

Дано:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

$A = 50 \text{ мм}^2$

$F = 20 \text{ кН}$

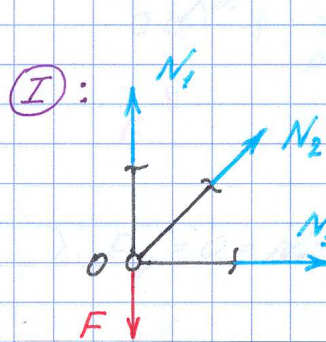
$l = 1,2 \text{ м}$

$\alpha = 45^\circ$

Найти:  $W_F = ?$

### Решение

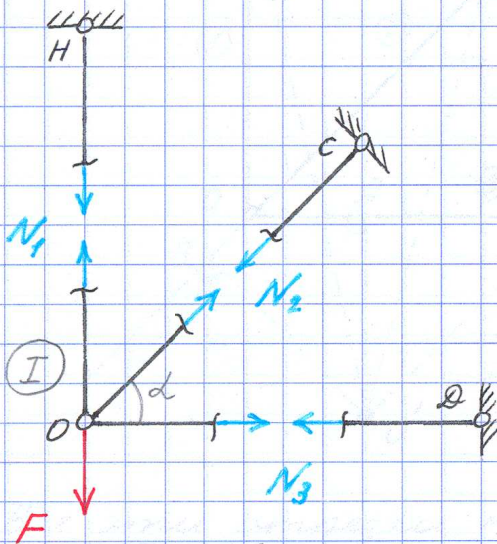
Уравнения статического равновесия:



$$\sum F_y = 0 = N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 = N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 - F \quad (2)$$

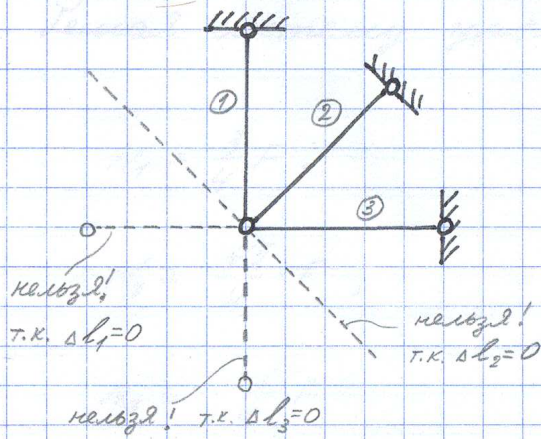
$$\sum M_O = 0$$



Неизвестных 3, уравнений 2. Степень статической неопределенности:

$$n = 3 - 2 = 1$$

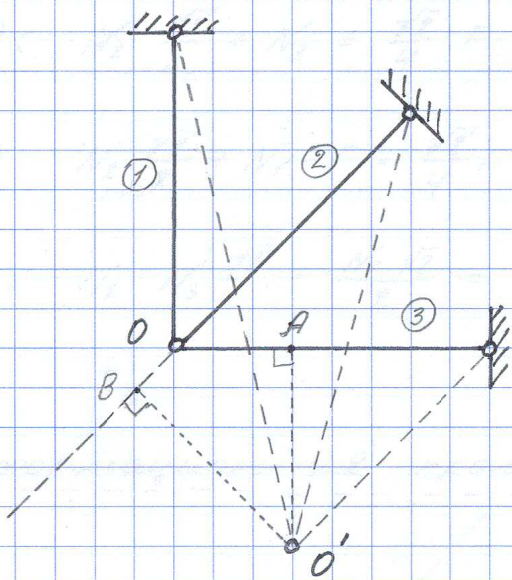
Для составления уравнения совместности деформаций придаём узлу O перемещение по обеим степеням свободы (горизонтальной и вертикальной), но!



НО! При таком перемещении узла O каждый из стержней фермы должен растягиваться или сжиматься!

