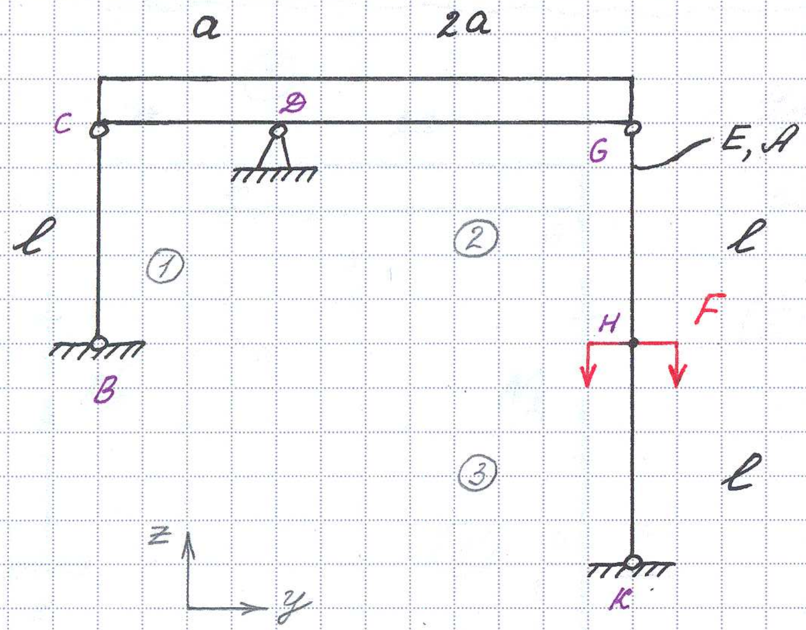


Дано: $l = 50$ см

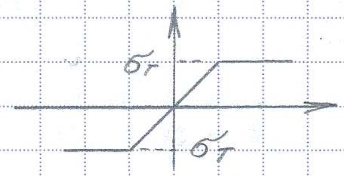
$A = 1$ см^2

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа

$\sigma_т = 300$ МПа

$F^* = \frac{27}{20} \sigma_т A$

Материал стержней: идеальный упруго-пластичный:



Определить:

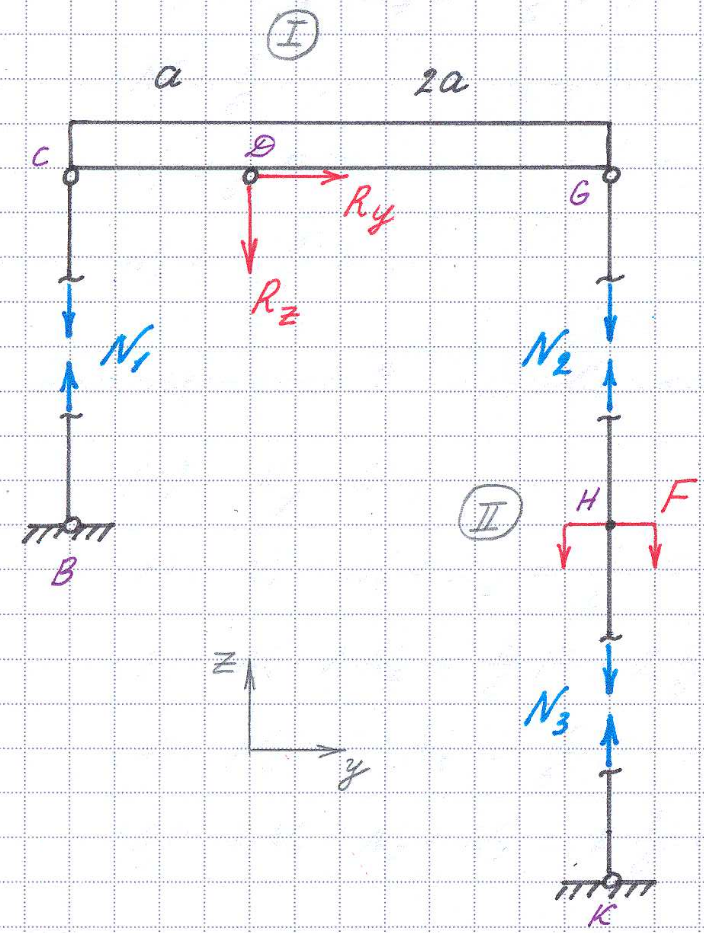
1) Значение силы F, при которой в конструкции появятся первые пластические деформации: $F_т$;

2) Предельное значение силы F, при котором конструкция потеряет несущую способность: $F_{пр}$;

