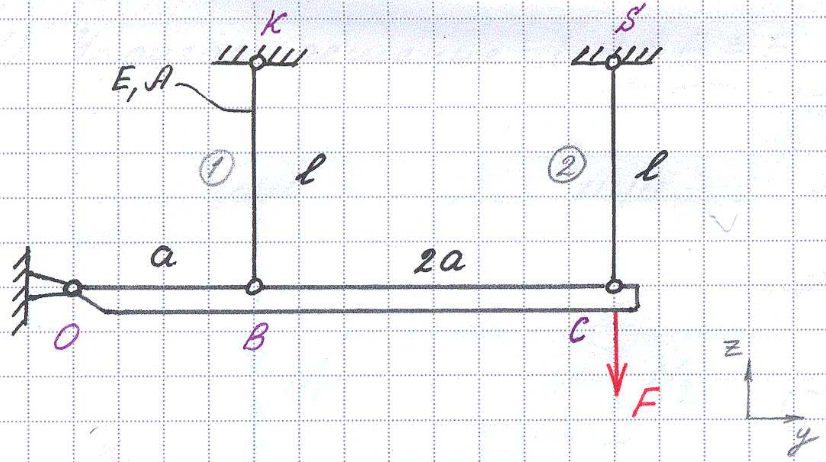


Дано: $l = 1$ м

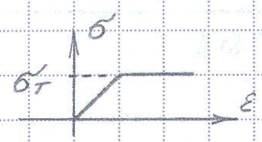
$A = 4{,}5$ см^2

$\sigma_T = 200$ МПа

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа

$F^* = \frac{9}{10} F_{пр}$

Материал стержней – идеальный упруго-пластичный:



Определить:

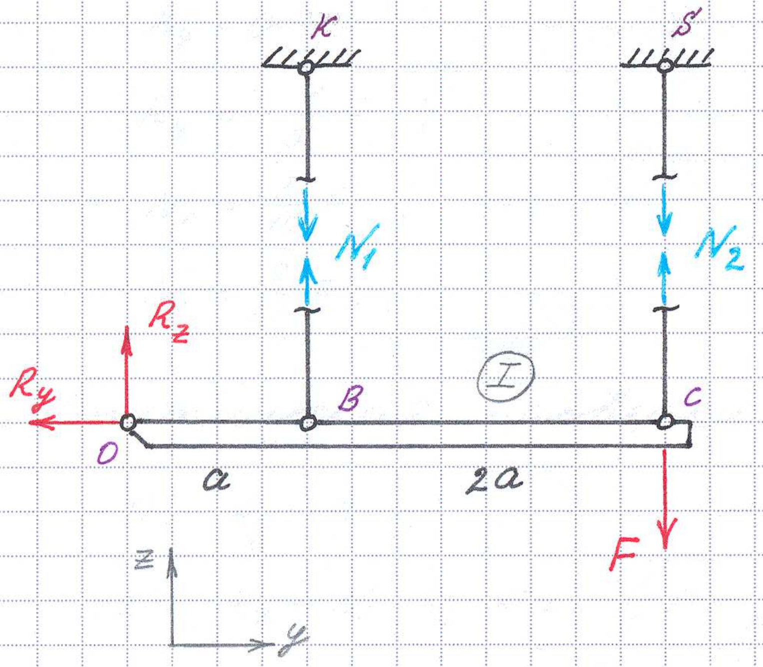
1) Значение силы F, при которой в конструкции появятся первые пластические деформации: F_T;

2) Предельное значение силы F, при котором конструкция потеряет несущую способность: $F_{пр}$;

3) Остаточные усилия в стержнях $N_i^{ост}$ при нагружении системы силой $F = F^*$ и последующей разгрузке (аналитически и графически);

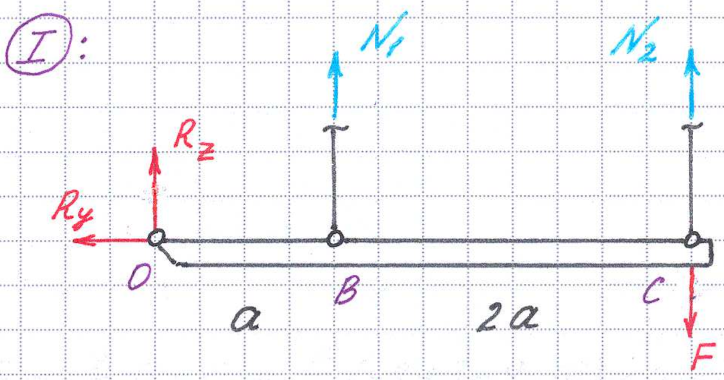
4) Остаточное перемещение точки C: W_C (аналитически и графически).

