cdot (1 - c^2)$

$J_{min} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - c^4)$

$i_{min} = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 + c^2}$

Значение приложенной силы F:

25 кН

Материал стержня:

Ст. 10Г2С(В) (в таблице 8.2 нет материала 10Г2СВ)

[ $\sigma$ ]<sub>ст</sub> по табл. 8.3:

235 МПа - поправлено рукой.

Длина стержня, l: 0,4 м

## Решение

1. Размеры поперечного сечения стержня:

Используем нормативный метод расчета, позволяющий подобрать размеры поперечного сечения, достаточные для практического использования стойки.

Площадь поперечного сечения  $A$  и его момент инерции  $J_{min}$  влияют на радиус инерции сечения:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} \quad [м]$$

Радиус инерции, в свою очередь - на гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} \quad [ ]$$

Для стержней различных гибкостей экспериментально определено напряжение сжатия  $[\sigma]_{уст}$ , при котором стержень теряет устойчивость. В таблице удобно заносить не абсолютное значение этого напряжения, а его отношение к допускаемому напряжению  $[\sigma]_{доп}$ :

! или устойчивость с коэффициентом запаса не менее допустимого!

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{уст}}{[\sigma]_{доп}}$$

коэффициент сжатия  
допускаемых напряжений

Зная напряжение, при котором стержень теряет устойчивость, можно найти силу, вызывающую это напряжение - критическую силу:

$$F_{кр} = [\sigma]_{уст} \cdot A$$

Так вот, размеры поперечного сечения можно подобрать такие, чтобы  $F_{кр}$  была как можно больше (но не меньше!) действующей на стержень силой  $F$ .

Подбираем по методике, изложенной в методических указаниях. Зависимость  $\varphi - \lambda$  для Ст. 10Г2С (из табл. 8.2):

