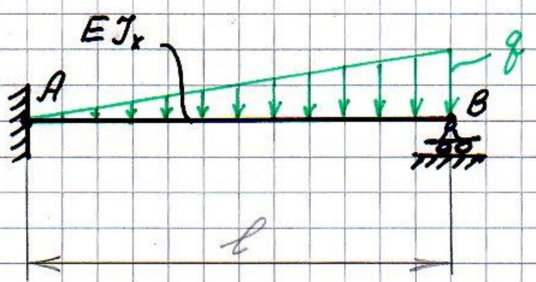


Дано: E, J_x, l, q

Найти: Q^{Σ}, M_x^{Σ}

Построить примерную форму изогнутой оси.

Решение

I. Вычисление степени статической неопределимости:

а) Количество внешних связей:

$$n_{внеш.св.} = \overset{A}{3} + \overset{B}{1} = 4$$

б) Количество внутренних связей:

$$n_{внутр.св.} = 3 \cdot K = 3 \cdot 0 = 0$$

в) Степень статической неопределимости:

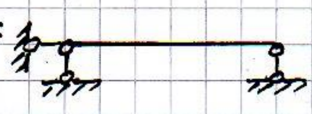
$$n = (4+0) - 3 = 1$$

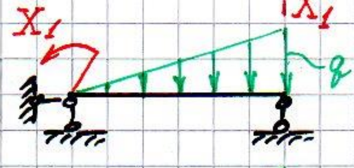
II. Раскрытие статической неопределимости:

а) Варианты основных и эквивалентных систем:

О.С. №1: 

Э.С. №1: 

О.С. №2: 

Э.С. №2: 

О.С. №3: 

Э.С. №3: 

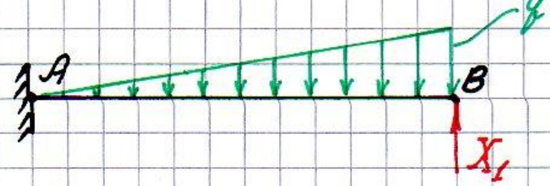
О.С. №4: 

Э.С. №4: 

б) Выбираем первый вариант:

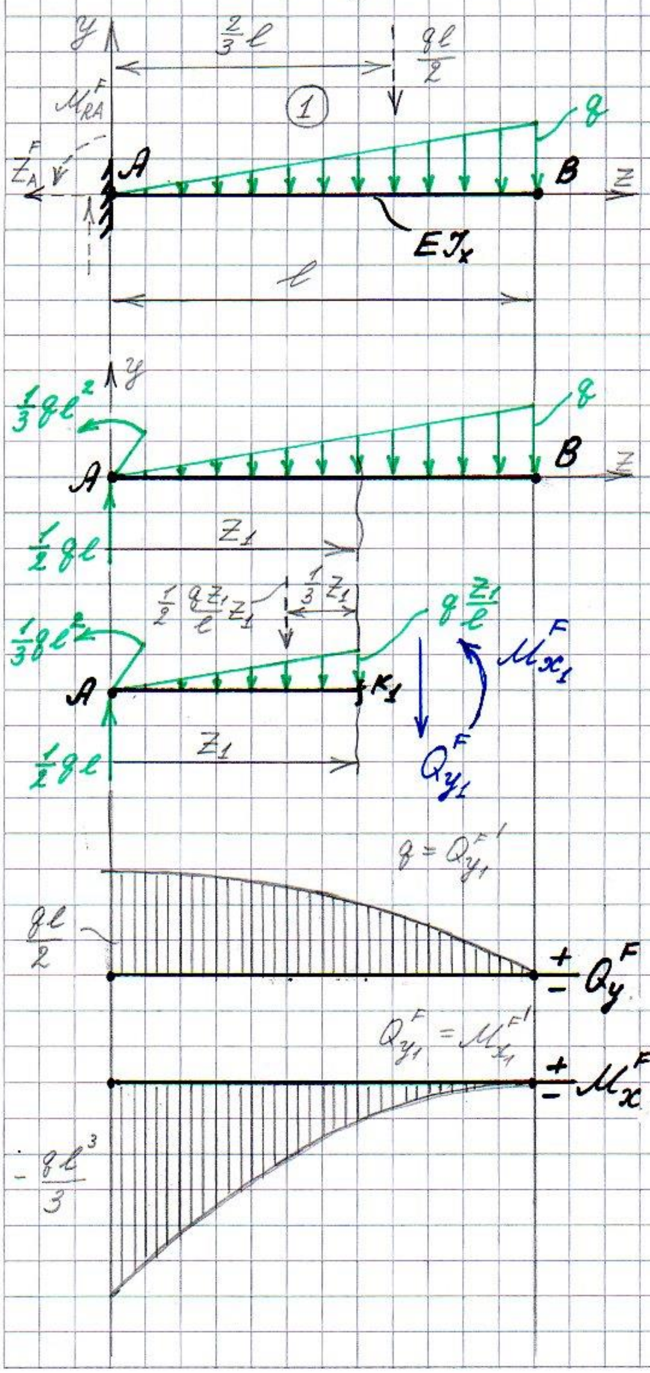
О.С. №1

Э.С. №1



в) Система канонических уравнений: $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

г) Коэффициенты канонических уравнений:



$$\sum F_z = 0 = -Z_A^F \Rightarrow Z_A^F = 0$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A^F - \frac{1}{2}ql \Rightarrow Y_A^F = \frac{1}{2}ql$$

$$\sum M_A = 0 = M_{RA}^F - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{2}{3}l$$

$$M_{RA}^F = \frac{1}{3}ql^2;$$

РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = \frac{ql}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{qz_1}{l}z_1 - Q_{y_1}^F$$

$$Q_{y_1}^F = \frac{q}{2}\cdot\left(l - \frac{z_1^2}{l}\right)$$

$$z_1 = 0: \quad Q_{y_1}^F = \frac{ql}{2};$$

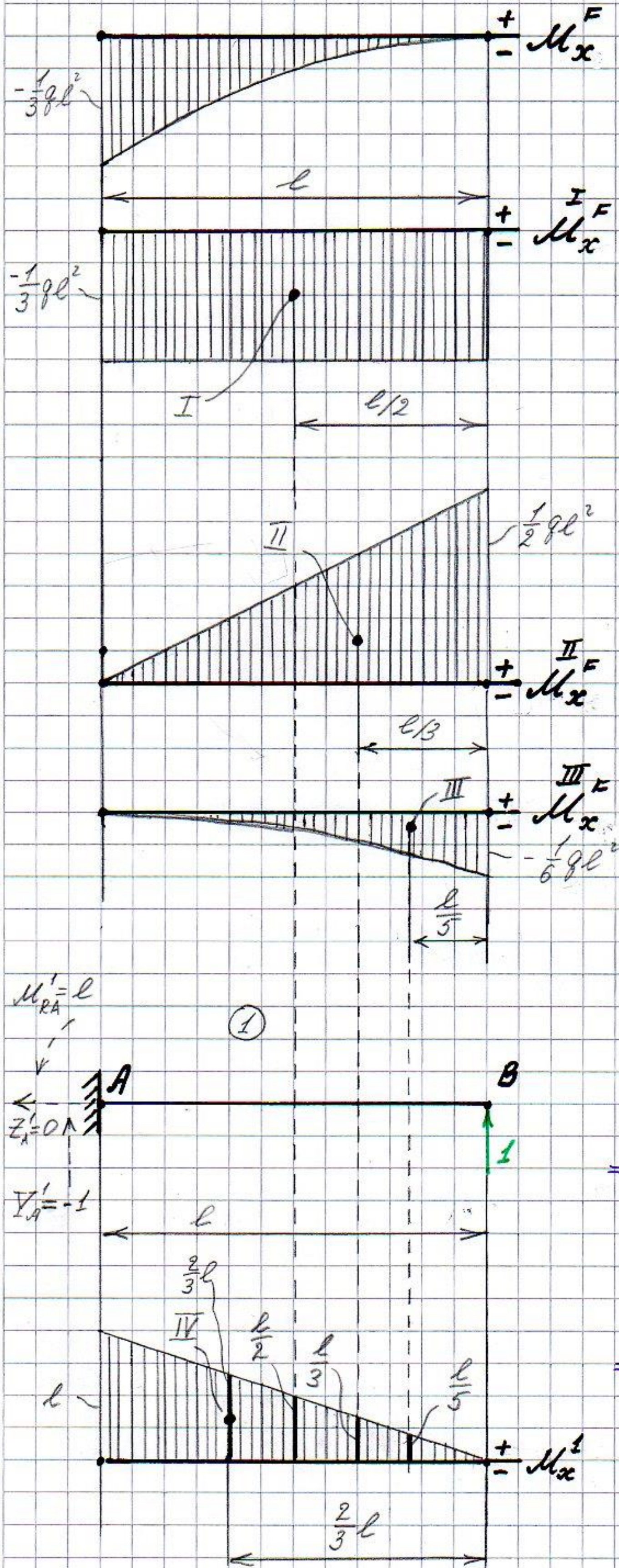
$$z_1 = l: \quad Q_{y_1}^F = 0;$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = M_{x_1}^F + \frac{ql^2}{3} - \frac{ql}{2}z_1 + \\ + \frac{1}{2}\frac{qz_1}{l}z_1\cdot\frac{1}{3}z_1;$$

