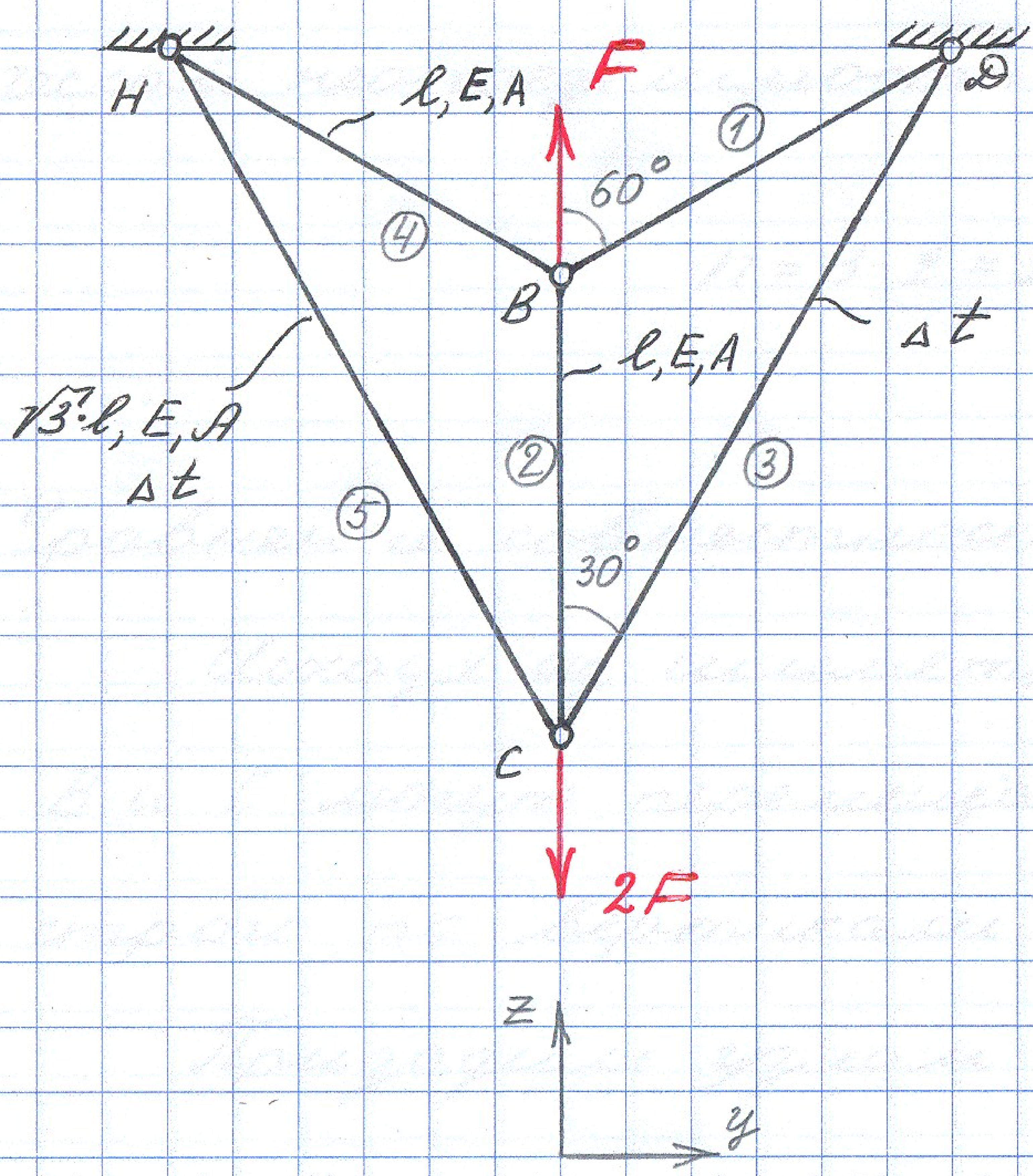
Дано: E, A, l, α

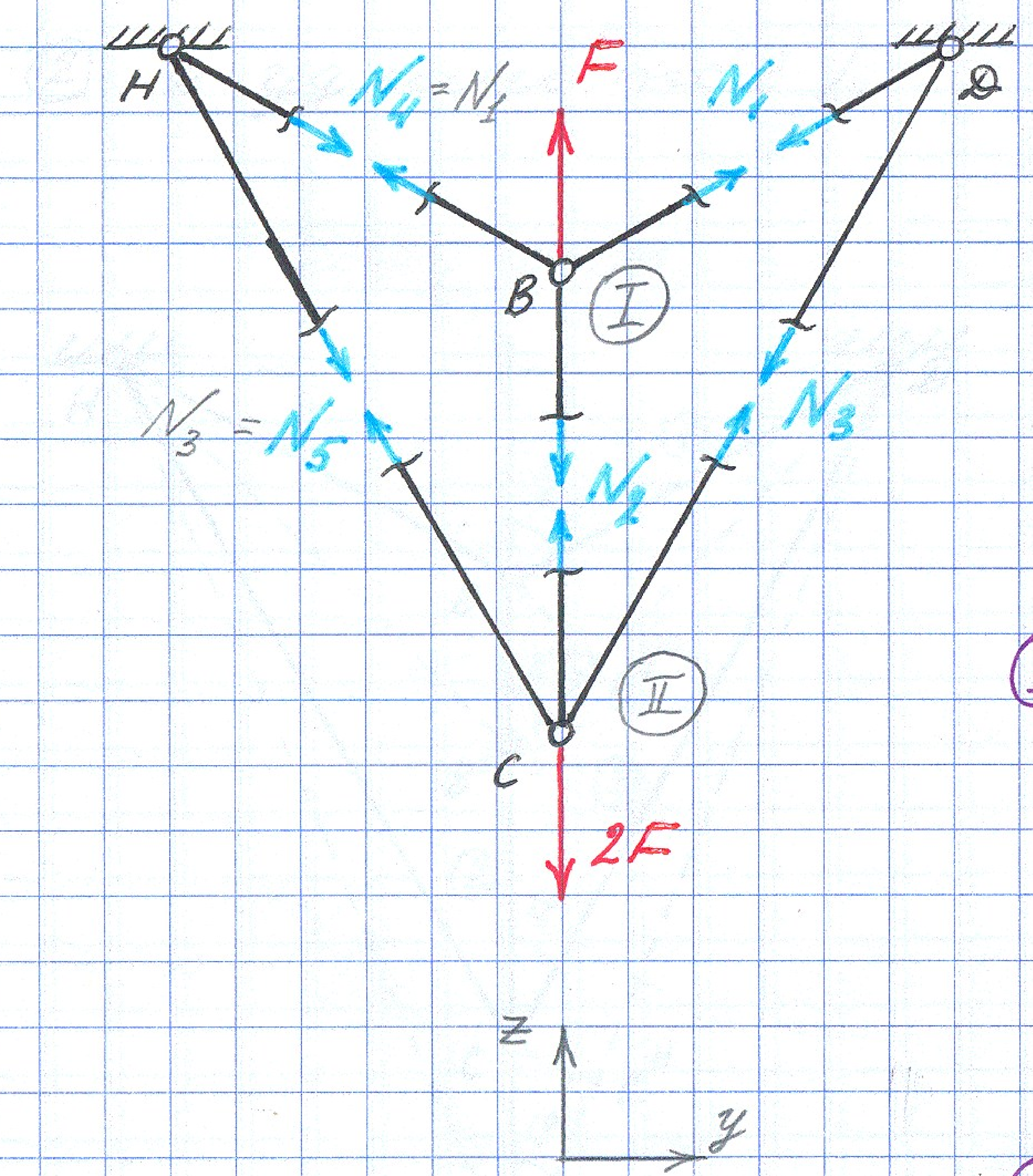
Ферма симметрична.

Боковые стержни нагреты на Δt.

Найти: N_i - ?



