Вычислить местоположение центра тяжести C поперечного сечения, направление его главных центральных осей x и y, геометрические характеристики сечения относительно главных центральных осей.

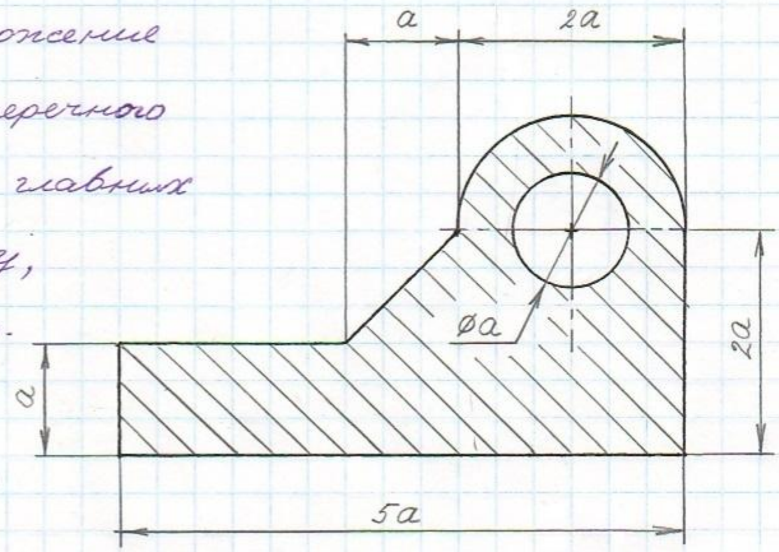
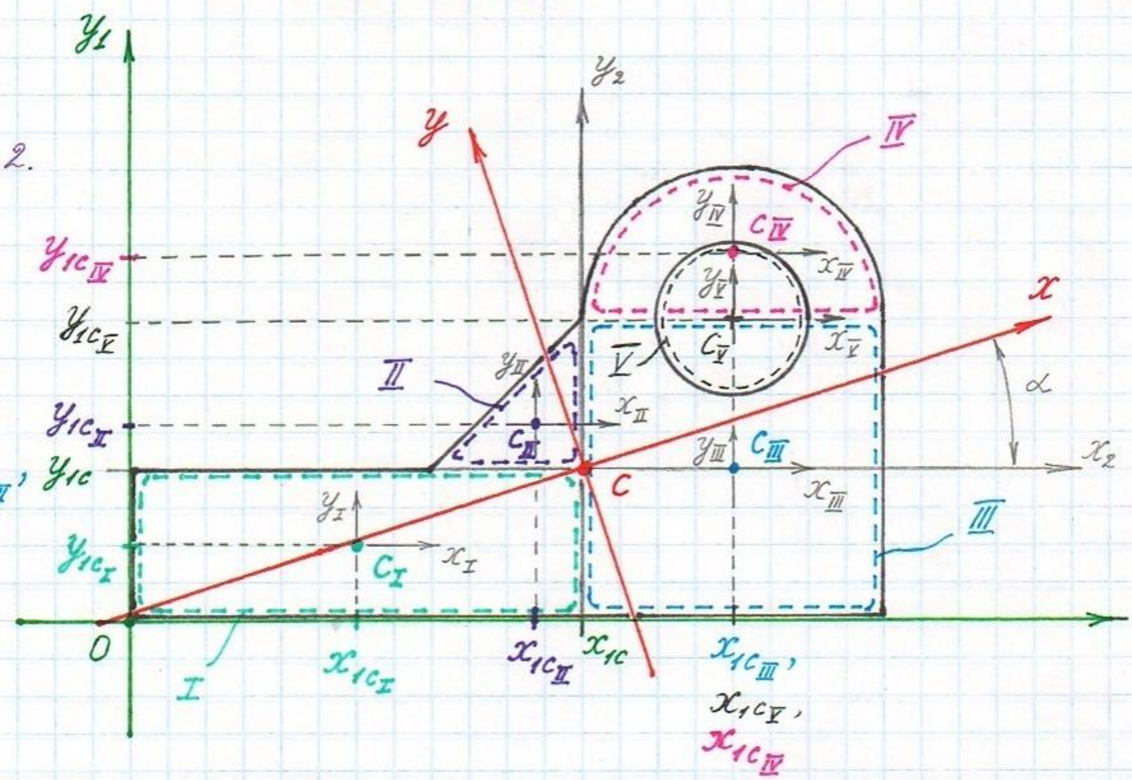


Рис. 1.