3) Остаточные усилия в стержнях N_i при нагружении системы силой $F = F^*$ и последующей разгрузке (аналитически и графически);

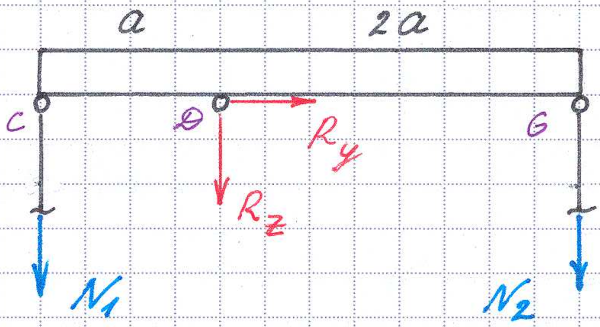
4) Остаточное перемещение сечения H: W_H (аналитически и графически);

1) Упругое решение ($0 \le F \le F_T$):



Уравнения статического равновесия:

I:



$$\sum F_y = 0 = R_y \qquad (1)$$

$$\sum F_z = 0 = -R_z - N_1 - N_2$$

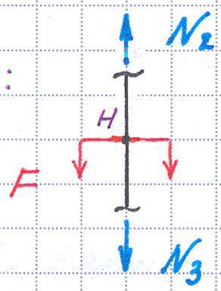
$$N_1 + N_2 + R_z = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_D = 0 = N_1 \cdot a - N_2 \cdot 2a$$

$$N_1 - 2N_2 = 0 \qquad (3)$$

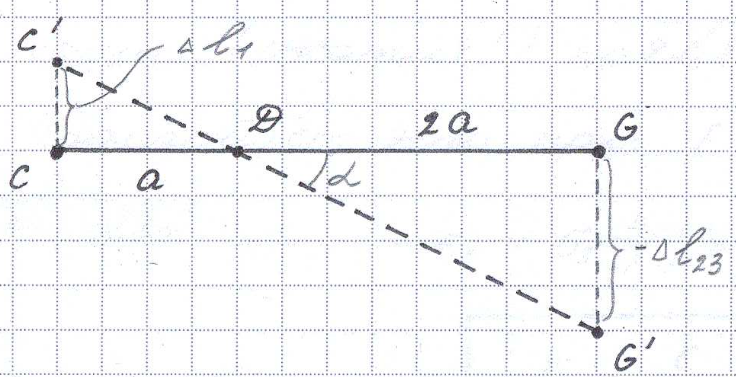
Неизвестных - пять ($N_1 - N_3$, R_y, R_z), уравнений статики - четыре. Степень статической неопределимости: $n = 5 - 4 = 1$

II:



$$\sum F_z = 0 = N_2 - F - N_3 \qquad (4)$$

Уравнение совместности деформаций:



$$tg\,\gamma = \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{-\Delta l_{23}}{2a}$$

$$2\Delta l_1 + \Delta l_{23} = 0$$

$$2\frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA} + \frac{N_3 l}{EA} = 0$$

$$2N_1 + N_2 + N_3 = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1)-(5), получим:

$$R_y = 0; \quad R_z = -\frac{3}{6}F;$$

$$N_1 = \frac{2}{6}F;$$

$$N_2 = \frac{1}{6}F;$$

$$N_3 = -\frac{5}{6}F.$$

Статическая проверка:

$$(1):\ R_y = 0; \qquad V$$

$$(2):\ N_1 + N_2 + R_z = \frac{2}{6}F + \frac{1}{6}F - \frac{1}{2}F = 0; \qquad V$$

$$(3):\ N_1 - 2\cdot N_2 = \frac{2}{6}F - 2\frac{1}{6}F = 0; \qquad V$$

$$(4):\ N_2 - F - N_3 = \frac{1}{6}F - F + \frac{5}{6}F = 0; \qquad V$$

$$(5):\ 2N_1 + N_2 + N_3 = 2\frac{2}{6}F + \frac{1}{6}F - \frac{5}{6}F = 0. \qquad V$$

Напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{A} = \frac{2}{6}\cdot\frac{F}{A};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{A} = \frac{1}{6}\cdot\frac{F}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{A} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{F}{A}.$$

