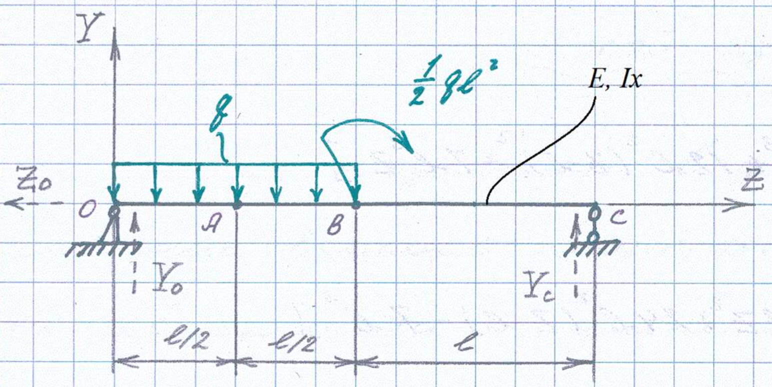
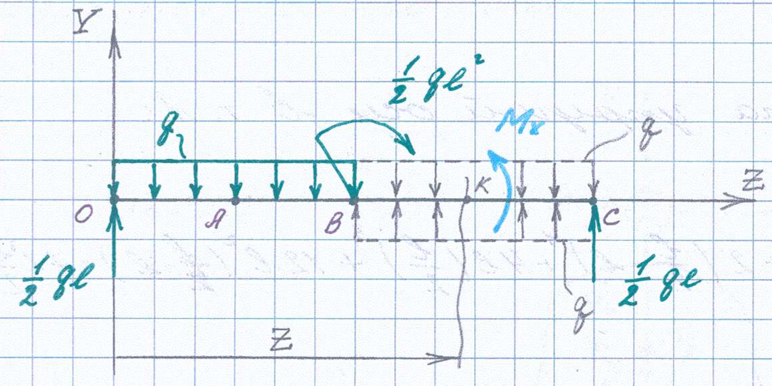




$y_A = ?$ $\theta_A = ?$

Уравнения равновесия стержня:

$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_0 = 0$

$\sum M_0 = 0 \Rightarrow Y_c = \frac{1}{2} ql$

$\sum M_c = 0 \Rightarrow Y_0 = \frac{1}{2} ql$

ДУ изогнутой оси:

$$EJ_x y'' = M_x(z) = \underbrace{-\frac{qz^2}{2}}_{q\ \text{верхнее}} + \underbrace{\frac{q(z-l)^2}{2}}_{q\ \text{нижнее}} + \underbrace{\frac{1}{2} ql\, z}_{\text{т.}O} + \underbrace{\frac{1}{2} ql^2 (z-l)^0}_{\text{т.}B}$$

Дважды интегрируем:

$$EJ_x y' = -\frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q(z-l)^3}{6} + \frac{qlz^2}{4} + \frac{ql^2(z-l)}{2} + C$$

$$EJ_x y = -\frac{qz^4}{24} + \frac{q(z-l)^4}{24} + \frac{qlz^3}{12} + \frac{ql^2(z-l)^2}{4} + C \cdot z + D$$

ГУ:

1) $z=0,\ y=0:$ $$0 = -\cancel{\frac{q0^4}{24}} - \overset{(<0)}{\frac{q(0-l)^4}{24}} + \cancel{\frac{ql0^3}{12}} + \overset{(<0)}{\frac{ql^2(0-l)^2}{4}} + C \cdot 0 + D$$

$D = 0$

2) $z=2l,\ y=0:$ $$0 = -\frac{q(2l)^4}{24} + \frac{q(2l-l)^4}{24} + \frac{ql(2l)^3}{12} + \frac{ql^2(z-l)^2}{4} + C \cdot 2l + \overset{0}{\cancel{D}}$$

$$C = -\frac{7}{48} ql^3$$

Окончательные формулы:

$$y = \frac{q}{48EJ_x}\left[-2\cdot z^4 + 2(z-l)^4 + 4lz^3 + 12l^2(z-l)^2 - 7l^3 z\right]$$

$$y' = \frac{q}{48EJ_x}\left[-8\cdot z^3 + 8\cdot(z-l)^3 + 12lz^2 + 24l^2(z-l) - 7\cdot l^3\right]$$

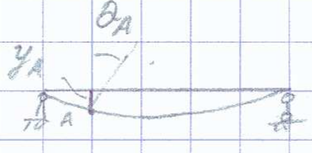
Прогиб и угол поворота упругой оси в т. А:

$$y_A = y\left(z=\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{48EJ_x}\left[-2\left(\frac{l}{2}\right)^4 + 2\overset{(<0)}{\left(\frac{l}{2}-l\right)^4} + 4l\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 12l^2\overset{(<0)}{\left(\frac{l}{2}-l\right)} - 7l^3\frac{l}{2}\right] =$$

$$= \frac{-25\cdot q\cdot l^4}{384\cdot E\cdot J_x}, \text{ [м]}$$ – перемещение вниз

$$\theta_A = y'\left(z=\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{48EJ_x}\left[-8\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 8\overset{(<0)}{\left(\frac{l}{2}-l\right)^3} + 12l\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 24l^2\overset{(<0)}{\left(\frac{l}{2}-l\right)} - 7\cdot l^3\right] =$$

$$= -\frac{5\cdot q\cdot l^3}{48\cdot E\cdot J_x}, \text{ [рад]}$$ поворот по часовой стрелке



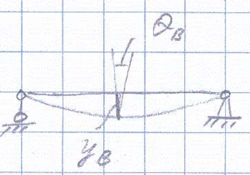
Прогиб и угол поворота упругой оси стержня в т. B:

$$y_B = y(z=l) = \frac{q}{48EJ_x}\left[-2l^4 + 2\cancel{(l-l)^4} + 4l\cdot l^3 + 12l^2\cancel{(l-l)^2} - 7\cdot l l^3\right] =$$

$$= -\frac{5ql^4}{48EJ_x};$$

$$\theta_B \approx y'(z=l) = \frac{q}{48\cdot EJ_x}\left[-8\cdot l^3 + 8\cancel{(l-l)^3} + 12ll^2 + 24\cancel{l^2(l-l)} - 7\cdot l^3\right] =$$

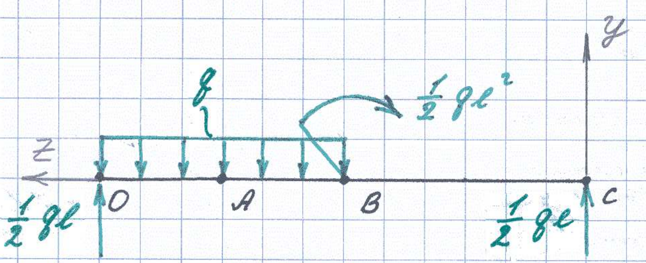
$$= -\frac{3ql^3}{48EJ_x} = \frac{-ql^3}{16\cdot EJ_x};$$



Примечание:

Распределённая нагрузка продолжается до конца стержня. При этом неважно, где она начинается.

Если-бы в только что разобранном примере система координат начиналась-бы на другом конце стержня



то продлевать распределённую нагрузку и вводить компенсационную не потребовалось-бы.

Следует, однако, помнить: при таком развороте системы координат вычисленные углы θ меняют знак.