Решение

Рис. 2.



Ox_1y_1 – произвольная система координат (с.к.);

Cx_2y_2 – с.к. центральных осей, параллельных произвольным;

Cxy – с.к. главных центральных осей сечения.

Результаты:

$A=(30+\pi)\dfrac{a^2}{4}$ – площадь;

$x_{1c}\approx 3a$; $y_{1c}=a$ – координаты центра тяжести;

$\alpha = 17,23^\circ$ – угол наклона главных центральных осей;

$J_x = 3,741\cdot a^4$;

$J_y = 16,68\cdot a^4$.

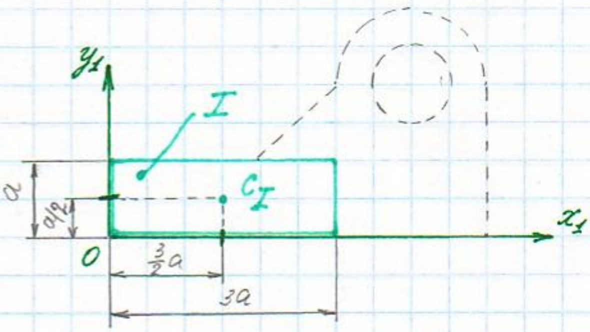
Как получены эти результаты? Выполняем по пунктам конспект Н-05.

1) Разбиваем сечение на простые фигуры (рис. 2);

2) Вводим в рассмотрение произвольную декартову систему координат Ox_1y_1.

3) В системе Ox_1y_1 вычисляем координаты центра тяжести C поперечного сечения.

а) Площади A^i и статические моменты $S_{y_1}^i$, $S_{x_1}^i$ геометрических фигур I...V слагающих поперечное сечение (рис. 2):



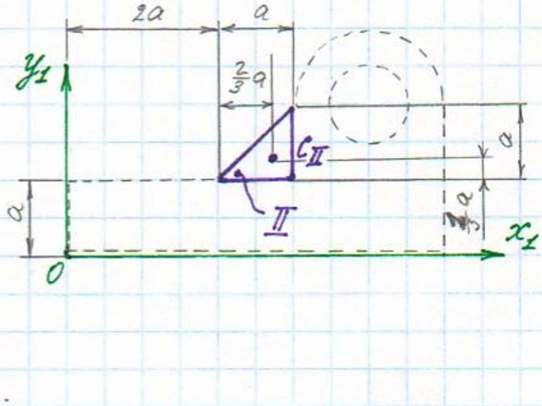
$A^I = 3a \cdot a = 3a^2;$

$x_{1c_I} = \frac{3}{2}a;$

$y_{1c_I} = \frac{1}{2}a;$

$S_{y_1}^I = A^I \cdot x_{1c_I} = 3a^2 \cdot \frac{3}{2}a = \frac{9}{2}a^3;$

$S_{x_1}^I = A^I \cdot y_{1c_I} = 3a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a^3;$



$A^{II} = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}a^2;$

$x_{1c_{II}} = 2a + \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}a;$

$y_{1c_{II}} = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a;$

$S_{y_1}^{II} = A^{II} \cdot x_{1c_{II}} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{8}{3}a = \frac{4}{3}a^3;$

$S_{x_1}^{II} = A^{II} \cdot y_{1c_{II}} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a^3;$

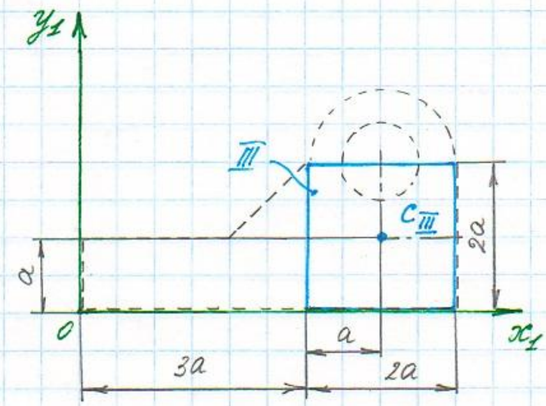
$$A^{III} = 2a \cdot 2a = 4a^2;$$

$$x_{1c_{III}} = 3a + a = 4a;$$

$$y_{1c_{III}} = a;$$

$$S_{y_1}^{III} = A^{III} \cdot x_{1c_{III}} = 4a^2 \cdot 4a = 16a^3;$$

$$S_{x_1}^{III} = A^{III} \cdot y_{1c_{III}} = 4a^2 \cdot a = 4a^3;$$



$$A^{IV} = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi (2a)^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2};$$