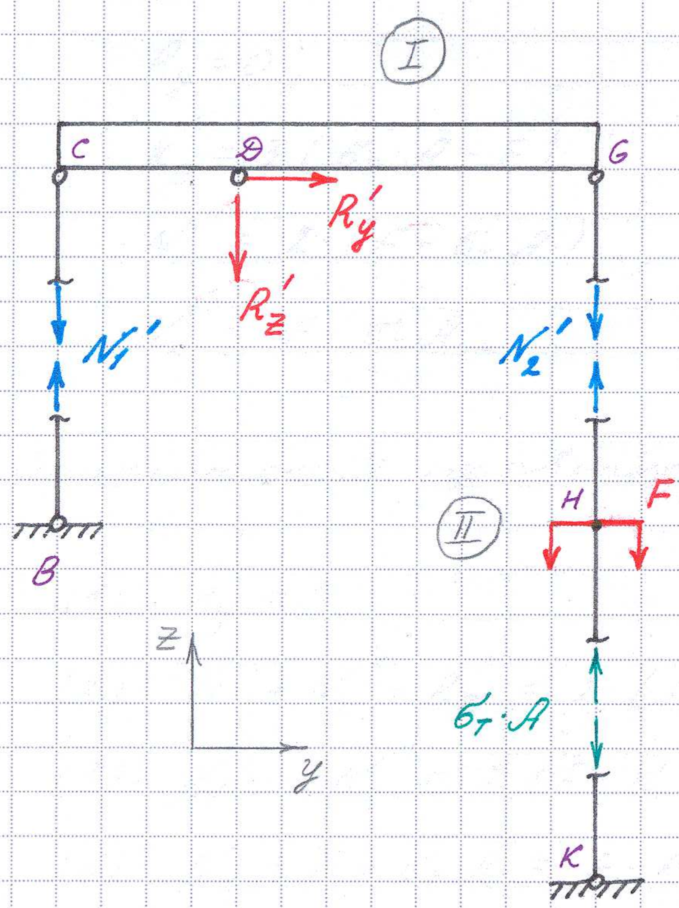
Наиболее нагруженным является третий участок $\left(\frac{|\sigma_3|}{\sigma_T} > \frac{|\sigma_1|}{\sigma_T} > \frac{|\sigma_2|}{\sigma_T}\right)$. Значит, первые пластические деформации (сжатия!) появятся именно в нём: $\sigma_3 = -\sigma_T$.

Произойдёт это при $F = F_T$:

$$-\sigma_T = \sigma_3\big|_{F=F_T} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{F_T}{A}$$

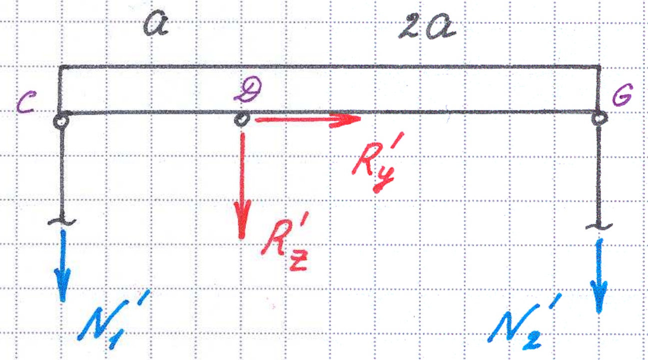
$$\boxed{F_T = \frac{6}{5}\cdot\sigma_T\cdot A}$$

2) Упруго-пластическое решение ($F_T \le F \le F_{пр}$):



Уравнения статического равновесия:

I:



$$\sum F_y = 0 = R_y' \qquad (1')$$

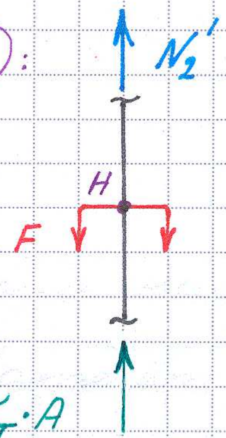
$$\sum F_z = 0 = -N_1' - R_z' - N_2'$$

$$N_1' + N_2' + R_z' = 0 \qquad (2')$$

$$\sum M_D = 0 = N_1' a - N_2' \cdot 2a$$

$$N_1' - 2N_2' = 0 \qquad (3')$$

II:



$$\sum F_z = 0 =$$

$$= N_2' - F + \sigma_T \cdot A \qquad (4')$$

Неизвестных – четыре (R_y', R_z', N_1' и N_2'), уравнений – четыре. Степень статической неопределимости:

$$n = 4 - 4 = 0$$

Система статически определима $\Rightarrow$ это последняя стадия.

Решая систему уравнений (1')...(4'), получим:

$R_y' = 0$;

$R_z' = 3(\sigma_т \cdot A - F)$;

$N_1' = 2 \cdot (F - \sigma_т A)$; $\qquad N_3' = -\sigma_т A$

$N_2' = F - \sigma_т A$.

