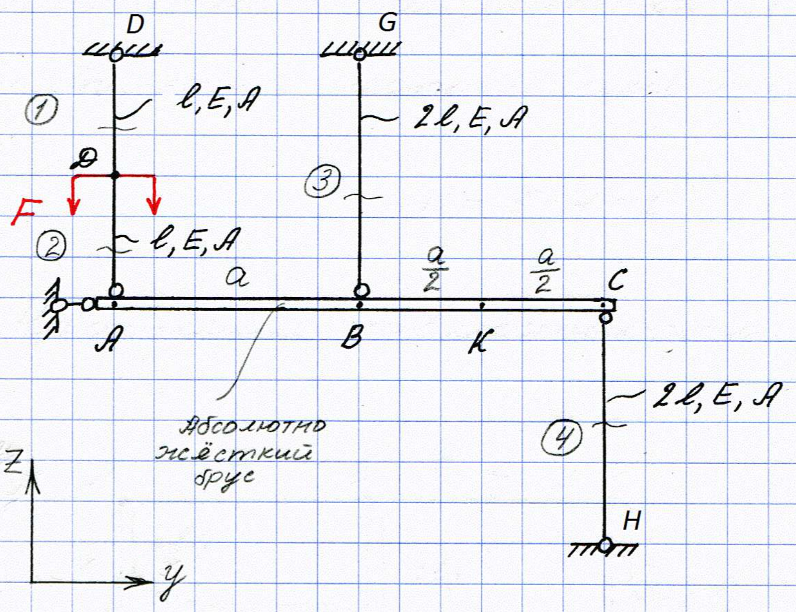
Брус "А-С" абсолютно жёсткий



Дано: F, ℓ, E, A, a

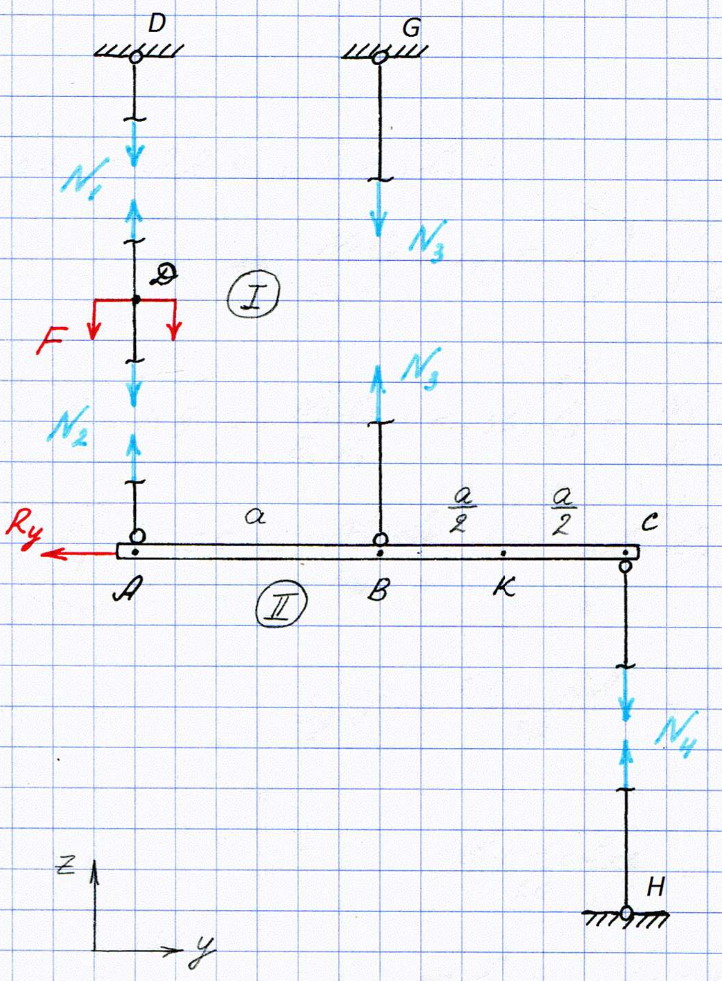
Найти:

1) Перемещение точки K;

2) Работу силы F;

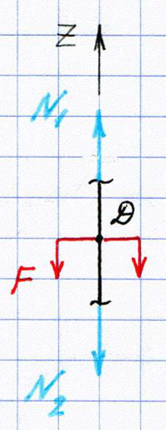
3) Потенциальную энергию системы U.