Задача линейная, перемещения небольшие, углы поворотов стержней пренебрегаем:

стержней пренебрегаем:

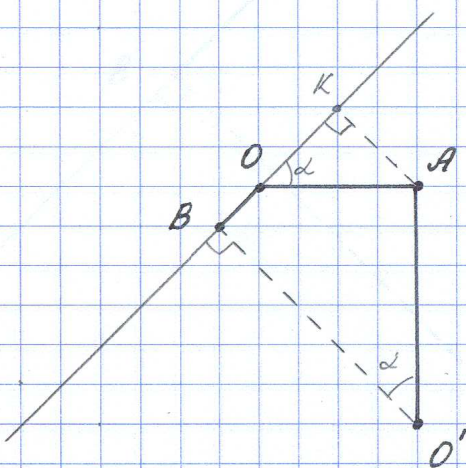


$$\Delta l_1 = AO' = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 \Delta t_1 l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$-\Delta l_3 = OA = -\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} - \alpha_3 \Delta t_3 l_3 = -\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}$$

$$\Delta l_2 = OB = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 \Delta t_2 l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

Все эти отрезки нужно спроецировать на какое либо одно направление, например, на направление OB:



$$\begin{cases} BK = BO + OA \cdot \cos \alpha \\ BK = O'A \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$BO + OA \cdot \cos \alpha = O'A \cdot \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta l_2 - \Delta l_3 \cos \alpha = \Delta l_1 \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$N_2 - N_3 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)-(3), получим:

$$N_1 = \frac{3}{4} F;$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} F;$$

$$N_3 = -\frac{1}{4} F.$$

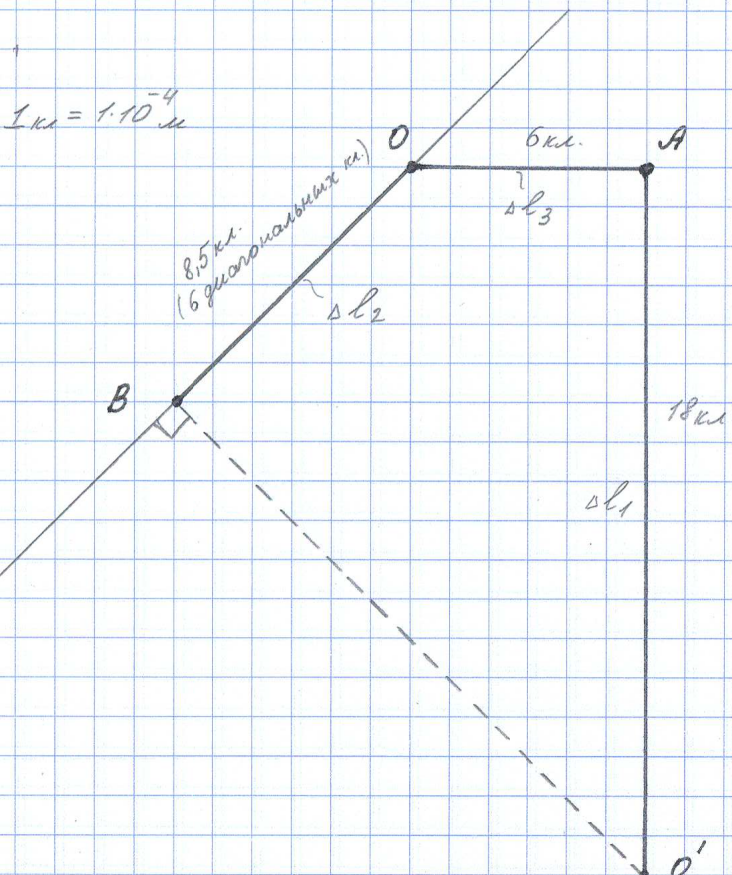
Статическая проверка:

$$(1): N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} F = \frac{1}{4} F - \frac{1}{4} F = 0 \quad \checkmark$$

$$(2): N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 - F = \frac{\sqrt{2}}{4} F \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} F - F = \frac{1}{4} F + \frac{3}{4} F - F = 0 \quad \checkmark$$

$$(3): N_2 - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{N_1 \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} F + \frac{1}{4} F \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \checkmark$$

Деформационная проверка:



$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA} = \frac{3Fl}{4EA} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 18 \cdot 10^{-4} \mu$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{\sqrt{2} Fl}{4EA} = \frac{\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 8,5 \cdot 10^{-4} \mu$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA} = -\frac{Fl}{4EA} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -6 \cdot 10^{-4} \mu$$

Работа силы F:

$$W_F = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l' = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l_1 = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-4} = 18 \text{ Дж.}$$

Потенциальная энергия системы:

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 l_i}{2 E_i A_i} = \frac{F L}{2 E A} \left[ \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left( -\frac{1}{4} \right)^2 \right] =$$
$$= \frac{3 F L}{8 E A} = \frac{3 \cdot (20 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,2}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 18 \text{ Дж}$$

$$U = W$$