1) Упругое решение $(0 \le F \le F_T)$:



Уравнения статического равновесия:

I:



$$\sum F_y = 0 = -R_y \qquad (1)$$

$$\sum F_z = 0 = R_z + N_1 + N_2 - F \qquad (2)$$

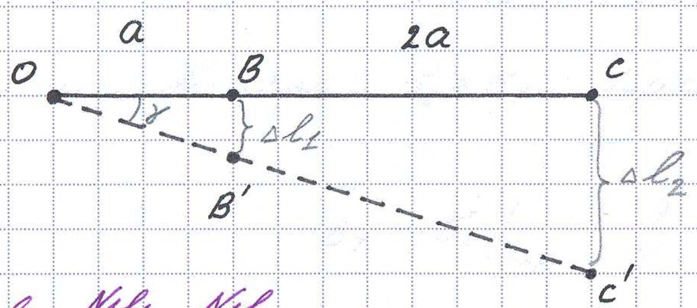
$$\sum M_0 = 0 = N_1 a + N_2 \cdot 3a - F \cdot 3a$$

$$N_1 + 3N_2 - 3F = 0 \qquad (3)$$

Четверо неизвестных (R_y, R_z, N_1 и N_2) и три уравнения статики. Степень статической неопределимости:

$$n = 4 - 3 = 1.$$

Уравнение совместности деформаций:



$$tg\gamma = \frac{\overset{\text{"}\Delta l_2\text{"}}{CC'}}{3a} = \frac{\overset{\text{"}\Delta l_1\text{"}}{BB'}}{a}$$

$$3\Delta l_1 - \Delta l_2 = 0$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_1 l}{EA}$$

$$3\frac{N_1 \cancel{l}}{\cancel{EA}} - \frac{N_2 \cancel{l}}{\cancel{EA}} = 0$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{N_2 l}{EA}$$

$$3N_1 - N_2 = 0 \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1)..(4), получим:

$$R_y = 0 \;;$$

$$R_z = -\frac{1}{5}F \;;$$

$$N_1 = \frac{3}{10}F \;;$$

$$N_2 = \frac{9}{10}F \;.$$

Статическая проверка:

(1): $R_y = 0$; ✓

(2): $R_z + N_1 + N_2 - F = -\frac{1}{5}F + \frac{3}{10}F + \frac{9}{10}F - F = \frac{F}{10}(-2+3+9-10) = 0$; ✓

(3): $N_1 + 3N_2 - F\cdot 3 = \frac{3}{10}F + 3\cdot\frac{9}{10}F - 3F = \frac{F}{10}(3+27-30) = 0$; ✓

(4): $3N_1 - N_2 = 3\cdot\frac{3}{10}F - \frac{9}{10}F = 0$. ✓

Напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{A} = \frac{3}{10}\cdot\frac{F}{A} \;;$$