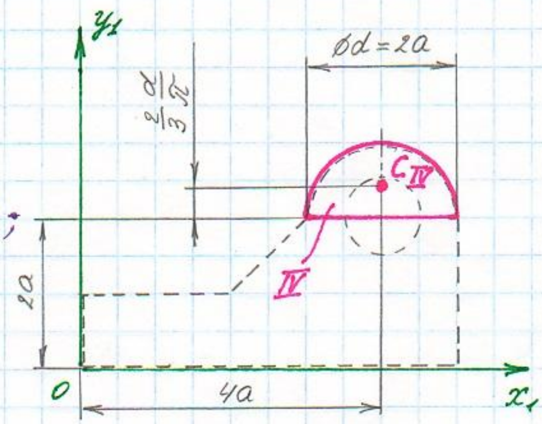
$$x_{1c_{IV}} = x_{1c_{III}} = 4a;$$

$$y_{1c_{IV}} = 2a + \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi} = 2a + \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{\pi} = 2a + \frac{4}{3} \frac{a}{\pi};$$

$$S_{y_1}^{IV} = A^{IV} \cdot x_{1c_{IV}} = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 4a = 2\pi a^3;$$

$$S_{x_1}^{IV} = A^{IV} \cdot y_{1c_{IV}} = \frac{\pi a^2}{2} \cdot \left(2a + \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}\right) =$$

$$= \pi a^3 + \frac{2}{3} a^3 = \left(\pi + \frac{2}{3}\right) a^3;$$



Площадь и статические моменты выреза отрицательны:

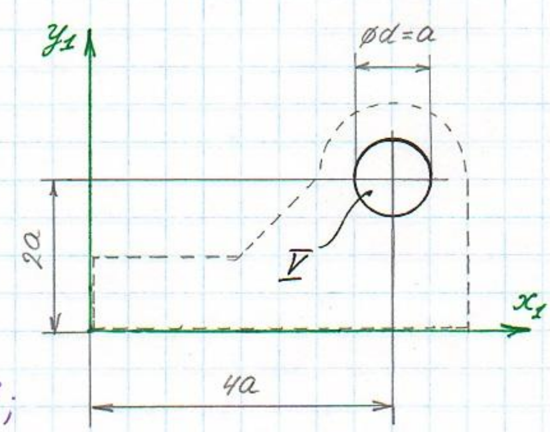
$$A^{V} = -\frac{\pi d^2}{4} = -\frac{\pi a^2}{4};$$

$$x_{1c_V} = x_{1c_{III}} = 4a;$$

$$y_{1c_V} = 2a;$$

$$S_{y_1}^{V} = A^{V} \cdot x_{1c_V} = -\frac{\pi a^2}{4} \cdot 4a = -\pi a^3;$$

$$S_{x_1}^{V} = A^{V} \cdot y_{1c_V} = -\frac{\pi a^2}{4} \cdot 2a = -\frac{\pi}{2} a^3.$$



б) Площадь A и статические моменты S_{y_1} и S_{x_1} всего поперечного сечения:

$$A = A^{I} + A^{II} + A^{III} + A^{IV} + A^{V} = 3a^2 + \frac{1}{2}a^2 + 4a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 =$$

$$= \frac{15}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{a^2}{4}(30+\pi); \quad = 8{,}285\cdot a^2$$

$$S_{y_1} = S_{y_1}^{I} + S_{y_1}^{II} + S_{y_1}^{III} + S_{y_1}^{IV} + S_{y_1}^{V} = \frac{3\cdot 9}{3\cdot 2}a^3 + \frac{2\cdot 4}{2\cdot 3}a^3 + \frac{6\cdot 16}{6}a^3 + 2\pi a^3 - \pi a^3 =$$