Решение



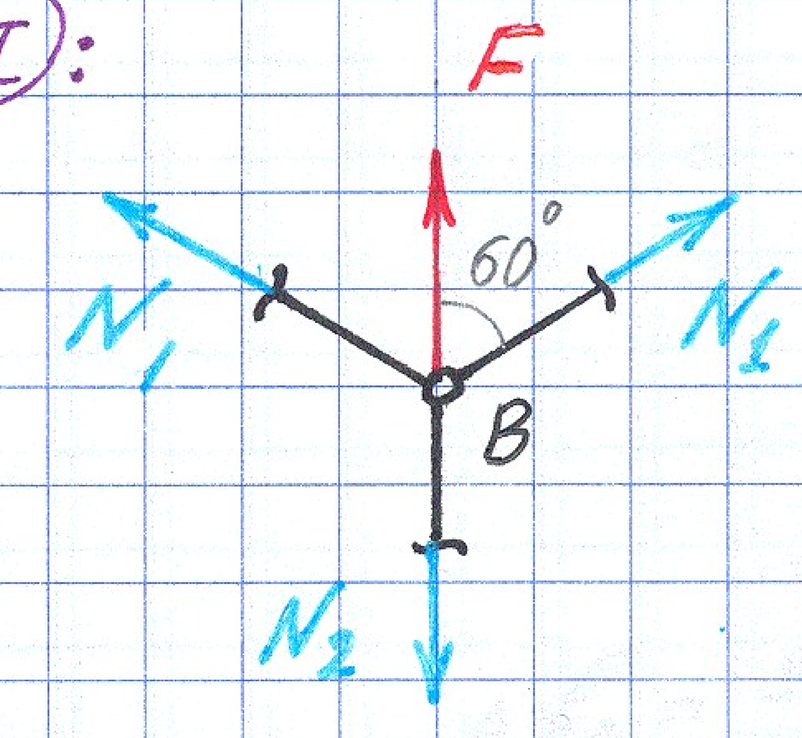
Из условия симметрии:

$N_5 = N_3$

$N_4 = N_1$

Уравнения статического равновесия:

I:



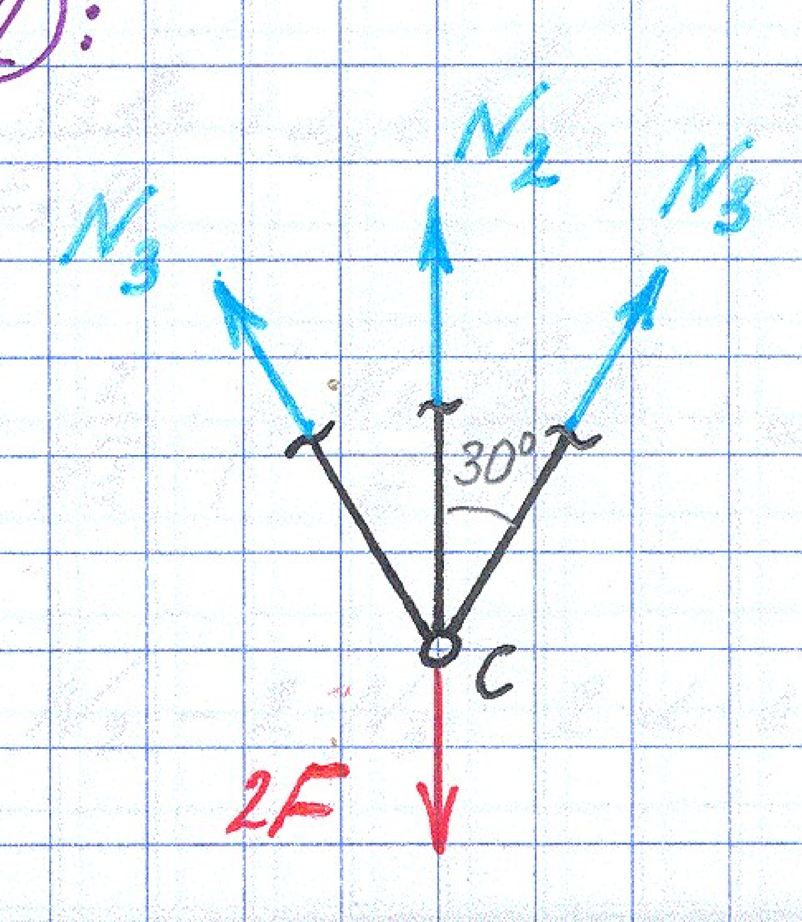
$\sum F_y \equiv 0$

$\sum F_z = 0 = F + 2\cdot N_1 \overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} - N_2$