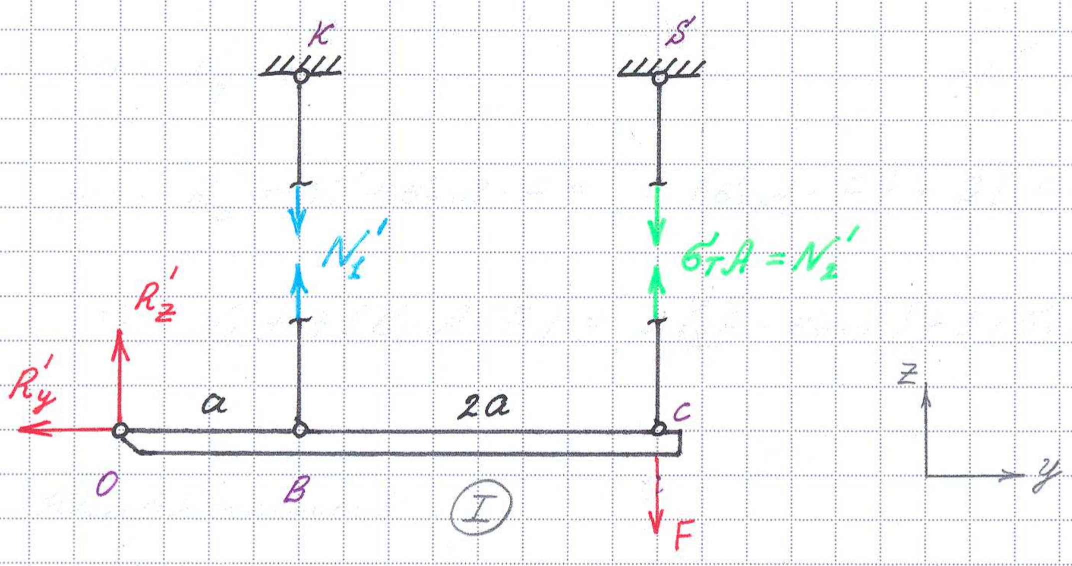
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{A} = \frac{9}{10}\cdot\frac{F}{A} \;.$$

Наиболее нагруженным является второй участок $\left(\frac{|\sigma_2|}{\sigma_T} > \frac{|\sigma_1|}{\sigma_T}\right)$.
Значит, первые пластические деформации появятся именно в нём: $\sigma_2 = \sigma_T$. Произойдёт это при $F = F_T$:

$$\sigma_T = \sigma_2\Big|_{F=F_T} = \frac{9}{10}\cdot\frac{F_T}{A}$$

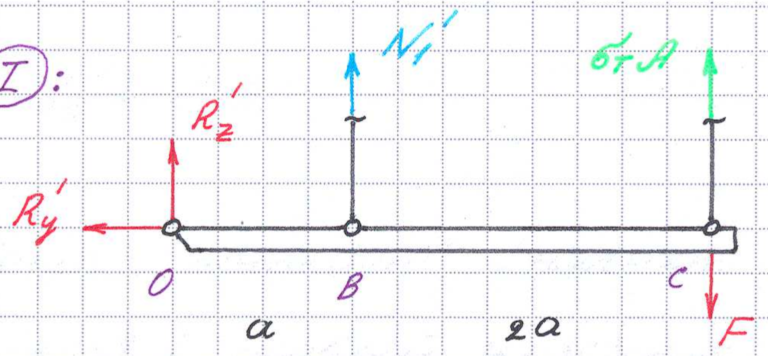
$$\boxed{F_T = \frac{10}{9}\,\sigma_T A}$$

2) Упруго-пластическое решение ($F_T \le F \le F_{пр}$):



Уравнения статического равновесия:

(I):



$$\sum F_y = 0 = -R_y' \quad (1')$$

$$\sum F_z = 0 = R_z' + N_1' + \sigma_T A - F \quad (2')$$

$$\sum M_0 = 0 = N_1' \cdot a + \sigma_T A \cdot 3a - F \cdot 3a$$

$$N_1' + 3(\sigma_T A - F) = 0 \quad (3')$$

Трое неизвестных (R_y', R_z', N_1') и три уравнения. Степень статической неопределимости:

$$n = 3 - 3 = 0$$

Задача статически определима => это последняя стадия.