Решение



Уравнения статического равновесия

I:

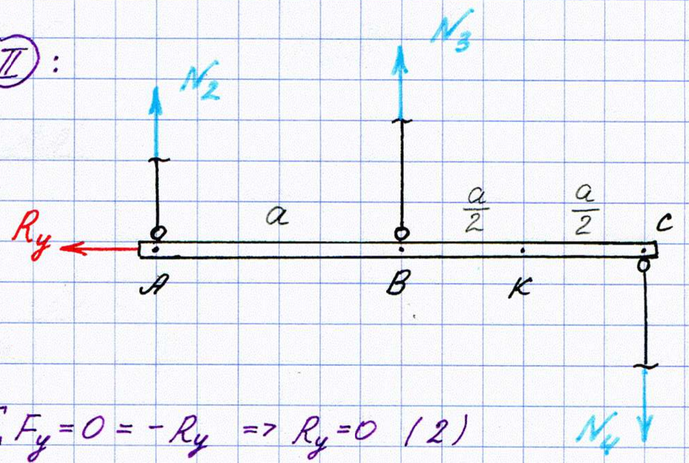


$$\sum F_y \equiv 0$$

$$\sum F_z = 0 = N_1 - F - N_2 \quad (1)$$

$$\sum M_D \equiv 0$$

II:



$$\sum F_y = 0 = -R_y \Rightarrow R_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = N_2 + N_3 - N_4 \quad (3)$$

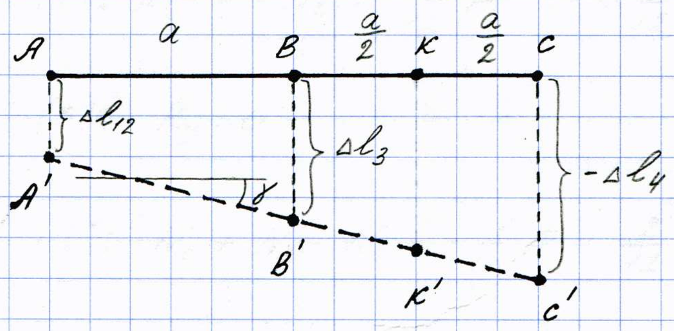
$$\sum M_B = 0 = -N_2 \cdot a - N_4 \cdot a$$

$$N_2 + N_4 = 0 \quad (4)$$

Уравнений 4, неизвестных - 5 ($N_1, \dots, N_4, R_y$). Степень статической неопределимости:

$$n = 5 - 4 = 1$$

Уравнение совместности деформаций:



Произвольно смещаем жёсткий брус по всем реализуемым его степеням свободы. Горизонтальными перемещениями точек от поворота бруса пренебрегаем.

$$\Delta l_{12} = AA' = \Delta l_1 + \Delta l_2 =$$

$$= \left(\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \cancel{\alpha_1 \Delta t_1 l_1}^{\,0}\right) + \left(\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \cancel{\alpha_2 \Delta t_2 l_2}^{\,0}\right) = \frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA}$$

$$\Delta l_3 = BB' = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} + \cancel{\alpha_3 \Delta t_3 l_3}^{\,0} = \frac{N_3 \cdot 2l}{EA}$$

$$\Delta l_4 = -CC' = \frac{N_4 l_4}{E_4 A_4} + \cancel{\alpha_4 \Delta t_4 l_4}^{\,0} = \frac{N_4 \cdot 2l}{EA}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CC' - AA'}{2a} = \frac{BB' - AA'}{a}$$

$$\frac{-\Delta l_4 - \Delta l_{12}}{2\cancel{a}} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_{12}}{\cancel{a}}$$

$$\Delta l_{12} - 2\Delta l_3 - \Delta l_4 = 0$$

$$\frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA} - \frac{4 N_3 l}{EA} - \frac{2 N_4 l}{EA} = 0$$

$$N_1 + N_2 - 4 \cdot N_3 - 2 N_4 = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1),..,(5), получим:

$$R_y = 0; \quad N_1 = \frac{11}{12}F; \quad N_2 = -\frac{1}{12}F; \quad N_3 = \frac{2}{12}F; \quad N_4 = \frac{1}{12}F.$$