Статическая проверка:

(1'): $R_y' = 0$ $\qquad$ V

(2'): $N_1' + N_2' + R_z' = 2 \cdot (F - \sigma_т A) + (F - \sigma_т A) - 3(F - \sigma_т A) = 0$ $\qquad$ V

(3'): $N_1' - 2N_2' = 2(F - \sigma_т A) - 2 \cdot (F - \sigma_т A) = 0$ $\qquad$ V

(4'): $N_2' - F + \sigma_т A = F - \sigma_т A - F + \sigma_т A = 0$ $\qquad$ V

Напряжения:

$$\sigma_1' = \frac{N_1'}{A_1} = \frac{N_1'}{A} = \frac{2(F - \sigma_т A)}{A} \qquad \left(F > F_т = \frac{6}{5}\sigma_т A \Rightarrow \sigma_1' > 0\right)$$

$$\sigma_2' = \frac{N_2'}{A_2} = \frac{N_2'}{A} = \frac{F - \sigma_т \cdot A}{A}$$

Напряжение σ_1' вдвое больше напряжения σ_2'.

Значит, первым из них (двух) потечёт участок 1: $\sigma_1' = \sigma_т$.

Произойдёт это при $F = F_{пр}$:

$$\sigma_т = \sigma_1' \Big|_{F = F_{пр}} = \frac{2(F_{пр} - \sigma_т A)}{A}$$

$$\boxed{F_{пр} = \frac{3}{2}\sigma_т \cdot A}$$

Задача ре-ше-на!

Строим графики зависимости нормальных усилий в стержнях от приложенной нагрузки:

$$F=0: \quad N_1=N_2=N_3=0$$

$$F=F_T=\frac{6}{5}\sigma_T A: \begin{cases} N_1=\frac{2}{6}F=\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{5}\sigma_T A=\frac{2}{5}\sigma_T A; \\ N_2=\frac{1}{6}F=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sigma_T A=\frac{1}{5}\sigma_T A; \\ N_3=-\frac{5}{6}F=-\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sigma_T A=-\sigma_T A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1'=2(F-\sigma_T A)=2\left(\frac{6}{5}\sigma_T A-\sigma_T A\right)=\frac{2}{5}\sigma_T A; \\ N_2'=F-\sigma_T A=\frac{6}{5}\sigma_T A-\sigma_T A=\frac{1}{5}\sigma_T A; \\ N_3'=-\sigma_T A. \end{cases}$$

$$F=F_{np}=\frac{3}{2}\sigma_T A: \quad N_1'=2(F-\sigma_T A)=2\left(\frac{3}{2}\sigma_T A-\sigma_T A\right)=\sigma_T A;$$