$$M_{x_1}^F = -\frac{q}{6}\cdot\left(2l^2 - 3lz_1 + \frac{z_1^3}{l}\right)$$

$$z_1 = 0: \quad M_{x_1}^F = -\frac{1}{3}ql^2;$$

$$z_1 = l: \quad M_{x_1}^F = 0$$



Примечание:

Судя по формуле внутреннего изгибающего момента $M_{x_1}^F$

$$M_{x_1}^F = -\frac{1}{3}ql^2 + \frac{1}{2}qlz_1 - \frac{1}{6}q\frac{z_1^3}{l}$$

его эпюру можно разложить на три фигуры:

$$M_{x_1}^F = \overset{I}{M}{}_{x_1}^F + \overset{II}{M}{}_{x_1}^F + \overset{III}{M}{}_{x_1}^F,$$

где

$\overset{I}{M}{}_{x_1}^F = -\frac{1}{3}ql^2$ – прямоугольник

$\overset{II}{M}{}_{x_1}^F = \frac{1}{2}qlz_1$ – треугольник

$\overset{III}{M}{}_{x_1}^F = -\frac{1}{6}\frac{q}{l}z^3$ – треугольник со стороной - кубической параболой.

$$\delta_{1F} = \frac{M_x^1 \times M_x^F}{E \cdot J_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left[\overset{I}{\left(-\frac{1}{3}ql^2 l\right)}\cdot\frac{l}{2} + \overset{II}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ql^2 l\right)}\cdot\frac{l}{3} + \overset{III}{\left(\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}ql^2\right)\cdot l\right)}\cdot\frac{l}{5}\right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x}\cdot\left[-\frac{20}{120} + \frac{10}{120} - \frac{1}{120}\right] =$$

