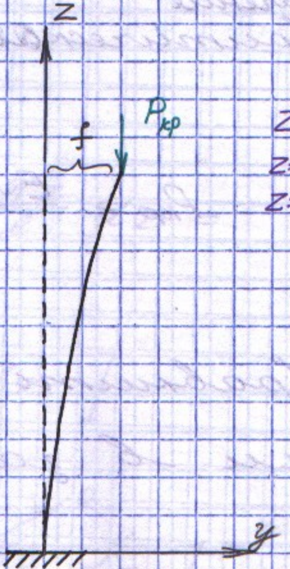
7

Расчётная схема



$z=0,\ y=0$
$z=0,\ y'=0$
$z=l,\ y''=0$

Положение безразличного равновесия (потеря устойчивости)

Задаёмся уравнением упругой оси:

а) $y = f\cdot\sin\dfrac{\pi z}{l}$

б) $y = f\left(1-\cos\dfrac{\pi z}{l}\right)$

в) $y = f\left(1-\cos\dfrac{\pi z}{2l}\right)$

Выбираем: можно выбор не давать, сразу дать вариант в) а)

$$y = f \sin\frac{\pi z}{l}$$

$$y' = f\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi z}{l}$$

$$y'' = -f\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\sin\frac{\pi z}{l}$$

$z=0:\quad y = f\sin\frac{\pi\cdot 0}{l} = 0$ ✓

$z=0:\quad y' = f\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi\cdot 0}{l} = f\frac{\pi}{l}$?

$z=l:\quad y'' = -f\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi\cdot l}{l} = 0$ ✓

б)

$$y = f\left(1-\cos\frac{\pi z}{l}\right)$$

$$y' = f\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi z}{l}$$

$$y'' = f\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cos\frac{\pi z}{l}$$

$z=0:\quad y = f\left(1-\cos\frac{\pi\cdot 0}{l}\right) = 0$ ✓

$z=0:\quad y' = f\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi\cdot 0}{l} = 0$ ✓

$z=l:\quad y'' = f\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cos\frac{\pi l}{l} = -f\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$?

в)
$$y = f\left(1-\cos\frac{\pi z}{2l}\right)$$

$$y' = f\cdot\frac{\pi}{2l}\cdot\sin\frac{\pi z}{2l}$$

$$y'' = f\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi z}{2l}$$

$z=0$: $\quad y = f\left(1-\cos\frac{\pi\cdot 0}{2l}\right) = 0 \quad V$

$z=0$: $\quad y' = f\frac{\pi}{2l}\sin\frac{\pi\cdot 0}{2l} = 0 \quad V$

$z=l$: $\quad y'' = f\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi\cdot l}{2l} = 0 \quad V$

$$\boxed{y = f\left(1-\cos\frac{\pi z}{2l}\right)}$$

Числитель:

$$EJ_x\int_0^l (y'')^2\,dz = EJ_x\int_0^l f^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\cos^2\frac{\pi z}{2l}\,dz =$$

$$= \frac{EJ_x f^2\pi^4}{32\,l^4}\int_0^l\left(1+\cos\frac{\pi z}{l}\right)dz =$$

$$= \frac{EJ_x f^2\pi^4}{32\cdot l^4}\left[z+\cancelto{0}{\frac{l}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi z}{l}}\right]\Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{EJ_x f^2\pi^4}{32\cdot l^3}$$

Знаменатель:

$$\int_0^{l_0}(y')^2\,dz = f^2\frac{\pi^2}{4l^2}\int_0^l\sin^2\frac{\pi z}{2l}\,dz =$$

$$= \frac{f^2\pi^2}{8l^2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{\pi z}{l}\right)dz =$$

$$= \frac{f^2\pi^2}{8l^2}\left[z-\cancelto{0}{\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi z}{l}}\right]\Bigg|_0^l = \frac{f^2\cdot\pi^2}{8\,l}$$

Значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{EJ_x \cancel{f^2}\,\pi^{\cancel{4}\,2}}{\underset{4}{\cancel{32}} \cdot l^{\cancel{3}\,2}} \cdot \frac{\cancel{8l}}{\cancel{f^2} \cdot \cancel{\pi^2}} = \frac{EJ_x \pi^2}{(2l)^2}$$

Сравнить с результатом, полученным в задаче $\boxed{2}$