IV

Геометрические характеристики плоских фигур

Используемые в курсе „Сопротивление материалов" геометрические характеристики поперечных сечений стержней вычисляются по тем же формулам, что и инерциальные параметры тонких пластинок единичной плотности [кг/м^2].

Поэтому новых названий им придумывать не стали:

- центр тяжести;
- статический момент;
- момент инерции.

Перечень геометрических характеристик

Пусть на плоскости имеется некоторая геометрическая фигура Ф и некоторая система координат OXY:

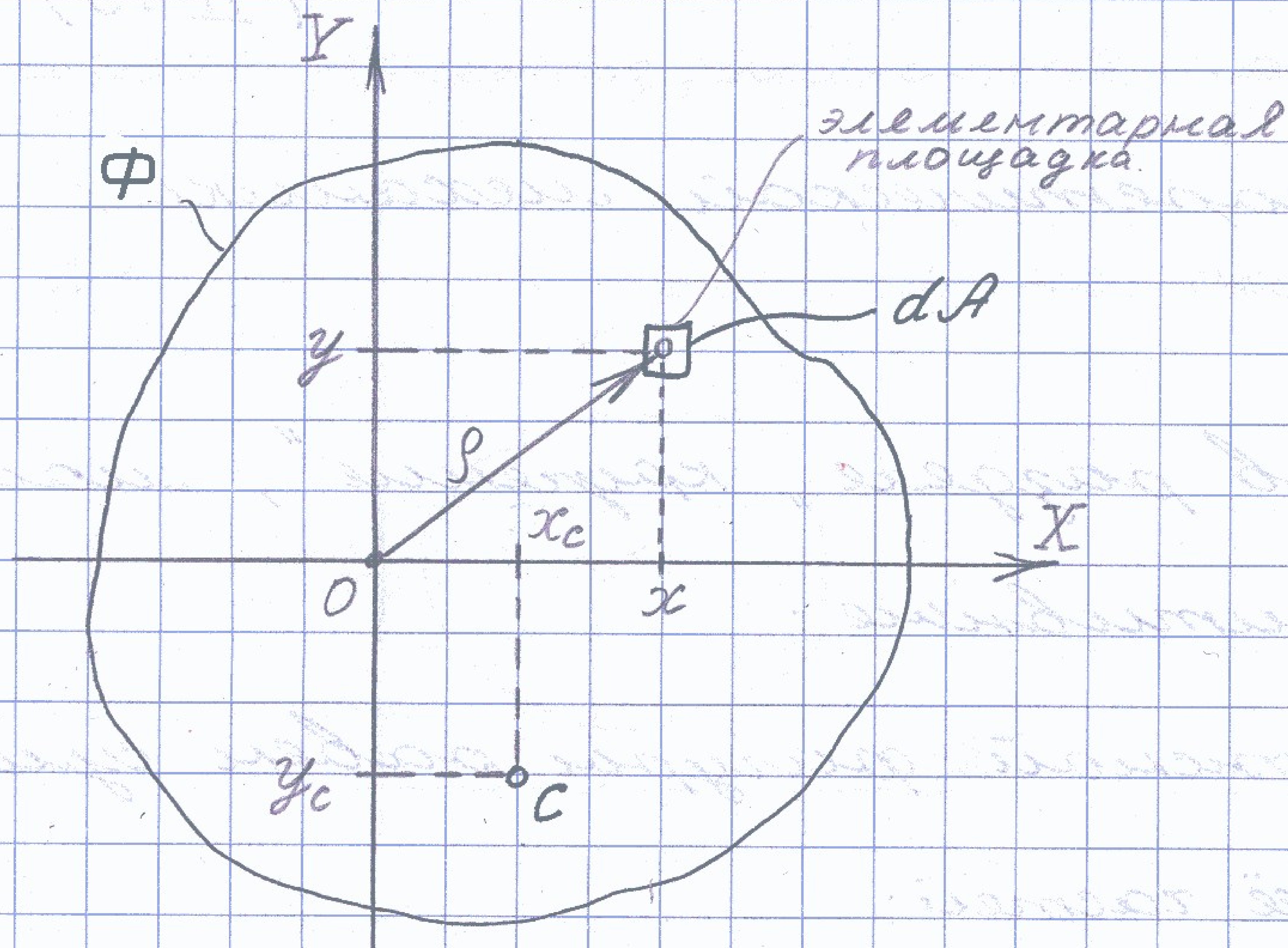


Рис. IV.1.