Решая совместно уравнения (1)...(3), получим:

$$R_y' = 0 \; ; \quad R_z' = 2(\sigma_T A - F) \; ; \quad N_1' = 3(F - \sigma_T A).$$

Статическая проверка:

$(1): \ R_y' = 0$ $\quad\checkmark$

$(2): \ R_z' + N_1' + \sigma_T \cdot A - F = 2(\sigma_T A - F) + 3(F - \sigma_T A) + \sigma_T A - F = 0$ $\quad\checkmark$

$(3): \ N_1' + 3(\sigma_T A - F) = 3(F - \sigma_T A) + 3(\sigma_T A - F) = 0$ $\quad\checkmark$

Напряжения:

$$\sigma_1' = \frac{N_1'}{A_1} = \frac{N_1'}{A} = \frac{3(F - \sigma_T A)}{A}$$

$$\sigma_2' = \sigma_T$$

Когда „потечёт" (начнёт пластически деформироваться) первый участок, точка приложения силы (т. C) утратит последнюю упругую связь с опорами и конструкция потеряет несущую способность. Произойдёт это при $F = F_{пр}$:

$$\sigma_T = \sigma_1' \Big|_{F = F_{пр}} = \frac{3(F_{пр} - \sigma_T A)}{A}$$

$$\boxed{F_{пр} = \frac{12}{9}\,\sigma_T A}$$

Строим графики зависимости нормальных усилий в стержнях от приложенной нагрузки:

$$F = 0: \quad N_1 = 0$$
$$N_2 = 0$$

$$F = F_т = \frac{10}{9}\sigma_т A: \quad \begin{cases} N_1 = \frac{3}{10}F = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}\sigma_т A = \frac{1}{3}\sigma_т A; \\ N_2 = \frac{9}{10}F = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}\sigma_т A = \sigma_т A. \end{cases}$$

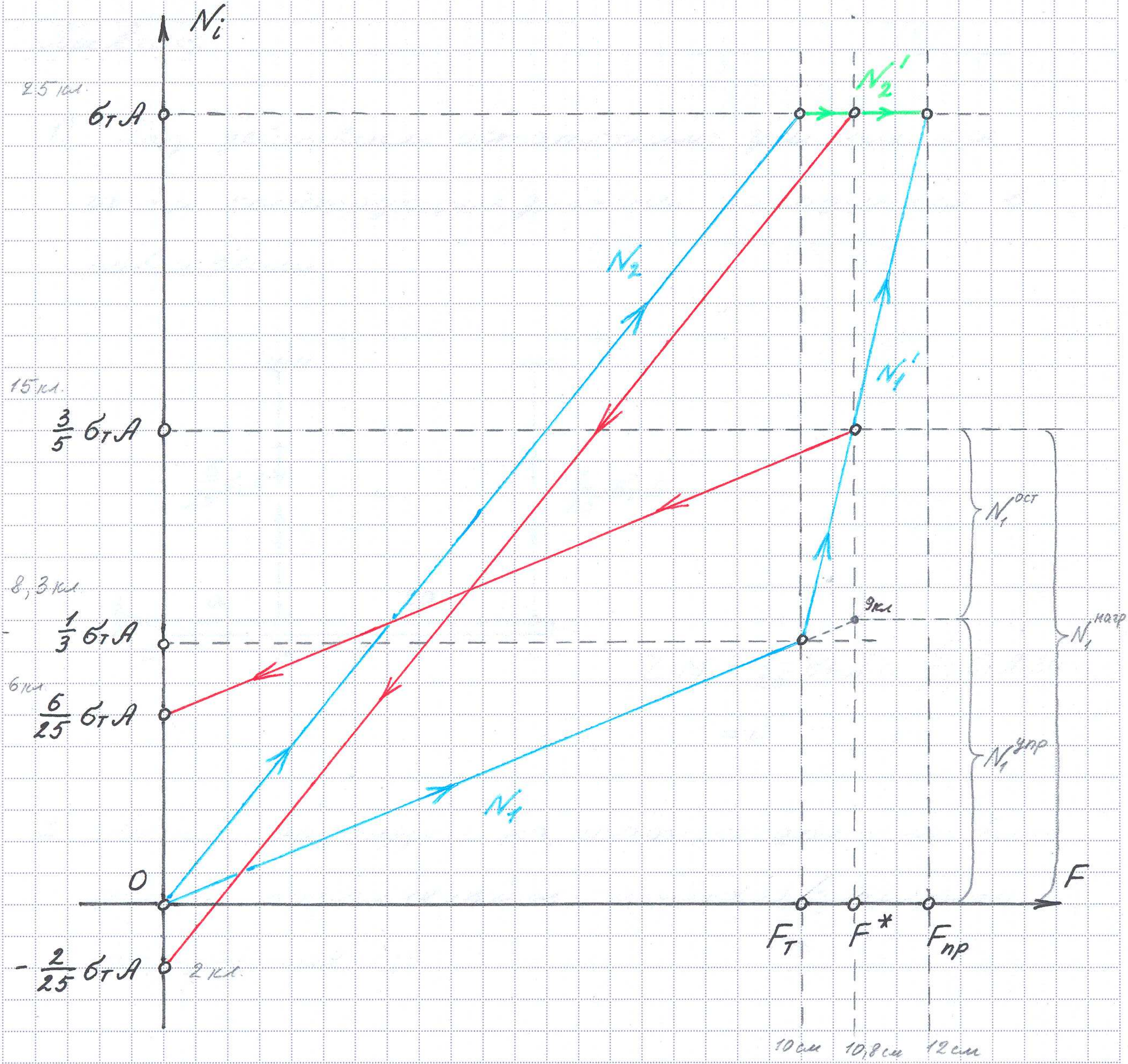
$$\begin{cases} N_1' = 3(F - \sigma_т A) = 3\left(\frac{10}{9}\sigma_т A - \sigma_т A\right) = \\ \quad = \frac{1}{3}\sigma_т A(10-9) = \frac{1}{3}\sigma_т A = N_1; \\ N_2' = \sigma_т A \end{cases}$$