Статическая проверка:

$$(1): N_1 - F - N_2 = \frac{11}{12}F - F + \frac{1}{12}F = 0 \quad V$$

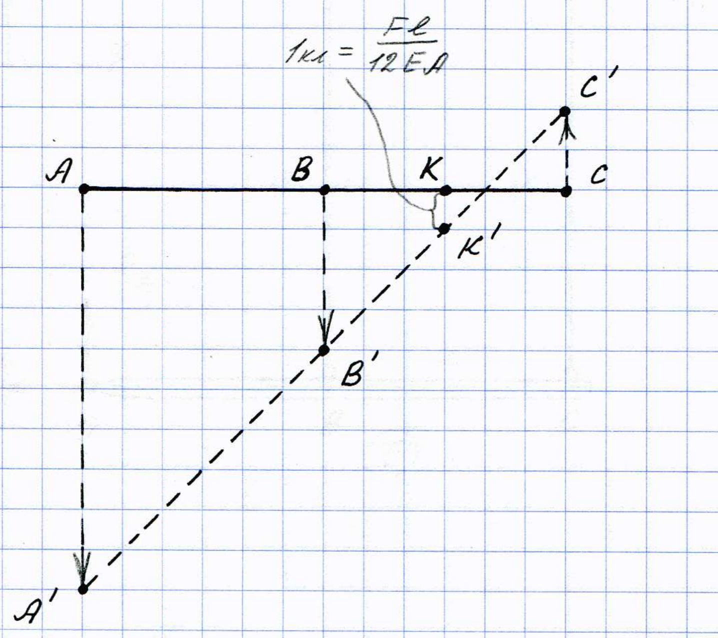
$$(2): R_y = 0 \quad V$$

$$(3): N_2 + N_3 - N_4 = -\frac{1}{12}F + \frac{2}{12}F - \frac{1}{12}F = 0 \quad V$$

$$(4): N_2 + N_4 = -\frac{1}{12}F + \frac{1}{12}F = 0$$

$$(5): N_1 + N_2 - 4\cdot N_3 - 2\cdot N_4 = \frac{11}{12}F - \frac{1}{12}F - \frac{4\cdot 2}{12}F - \frac{2}{12}F = 0 \quad V$$

Деформационная проверка:



По результатам расчёта прорисовываем реальные положения точек бруса после нагружения.

Если расчёты выполнены правильно, точки лягут на одну прямую:

$$\Delta l_{12} = (N_1 + N_2)\frac{l}{EA} = \frac{10Fl}{12EA} = 10 \text{ клеток};$$

$$\Delta l_3 = \frac{2N_3 l}{EA} = \frac{4Fl}{12EA} = 4 \text{ клетки}; \qquad \Delta l_4 = \frac{2N_4 l}{EA} = \frac{2Fl}{12EA} = 2 \text{ кл.}$$

Работа внешних сил:

$$W = \frac{1}{2} F_D \cdot W_D = \frac{1}{2} F_D \cdot \Delta l_1 = \frac{1}{2} F \cdot \frac{N_1 l}{EA} = \frac{1}{2} F \, \frac{11}{12} \cdot \frac{Fl}{EA} = \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{F^2 l}{EA}$$

Потенциальная энергия деформации системы:

$$U = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i^2 l_i}{2 E_i A_i} = \frac{F^2 l}{2EA} \cdot \left[\left(\frac{11}{12} \right)^2 + \left(-\frac{1}{12} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{12} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{11}{24} \frac{F^2 l}{EA}$$

$$W = U$$