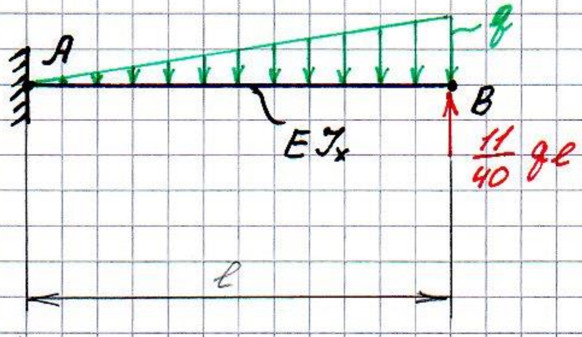
$$= -\frac{11}{120}\cdot\frac{ql^4}{EJ_x},$$

$$\delta_{11} = \frac{M_x^1 \times M_x^1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x}\left[\overset{IV}{\left(\frac{1}{2}l\,l\right)}\cdot\frac{2}{3}l\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^3}{EJ_x}.$$

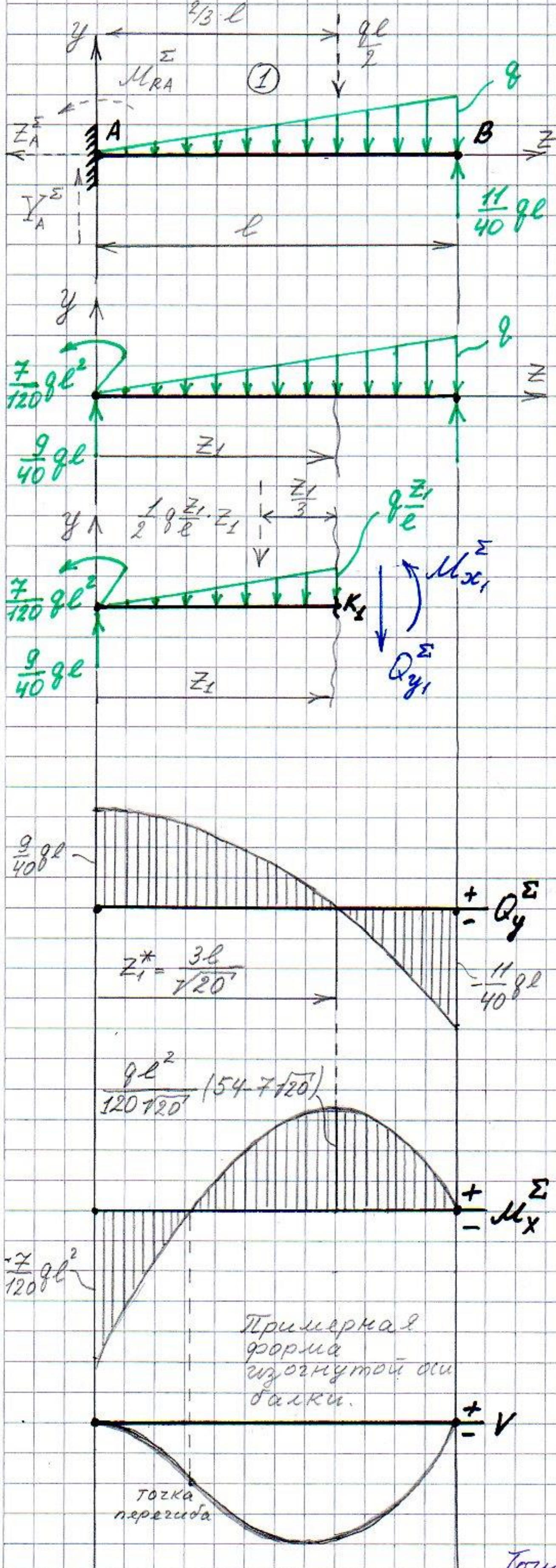
д) $\overline{X}_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1F} = 0$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{11}{120}\cdot\frac{ql^4}{\cancel{EJ_x}}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{l^3}{\cancel{EJ_x}}} = \frac{11}{40}ql.$$

е) Эквивалентная система:



III. Завершаем решение задачи:



$$\sum F_z = 0 = -Z_A^{\Sigma} \Rightarrow Z_A^{\Sigma} = 0$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A^{\Sigma} - \frac{1}{2}ql + \frac{11}{40}ql$$

$$Y_A^{\Sigma} = \frac{20}{40}ql - \frac{11}{40}ql = \frac{9}{40}ql$$

$$\sum M_A = 0 = M_{RA}^{\Sigma} - \frac{ql}{2}\cdot\frac{2}{3}l + \frac{11}{40}ql\cdot l$$

$$M_{RA}^{\Sigma} = \frac{+40}{120}ql^2 - \frac{33}{120}ql^2 = \frac{7}{120}ql^2$$

РОЗУ:

$$\sum F_{y_1} = 0 = -Q_{y_1}^{\Sigma} + \frac{9}{40}ql - \frac{1}{2}q\frac{z_1}{l}\cdot z_1$$

$$Q_{y_1}^{\Sigma} = \frac{q}{40}\left(9l - 20\frac{z_1^2}{l}\right)$$

$z_1 = 0$: $Q_{y_1}^{\Sigma} = \frac{9}{40}ql$; смена знака

$z_1 = l$: $Q_{y_1}^{\Sigma} = -\frac{11}{40}ql$;

$$Q_{y_1}^{\Sigma}(z_1 = z_1^*) = 0$$

$$\frac{q}{40}\left(9l - \frac{20}{l}z_1^{*2}\right) = 0$$

$$z_1^{*2}\frac{20}{l} = 9l \Rightarrow z_1^* = \frac{3l}{\sqrt{20}}$$

$$\sum M_{K_1} = 0 = M_{x_1}^{\Sigma} + \frac{7}{120}ql^2 - \frac{9}{40}ql\cdot z_1 + \frac{1}{2}q\frac{z_1}{l}z_1\cdot\frac{z_1}{3}$$

$$M_{x_1}^{\Sigma} = \frac{q}{120\cdot l}\left(-7l^3 + 27l^2 z_1 - 20\cdot z_1^3\right)$$

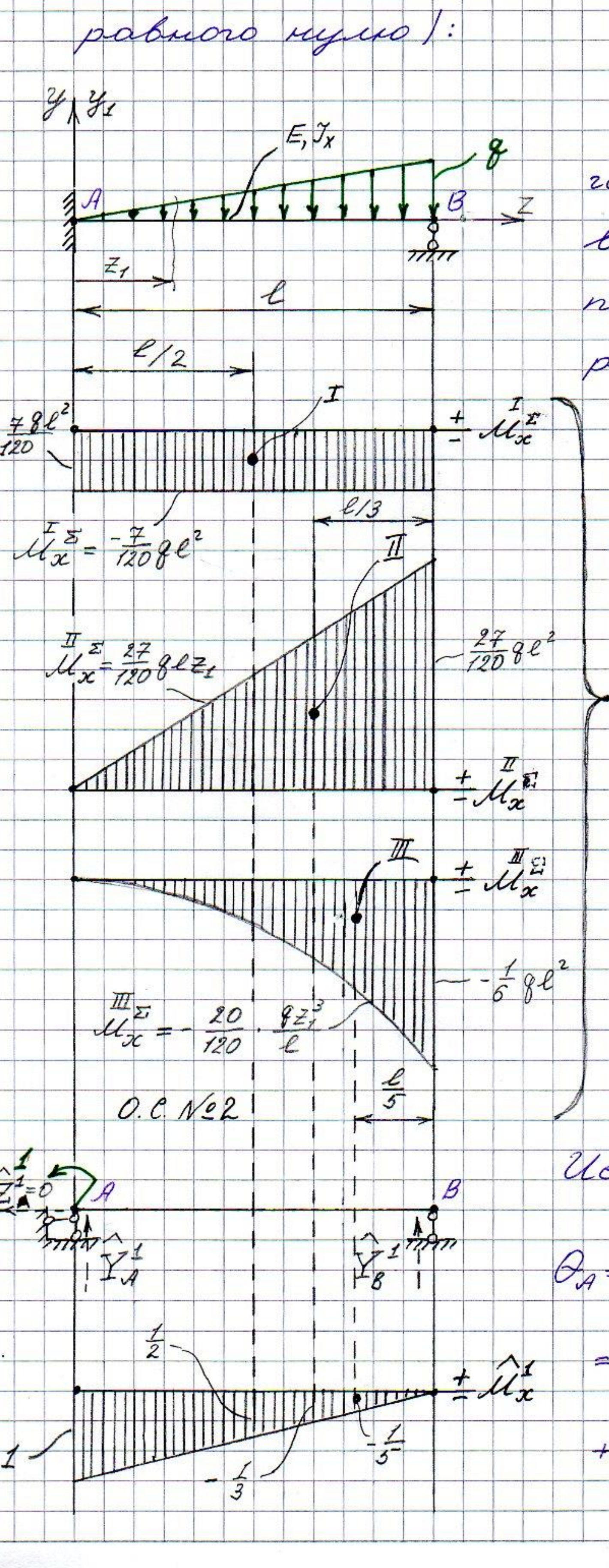
$z_1 = 0$: $M_{x_1}^{\Sigma} = -\frac{7}{120}ql^2$;