C – центр тяжести фигуры (то же, что и центр тяжести пластинки такой формы);

$$A = \int\limits_{Ф} dA \overset{>0}{,\ [м^2]} \text{ – площадь;}$$

$$S_x = \int\limits_{Ф} y \cdot dA \overset{>0,\ <0,\ =0}{} \text{ – статический момент относительно оси } X,\ [м^3];$$

$$S_y = \int\limits_{Ф} x \cdot dA \overset{>0,\ <0,\ =0}{} \text{ – статический момент относительно оси } Y,\ [м^3];$$

$$J_x = \int\limits_{Ф} y^2 \cdot dA \overset{>0}{} \text{ – момент инерции относительно оси } X,\ [м^4];$$

$$J_y = \int\limits_{Ф} x^2 \cdot dA \overset{>0}{} \text{ – момент инерции относительно оси } Y,\ [м^4];$$

$$J_{xy} = \int\limits_{Ф} x \cdot y \cdot dA \overset{>0}{} \text{ – центробежный момент инерции, } [м^4];$$

$$J_p = \int\limits_{Ф} \overset{>0}{\rho^2}\, dA = \int\limits_{Ф} (x^2+y^2)\, dA = J_y + J_x \text{ – полярный момент инерции, } [м^4]. \qquad (IV.1)$$

Формулы для определения координат центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \qquad (IV.2)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} \qquad (IV.3)$$

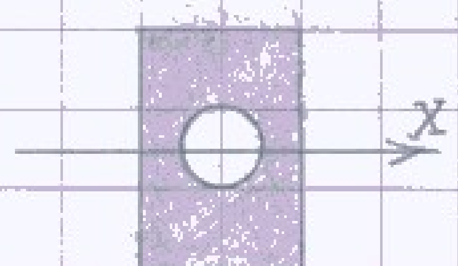
выведены ещё в курсе теоретической механики.

Как уже указывалось в разделе „кручение", моменты инерции - величины аддитивные:

а) Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции её частей:

$$J = \sum J_i$$

б) Момент инерции фигуры равен моменту инерции её наружного контура, минус моменты инерции фигур-вырезов:



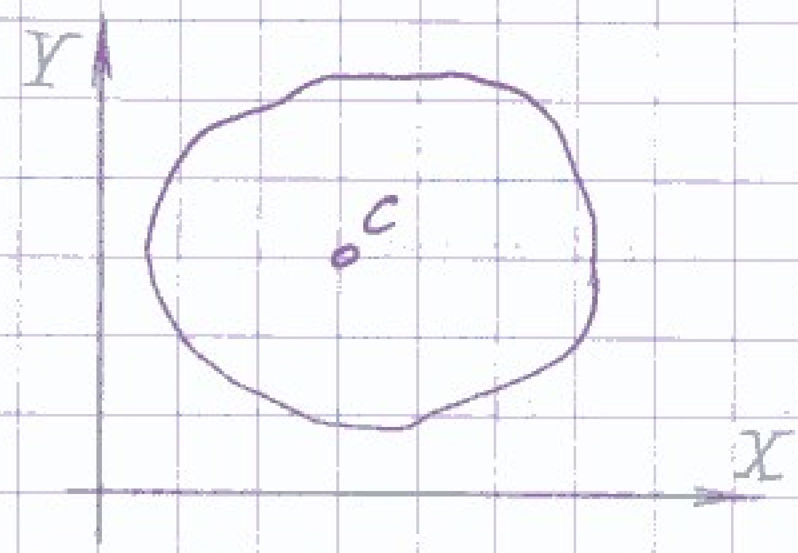
$$J_x = J_x^{\square} - J_x^{\circ}$$

То же касается и статических моментов.