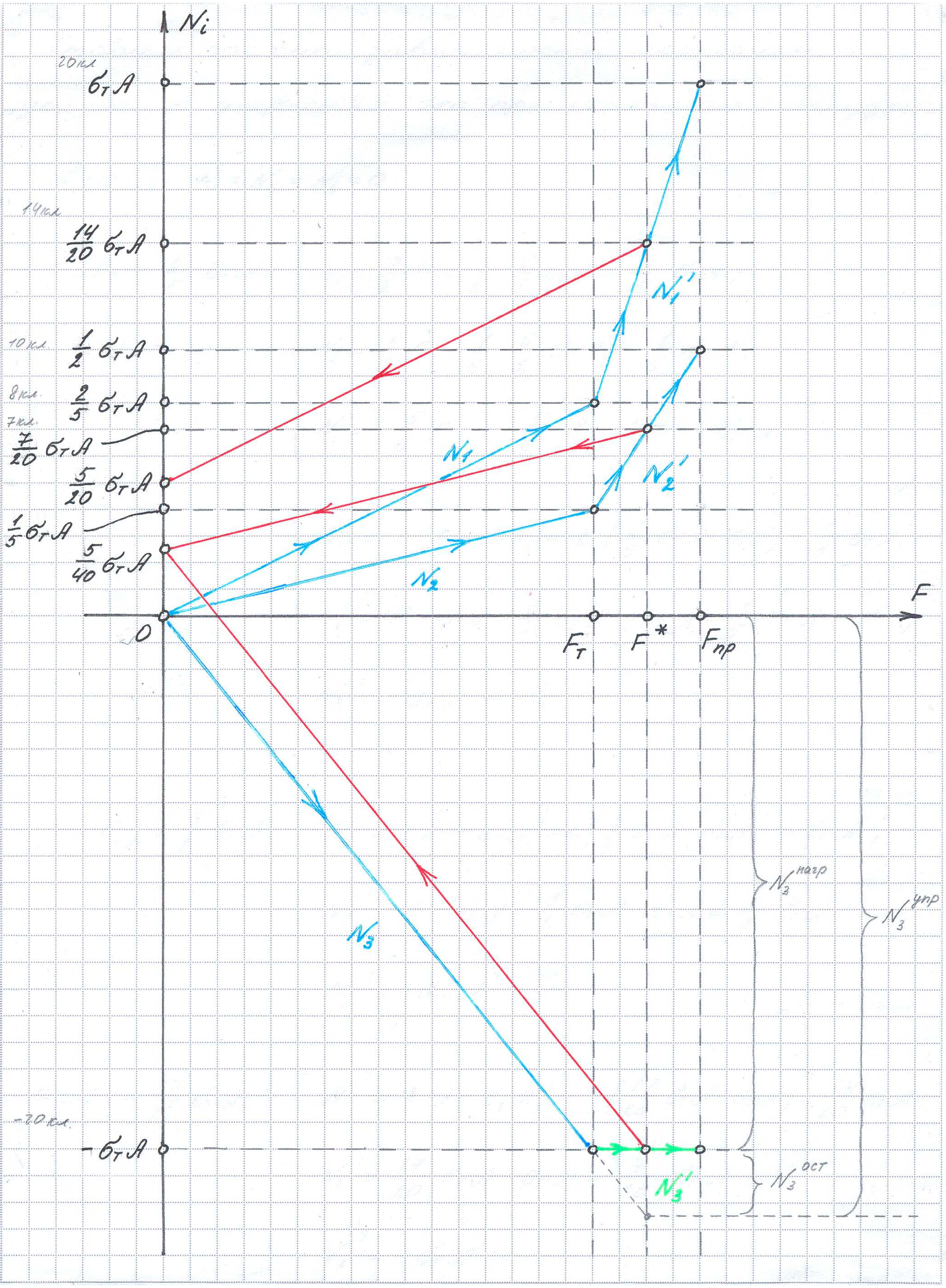
$$N_2'=F-\sigma_T A=\frac{3}{2}\sigma_T A-\sigma_T A=\frac{1}{2}\sigma_T A;$$

$$N_3'=-\sigma_T A.$$

$$F=F^*=\frac{27}{20}\sigma_T A: \quad N_1'=2(F-\sigma_T A)=2\left(\frac{27}{20}\sigma_T A-\sigma_T A\right)=\frac{14}{20}\sigma_T A \triangleq N_1^{нагр};$$

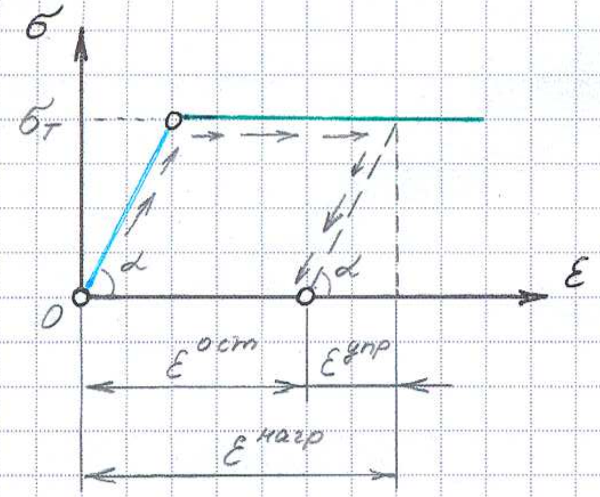
$$N_2'=\frac{27}{20}\sigma_T A-\sigma_T A=\frac{7}{20}\sigma_T A\triangleq N_2^{нагр};$$

$$N_3'=-\sigma_T A\triangleq N_3^{нагр};$$



Ni
20кл
σт A
14кл
14/20 σт A
10кл
1/2 σт A
8кл
2/5 σт A
7кл
7/20 σт A
5/20 σт A
1/5 σт A
5/40 σт A
N1
N1'
N2
N2'
N3
N3'
F
0
Fт
F*
Fпр
-20кл
− σт A
N3 нагр
N3 упр
N3 ост

Закон разгрузки



$$\varepsilon^{нагр} = \varepsilon^{упр} + \varepsilon^{ост}$$

$$\varepsilon^{ост} = \varepsilon^{нагр} - \varepsilon^{упр}$$

универсален: любой параметр упруго-пластической системы состоит из двух составляющих - упругой и пластической. При разгрузке исчезает только упругая составляющая.