$$F = F_{пр} = \frac{12}{9}\sigma_т A: \quad N_1' = 3(F - \sigma_т A) = 3\left(\frac{12}{9}\sigma_т A - \frac{9}{9}\sigma_т A\right) =$$
$$= \sigma_т A$$
$$N_2' = \sigma_т A$$

$$F = F^* = \frac{9}{10}F_{пр} = \frac{6}{5}\sigma_т A: \quad N_1' = 3(F - \sigma_т A) = 3\left(\frac{6}{5}\sigma_т A - \frac{5}{5}\sigma_т A\right) =$$

$$F_т < F^* < F_{пр} \qquad = \frac{3}{5}\sigma_т A \stackrel{\Delta}{=} N_1^{нагр};$$

$$N_2' = \sigma_т A \stackrel{\Delta}{=} N_2^{нагр};$$



Остаточные усилия при нагружении системы силой F^* и последующей разгрузке:

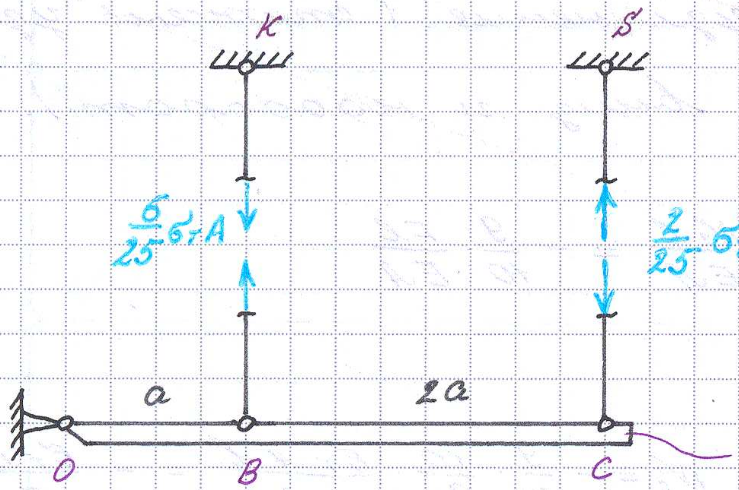
$$N_1^{упр} = N_1(F^*) = \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{5}\sigma_T A = \frac{9}{25}\sigma_T A; \quad N_2^{упр} = N_2(F^*) = \frac{27}{25}\sigma_T A.$$

$$N_1^{ост} = N_1^{нагр} - N_1^{упр} = \frac{3}{5}\sigma_T A - \frac{9}{25}\sigma_T A = \frac{6}{25}\sigma_T A;$$

$$N_2^{ост} = N_2^{нагр} - N_2^{упр} = \sigma_T A - \frac{27}{25}\sigma_T A = -\frac{2}{25}\sigma_T A.$$