$$= \frac{131}{6}a^3 + \pi a^3 = \frac{a^3}{6}(131+6\pi); \quad \approx 24{,}97a^3$$

$$S_{x_1} = S_{x_1}^{I} + S_{x_1}^{II} + S_{x_1}^{III} + S_{x_1}^{IV} + S_{x_1}^{V} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 2}a^3 + \frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}a^3 + \frac{6\cdot 4}{6}a^3 + \left(\pi + \frac{2}{3}\right)a^3 - \frac{\pi}{2}a^3 =$$

$$= \frac{37}{6}a^3 + \frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}\pi a^3 + \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{6}\cdot(41+3\pi) \quad = 8{,}404\cdot a^3$$

в) Вычисляем координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$x_{1c} = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{\frac{a^3}{6}(131+6\pi)}{\frac{a^2}{4}(30+\pi)} = 3{,}014\cdot a;$$

$$y_{1c} = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{\frac{a^3}{6}\cdot(41+3\pi)}{\frac{a^2}{4}(30+\pi)} = 1{,}014\cdot a.$$

Для удобства дальнейших вычислений округлим полученные точные значения до

$$x_{1c} \approx 3a;$$

$$y_{1c} \approx a.$$

4) Вводим в рассмотрение центральную декартову координатную систему Cx_2y_2, оси которой x_2 и y_2 параллельны соответствующим произвольным осям x_1 и y_1.

5) В системе Cx_2y_2 вычисляем моменты инерции поперечного сечения.

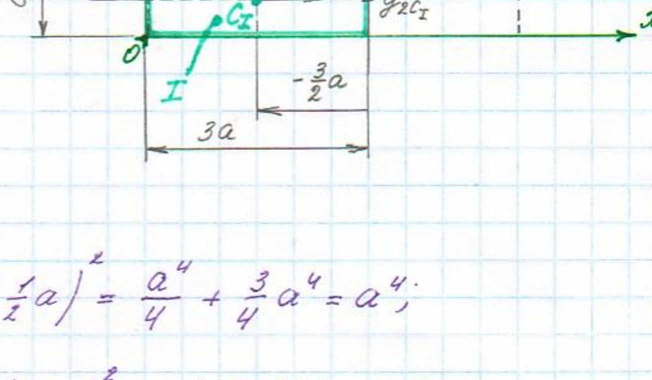
а) Для последующего использования теоремы Штейнера в центрах тяжести C_i фигур, слагающих поперечное сечение, вводим локальные центральные системы координат, оси которых x_i и y_i параллельны глобальным осям x_2 и y_2: $C_I x_I y_I$, $C_{II} x_{II} y_{II}$, $C_{III} x_{III} y_{III}$, $C_{IV} x_{IV} y_{IV}$ и $C_V x_V y_V$.

б) Моменты инерции $J^i_{x_2}$, $J^i_{y_2}$, $J^i_{x_2y_2}$ фигур:

$J^I_{x_I} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{4};$

$J^I_{y_I} = \frac{hb^3}{12} = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} = \frac{9}{4}a^4;$

$J^I_{x_Iy_I} = 0$ т.к. для фигуры I центральные оси x_I и y_I ещё и главные для фигуры I.



$x_{2c_I} = -\frac{3}{2}a;$

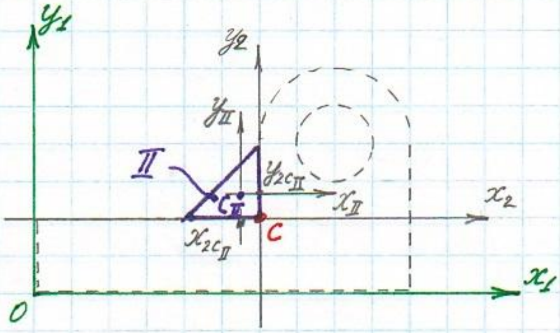
$y_{2c_I} = -\frac{1}{2}a;$

$J^I_{x_2} = J^I_{x_I} + A^I \cdot (y_{2c_I})^2 = \frac{a^4}{4} + 3a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{a^4}{4} + \frac{3}{4}a^4 = a^4;$