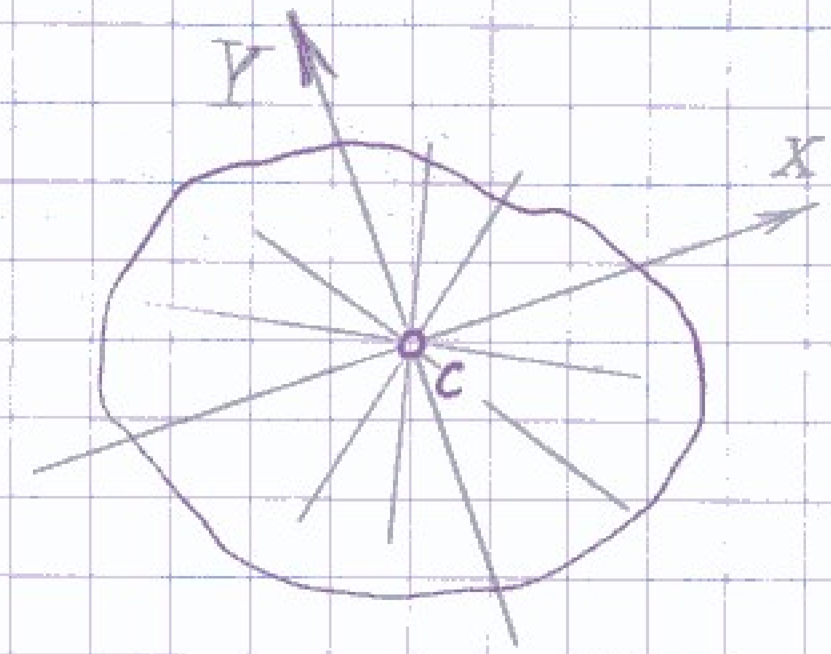
Виды координатных осей

Координатные оси OX и OY, в которых рассчитываются геометрические характеристики плоских фигур, подразделяются на:

1) Произвольные: не обладают никакими особенностями. Таких осей бесконечное количество.



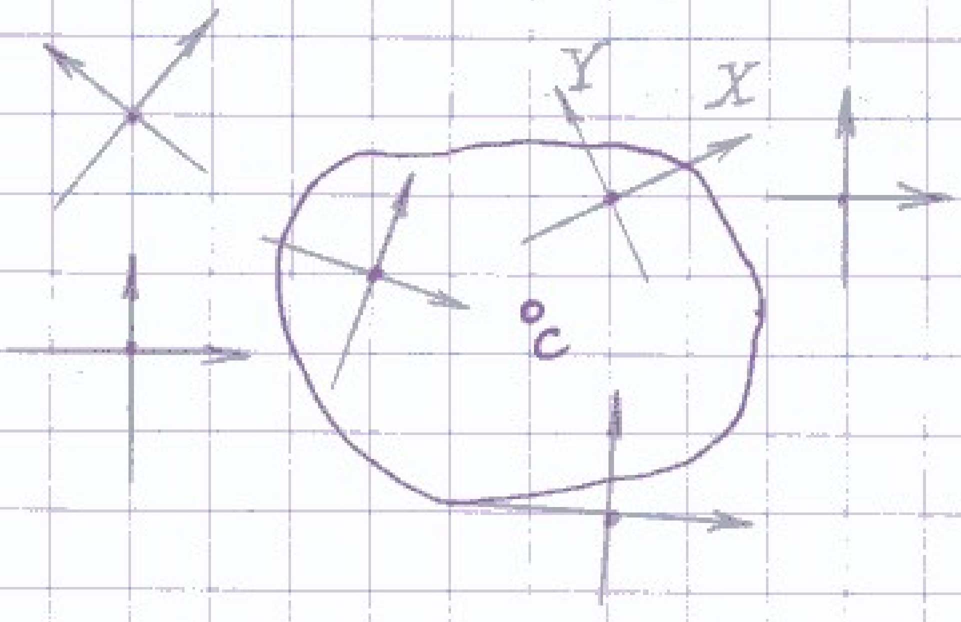
2) Центральные: начало координат - в центре тяжести фигуры. Таких осей так же бесконечное количество.



Признак: $x_c = 0 \overset{(IV.2)}{\Rightarrow} S_y = 0$

$y_c = 0 \overset{(IV.3)}{\Rightarrow} S_x = 0$

3) Главные. Сумма моментов инерции всегда постоянна: $J_x + J_y = J_p = const$



Значит, для каждой точки на плоскости имеется такая пара осей X и Y (единственная) в которой моменты J_x и J_y принимают экстремальные значения (один - максимальное, другой - минимальное) эти оси и называются главными для соответствующей точки.