Проверка:

1) Под действием остаточных усилий все части конструкции должны находиться в равновесии:



$$\sum M_0 = \frac{6}{25}\sigma_T A \cdot a - \frac{2}{25}\sigma_T A \cdot 3a = 0$$ ✓

2) Линии разгрузки на графике должны быть строго параллельны линиям упругого нагружения. ✓

Числовые значения силы F^* и остаточных усилий:

$$F^* = \frac{6}{5}\sigma_T A = \frac{6}{5}\cdot 200\cdot 10^6 \cdot 4{,}5\cdot 10^{-4} = 108000\,H = 108\,кH$$

$$N_1^{ост} = \frac{6}{25}\sigma_T A = \frac{6}{25}\cdot 200\cdot 10^6\cdot 4{,}5\cdot 10^{-4} = 21600\,H = 21{,}6\,кH$$

$$N_2^{ост} = -\frac{2}{25}\sigma_T A = -\frac{2}{25}\cdot 200\cdot 10^6\cdot 4{,}5\cdot 10^{-4} = -7200\,H = -7{,}2\,кH$$

Остаточное перемещение точки С:

1) Упругое решение:

Пока участок ② не потёк, вертикальное перемещение точки С можно вычислить, как его отрицательное удлинение (стержень удлиняется - точка С идёт вниз и наоборот):

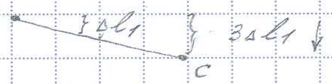
$$W_C = -\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = -\frac{N_2 l}{EA} = -\frac{9}{10}\frac{Fl}{EA}$$

$$F = 0 : \quad W_c = 0$$

$$F = F_T = \frac{10}{9}\sigma_T A : \quad W_c = -\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{\sigma_T A l}{A} = -\frac{\sigma_T l}{E}$$

2) Упруго-пластическое решение:

Участок ② течёт, закон Гука в нём уже не соблюдается и формула $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$ уже не действует. Перемещение точки С вычисляем через удлинение ещё не потёкшего участка ①:

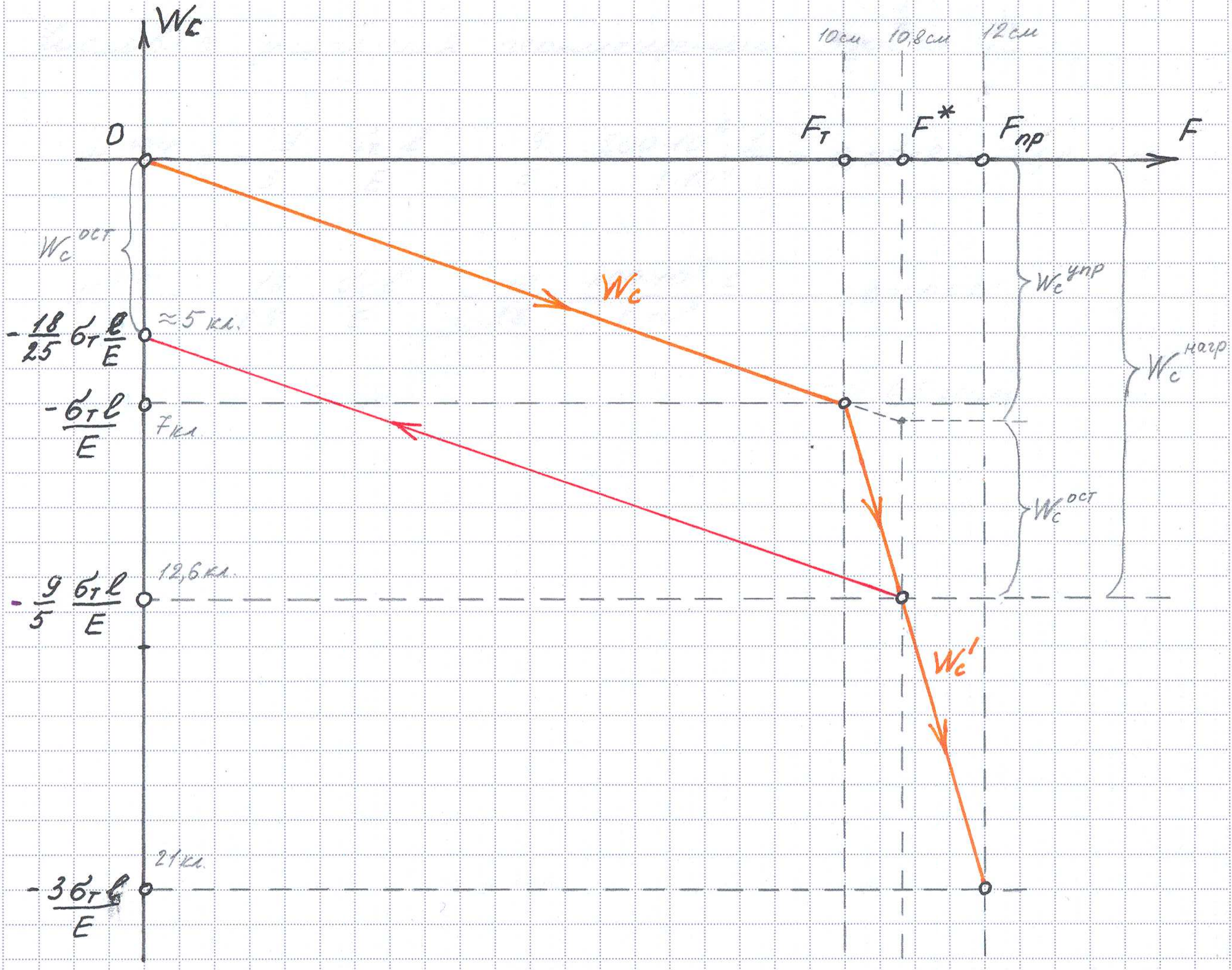


$$W_c' = -3\Delta l_1' = -3\frac{N_1' l_1}{E_1 A_1} = -3\cdot 3\frac{(F - \sigma_T A)l}{EA} = -\frac{9l}{EA}\cdot(F - \sigma_T A)$$

$$F = F_T = \frac{10}{9}\sigma_T A : \quad W_c' = -\frac{9l}{EA}\cdot\left(\frac{10}{9}\sigma_T A - \sigma_T A\right) =$$

$$= -\frac{\sigma_T l}{E}(10 - 9) = -\frac{\sigma_T l}{E} = W_c ;$$

$$F = F_{пр} = \frac{12}{9}\sigma_T A : \quad W_c' = -\frac{9l}{EA}\left(\frac{12}{9}\sigma_T A - \sigma_T A\right) = -3\frac{\sigma_T \cdot l}{E} .$$



Сила F^* соответствует области упруго-пластического решения ($F_т < F^* < F_{пр}$), значит, для вычисления $W_c^{нагр}$ используем формулу W_c':

$$W_c^{нагр} = W_c'(F^*) = -\frac{9l}{EA}\left(F^* - \sigma_т A\right) = -\frac{9l}{EA}\left(\frac{6}{5}\sigma_т A - \sigma_т A\right) = -\frac{9}{5}\cdot\frac{\sigma_т l}{E};$$

$$W_c^{упр} = W_c(F^*) = -\frac{9}{10}\cdot\frac{F^* l}{EA} = \frac{-9}{10}\cdot\frac{6}{5}\,\frac{\sigma_т A l}{EA} = -\frac{27}{25}\cdot\frac{\sigma_т l}{E};$$

$$W_c^{ост} = W_c^{нагр} - W_c^{упр} = -\frac{9}{5}\cdot\frac{\sigma_т l}{E} + \frac{27}{25}\cdot\frac{\sigma_т l}{E} = -\frac{18}{25}\cdot\frac{\sigma_т l}{E}.$$

Числовые значения перемещений точки C:

$$W_C^{нагр} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{\sigma_T \cdot l}{E} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11}} = -0{,}0018\ м = -1{,}8\ мм$$

$$W_C^{ост} = -\frac{18}{25} \cdot \frac{\sigma_T l}{E} = -\frac{18}{25} \cdot \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11}} = -0{,}0000576\ м =$$

$$\approx -0{,}06\ мм$$