$J^I_{y_2} = J^I_{y_I} + A^I \cdot (x_{2c_I})^2 = \frac{9}{4}a^4 + 3a^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}a\right)^2 = a^4\left(\frac{9}{4} + \frac{27}{4}\right) = 9a^4;$

$J^I_{x_2y_2} = J^I_{x_Iy_I} + A^I \cdot y_{2c_I} \cdot x_{2c_I} = 0 + 3a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}a\right) = \frac{9}{4}a^4;$

$$J^{II}_{x_{II}} = \frac{b\cdot h^3}{36} = \frac{a\cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36};$$



$$J^{II}_{y_{II}} = J^{II}_{x_{II}} = \frac{a^4}{36};$$

$$J^{II}_{x_{II}y_{II}} = \frac{b^2h^2}{72} = \frac{a^2a^2}{72} = \frac{a^4}{72};$$

$$x_{2c_{II}} = -\frac{a}{3};$$

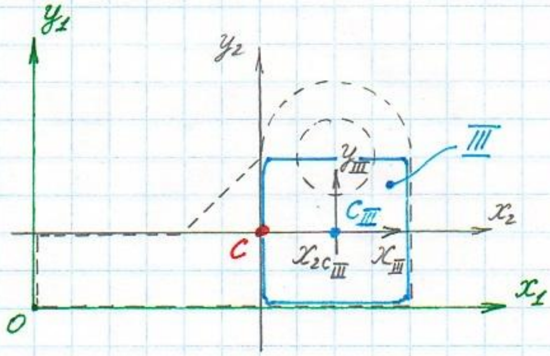
$$y_{2c_{II}} = +\frac{a}{3}$$

$$J^{II}_{x_2} = J^{II}_{x_{II}} + A^{II}\cdot(y_{2c_{II}})^2 = \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{18} = \frac{a^4}{12};$$

$$J^{II}_{y_2} = J^{II}_{y_{II}} + A^{II}\cdot(x_{2c_{II}})^2 = \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2}\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{18} = \frac{a^4}{12};$$

$$J^{II}_{x_2y_2} = J^{II}_{x_{II}y_{II}} + A^{II}\cdot y_{2c_{II}}\cdot x_{2c_{II}} = \frac{a^4}{72} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\left(-\frac{a}{3}\right) = a^4\left(\frac{1}{72} - \frac{1\cdot 4}{18\cdot 4}\right) = -\frac{3}{72}a^4;$$

$$J^{III}_{x_{III}} = \frac{b\cdot h^3}{12} = \frac{2a\cdot(2a)^3}{12} = \frac{4}{3}a^4;$$



$$J^{III}_{y_{III}} = \frac{h\cdot b^3}{12} = \frac{2a\cdot(2a)^3}{12} = \frac{4}{3}a^4;$$

$J^{III}_{x_{III}y_{III}} = 0$ – оси x_{III} и y_{III} главные центральные для фигуры III

$$x_{2c_{III}} = a;$$

$$y_{2c_{III}} = 0;$$

$$J^{III}_{x_2} = J^{III}_{x_{III}} + A^{III}\cdot(\cancelto{0}{y_{2c_{III}}})^2 = J^{III}_{x_{III}} = \frac{4}{3}a^4;$$

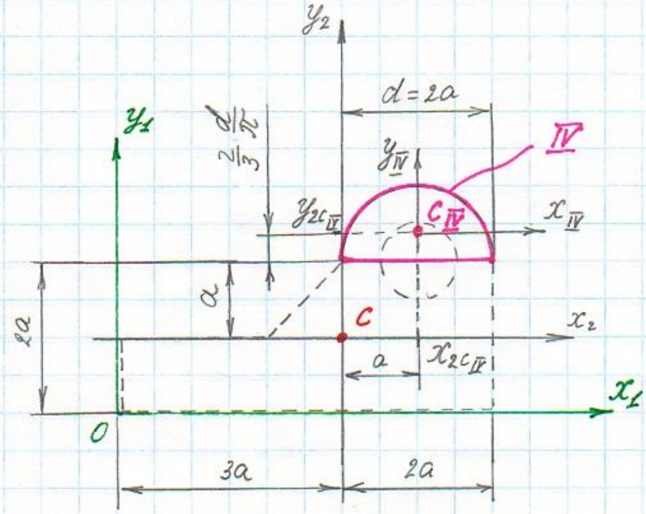
$$J^{III}_{y_2} = J^{III}_{y_{III}} + A^{III}(x_{2c_{III}})^2 = \frac{4}{3}a^4 + 4a^2\cdot a^2 = \frac{16}{3}a^4;$$