$F + N_1 - N_2 = 0 \quad (1)$

$\sum M_B \equiv 0$

II:



$\sum F_y \equiv 0$

$\sum F_z = 0 = N_2 + 2N_3 \cdot \overbrace{\cos 30^\circ}^{\sqrt{3}/2} - 2F$

$N_2 + \sqrt{3}\cdot N_3 - 2F = 0 \quad (2)$

$\sum M_C \equiv 0$

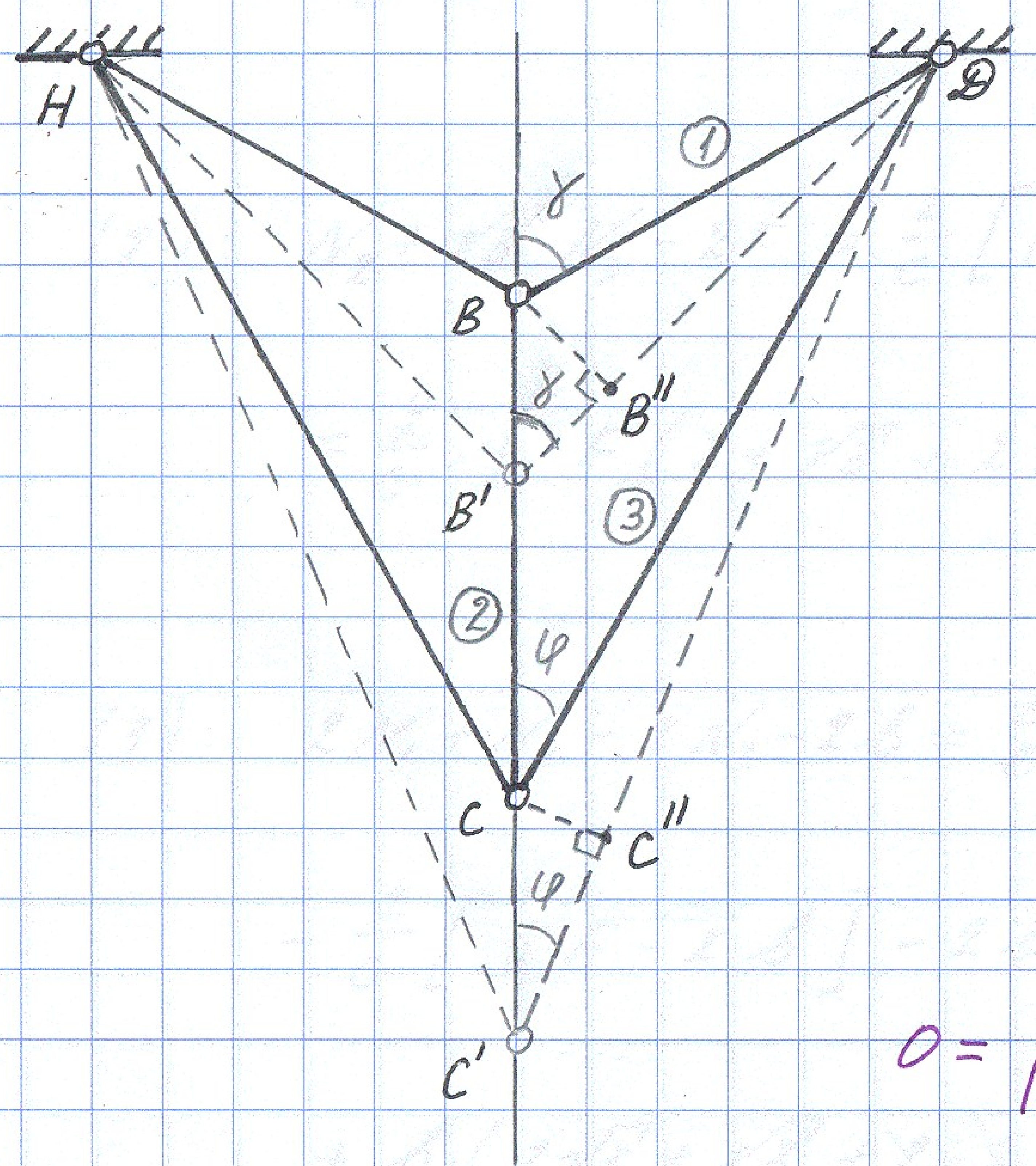
Неизвестных 3 (N_1, N_2, N_3), уравнений 2. Степень статической неопределимости:

$$n = 3 - 2 = 1$$

Уравнение совместности деформаций:

Исходя из симметрии системы, полагаем, что узлы B и C могут перемещаться в процессе нагружения строго по вертикали.