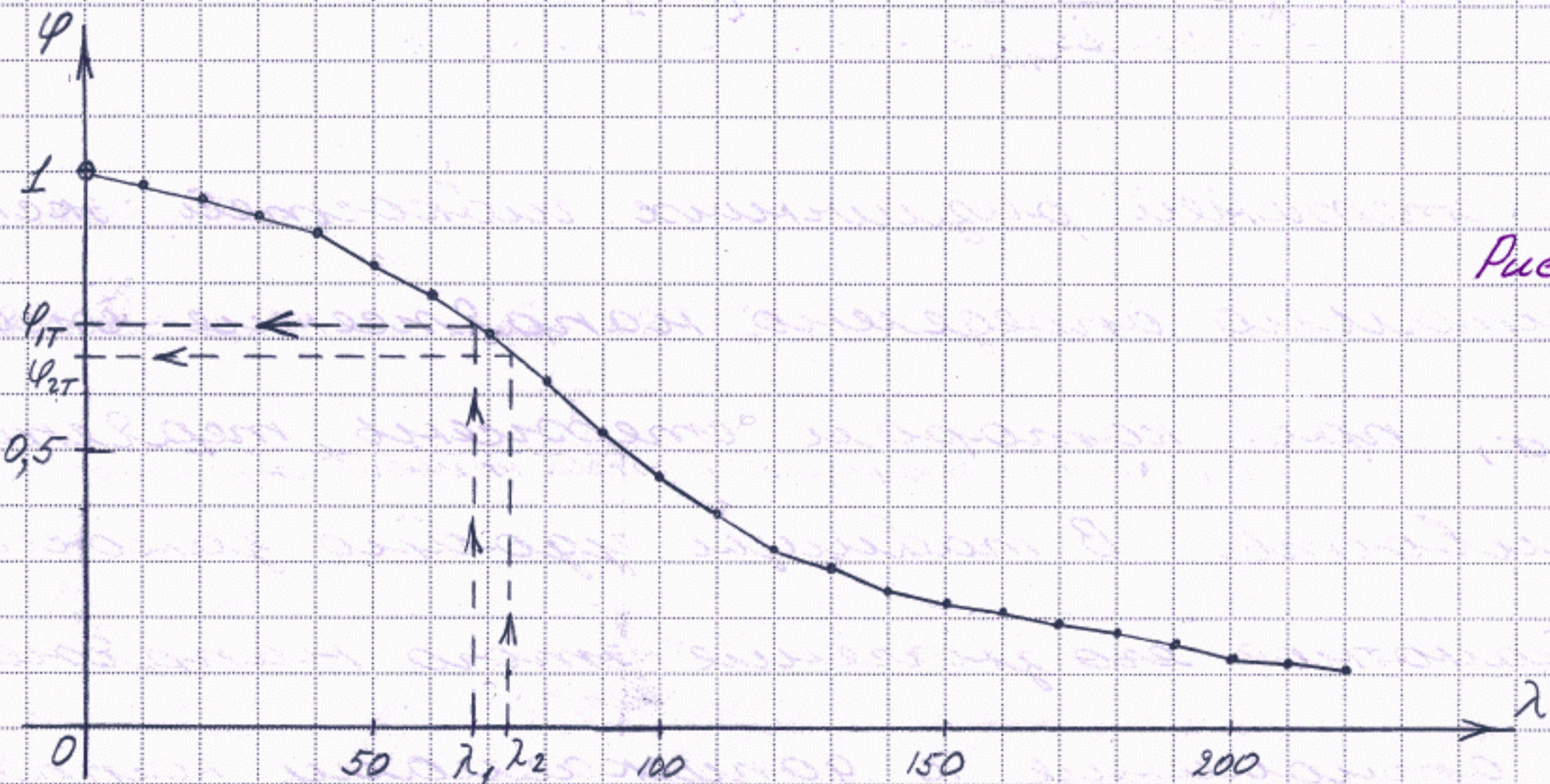


Рис. 1

$$\varphi_1 = 0,5 :$$

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [G]_{\text{core}}} = \frac{25 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 235 \cdot 10^6} = 212,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi \cdot (1 - c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 212,8 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot (1 - 0,1^2)}} = 0,01654 \text{ м}$$

$$i_{\text{min},1} \triangleq i_1 = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 + c^2} = \frac{0,01654}{4} \cdot \sqrt{1 + 0,1^2} = 0,004156 \text{ м}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_1} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{0,004156} = 67,37$$

$$\varphi_{1T} = 0,72 \quad (\text{рис. 1})$$

$$\Delta = \left| \frac{\varphi_{1T} - \varphi_1}{\varphi_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,72 - 0,5}{0,5} \right| \cdot 100\% = 44\%$$

$\Delta > 2\% \Rightarrow \text{продолжаем}$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{1T}}{2} = \frac{0,5 + 0,72}{2} = 0,61$$

$$\varphi_2 = 0,61 :$$

$$A_2 = \frac{25 \cdot 10^3}{0,61 \cdot 235 \cdot 10^6} = 174,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 174,4 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot (1 - 0,1^2)}} = 0,01498 \text{ м}$$

$$i_2 = \frac{0,01498}{4} \cdot \sqrt{1 + 0,1^2} = 0,003762 \text{ м}$$

$$\lambda_2 = \frac{0,7 \cdot 0,4}{0,003762} = 74,41$$

$$\varphi_{2T} = 0,675$$

$$\Delta = \left| \frac{\varphi_{2T} - \varphi_2}{\varphi_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,675 - 0,61}{0,61} \right| \cdot 100\% = 11\%$$

$\Delta > 2\% \Rightarrow \text{продолжаем}$

$$\varphi_3 = \frac{0,675 + 0,61}{2} = 0,643$$

$$\varphi_3 = 0,643 : A_3 = \frac{25 \cdot 10^3}{0,643 \cdot 235 \cdot 10^6} = 165,4 \cdot 10^{-6} \mu^2$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 165,4 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot (1 - 0,1^2)}} = 0,01459 \mu$$