$$J^{III}_{x_2y_2} = J^{III}_{x_{III}y_{III}} + A^{III}\cdot x_{2c_{III}}\cdot\cancelto{0}{y_{2c_{III}}} = J^{III}_{x_{III}y_{III}} = 0$$

$$J_{x_{IV}}^{IV} = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{2}{3}\frac{d}{\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{9\cdot\pi d^4}{9\cdot 128} - \frac{64\cdot d^4}{64\cdot 18\cdot\pi} = \frac{d^4}{1152\cdot\pi}(9\pi^2-64) =$$

$$= \frac{(2a)^4}{1152\pi}(9\pi^2-64) = \frac{a^4}{72\pi}(9\pi^2-64);$$



$$J_{y_{IV}}^{IV} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi (2a)^4}{128} = \frac{\pi a^4}{8};$$

$J_{x_{IV}y_{IV}}^{IV} = 0$ – оси x_{IV} и y_{IV} – главные центральные для фигуры IV

$$x_{2c_{IV}} = a;$$

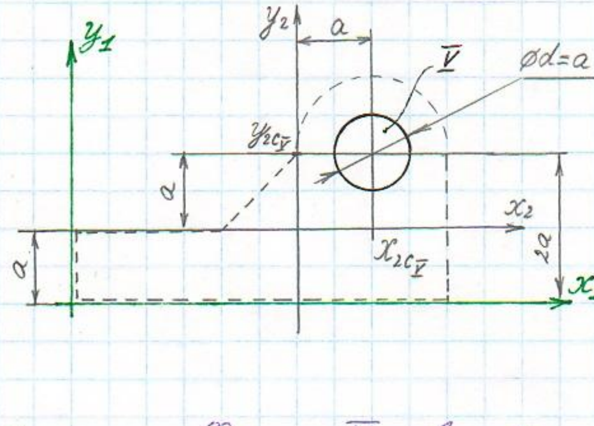
$$y_{2c_{IV}} = a + \frac{2}{3}\frac{d}{\pi} = \frac{3\pi a}{3\pi} + \frac{4a}{3\pi} = \frac{a}{3\pi}(3\pi+4);$$

$$J_{x_2}^{IV} = J_{x_{IV}}^{IV} + A^{IV}\cdot(y_{2c_{IV}})^2 = \frac{a^4}{72\pi}\cdot(9\pi^2-64) +$$

$$+ \frac{\pi \overset{(2a)^2}{d^2}}{8}\cdot\left[\frac{a}{3\pi}\cdot(3\pi+4)\right]^2 = \frac{a^4}{72}(45\pi+96) = \frac{a^4}{24}(15\pi+32);$$

$$J_{y_2}^{IV} = J_{y_{IV}}^{IV} + A^{IV}\cdot(x_{2c_{IV}})^2 = \frac{\pi a^4}{8} + \frac{\pi(2a)^2}{8}\cdot a^2 = \frac{5}{8}\pi a^4;$$

$$J_{x_2y_2}^{IV} = \overset{0}{\cancel{J_{x_{IV}y_{IV}}^{IV}}} + A^{IV}\cdot x_{2c_{IV}}\cdot y_{2c_{IV}} = \frac{\pi(2a)^2}{8_2}\cdot a\cdot\frac{a}{3\pi}(3\pi+4) = \frac{a^4}{6}(3\pi+4);$$



$$J_{x_V}^{V} = J_{y_V}^{V} = -\frac{\pi d^4}{64} = -\frac{\pi a^4}{64}$$

$J_{x_V y_V}^{V} = 0$ – оси x_V и y_V – главные центральные для фигуры V

$$x_{2c_V} = y_{2c_V} = a;$$

$$J_{x_2}^{V} = J_{x_V}^{V} + A^{V}\cdot(y_{2c_V})^2 = -\frac{\pi \overset{a^4}{d^4}}{64} - \frac{\pi \overset{a^2}{d^2}}{4}\cdot a^2\frac{16}{16} = -\frac{17}{64}\pi a^4;$$