В нашем случае при нагружении системы силой F^* и последующей разгрузке:

$$N_1^{упр} = N_1(F^*) = \frac{2}{6}F^* = \frac{2}{6}\cdot\frac{27}{20}б_т A = \frac{18}{40}б_т A$$

$$N_2^{упр} = N_2(F^*) = \frac{1}{6}F^* = \frac{1}{6}\frac{27}{20}б_т A = \frac{9}{40}б_т A$$

$$N_3^{упр} = N_3(F^*) = -\frac{5}{6}F^* = -\frac{5}{6}\cdot\frac{27}{20}\cdot б_т\cdot A = -\frac{45}{40}б_т A$$

5кл

$$N_1^{ост} = N_1^{нагр} - N_1^{упр} = \frac{14}{20}б_т A - \frac{18}{40}б_т A = \frac{10}{40}б_т A = \frac{5}{20}б_т A$$

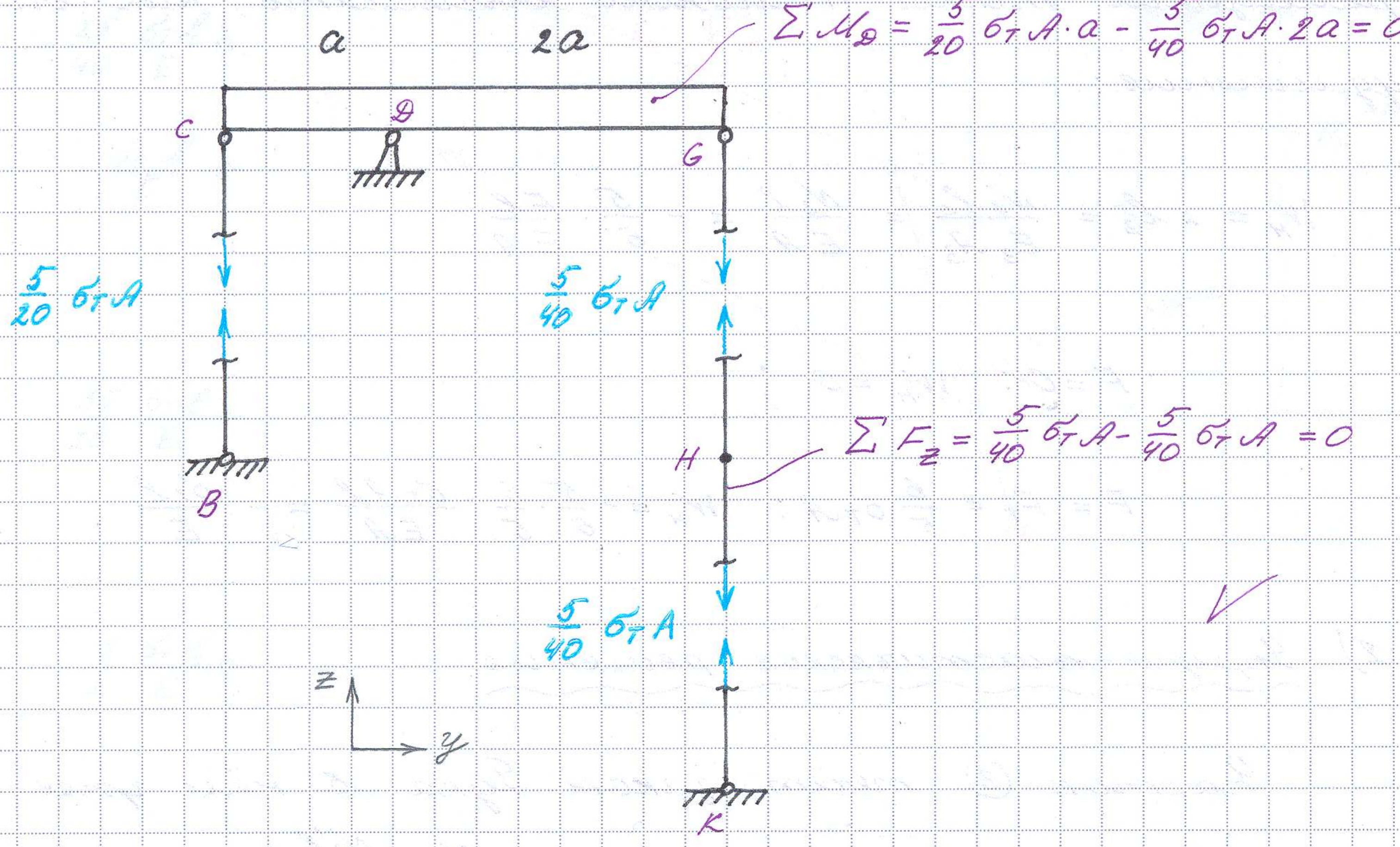
2,5кл

$$N_2^{ост} = N_2^{нагр} - N_2^{упр} = \frac{7}{20}б_т A - \frac{9}{40}б_т A = \frac{5}{40}б_т A = \frac{2,5}{20}б_т A$$