$z_1 = z_1^*$: $M_{x_1}^{\Sigma} = \frac{ql^2}{120\sqrt{20}}\cdot(54 - 7\sqrt{20})$;

$z_1 = l$: $M_{x_1}^{\Sigma} = 0$.

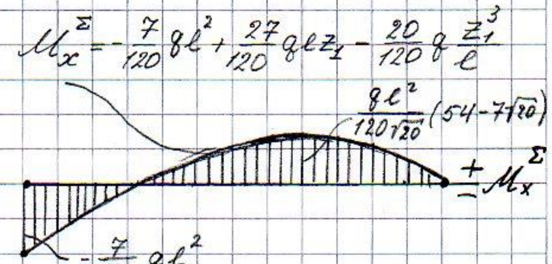
Точное значение функции $V(z)$ – результат решения ДУ: $EJ_x V'' = M_x^{\Sigma}$

IV. Проверка правильности решения (вычисление перемещения или угла поворота, заведомо равного нулю):



Точка A балки располагается в заделке. Следовательно, её угловое перемещение заведомо равно нулю:

$$\Theta_A = 0$$

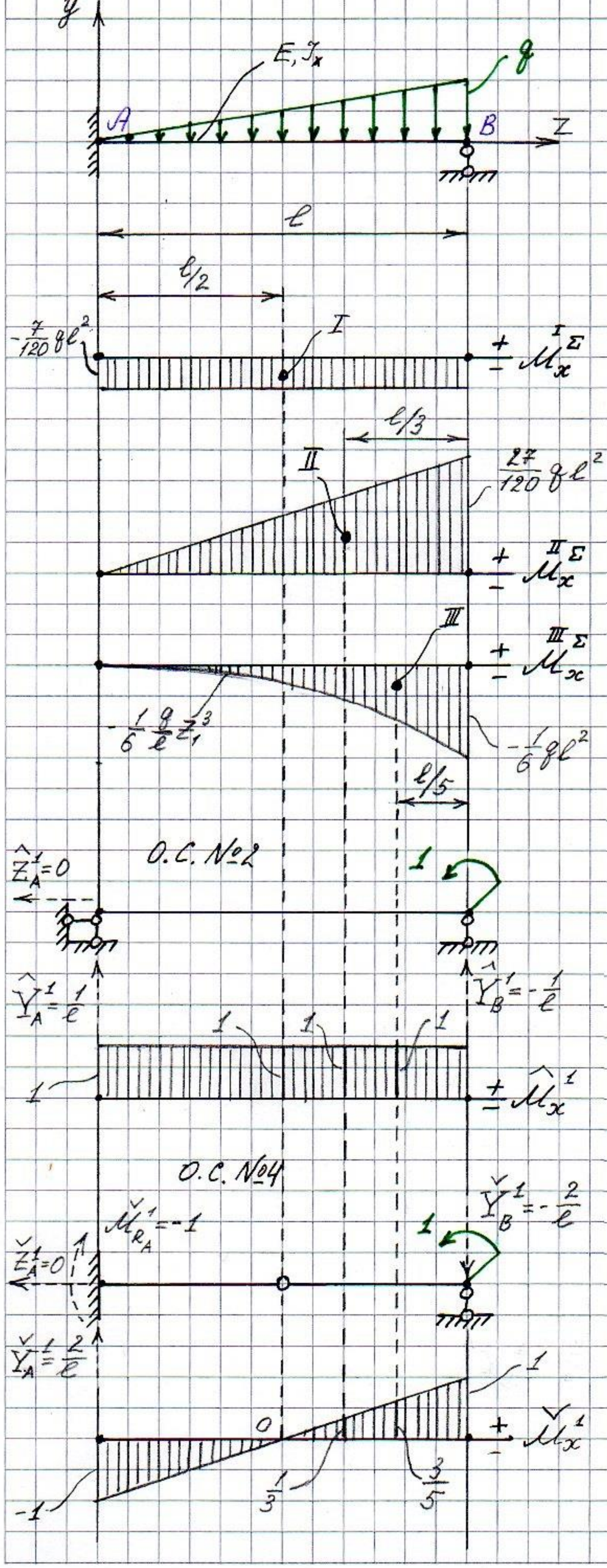


Используем О.С. №2:

$$\Theta_A = \frac{\overset{I}{M}{}_x^{\Sigma}\cdot\hat M_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{II}{M}{}_x^{\Sigma}\cdot\hat M_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{III}{M}{}_x^{\Sigma}\cdot\hat M_x^1}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left[\overset{I}{\left(+\frac{7}{120}ql^2 l\right)}\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\frac{27}{120}ql^2 l\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}ql^2 l\right)\frac{1}{5}\right] = 0$$

IV. Проверка правильности решения (вычисление одного перемещения в разных о.с.):



Угловое перемещение θ_B точки B упругой оси балки находим методом Мора способом Верещагина, предварительно расслоив эпюру M_x^{Σ} на три фигуры.

О.С. №2:

$$\hat{\theta}_B = \frac{\overset{I}{M_x^{\Sigma}}\cdot\hat{M}_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{II}{M_x^{\Sigma}}\hat{M}_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{III}{M_x^{\Sigma}}\hat{M}_x^{1}}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left[\left(-\frac{7}{120}ql^2 l\right)\cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{120}\cdot ql^2 l\right)\cdot 1 - \left(\frac{1}{4}\frac{1}{6}ql^2 l\right)\cdot 1\right] =$$

$$= \frac{ql^3}{EJ_x}\left(-\frac{7}{120} + \frac{27}{240} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{80}\cdot\frac{ql^3}{EJ_x};$$

О.С. №4:

$$\check{\theta}_B = \frac{\overset{I}{M_x^{\Sigma}}\check{M}_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{II}{M_x^{\Sigma}}\check{M}_x^1}{EJ_x} + \frac{\overset{III}{M_x^{\Sigma}}\check{M}_x^1}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left[\overset{I}{\left(-\frac{7}{120}ql^2 l\right)}\cdot 0 + \overset{II}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{120}ql^2 l\right)}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4}\frac{1}{6}ql^2 l\right)\frac{3}{5}\right] =$$

$$= \frac{ql^3}{EJ_x}\left[\frac{27}{720} - \frac{3\cdot 6}{120\cdot 6}\right] = \frac{9}{720}\cdot\frac{ql^3}{EJ_x} =$$

$$= \frac{1}{80}\cdot\frac{ql^3}{EJ_x};$$

$$\hat{\theta}_B = \check{\theta}_B$$