$$J_{y_2}^{V} = J_{y_V}^{V} + A^{V}(x_{2c_V})^2 = -\frac{\pi a^4}{64} - \frac{\pi a^2}{4}a^2 = -\frac{17}{64}\pi a^4;$$

$$J_{x_2y_2}^{V} = J_{x_V y_V}^{V} + A^{V}\cdot(y_{2c_V})^2 = -\frac{\pi a^2}{4}\cdot a^2 = -\frac{1}{4}\pi a^4;$$

Фигура V – вырез.

Поэтому её площадь и её моменты инерции (изгибные) отрицательны. Центробежный момент инерции – какой получится.

Для удобства дальнейших вычислений рассчитанные ранее геометрические характеристики фигур, слагающих поперечное сечение, можно свести в таблицу:

$A^{I}=3a^2$	$A^{II}=\frac{1}{2}a^2$	$A^{III}=4a^2$	$A^{IV}=\frac{\pi}{2}a^2$	$A^{V}=-\frac{1}{4}\pi a^2$
$x_{1c_I}=\frac{3}{2}a;\ y_{1c_I}=\frac{1}{2}a$	$x_{1c_{II}}=\frac{8}{3}a;\ y_{1c_{II}}=\frac{4}{3}a$	$x_{1c_{III}}=4a;\ y_{1c_{III}}=a$	$x_{1c_{IV}}=4a;\ y_{1c_{V}}=2a+\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$	$x_{1c_V}=4a;\ y_{1c_V}=2a$
$S_{y_1}^{I}=\frac{9}{2}a^3$	$S_{y_1}^{II}=\frac{4}{3}a^3$	$S_{y_1}^{III}=16a^3$	$S_{y_1}^{IV}=2\pi a^3$	$S_{y_1}^{V}=-\pi a^3$
$S_{x_1}^{I}=\frac{3}{2}a^3$	$S_{x_1}^{II}=\frac{2}{3}a^3$	$S_{x_1}^{III}=4a^3$	$S_{x_1}^{IV}=a^3\cdot\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$	$S_{x_1}^{V}=-\frac{\pi}{2}a^3$
$J_{x_I}^{I}=\frac{1}{4}a^4$	$J_{x_{II}}^{II}=\frac{1}{36}a^4$	$J_{x_{III}}^{III}=\frac{4}{3}a^4$	$J_{x_{IV}}^{IV}=\frac{a^4}{72\pi}\cdot(9\pi^2-64)$	$J_{x_V}^{V}=-\frac{\pi a^4}{64}$
$J_{y_I}^{I}=\frac{9}{4}a^4$	$J_{y_{II}}^{II}=\frac{1}{36}a^4$	$J_{y_{III}}^{III}=\frac{4}{3}a^4$	$J_{y_{IV}}^{IV}=\frac{1}{8}\pi a^4$	$J_{y_V}^{V}=-\frac{\pi a^4}{64}$
$J_{x_I y_I}^{I}=0$	$J_{x_{II} y_{II}}^{II}=-\frac{1}{72}a^4$	$J_{x_{III} y_{III}}^{III}=0$	$J_{x_{IV} y_{IV}}^{IV}=0$	$J_{x_V y_V}^{V}=0$
$x_{2c_I}=-\frac{3}{2}a;\ y_{2c_I}=-\frac{a}{2}$	$x_{2c_{II}}=-\frac{1}{3}a;\ y_{2c_{II}}=+\frac{1}{3}a$	$x_{2c_{III}}=a;\ y_{2c_{III}}=0$	$x_{2c_{IV}}=a;\ y_{2c_{IV}}=\frac{a}{3\pi}(3\pi+4)$	$x_{2c_V}=y_{2c_V}=a$
$J_{x_2}^{I}=a^4$	$J_{x_2}^{II}=\frac{1}{12}a^4$	$J_{x_2}^{III}=\frac{4}{3}a^4$	$J_{x_2}^{IV}=\frac{a^4}{24}(15\pi+32)$	$J_{x_2}^{V}=-\frac{17}{64}\pi a^4$
$J_{y_2}^{I}=9a^4$	$J_{y_2}^{II}=\frac{1}{12}a^4$	$J_{y_2}^{III}=\frac{16}{3}a^4$	$J_{y_2}^{IV}=\frac{5}{8}\pi a^4$	$J_{y_2}^{V}=-\frac{17}{64}\pi a^4$
$J_{x_2 y_2}^{I}=\frac{9}{4}a^4$	$J_{x_2 y_2}^{II}=-\frac{3}{72}\cdot a^4$	$J_{x_2 y_2}^{III}=0$	$J_{x_2 y_2}^{IV}=\frac{a^4}{6}(3\pi+4)$	$J_{x_2 y_2}^{V}=-\frac{1}{4}\pi a^4$