2,5кл

$$N_3^{ост} = N_3^{нагр} - N_3^{упр} = -б_т\cdot A + \frac{45}{40}б_т A = \frac{5}{40}б_т A = \frac{2,5}{20}б_т A$$

Проверка: 1) под действием остаточных усилий все части конструкции должны находиться в равновесии:



2) Линия разгрузки должна идти строго параллельно упругому участку.

Числовые значения остаточных усилий:

$$N_1^{ост} = \frac{5}{20}\sigma_T A = \frac{5}{20}\,300\cdot10^{6}\cdot1\cdot10^{-4} = 7500\ H = 7{,}5\ кН$$

$$N_2^{ост} = \frac{5}{40}\sigma_T A = \frac{5}{40}\,300\cdot10^{6}\cdot1\cdot10^{-4} = 3750\ H = 3{,}75\ кН$$

$$N_3^{ост} = \frac{5}{40}\sigma_T A = 3{,}75\ кН$$

Остаточное перемещение точки H:

1) Упругое решение:

Пока участок ③ не потёк, вертикальное перемещение точки H можно вычислять, как его удлинение:

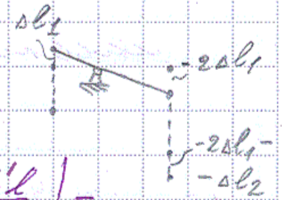
$$W_H = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} = \frac{N_3 l}{EA} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{Fl}{EA}$$

$$F = 0: \quad W_H = 0;$$

$$F = F_T = \frac{6}{5}\sigma_T A: \quad W_H = -\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{\sigma_T A l}{EA} = -\frac{\sigma_T l}{E}.$$

2) Упруго-пластическое решение:

Участок ③ течёт, закон Гука в нём уже не соблюдается и формула $\Delta l_3' = \frac{N_3' l}{EA}$ не действует. Перемещение точки H придётся вычислять через удлинения ещё не потёкших участков:

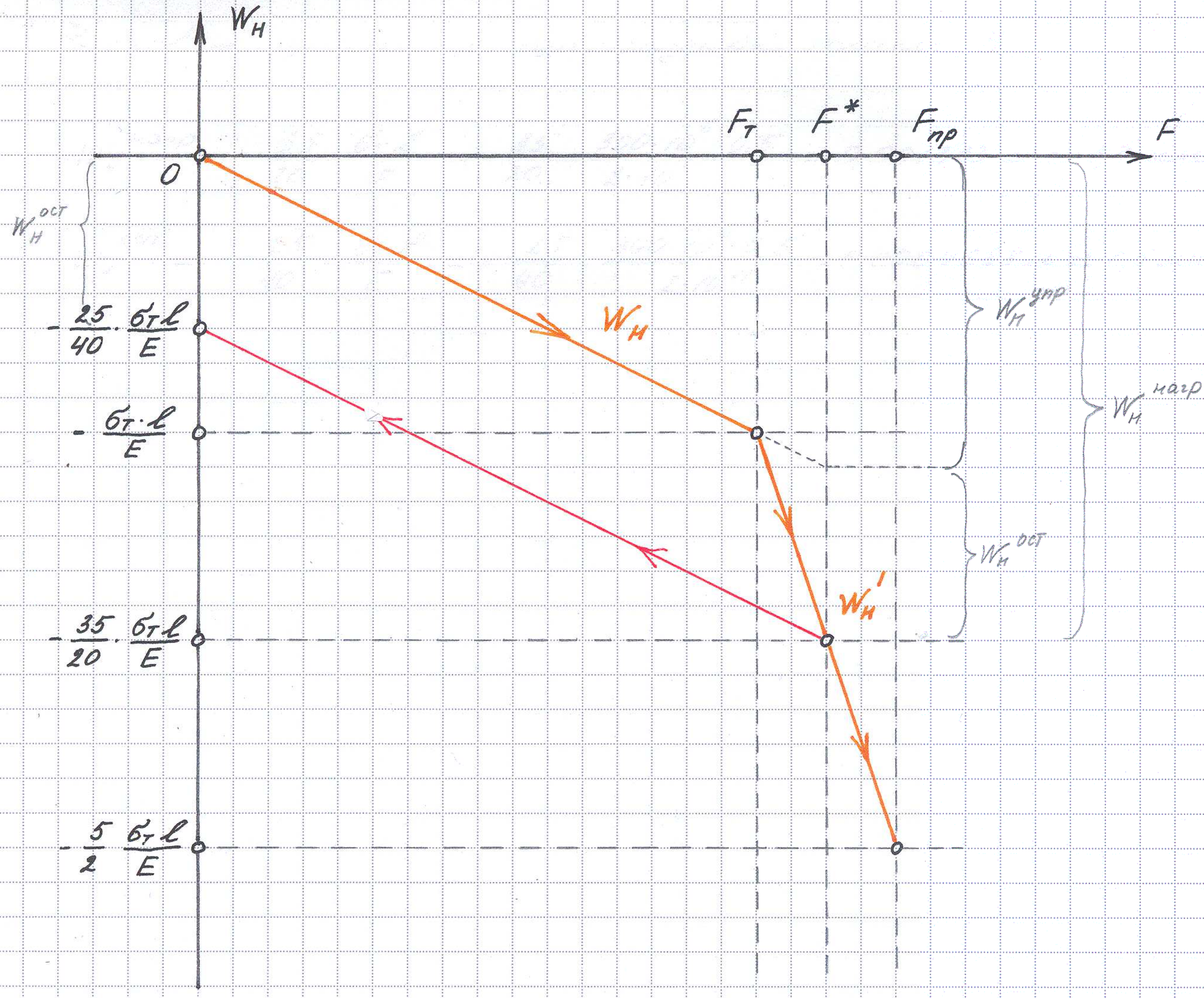


$$W_H' = -(2\Delta l_1 + \Delta l_2) = -\left(2\frac{N_1' l_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2' l_2}{E_2 A_2}\right) = -\left(2\frac{N_1' l}{EA} + \frac{N_2' l}{EA}\right) =$$

$$= -\left(2\,\frac{2(F-\sigma_T A)l}{EA} + \frac{(F-\sigma_T A)l}{EA}\right) = -\frac{5l}{EA}\cdot(F-\sigma_T A)$$

$$F = F_T = \frac{6}{5}\sigma_T A: \quad W_H' = -\frac{5l}{EA}\left(\frac{6}{5}\sigma_T A - \frac{5}{5}\sigma_T A\right) = \underbrace{-\frac{\sigma_T l}{E}}^{W_H\,!};$$

$$F = F_{пр} = \frac{3}{2}\sigma_T A: \quad W_H' = -\frac{5l}{EA}\cdot\left(\frac{3}{2}\sigma_T A - \frac{2}{2}\sigma_T A\right) = -\frac{5}{2}\,\frac{\sigma_T l}{E}.$$



Сила F^* соответствует области упруго-пластического решения ($F_т < F^* < F_{пр}$), значит:

$$W_н^{нагр} = W_н'(F^*) = -\frac{5(F^*-\sigma_т A)l}{EA} = -\frac{5l}{EA}\cdot\left(\frac{27}{20}\sigma_т A-\sigma_т A\right)=$$

$$= -\frac{35}{20}\cdot\frac{\sigma_т l}{E}$$ 14кл

$$W_н^{упр} = W_н(F^*) = -\frac{5}{6}\frac{F^* l}{EA} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{\sigma_т A l}{EA} = -\frac{45}{40}\frac{\sigma_т\cdot l}{E}$$

$$W_н^{ост} = W^{нагр} - W^{упр} = \frac{\sigma_т l}{E}\left(-\frac{35}{20}+\frac{45}{40}\right) = -\frac{25}{40}\frac{\sigma_т\cdot l}{E}$$

Числовые значения перемещений точки H:

$$W_H^{нагр} = -\frac{35}{20}\,\frac{\sigma_T l}{E} = -\frac{35}{20}\cdot\frac{300\cdot10^6\cdot0{,}5}{2\cdot10^{11}} = 0{,}001313\ м \approx 1{,}3\ мм$$

$$W_H^{ост} = -\frac{25}{40}\cdot\frac{\sigma_T\cdot l}{E} = -\frac{25}{40}\cdot\frac{300\cdot10^6\cdot0{,}5}{2\cdot10^{11}} = 0{,}0004688\ м \approx 0{,}5\ мм$$