Придадим узлам такие перемещения, при которых **каждый** стержень изменит свою длину: узел B переместится в положение B', узел C переместится в положение C' и при этом $BB' \neq CC'$ (иначе стержень ② не удлинится).



$\varphi = 30°$

$\gamma = 60°$

$$\Delta l_1 = B'B'' = BB' \cdot \cos\gamma$$

$$\Delta l_3 = C'C'' = CC' \cdot \cos\varphi$$

$$\Delta l_2 = CC' - BB' = \frac{\Delta l_3}{\underset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\varphi}} - \frac{\Delta l_1}{\underset{\frac{1}{2}}{\cos\gamma}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta l_3 - 2\Delta l_1$$

$$0 = \left(\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \cancel{\alpha_2 \Delta t_2 l_2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} + \alpha_3 \Delta t_3 l_3\right) + 2\left(\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \cancel{\alpha_1 \Delta t_1 l_1}\right)$$

$$\frac{N_2 l}{EA} - \frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\left(\frac{N_3 \cancel{\sqrt{3}} \cdot l}{EA} + \alpha \cdot \Delta t \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot l\right) + \frac{2N_1 l}{EA} = 0$$

$$2N_1 + N_2 - 2 \cdot N_3 - 2 \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A = 0 \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)–(3), получим:

$$N_1 = \frac{1}{2+3\sqrt{3}} \cdot \left[(2-\sqrt{3})F + 2\sqrt{3} \cdot \alpha \Delta t E A \right]$$

$$N_2 = \frac{2}{2+3\sqrt{3}} \cdot \left[(2+\sqrt{3})F + \sqrt{3} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \right]$$

$$N_3 = \frac{2}{2+3\sqrt{3}} \left[2 \cdot F - \alpha \Delta t E A \right]$$

Статическая проверка:

$b \triangleq \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A$;

$c \triangleq 2+3\sqrt{3}$;

$$(1):\quad F + N_1 - N_2 = \frac{c}{c}F + \frac{1}{c}\left[(2-\sqrt{3})F + 2\sqrt{3}\,b\right] - \frac{2}{c}\left[(2+\sqrt{3})F + \sqrt{3}\,b\right] =$$

$$= \frac{1}{c}\left[F \cdot (\cancel{2} + 3\sqrt{3} + \cancel{2} - \sqrt{3} - \cancel{4} + 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}\,b - 2\sqrt{3} \cdot b\right] = 0 \quad ✓$$

$$(2):\quad N_2 + \sqrt{3} \cdot N_3 - 2F = \frac{2}{c}\left[(2+\sqrt{3})F + \sqrt{3} \cdot b\right] + \frac{2}{c}\left[2\sqrt{3}F - \sqrt{3} \cdot b\right] - 2F\frac{c}{c} =$$

$$= \frac{2}{c} \cdot \left[F(\cancel{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \cancel{2} - 3\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot b - \sqrt{3}\,b\right] = 0 \quad ✓$$

$$(3):\quad 2N_1 + N_2 - 2N_3 - 2b = \frac{2}{c}\left[(2-\sqrt{3})F + 2\sqrt{3} \cdot b\right] + \frac{2}{c}\left[(2+\sqrt{3})F + \sqrt{3}\,b\right] -$$

$$- \frac{2}{c}\left[4 \cdot F - 2 \cdot b\right] - 2b\frac{c}{c} = \frac{2}{c}\Big[F(\cancel{2} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{2} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{4}) +$$

$$+ b(2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \cancel{2} - \cancel{2} - 3\sqrt{3})\Big] = 0 \quad ✓$$