в) Моменты инерции J_{x_2}, J_{y_2}, $J_{x_2y_2}$ всего поперечного сечения относительно центральных осей x_2 и y_2 получаются суммированием соответствующих моментов инерции фигур, его составляющих:

$$J_{x_2} = J_{x_2}^{I} + J_{x_2}^{II} + J_{x_2}^{III} + J_{x_2}^{IV} + J_{x_2}^{V} =$$

$$= a^4 + \frac{a^4}{12} + \frac{4}{3}a^4 + \frac{a^4}{24}(15\pi + 32) - \frac{17}{64}\pi a^4 = \frac{a^4}{192}\cdot\left(69\pi + 720\right);$$

$4{,}879\cdot a^4$

$$J_{y_2} = J_{y_2}^{I} + J_{y_2}^{II} + J_{y_2}^{III} + J_{y_2}^{IV} + J_{y_2}^{V} =$$

$$= 9a^4 + \frac{a^4}{12} + \frac{16}{3}a^4 + \frac{5}{8}\pi a^4 - \frac{17}{64}\pi a^4 = \frac{a^4}{192}\cdot\left(69\pi + 2768\right)$$

$15{,}55\cdot a^4$

$$J_{x_2y_2} = J_{x_2y_2}^{I} + J_{x_2y_2}^{II} + J_{x_2y_2}^{III} + J_{x_2y_2}^{IV} + J_{x_2y_2}^{V} =$$

$$= \frac{9}{4}a^4 - \frac{3}{72}a^4 + 0 + \frac{a^4}{6}(3\pi + 4) - \frac{1}{4}\pi a^4 =$$

$$= \frac{a^4}{72}\left(18\pi + 207\right). \quad = 3{,}66\cdot a^4$$

6) Угол поворота главных центральных осей поперечного сечения относительно существующих центральных осей вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} \frac{2\cdot J_{x_2 y_2}}{J_{y_2} - J_{x_2}} = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} \frac{2\cdot \frac{a^4}{72}\left(18\pi + 207\right)}{\frac{a^4}{192}\left(69\pi + 2768\right) - \frac{a^4}{192}\cdot\left(69\cdot\pi + 720\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} \frac{18\pi + 207}{384} = 17{,}23^\circ$$

На рис. 2 проводим главные центральные оси x и y (осью x назовём, например, ту из них, которая ближе к оси x_2).

7) Главные моменты инерции сечения вычисляем по формуле:

$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_{x_2} + J_{y_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_2} - J_{x_2}}{2}\right)^2 + J_{x_2 y_2}^2} =$$

$$= \frac{\frac{a^4}{192}\left(69\pi + 720\right) + \frac{a^4}{192}\left(69\pi + 2768\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{a^4}{192}\left(69\pi + 2768\right) - \frac{a^4}{192}\left(69\pi + 720\right)}{2}\right)^2 + \left[\frac{a^4}{72}\left(18\pi + 207\right)\right]^2} =$$

$$= \left(10{,}21 \pm 6{,}469\right)\cdot a^4$$

Сечение более протяжённое вдоль оси x (рис. 2), значит из двух, полученных выше значений максимальное будет соответствовать оси y:

$$J_x = J_{min} = \left(10{,}21 - 6{,}469\right)a^4 = 3{,}741\cdot a^4$$

$$J_y = J_{max} = \left(10{,}21 + 6{,}469\right)a^4 = 16{,}68\cdot a^4$$