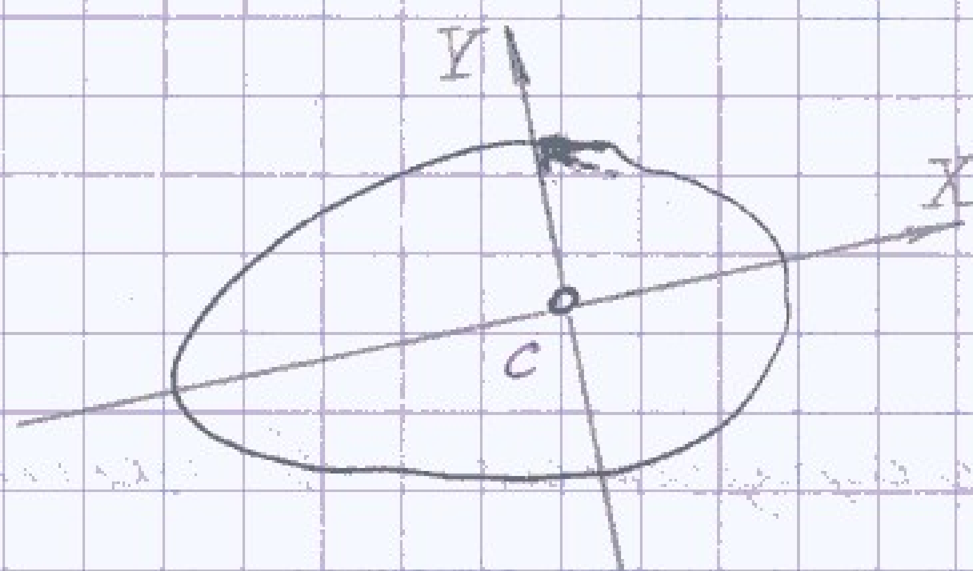
Главных осей бесконечное количество, ибо на плоскости бесконечное количество точек.

Признаки главных осей:

$$J_x \nearrow^{min}_{\searrow max} \quad J_y \nearrow^{max}_{\searrow min}$$

$J_{xy} = 0$ - это будет доказано позже

4) Главные центральные: главные оси для точки - центра тяжести фигуры.



Для данной фигуры существует единственная пара главных центральных осей (исключение - фигуры с тремя и более осями симметрии □, ○ и т.д. у них $J_x = J_y$ всегда.)

Признаки:

$$J_x \nearrow^{min}_{\searrow max} \quad J_y \nearrow^{max}_{\searrow min}$$

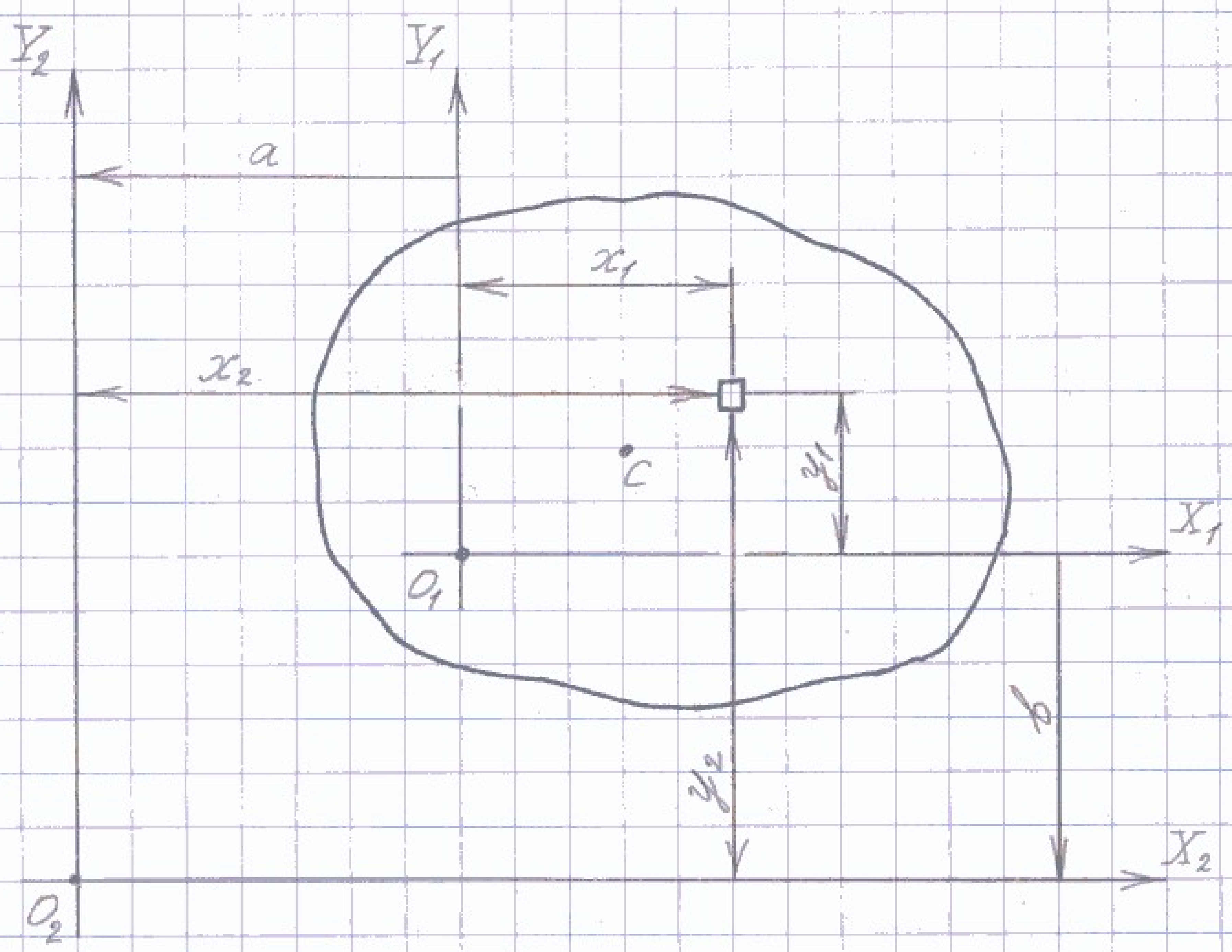
$S_x = 0$

$S_y = 0$

$J_{xy} = 0$

Если у фигуры есть ось симметрии, то она - главная центральная.

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей



$O_2X_2 \parallel O_1X_1$

$O_2Y_2 \parallel O_1Y_1$

Известны: J_{x_1}, J_{y_1}

Найти: J_{x_2}, J_{y_2}

$$J_{x_2} = \int_A y_2^2\, dA = \int_A (y_1 + b)^2 dA = \int_A [y_1^2 + 2\cdot b\cdot y_1 + b^2]\cdot dA =$$

$$= \int_A y_1^2 dA + 2\cdot b\cdot \int_A y_1\cdot dA + b^2 \int_A dA = J_{x_1} + 2\cdot b\cdot S_{x_1} + b^2\cdot A$$

$$J_{y_2} = \int_A x_2^2\, dA = \int_A (x_1 + a)^2 dA = \int_A [x_1^2 + 2\cdot a\cdot x_1 + a^2]\cdot dA =$$

$$= \int_A x_1^2 dA + 2a \int_A x_1\, dA + a^2 \int_A dA = J_{y_1} + 2a\cdot S_{y_1} + a^2\cdot A$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_1} + 2\cdot b\cdot S_{x_1} + b^2\cdot A \\ J_{y_2} &= J_{y_1} + 2a\cdot S_{y_1} + a^2\cdot A \end{aligned}} \qquad (IV.5)$$

Знаки при a и в по-прежнему имеют значение.

Если оси X_1 и Y_1 – центральные (т. O_1 = т. C), то статические моменты S_{x_1}, S_{y_1} равны нулю и:

$$\boxed{\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_1} + b^2 A \\ J_{y_2} &= J_{y_1} + a^2 \cdot A \end{aligned}} \quad \text{– теорема Штейнера} \qquad (IV.6)$$

Теорема Штейнера для геометрических фигур (тонких пластинок) является аналогом теоремы Гюйгенса для массивных тел в теоретической механике.

Из формул (IV.6) следует, что в семействе параллельных осей минимальный момент инерции получается относительно центральной оси ($a=0$ или $b=0$).