$$i_3 = \frac{0,01459}{4} \sqrt{1 + 0,1^2} = 0,003665 \mu$$

$$\lambda_3 = \frac{0,7 \cdot 0,4}{0,003665} = 76,4$$

$$\varphi_{3T} = 0,65$$

$$\Delta = \left| \frac{0,65 - 0,643}{0,643} \right| \cdot 100\% = 1\%$$


$\Delta < 2\% \Rightarrow$  подбор закончен.  $\varphi = \varphi_3 = 0,643$

$$A = A_3 = 165,4 \cdot 10^{-6} \mu^2$$

$$D = D_3 = 0,01459 \mu$$

$$d = c \cdot D_3 = 0,1 \cdot 0,01459 = 0,00146 \mu.$$

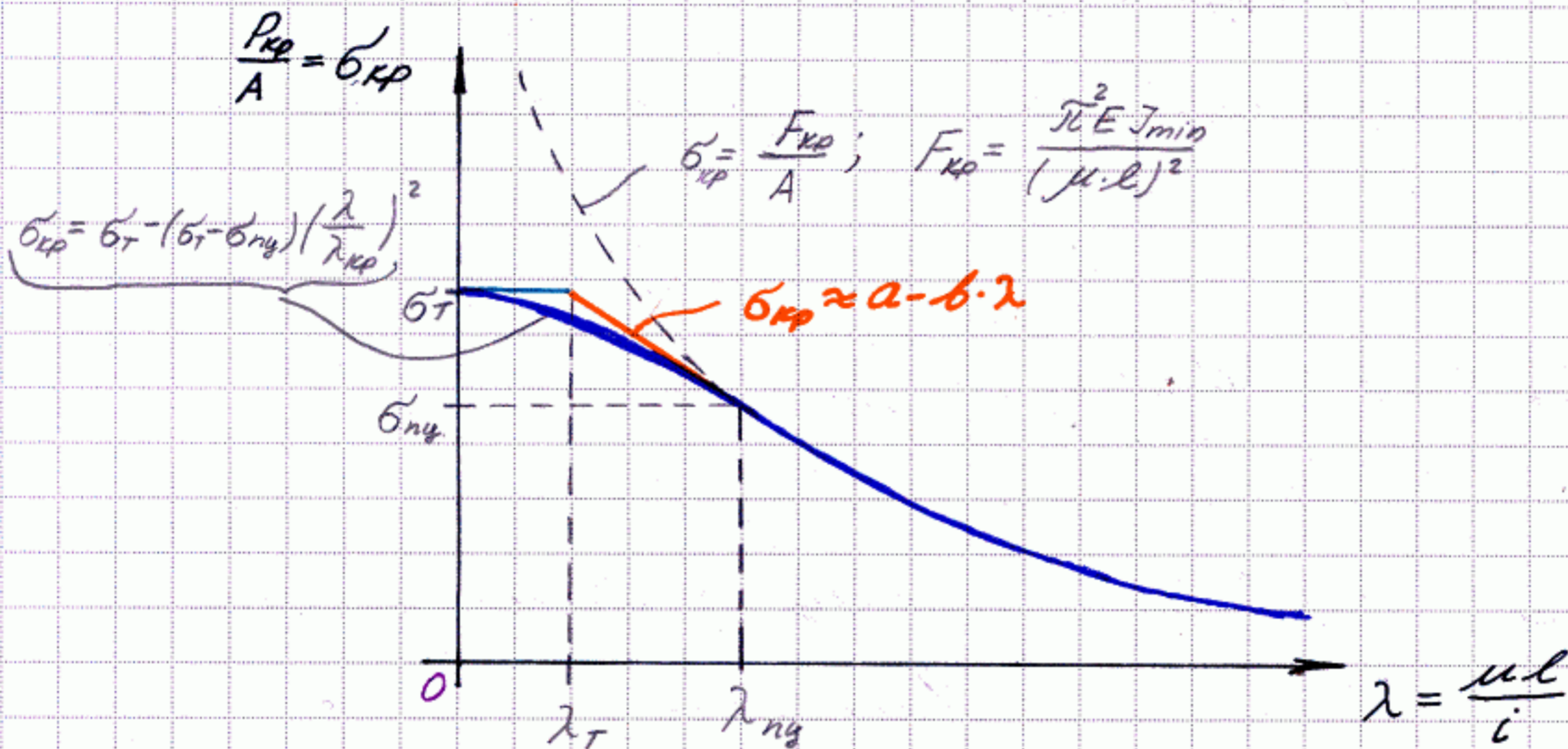
$$\lambda = \lambda_3 = 76,4$$

График на рис. 1 рекомендуется выплнить на миллиметровке  $l_{\text{мил}} = 0,01 \mu$   , либо

пользоваться интерполяционной формулой из методических указаний.

## 2. Величина критической силы:

В зависимости от гибкости, стержень теряет устойчивость по-разному:



а) При  $\lambda > \lambda_{нч} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нч}}}$ , материал стержня остаётся упругим вплоть до потери устойчивости. Критическую силу находят по формуле:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (\text{формула Эйлера})$$

критическое напряжение в стойке, превышение которого приводит к потере устойчивости:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$$

— площадь поперечного сечения стойки.

7  
δ) При  $\lambda_t < \lambda < \lambda_{ny}$ , к моменту предшествующему потере устойчивости материал стойки всё ещё упруг, но уже не подчиняется закону Гука ( $\sigma_{кр} > \sigma_{ny}$ ).

Критическое напряжение находят по формуле:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{ny}) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_T}\right)^2$$

или

коэффициенты из табл. 8.1

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda \quad (\text{формула Петляйера - Ясинского})$$

критическую силу - по формуле:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

в) При  $\lambda < \lambda_T$ , стержень теряет устойчивость с уже потёкшими материалами.

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{ny}) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_T}\right)^2$$

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

В нашем случае

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 76,4 \\ \lambda_{ny} &= 83 \\ \lambda_T &= 50 \end{aligned} \right\} \lambda_T < \lambda < \lambda_{ny} - \text{вариант } \delta) \text{ потери устойчивости.}$$

radi. 8.1

Пользуемся формулой Ясинского, она проще:

$$\left. \begin{aligned} a &= 429 \cdot 10^6 \text{ Па} \\ b &= 1,52 \cdot 10^6 \text{ Па} \end{aligned} \right\} \text{radi. 8.1}$$

$$b_{кр} = a - b \cdot \lambda = 429 \cdot 10^6 - 1,52 \cdot 10^6 \cdot 76,4 = 312,9 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$F_{кр} = b_{кр} \cdot A = 312,9 \cdot 10^6 \cdot 165,4 \cdot 10^{-6} = 51750 \text{ Н}$$

3) Коэффициент запаса прочности по устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{51,75 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} \approx 2$$



Примечание: В данном примере расчёты производились с точностью до 4<sup>х</sup> значащих цифр. В Д/З достаточно - до трёх.